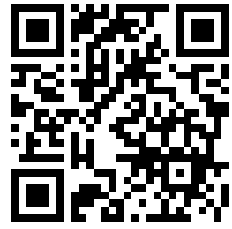
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXIV

1927

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME V.

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1927

Digitized by Google

LIBRARY
UNIVERSITY OF MIAMI
Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 gennaio 1927

A. GARBASSO, *presidente*

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Biologia matematica. — *Sulle fluttuazioni biologiche.* Nota [1] del Socio V. VOLTERRA.

1. Il carattere dei fenomeni biologici è in generale ereditario, giacchè nella maggior parte dei casi il passato influisce sullo stato presente e sulla evoluzione futura.

L'analisi che ho svolto in varie occasioni [2] sui fenomeni di carattere ereditario appartiene al campo delle equazioni integro-differenziali e a quello delle equazioni alle derivate funzionali. Ma recentemente ho trattato il problema delle fluttuazioni biologiche, col semplice sussidio delle equazioni differenziali, giungendo a stabilire delle leggi che corrispondono a fenomeni osservati in natura [3]. Mi permetto ora di notare che l'assenza di carattere ereditario in quella trattazione è dovuta all'aver fatto solo un

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1926.

(2) Cfr. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, 1913, et *Saggi scientifici*, Bologna, 1920.

(3) *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, « Mem. della R. Accademia dei Lincei », 1926.

Dopo la pubblicazione di questa Memoria ho saputo che il dott. LOTKA aveva esaminato nel volume: *Elements of physical Biology* (New York, 1925), con metodo diverso dal mio, l'integrale e il periodo delle piccole fluttuazioni nel caso di due specie. Però le leggi generali da me ottenute nel § 3 della prima parte della mia Memoria, i vari casi svolti negli altri paragrafi della prima parte, come pure tutte le altre parti della mia Memoria, nelle quali considero le applicazioni delle leggi suddette e la convivenza di n specie nella ipotesi di sistemi conservativi e dissipativi sono nuove e per la prima volta trattate.

Digitized by Google

primo esame approssimativo della questione. Volendo, per dir così, stringere più da vicino la realtà e fare un passo ulteriore, converrà ricorrere ad equazioni integro-differenziali, anche se si voglia conservare allo svolgimento il suo carattere schematico (1).

2. Nel caso di due specie conviventi, che da sole avrebbero i coefficienti di accrescimento $\varepsilon_1 > 0$ e $-\varepsilon_2 < 0$, e tali che gl'individui della seconda si nutrono di quelli della prima, nella memoria citata, vennero scritte le equazioni differenziali

$$(1) \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) \quad , \quad (2) \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)$$

ove N_1 e N_2 denotano i numeri d'individui delle due specie e γ_1 , γ_2 due costanti positive.

Per giustificare queste equazioni si può ragionare così.

Se la prima specie fosse sola, il numero dei suoi individui crescerebbe nel tempo dt di $\varepsilon_1 N_1 dt$. Ma in questo intervallo di tempo il numero di incontri degli individui delle due specie sarà proporzionale a $N_1 N_2 dt$, ed a questo stesso numero sarà proporzionale il numero d'individui della prima specie che verranno mangiati nel tempo dt. Chiamando γ_1 questo rapporto di proporzionalità, potremo dunque scrivere

$$dN_1 = \varepsilon_1 N_1 dt - \gamma_1 N_1 N_2 dt,$$

d'onde l'equazione (1).

Riguardo alla seconda specie si osserva che, se essa fosse sola, il numero dei suoi individui varierebbe nel tempo dt di $-\varepsilon_2 N_2 dt$. Siccome la seconda specie si rifornisce di nutrimento negl'incontri dei suoi individui con quelli della prima specie, così l'incremento del numero d'individui della seconda specie nel tempo dt si assume approssimativamente proporzionale al numero degli incontri, e perciò, chiamando γ_2 il coefficiente di proporzionalità, abbiamo

$$dN_2 = -\varepsilon_2 N_2 dt + \gamma_2 N_1 N_2 dt,$$

da cui segue l'equazione (2).

Ora, se per la (1) il ragionamento, per quanto schematico, non offre difficoltà, una grave obiezione può muoversi al ragionamento da cui di-

(1) Il dott. Lotka accenna, nella sua opera citata, nel caso di malattie alla possibilità di ritardi (lag) nelle azioni ed anche alla possibilità di azioni in precedenza (lead) senza farne applicazioni matematiche. Però nella sua Memoria: *Contribution to the Analysis of Malaria epidemiology. IV Incubation lag.*, la maniera come egli considera i ritardi e come imposta la questione matematica mostra che i suoi concetti e la sua trattazione sono completamente al difuori della mia analisi ereditaria e delle equazioni integro-differenziali.

Digitized by Google

scende la (2), giacchè i due casi non presentano quella simmetria che può apparire a primo aspetto.

Infatti la distruzione degl'individui della prima specie durante il tempo dt può ritenersi opera degl'individui della seconda esistenti in questo istante, ma il nutrimento che ricevono gl'individui della seconda specie durante lo stesso intervallo di tempo non è quello che produce l'incremento della specie nell'istante stesso; sarà invece il nutrimento a sua disposizione nei tempi precedenti che influirà sull'incremento della specie.

Supponiamo, in virtù delle ipotesi generali, che la percentuale degl'individui distribuiti per età si conservi inalterata col volger del tempo. Denotiamo con $\varphi(\xi)\,d\xi$ il rapporto fra gl'individui aventi l'età compresa fra ξ e $\xi + d\xi$ ed il numero totale, allora il rapporto fra il numero degl'individui aventi un'età superiore a $t - \tau$ ed il numero totale, sarà:

$$\int_{t-\tau}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi = f(t-\tau)\,.$$

Ne segue che la frazione degli $N_2(t)$ individui esistenti al tempo t che già esisteva al tempo τ, anteriore a t, sarà data da $f(t-\tau)\,N_2(t)$ e la quantità di nutrimento da essi ingerita nell'intervallo di tempo $(\tau, \tau + d\tau)$ potrà esprimersi mediante la formula

$$\gamma f(t-\tau)\,N_2(t)\,N_1(\tau)\,d\tau$$

ove γ è una costante positiva.

Tale nutrimento influirà sull'accrescimento degli individui della seconda specie al tempo t, in misura diversa secondo la grandezza dell'intervallo di tempo $t - \tau$; quindi potremo misurare questa influenza moltiplicando la precedente espressione per una funzione positiva $\varphi(t-\tau)$, onde avremo

$$\gamma\varphi(t-\tau)f(t-\tau)\,N_2(t)\,N_1(\tau)\,d\tau = F(t-\tau)\,N_2(t)\,N_1(\tau)\,d\tau\,.$$

Sommando queste quantità per tutti gl'intervalli di tempo che precedono l'istante t, otterremo

$$\int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\,N_2(t)\,N_1(\tau)\,d\tau\,.$$

Perciò alla equazione (2) dovremo sostituire l'altra

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\,N_1(\tau)\,d\tau\right).$$

Avremo dunque, anzichè la (1) e (2), le equazioni simultanee

$$\text{(I)} \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\,(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t))\,,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\,N_1(\tau)\,d\tau\right),$$

Digitized by Google

la prima delle quali è un'equazione differenziale e l'altra un'equazione integro–differenziale.

Quanto alla funzione $F(t-\tau)$ noi dovremo supporre che, quando il suo argomento cresce indefinitamente, essa divenga infinitesima di ordine tale che l'integrale nel quale comparisce sia convergente.

Ma noi potremo senz'altro supporre che essa si annulli per un certo valore T_0 del suo argomento e per tutti i valori ad esso superiori.

3. Per rendere simmetrica la trattazione matematica sostituiamo alle equazioni (I) e (II) le due altre (a cui può darsi anche significato biologico)

$$(A) \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{-\infty}^{t} F_1(t-\tau)\, N_2(\tau)\, d\tau\right),$$

$$(B) \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_{-\infty}^{t} F_2(t-\tau)\, N_1(\tau)\, d\tau\right),$$

ove γ_1 e γ_2 sono due costanti positive (γ_2 può essere anche nulla) e F_1, F_2 sono due funzioni finite, continue, positive che si annullano per valori dell'argomento eguali o superiori a $T_0 > 0$ (F_1 può essere anche nulla).

Prendiamo arbitrariamente le funzioni $N_1(t)$ e $N_2(t)$ nell'intervallo $(t_0 - T_0,\ t_0)$, ma tali che siano finite continue e positive. Noi potremo prolungarle in modo da essere finite e da soddisfare le equazioni (A) e (B) per $t_0 \leqq t < t_1$, impiegando per esempio il metodo delle approssimazioni successive. I valori delle funzioni $N_1(t)$ e $N_2(t)$ corrispondenti all'intervallo $(t_0 - T_0,\ t_0)$ si riattaccheranno con continuità per $t = t_0$ con quelli corrispondenti all'intervallo $(t_0,\ t_1)$, ma questo in generale non avverrà per le loro derivate.

4. Teorema I. - *Gl' integrali delle* (A) (B) *sono positivi per* $t_0 \leqq t < t_1$.

Infatti posto $N_1(t_0) = N_1^0$, $N_2(t_0) = N_2^0$, sarà

$$N_1(t) = N_1^0\, e^{P_1(t)} \quad , \quad N_2(t) = N_2^0\, e^{P_2(t)} \quad , \quad t_0 \leqq t < t_1 ,$$

ove

$$P_1(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(\theta) - \int_{-\infty}^{\theta} F_1(\theta-\tau)\, N_2(\tau)\, d\tau\right) d\theta ,$$

$$P_2(t) = \int_{t_0}^{t} \left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(\theta) + \int_{-\infty}^{\theta} F_2(\theta-\tau)\, N_1(\tau)\, d\tau\right) d\theta ,$$

e siccome gli esponenziali sono positivi, così N_1 e N_2 si conserveranno sempre positivi.

Teorema II. - *Per* $t_0 < t < t_1$ *avremo*

$$(3) \qquad N_1(t) < N_1^0\, e^{\varepsilon_1 (t-t_0)} < N_1^0\, e^{\varepsilon_1 (t_1 - t_0)} = \mathfrak{N}_1 (t_1 - t_0)$$

$$(3') \qquad N_2(t) < N_2^0\, e^{\frac{\gamma_2 + \Gamma_2}{\varepsilon_1} N_1^0 e^{\varepsilon_1 (t-t_0)}} < N_2^0\, e^{\frac{\gamma_2 + \Gamma_2}{\varepsilon_1} N_1^0 e^{\varepsilon_1 (t_1 - t_0)}} = \mathfrak{N}_2 (t_1 - t_0)$$

Digitized by Google

$$(4) \qquad \left|\frac{d\,N_1(t)}{dt}\right| < \mathfrak{M}_1(t_1 - t_0)\left(\varepsilon_1 + (\gamma_1 + \Gamma_1)\,\mathfrak{M}_2(t_1 - t_0)\right)$$

$$(4') \qquad \left|\frac{d\,N_2(t)}{dt}\right| < \mathfrak{M}_2(t_1 - t_0)\left(\varepsilon + (\gamma_2 + \Gamma_2)\,\mathfrak{M}_1(t_1 - t_0)\right)$$

ove

$$(5) \qquad \begin{cases} \Gamma_1 = \int_0^{T_0} F_1(\xi)\,d\xi \quad , \quad \Gamma_2 = \int_0^{T_0} F_2(\xi)\,d\xi\,. \\ \mathfrak{M}_1(t) = N_1^0\, e^{\varepsilon_1 t} \quad , \quad \mathfrak{M}_2(t) = N_2^0\, e^{\frac{\gamma_2 + \Gamma_2}{\varepsilon_1} N_1^0 e^{\varepsilon_1 t}}\,. \end{cases}$$

Infatti, in virtù del teorema precedente, sarà $P(t) < \varepsilon_1$, d'onde la (3) e quindi

$$P_2(t) < \int_{t_0}^{t} \left(\gamma_2 N_1^0\, e^{\varepsilon_1(\theta - t_0)} + e^{\varepsilon_1(\theta - t_0)} \int_{-\infty}^{\theta} F_1(\theta - \tau)\,d\tau\right) d\theta\,.$$

Ma

$$\int_{-\infty}^{\theta} F_1(\theta - \tau)\,d\tau = \int_0^{\infty} F_1(\xi)\,d\xi = \int_0^{T_0} F_1(\xi)\,d\xi = \Gamma_1\,,$$

segue dunque facilmente la (3′). Le (A) e (B) conducono poi immediatamente dalle (3) e (3′) alle (4) e (4′).

Teorema III. - *Se t tende verso t_1, $N_1(t)$ o $N_2(t)$, $\frac{dN_1}{dt}$ e $\frac{dN_2}{dt}$ tendono verso dei limiti determinati e finiti.*

A cagione delle (3) e (3′) e del teorema I i limiti superiori dei valori assoluti di N_1 e N_2 nell'intervallo (t_0, t_1) sono finiti, quindi per $t = t_1$, N_1 e N_2 non possono tendere all'∞. Se mancassero di limite per $t = t_1$ i limiti superiori dei valori assoluti di $\frac{dN_1}{dt}$ e $\frac{dN_2}{dt}$ dovrebbero essere ∞; giacchè le oscillazioni di N_1 e N_2 in intervalli $(t_1 - \alpha, t_1)$ dovrebbero mantenersi superiori ad un certo valore $\sigma > 0$, per quanto piccolo fosse α. Si avrebbe dunque una contraddizione colle formule (4) e (4′). Il teorema resta quindi dimostrato.

Teorema IV. - *Se esistono gl'integrali delle* (A) e (B) *per $t_0 < t < t_1$ potrà trovarsi $t_2 > t_1$ in modo che gl'integrali esistono per $t_0 < t < t_2$.*

Infatti gl'integrali stessi e le loro derivate tenderanno verso limiti determinati e finiti per $t = t_1$, onde operando a partire da t_1 come si è fatto a partire da t_0 potremo estendere gl'integrali ad un intervallo (t_1, t_2) ove $t_2 > t_1$ e nel punto t_1 gl'integrali stessi e le loro derivate, prima individuate negli intervalli (t_0, t_1) e (t_1, t_2), si riattaccheranno con continuità, il che dimostra il teorema.

Digitized by Google

Si può di qui ricavare, con speciali osservazioni sulle approssimazioni successive che *gl'integrali delle equazioni* (A) *e* (B) *si possono estendere per* $t_0 < t < \infty$, *restando sempre positivi.*

5. Teorema V. - *Esistono dei valori costanti di* N_1 *e* N_2 *che soddisfano le* (A) *e* (B).

Basterà infatti prendere

$$N_1 = K_1 \quad , \quad N_2 = K_2$$

tali che

$$\varepsilon_1 - K_2 \left(\gamma_1 + \int_0^{T_0} F_1(\xi)\, d\xi \right) = 0$$

$$\varepsilon_2 - K_1 \left(\gamma_2 + \int_0^{T_0} F_2(\xi)\, d\xi \right) = 0$$

e quindi

$$K_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2} \quad , \quad K_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1} .$$

Teorema VI. – *Se* α *è una quantità positiva qualunque, non potrà aversi, per tutti i valori del tempo superiori a un certo limite,*

$$N_1 > K_1 + \alpha \tag{6}$$

oppure

$$N_1 < K_1 - \alpha \tag{6'}$$

ed analogamente non potrà aversi, per tutti i valori del tempo superiori ad un certo limite

$$N_2 > K_2 + \alpha , \tag{7}$$

oppure

$$N_2 < K_2 - \alpha . \tag{7'}$$

Supponiamo che, a partire da un certo valore t_1 di t sia sempre soddisfatta la (6). Avremo allora, per la (B), se $t > t_1 + T_0$,

$$\frac{dN_2}{dt} > N_2(t)\,(\gamma_2 + \Gamma_2)\,\alpha ,$$

quindi chiamando N_2' il valore di N_2 al tempo t_1, sarà

$$N_2(t) > N_2'\, e^{\alpha(\gamma_2 + \Gamma_2)(t - t_1)}$$

cioè $N_2(t)$ crescerà indefinitamente col tempo.

Digitized by Google

Esisterà dunque un valore t_2 del tempo, tale che, per $t > t_2$,

$$N_2(t) > K_2 + \alpha$$

e quindi, per la (A), se $t > t_2 + T_0$, sarà

$$\frac{dN_1}{dt} < -N_1(t)\,\alpha(\gamma_1 + \Gamma_1)$$

da cui segue, ponendo $N_1(t_2) = N_1''$,

$$N_1(t) < N_1''\, e^{-\alpha(\gamma_1 + \Gamma_1)(t - t_2)}.$$

cioè N_1 tenderà a zero col crescere indefinito del tempo.

Esisterà dunque un valore del tempo t superiore a t_1, per il quale

$$N_1(t) < K_1 + \alpha,$$

il che è in contraddizione coll'ipotesi di partenza.

In modo analogo si dimostrano le altre parti del teorema.

Corollario. – N_1 *non potrà tendere verso un valore qualunque diverso da* K_1, *nè* N_2 *potrà tendere verso un valore qualunque diverso da* K_2.

Dunque i numeri di individui delle due specie non possono in particolare nè tendere a zero, nè tendere all'∞.

6. Teorema VII. - N_1 *non potrà tendere assintoticamente verso* K_1 *nè* N_2 *potrà tendere assintoticamente verso* K_2.

Supponiamo che N_1 tenda assintoticamente verso K_1, continuamente decrescendo a partire da un certo valore del tempo, e quindi attraversando valori più grandi di K_1. Siccome la (B) può scriversi

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(\gamma_2(N_1(t) - K_1) + \int_{-\infty}^{t} F_2(t-\tau)\,(N_1(t) - K_1)\,d\tau\right)$$

così sarà, almeno per t sufficientemente grande,

$$\frac{dN_2}{dt} > 0,$$

onde N_2, a partire da un certo valore del tempo, crescerà continuamente e, in virtù del precedente corollario, dovrà tendere verso K_2 attraversando valori più piccoli di K_2. Ma la (A) può scriversi

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\gamma_1(K_2 - N_2) + \int_{-\infty}^{t} F_1(t-\tau)(K_2 - N_2(\tau))\,d\tau\right),$$

ne segue

$$\frac{dN_1}{dt} > 0,$$

Digitized by Google

onde N_1 crescerà a partire da un certo valore del tempo, e ciò è contrario all'ipotesi di partenza. Similmente si dimostra che N_1 non può tendere verso K_1 crescendo e pure si dimostrano per N_2 le analoghe proposizioni.

COROLLARIO. - N_1 *e* N_2 *dovranno oscillare passando, col crescere indefinitamente del tempo, per infiniti massimi e minimi.*

TEOREMA VIII. - N_1 *e* N_2 *dovranno rispettivamente traversare infinite volte i valori* K_1 *e* K_2 *per valori del tempo superiori a qualunque limite assegnato.*

Infatti, se N_1 restasse, a partire da un certo istante, sempre superiore a K_1,

$$-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 + \int_{-\infty}^{t} F_2(t-\tau)\, N_1(\tau)\, d\tau$$

si manterrebbe positiva, e per conseguenza non si potrebbe annullare, quindi N_2 non avrebbe più massimi nè minimi il che è contrario al corollario precedente. Nello stesso modo si prova che N_1 non può, a partire da un certo valore del tempo, restare inferiore a K_1. Dunque N_1 deve traversare questo valore infinite volte col crescere del tempo. Similmente si prova l'analoga proposizione per N_2.

7. I precedenti teoremi estendono, anche nel caso ereditario, la prima legge delle *infinite fluttuazioni delle due specie attorno agli stati stazionarii,* senza però che resulti le periodicità [1].

In Note successive stabiliremo come debbano estendersi nello stesso caso le altre due leggi ed esamineremo la questione della periodicità.

Biologia matematica. — *Leggi sulle fluttuazioni biologiche.* Nota del Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Confrontare per le tre leggi la mia Memoria citata *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi.* Parte I^a, § 3, art. 10.

Digitized by Google

Geofisica. — *Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità.* Nota [1] del Socio C. SOMIGLIANA.

I.

Le misure di gravità alla superficie terrestre sono state finora utilizzate, per quanto concerne la determinazione delle costanti fondamentali del geoide, in base alla celebre formola di Clairaut

$$\frac{g_p - g_e}{g_e} + s = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{g_e}$$

nella quale g_p, g_e sono rispettivamente i valori della gravità al polo ed all'equatore, ω la velocità di rotazione della terra, a il semiasse maggiore dell'ellissoide di rotazione, assunto a rappresentare il geoide, ed s indica lo schiacciamento. Questa ultima quantità risulta così linearmente determinata, quando oltre ai due valori della gravità g_p, g_e ed alla velocità ω di rotazione, sia conosciuta la lunghezza del semiasse maggiore.

Si è così andata formando la convinzione che le misure di gravità non potessero portare che alla determinazione della forma dell'ellissoide terrestre, e non mai alla determinazione delle sue dimensioni assolute [2].

Mi propongo di dimostrare in questa Nota che tale convinzione non corrisponde alla realtà; e cioè che *mediante sole misure di gravità è possibile arrivare alla determinazione delle tre costanti fondamentali del geoide: l'asse maggiore a, lo schiacciamento s e la densità media k.*

A risultati analoghi si può giungere anche quando si assumano per rappresentare il geoide superfici meno semplici dell'ellissoide di rotazione. Ma per ora mi limiterò a considerare questo caso che è il più semplice ed il più interessante dal punto di vista geodetico.

Prenderò come punto di partenza la formola data dal nostro Pizzetti nei suoi *Principî della teoria meccanica della figura dei pianeti* § 22 per l'espressione della gravità sulla superficie dell'ellissoide di rotazione. Questa formola, con qualche opportuno accorgimento di calcolo, può essere ridotta alla forma seguente

$$(1) \qquad \frac{1}{c}g = A\sqrt{1 + i^2\cos^2\varphi} + \frac{B}{\sqrt{1 + i^2\cos^2\varphi}}$$

(1) Presentata nelle seduta del 7 novembre 1926.

(2) Vedi Col. G. PERRIER, *Les raisons géodésiques de l'isostasie terrestre*, « Annuaire du Bureau des Longitudes », 1926.

Digitized by Google

dove

g è il valore della gravità alla latitudine φ

c il semiasse minore dell'ellissoide

i la costante che chiamerò *eccentricità aggiunta* e cioè $i = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}$

A, B sono costanti espresse dalle formole

$$A = \frac{4}{3}\pi\gamma k - \frac{2}{3}\frac{\omega^2}{1 - (i^2 + 3)\psi(i)}$$

$$B = 2\omega^2 \frac{(i^2 + 1)\psi(i)}{1 - (i^2 + 3)\psi(i)}$$

ove γ è la costante della gravitazione e la funzione $\psi(i)$ è una trascendente regolare nell'intorno del punto $i = 0$, definita dalla relazione

$$\psi(i) = \frac{1}{i^3}(i - \text{arco tg } i) = \frac{1}{3} - \frac{i^2}{5} + \frac{i^4}{7} - \cdots$$

Dalla formola (1) abbiamo subito pei valori della gravità all'equatore ed al polo le espressioni

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{g_e}{c} = A\sqrt{1 + i^2} + \frac{B}{\sqrt{1 + i^2}} \\ \frac{g_p}{c} = A + B. \end{cases}$$

Ora da queste relazioni ricaviamo

$$(3) \qquad \frac{2\,g_e}{a} + \frac{g_p}{c} = 3\,A + B\,\frac{i^2 + 3}{i^2 + 1} = 4\,\pi\gamma k - 2\,\omega^2.$$

Questa formola è un caso speciale di una più generale stabilita dal Pizzetti nel caso dell'ellissoide a tre assi, e che ha un'importanza notevolissima perchè è la più semplice delle formole che si conoscano in tutta la teoria del campo gravitazionale, e fornisce la più diretta e rigorosa determinazione della densità media terrestre.

Indicando con b il semiasse medio la formola del Pizzetti è la seguente

$$\frac{g_a}{a} + \frac{g_b}{b} + \frac{g_c}{c} = 4\,\pi\gamma k - 2\,\omega^2$$

ove g_a, g_b, g_c sono i valori della gravità nei vertici dell'ellissoide, e fu data da lui fino dal 1894 nella Memoria: *Sull'espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico* (« Atti della R. Acc. dei Lincei », to. III, 1° sem.).

Digitized by Google

È singolare che questa formola così notevole, anche per la sua semplicità ed eleganza, sia rimasta dimenticata dai trattatisti, e nemmeno il Pizzetti ne abbia fatto notare il significato fondamentale.

Dalle formole (2), oltre al teorema del Pizzetti, possiamo ricavare subito una relazione che non è altro che il famoso teorema di Clairaut nella sua forma generale e rigorosa, poichè, come è notissimo, quella richiamata in principio è soltanto approssimata. Difatti, eliminando fra le (2) la costante A, troviamo

$$(4)\qquad \frac{g_p}{c} - \frac{g_e}{a} = B\,\frac{i^2}{i^2+1} = 2\omega^2\,\frac{i^2\,\psi(i)}{1-(i^2+3)\,\psi(i)} = 2\omega^2\,C(i).$$

È facile verificare che la funzione $C(i)$ che compare nel secondo membro è regolare e finita per $i = 0$. Noi la chiameremo la funzione di Clairaut e si trova facilmente per essa la espressione

$$C(i) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{i^{2n}}{2n+3}}{4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)\,i^{2n}}{(2n+3)(2n+5)}}.$$

È possibile così calcolarne i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze pari dell'eccentricità aggiunta, mediante le formole ricorrenti del quoziente di due serie. Si trova

$$C(i) = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3\cdot 3}{7\cdot 7}\,i^2 - \frac{4\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 7}\,i^4 + \cdots\right).$$

Abbiamo voluto richiamare il procedimento che conduce alla formola rigorosa di Clairaut, seguendo sostanzialmente il metodo del Pizzetti nei *Principî*, poichè le formole che portano alla dimostrazione del teorema, che abbiamo enunciato da principio, possono considerarsi una estensione di quella formola, e si possono stabilire con un procedimento analogo.

Il teorema di Clairaut nella sua forma (4) riguarda i valori della gravità al polo ed all'equatore; noi faremo vedere che esiste una relazione analoga più generale per due valori qualsiansi della gravità, corrispondenti cioè a due latitudini differenti, arbitrariamente scelte.

II.

Consideriamo i tre valori della gravità g_1, g_2, g_3 che corrispondono a tre latitudini differenti $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ comunque scelte. Dalla formola (1) avremo

$$(5)\qquad \frac{1}{c}\,g_h = A\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_h} + \frac{B}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_h}} \qquad h = 1, 2, 3.$$

Digitized by Google

Fra due qualunque di queste possiamo eliminare la costante A; scegliendo, ad esempio, le due ultime si trova

$$\frac{1}{c}\left(\frac{g_2}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_2}}-\frac{g_3}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_3}}\right)=B\,\frac{i^2(\cos^2\varphi_3-\cos^2\varphi_2)}{(1+i^2\cos^2\varphi_2)(1+i^2\cos^2\varphi_3)}$$

ossia

$$(6)\quad \left(\frac{g_2}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_2}}-\frac{g_3}{\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_3}}\right)\frac{(1+i^2\cos^2\varphi_2)(1+i^2\cos^2\varphi_3)}{\cos^2\varphi_3-\cos^2\varphi_2}=$$
$$=2\omega^2(1+i^2)\,c\mathrm{C}(i).$$

Siccome φ_2, φ_3 rappresentano due latitudini qualunque, *questa relazione può considerarsi come la generalizzazione di quella di Clairaut al caso di due punti qualsiasi scelti sull'ellissoide.* Naturalmente per $\varphi_2=0$ $\varphi_3=\frac{\pi}{2}$ essa si riduce a quella di Clairaut nella sua forma (4).

Ora insieme alla relazione (6) potremo considerare le altre due relazioni corrispondenti alle combinazioni g_3, g_1 e g_1, g_2. Noi porremo per brevità

$$z_h=\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi_h}\qquad h=1,2,3$$

e avremo in questi altri casi

$$(6')\quad\begin{cases}\left(\frac{g_3}{z_3}-\frac{g_1}{z_1}\right)\frac{z_3^2-z_1^2}{z_1^2z_3^2}=2\omega^2(1+i^{-2})\,c\mathrm{C}(i)\\ \left(\frac{g_1}{z_1}-\frac{g_2}{z_2}\right)\frac{z_1^2-z_2^2}{z_2^2z_1^2}=2\omega^2(1+i^{-2})\,c\mathrm{C}(i).\end{cases}$$

Ora se noi dividiamo membro a membro due di queste relazioni (6) (6') otteniamo delle relazioni dalle quali scompare la costante c, ed anche la funzione trascendente di Clairaut $\mathrm{C}(i)$. Sono cioè relazioni algebriche fra i tre valori considerati g_1, g_2, g_3 della gravità, le corrispondenti latitudini φ_1, φ_2, φ_3 e la eccentricità aggiunta i. Esse contengono soltanto dei radicali quadratici e perciò, quadrando, potranno ridursi ad equazioni di un certo grado in i^2, che risolute rispetto a questa incognita, potranno servire a determinarla. Tali relazioni, colla notazione introdotta, possono scriversi

$$(7)\quad \left(\frac{g_2}{z_2}-\frac{g_3}{z_3}\right)\frac{z_2^2-z_3^2}{z_3^2z_2^2}=\left(\frac{g_3}{z_3}-\frac{g_1}{z_1}\right)\frac{z_3^2-z_1^2}{z_1^2z_3^2}=\left(\frac{g_1}{z_1}-\frac{g_2}{z_2}\right)\frac{z_1^2-z_2^2}{z_2^2z_1^2}.$$

Possiamo quindi concludere che il problema di determinare l'eccentricità aggiunta mediante i valori della gravità in tre punti qualsiasi di latitudine nota, è un problema analiticamente determinato, e di carattere algebrico.

Digitized by Google

Quando sia conosciuta l'eccentricità aggiunta, una qualsiasi delle relazioni (6) (6') determina linearmente il semiasse minore c; ed una delle (5) la costante A e quindi la densità media k. Il problema della determinazione delle tre costanti fondamentali del campo gravitazionale può considerarsi risoluto.

Non è difficile vedere che le formole (7) hanno origine da una relazione unica, osservando che la coesistenza delle tre relazioni (5) lineari nelle costanti A, B, porta alla condizione

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} g_1 & \zeta_1 & \frac{1}{\tilde{\zeta}_1} \\ g_2 & \zeta_2 & \frac{1}{\tilde{\zeta}_2} \\ g_3 & \zeta_3 & \frac{1}{\tilde{\zeta}_3} \end{vmatrix} = 0$$

cioè alla equazione

$$(9) \qquad \frac{g_2\zeta_3 - g_3\zeta_2}{\zeta_1} + \frac{g_3\zeta_1 - g_1\zeta_3}{\zeta_2} + \frac{g_1\tilde{\zeta}_2 - g_2\tilde{\zeta}_1}{\zeta_3} = 0$$

che può essere scritta anche nella forma seguente

$$g_1(\cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_3)\sqrt{1 + i^2\cos^2\varphi_1} + g_2(\cos^2\varphi_3 - \cos^2\varphi_1)\sqrt{1 + i^2\cos^2\varphi_2} +$$
$$+ g_3(\cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2)\sqrt{1 + i^2\cos^2\varphi_3} = 0.$$

Se supponiamo $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ delle tre differenze $\cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_3$, $\cos^2\varphi_3 - \cos^2\varphi_1$, $\cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2$ sono positive la prima e la terza, negativa la seconda. Introducendo inoltre l'eccentricità vera $e^2 = a^2 - c^2 : a^2$, l'equazione precedente si può più opportunamente scrivere

$$g_1(\cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_3)\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi_1} + g_3(\cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2)\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi_3}$$
$$= g_2(\cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_3)\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi_2}.$$

Questa relazione può essere ridotta razionale e troviamo così per determinare l'eccentricità un'equazione della forma

$$\alpha e^4 + \beta e^2 + \gamma = 0$$

ove α, β, γ dipendono dai tre valori di g e dalle corrispondenti latitudini.

Possiamo dunque concludere: *Fra tre valori qualunque della gravità sulla superficie dell'ellissoide di rotazione esiste una relazione lineare omogenea.*

Digitized by Google

Questa stessa relazione dà luogo ad un'equazione biquadratica, che determina l'eccentricità in funzione di tre valori qualsiansi della gravità e delle loro corrispondenti latitudini.

Il problema della determinazione dell'eccentricità, e quindi delle rimanenti costanti del geoide mediante tre valori della gravità si riduce così alla risoluzione di un'equazione di 2° grado.

Dimostrerò in altra occasione come mediante questa equazione sia effettivamente possibile risolvere la quistione della quale ci siamo occupati.

Idromeccanica. — *Una notevole eccezione del teorema di Kutta–Joukowski.* Nota [1] del Corrisp. U. Cisotti.

Il teorema di Kutta-Joukowski può enunciarsi così: quando una corrente piana, irrotazionale di densità costante ρ, di velocità assintotica di valore c, investe un profilo rigido in presenza di una circolazione C, la risultante delle pressioni dinamiche, sopportate dal profilo, è normale alla direzione assintotica della corrente, di valore $\rho c |C|$ e di verso coincidente con quello che si ottiene facendo ruotare di 90°, nel senso opposto della circolazione, la direzione assintotica della corrente [2].

Mi propongo, nella presente Nota, di mostrare una soluzione che corrisponde al caso in cui il profilo è una lamina rettilinea, inclinata di un angolo β (non nullo) sulla direzione assintotica della corrente. La risultante delle pressioni dinamiche è normale alla lamina (e non alla direzione assintotica della corrente, come vorrebbe il teorema di Kutta-Joukowski), di valore $\rho c |C| \cos\beta$ (e non $\rho c |C|$); il verso si ottiene immaginando di fare ruotare la lamina (orientata conformemente all'angolo β) di un angolo di 90° in senso opposto alla circolazione. Il momento delle stesse pressioni, rispetto al centro della lamina, mantiene l'espressione che misi già in rilievo, in assenza di circolazione [3], il che significa che la circolazione non ha alcuna influenza sul predetto momento.

Solamente per $\beta = 0$ anche per il profilo laminare vale il teorema di Kutta–Joukowski.

Il caso che presento mi sembra notevole, ammesso che la forma laminare costituisca la più semplice schematizzazione di un aeroplano.

(1) Presentata nella seduta del 21 novembre 1926.

(2) Joukowski, *Aerodynamique* [Paris, Gauthier-Villars, 1916; tradotto dal russo da Drzewieski, cap. VI].

(3) *Sopra la traslazione di un solido in un liquido indefinito*, [« Ann. di mat. pura ed appl. », t. XIX (1912), pp, 83-106], cfr. pure la mia *Idromeccanica piana*, parte prima [Milano, 1921, cap. IV].

Digitized by Google

1. *Richiami sulla corrente traslatoria* [1]. — Sia β l'inclinazione della lamina sulla direzione assintotica della corrente (fig. 1); i punti che ho denominato [2] *prora* e *poppa* e che in figura sono indicati colle lettere O e O', sono equidistanti dal centro della lamina e la distanza comune è $l|\cos\beta|$,

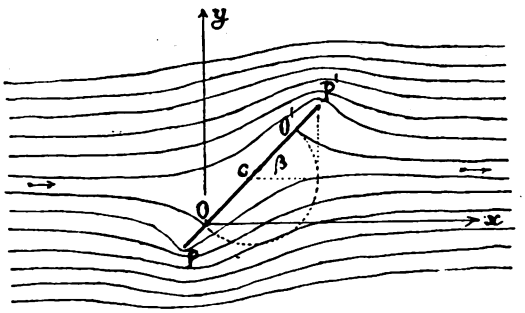


Fig. 1.

se $2l$ designa la lunghezza della lamina [3] e quindi si ottengono colla costruzione chiaramente indicata in figura.

Se si pone

$$\zeta = le^{i\beta}\left\{\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)\right\}, \tag{1}$$

si ottiene la rappresentazione conforme al piano $\zeta = x + iy$ (gli assi cartesiani di riferimento sono ovviamente indicati in figura), che si suppone

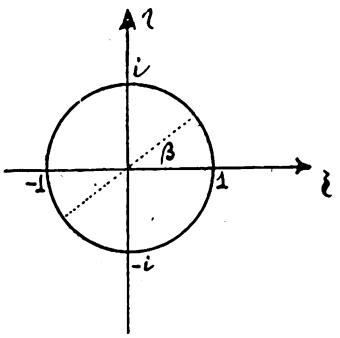


Fig. 2.

tagliato lungo il segmento PP', e il piano $\zeta = \xi + i\eta$ forato circolarmente con centro in $\zeta = 0$ e raggio unitario (fig. 2). I punti dei due bordi del

(1) Cfr. loc. ultimo cit., p. 119.
(2) Loc. cit., p. 111.
(3) Loc. cit., p. 121.

Digitized by Google

taglio del piano ζ hanno per corrispondenti i punti del contorno $|\zeta| = 1$ e precisamente: al punto $\zeta = e^{i\beta}$ corrisponde l'estremo P′ e al punto $\zeta = e^{i(\beta+\pi)}$ l'altro estremo P; alla semicirconferenza $\zeta = e^{i\sigma}$, $\beta \leq \sigma \leq \beta + \pi$ corrisponde il bordo del taglio rivolto a monte e all'altra semicirconferenza il bordo rivolto a valle.

La prora O ($\zeta = 0$) e la poppa ($\zeta = -1$) hanno per corrispondenti i punti $\zeta = -1$, $\zeta = 1$.

Con referenza al predetto piano forato ho già stabilito [1] la seguente formula:

$$w = c\,\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - e^{2i\beta}}, \tag{2}$$

che, unitamente alla (1), definisce, in forma complessa, la velocità che spetta, in ogni posto, alla corrente investitrice della lamina, nella ipotesi che il moto sia ovunque continuo e regolare (eccezion fatta negli estremi P e P′ ove, per note ragioni [2], diviene infinita); c designa il valore della velocità assintotica.

2. *Corrente circolatoria.* — È noto che una corrente circolatoria, di circolazione C, attorno al cerchio $|\zeta| = 1$ nel piano ζ ammette il potenziale cinetico

$$f_0 = \frac{C}{2\pi i}\log\zeta . \tag{3}$$

Se si considera f_0 funzione di ζ per mezzo della (1) si ha una corrente nel piano della lamina, circolatoria attorno alla lamina stessa e della medesima circolazione [3]. In quanto alla velocità che spetta in un punto generico, nell'accennato moto circolatorio, si ha da (3), per la (1), con referenza al piano forato ζ:

$$w_0 = \frac{df_0}{d\zeta} = \frac{df_0}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{d\zeta} = \frac{1}{\frac{d\zeta}{d\zeta}}\cdot\frac{df_0}{d\zeta} = \frac{C}{i\pi l e^{i\beta}\left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)} . \tag{4}$$

Questa relazione, unita alla (1), definisce la velocità del moto circolatorio attorno alla lamina. Come si vede il moto diviene evanescente quanto più ci si discosta dalla lamina. In particolare, nei punti del contorno, ove è $\zeta = e^{i\sigma}$, si ottengono, dalla (1) e dalla (4), le relazioni:

$$\begin{cases} \zeta = l e^{i\beta}\{\cos\beta + \cos(\sigma - \beta)\}, \\ w_0 = \dfrac{-C}{2\pi l e^{i\beta}\operatorname{sen}(\sigma - \beta)} . \end{cases} \tag{5}$$

(1) Loc. cit., p. 122.
(2) Loc. cit., p. 118.
(3) Si rammenti che le trasformazioni conformi conservano le circolazioni.

Digitized by Google

Queste definiscono il comportamento della velocità nei punti della lamina. Essa diviene infinita solamente negli estremi della lamina: P ($\sigma = \beta + \pi$) e P′ ($\sigma = \beta$).

Se $C > O$, il filetto che lambisce la lamina circola nel modo indicato nella fig. 3; se $C < O$ nel senso opposto.

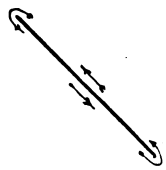


Fig. 3.

3. *Corrente traslo-circolatoria.* — Si consideri ora il moto composto della corrente traslatoria, le cui velocità sono definite dalla (2), e della corrente circolatoria le cui velocità sono determinate dalla (4), cioè il moto traslo-circolatorio le cui velocità sono definite dalla seguente relazione:

$$w_1 = w + w_0 = c\,\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - e^{2i\beta}} + \frac{C}{i\pi l e^{i\beta}\left(\dfrac{\zeta}{e^{i\beta}} - \dfrac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)}, \tag{6}$$

s'intende unitamente alla (1).

Nei punti della lamina si ha:

$$w_1 = \left(c\,\operatorname{sen}\sigma - \frac{C}{2\pi l}\right)\frac{e^{-i\beta}}{\operatorname{sen}(\sigma - \beta)}, \tag{7}$$

accanto alla quale va tenuta presente la prima della (5).

Il quadrato del valore della velocità risulta quindi:

$$V_1^2 = \left(c\,\operatorname{sen}\sigma - \frac{C}{2\pi l}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\sigma - \beta)}. \tag{8}$$

Facendo variare σ da β a $\beta + \pi$ si ha la distribuzione della velocità delle particelle fluide che scorrono sulla lamina da P′ fino a P dalla banda rivolta a monte della corrente, per σ variabile da β a $\beta - \pi$ si ottengono le velocità delle particelle che lambiscono la lamina da P′ a P dalla banda rivolta a valle. Risulta dalla prima delle (5) che ζ non muta cambiando σ in $2\beta - \sigma$, ciò significa che a questa coppia di parametri corrispondono due punti della lamina, geometricamente coincidenti, ma appartenenti il primo (se $\beta < \sigma < \beta + \pi$) alla faccia rivolta a monte e l'altro alla faccia rivolta a valle. Chiamiamo V_2 il valore della velocità in quest'ultimo punto; il suo quadrato si ricava dalla (8) cambiando σ in $2\beta - \sigma$, ottenendo:

$$V_2^2 = \left\{c\,\operatorname{sen}(2\beta - \sigma) - \frac{C}{2\pi l}\right\}^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\sigma - \beta)};$$

Digitized by Google

per cui, per sottrazione dalla (8):

$$V_1^2 - V_2^2 = \left\{ c^2 [\operatorname{sen}\sigma + \operatorname{sen}(2\beta - \sigma)] - \frac{C c}{\pi l} \right\} \frac{\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen}(2\beta - \sigma)}{\operatorname{sen}^2(\sigma - \beta)},$$

ma,

$$\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen}(2\beta - \sigma) = 2\cos\beta \cdot \operatorname{sen}(\sigma - \beta),$$
$$\operatorname{sen}\sigma + \operatorname{sen}(2\beta - \sigma) + 2\operatorname{sen}\beta \cdot \cos(\sigma - \beta),$$

per cui:

$$(9) \qquad V_1^2 - V_2^2 = 2c^2 \operatorname{sen} 2\beta \cdot \cot(\sigma - \beta) - \frac{2c\,C\cos\beta}{\pi l \operatorname{sen}(\sigma - \beta)}.$$

Chiamando $d\gamma$ un generico elemento di lamina, il lato rivolto a monte subisce una pressione dinamica normale alla lamina ed eguale a [1] $-\frac{1}{2}\rho V_1^2 d\gamma$ il lato rivolto a valle la pressione $-\frac{1}{2}\rho V_2^2 d\gamma$ e quindi

$$(10) \qquad -\frac{1}{2}\rho (V_1^2 - V_2^2)\, d\gamma$$

è l'eccesso della pressione dinamica sopportata dall'elemento $d\gamma$ sulla faccia rivolta a monte rispetto alla pressione dinamica sopportata dallo stesso elemento sull'altra faccia.

Dalla prima delle (5) scende:

$$d\gamma = |d\zeta| = l \operatorname{sen}(\sigma - \beta) \cdot |d\sigma| \quad , \quad (\beta \leq \sigma \leq \beta + \pi),$$

anzi, se si conviene di far variare σ da $\beta + \pi$ fino a β (il che equivale a percorrere la lamina dal lato a monte da P fino a P′) si ha:

$$(11) \qquad d\gamma = -l \operatorname{sen}(\sigma - \beta)\, d\sigma.$$

Per questa e per la (9), l'espressione (10) della pressione dinamica elementare diviene:

$$(12) \qquad \rho \left\{ l c^2 \operatorname{sen} 2\beta \cos(\sigma - \beta) - \frac{c\,C}{\pi} \cos\beta \right\} d\sigma.$$

La risultante di tali azioni si ottiene integrando la precedente tra $\beta + \pi$ e β, e risulta:

$$(13) \qquad \rho c C \cdot \cos\beta.$$

Il momento delle (11), rispetto al centro della lamina, si ottiene moltiplicando la (11) per la distanza di $d\gamma$ dal centro stesso (che, per la prima

(1) Loc. cit., p. 123; si rilevi che ivi è assunto $\rho = 1$.

Digitized by Google

delle (5) è definita, con referenza al piano forato ζ, da $l \cos(\sigma - \beta))$ e integrando tra $\beta + \pi$ e β, cioè per la (11), da

$$(14) \quad \rho l \int_{\beta}^{\beta+\pi} \left\{ l c^2 \operatorname{sen} 2\beta \cos(\sigma - \beta) - \frac{c\,C}{\pi} \cos\beta \right\} \cos(\sigma - \beta)\, d\sigma =$$

$$= \frac{\pi}{2} \rho\, l^2 c^2 \operatorname{sen} 2\beta .$$

Risulta che il momento delle pressioni dinamiche è indipendente dalla circolazione e coincide col risultato che avevo già stabilito altra volta [1].

Concludendo: l'effetto dinamico complessivo della circolazione si manifesta in un'unica forza normale alla lamina e applicata al suo centro, di intensità $\rho c | C | \cos\beta$ e il cui verso si ottiene facendo una rotazione di 90°, in senso inverso a quello della circolazione, alla direzione $P \rightarrowtail P'$ della lamina.

Solamente per $\beta = 0$ vale ancora il teorema di Kutta-Joukowski.

Si rilevi che quando la corrente investe in pieno la lamina $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$ le azioni dinamiche (13) e (14) sono identicamente nulle.

Fisica. — *L'effetto Volta e il funzionamento della pila.* Nota del Socio M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Teoria elettronica della pila.* Nota del Socio M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sui cianuri ferroso-ferrici.* Nota del Socio L. CAMBI e ADA CLERICI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Loc. cit., p. 125.

Digitized by Google

Petrografia. — *Le rocce a corindone della Val Sessera (Prealpi Biellesi).* Nota [1] del Socio F. MILLOSEVICH.

La prima notizia della esistenza di rocce a corindone nel Biellese è data da Lelièvre [2] e la prima analisi di questo corindone si deve a Vauquelin [3]. Secondo Lelièvre, l'ing. Muthuon nel 1812 scoprì filoni di tali rocce a Mozzo e a Etenengo (forse Pettinengo). Barelli [4] rettificando i nomi e le località, descrive i due giacimenti del Biellese, Monte Aragna nel territorio di Mosso S. Maria e Monte Foggia nel territorio di Trivero, riportando l'analisi di Vauquelin e riferendole al primo dei due; Rammelsberg [5] pubblica un'analisi di feldspato contenente corindone di Pettinengo eseguita da Rocholl nel suo laboratorio. Jervis [6] ripete semplicemente le indicazioni di Barelli; Cossa [7] pubblica uno studio dei minerali di Monte Foggia con analisi del feldspato e del corindone, mentre Gonnard [8] descrive la forma dei cristalli di questo minerale e dà particolari sulla località e le dimensioni del giacimento e sulla sua importanza industriale; Lacroix [9], sull'esame dei campioni del Museo di Parigi e con la scorta delle analisi di Cossa, identifica la roccia corindonifera di Mosso S. Maria con la plumasite di Spanish Peak in California. Infine Franchi [10] accenna a questi e ad altri giacimenti di corindone della regione.

Nel 1917 e nel 1918 ebbi occasione di accedere ripetutamente al principale dei filoni di roccia a corindone del Biellese, quello di Monte Foggia e ad altri minori e di raccogliervi numerosi campioni, non solo delle rocce corindonifere, ma anche di quelle incassanti, che costituiscono il massiccio cristallino di quella parte così interessante dei monti Biellesi; ne eseguii

(1) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1927.

(2) *Mémoire sur un gisement de corindon*, « Journal des Mines », 1812, p. 127.

(3) « Journ. de Phys. et de Chemie », *74*, 1812, p. 463.

(4) *Statistica Mineralogica* ecc., 1835, pp. 119-21.

(5) *Mineralchemie*, II, 1875, p. 575.

(6) *I tesori sotterranei* ecc., I, pp. 150-51.

(7) *Sul feldspato corindonifero del Biellese*, « Atti R. Acc. Lincei, Transunti » (Ser. 3), *3*, 1879, p. 229; *Ricerche chimiche e microscopiche su rocce e minerali d'Italia*, Torino, 1881, p. 65.

(8) *Sur le corindon de l'arrondissement de Biella (Italie)*, « Bull. Soc. franc. de minéralogie », *20*, 1897, p. 177.

(9) *A propos de la plumasite, roche à corindon*, « Bull. Soc. Franc. de minéralogie », *26*, 1903, p. 147.

(10) *Nuovi giacimenti di materiali refrattari e di corindone in Valle Sesia*, Miniera italiana, *2*, 1918, p. 241.

Digitized by Google

poi, a varie riprese, come me lo consentirono altri studi e altre occupazioni, uno studio che è l'oggetto della presente nota.

Il giacimento più importante è quello di Monte Foggia nella valle del torrente Sessera, affluente della Sesia, e giace nel territorio del comune di Trivero. La Cima di Foggia si eleva a 1538 m. di altitudine sulla sinistra del Sessera e il principale filone di roccia a corindone trovasi nel fianco meridionale di questo gruppo montuoso a circa 900 m. di altitudine, quasi immediatamente sopra il ponte di Babbiera. La valle quivi è ancora alpestre e ristretta e alla località si accede dal paese di Trivero per il passo o bocchetta di Stavello (m. 1206).

La roccia che costituisce presso il ponte di Babbiera il fondo e i fianchi immediatamente adiacenti della valle Sessera è un *gabbro anfibolico.*

Macroscopicamente è roccia di un tono di colore verde grigio, regolarmente granulare, a grana minuta, con elementi femici ed elementi salici presso a poco in uguale proporzione e di uguali dimensioni.

Fra gli elementi femici predomina l'anfibolo di due qualità: *orneblenda* in individui prismatici verde bruna con forte pleocroismo: α verde giallastro chiaro, β bruno giallastro cupo, γ verde giallastro cupo, con schema di assorbimento $\beta \geqq \gamma > \alpha$; e *anfibolo fibroso* con caratteri di *actinolite*; birifrazione più energica che non l'orneblenda, con pleocroismo: α quasi incoloro, β giallo chiaro, γ verde azzurrognolo. Si osservano piccoli individui fibrosi riuniti parallelamente o subparallelamente in fascetti, che occupano generalmente larghe zone periferiche delle sezioni di orneblenda comune, con orientamento regolare rispetto a queste: quasi sicuramente si può ritenere di origine secondaria e derivante da un pirosseno monoclino, di cui è dato osservare qualche resto in accrescimento parallelo con l'orneblenda; questa varietà di anfibolo fibroso mostra in qualche sezione una cloritizzazione assai avanzata.

Molto rari in questa roccia sono i *pirosseni trimetrici* che invece predominano nella vicina massa noritica e che descriverò con questa.

Il *plagioclasio* è *labradorite* tipica con estensione massima nella zona simmetrica di 32-34° e valori della differenza Δ negli scarsi geminati albite-Karlsbad sui 18°. Si presenta in granuli senza contorni cristallini ben distinti, qualche volta con evidenti fenomeni di cataclasi, come fratture, curvature, irregolarità nelle lamelle di geminazione albitica, estinzioni ondulose, ecc. segni tutti di dinamometamorfismo subito dalla roccia.

Minerali accessorî di alterazione secondaria sono: *clorite* in talune sezioni molto abbondante, *epidoto*; altri accessori sono: *apatite, zircone, ilmenite.*

La composizione chimica è la seguente:

Digitized by Google

SiO_2	43.80
TiO_2	0.27
Al_2O_3	24.60
Fe_2O_3	2.38
FeO	5.06
MgO	8.21
CaO	11.81
Na_2O	1.80
K_2O	0.95
H_2O —	0.16
H_2O +	1.19
	100.23

Per la sua costituzione chimica, sopratutto per la sua basicità, la roccia non può considerarsi una diorite, ma va riferita alla famiglia dei gabbri e più precisamente ai gabbri anfibolici.

Nella stessa zona basica d'Ivrea si riscontra una costituzione chimica e mineralogica non molto dissimile nella roccia con orneblenda bruna di Pavone (Ivrea) [1], della quale riporto l'analisi:

SiO_2	39.84
TiO_2	0.08
Al_2O_3	19.71
Fe_2O_3	7.73
FeO	8.89
MgO	7.33
CaO	13.52
Na_2O	1.59
K_2O	0.53
H_2O	0.86
	100.08

Salendo dal Ponte di Babbiera sulle pendici del Monte Foggia verso i filoni a corindone, la natura delle masse rocciose cambia anche macroscopicamente, perchè esse diventano più scure e più ricche di elementi

(1) Van Horn., *Petrographische Untersuchungen über die noritischen Gesteine der Umgegend von Ivrea in Oberitalien* (analisi di Dittrich). Tsch. M. M. 17, 1897, 591.

Digitized by Google

femici decisamente neri; si passa così a una vera *norite*, la quale costituisce la massa che racchiude i filoni stessi. In questa *norite* l'elemento femico è quasi esclusivamente un *pirosseno trimetrico* (*iperstene*), in cristalli prismatici idiomorfi, caratterizzati dalle comuni inclusioni lamellari e da un pleocroismo: α rossiccio più o meno intenso, β giallo chiaro, γ verde cenerino. Molto raro il *diallagio* e più rara ancora un po' d'*orneblenda* con questo associata.

Il *plagioclasio* in questa roccia non è di facile determinazione, perchè i fenomeni di dinamometamorfismo, già evidenti nella precedente, qui sono estremamente accentuati.

Le lamelle di geminazione sono curve, spesso interrotte, sfrangiate; costanti le estinzioni ondulose, mentre invece non si nota una granulazione clastica del feldspato.

Frequenti sono i geminati doppi albite-periclino; mancano invece quelli albite-Karlsbad. Per i massimi di estinzione nella zona simmetrica verso i 45° si può pensare a una miscela molto basica (bitownite).

Molto abbondanti gli ossidi di ferro, fra i quali predomina l'ilmenite, come è rivelato dal quantitativo di TiO_2 che risulta dall'analisi:

SiO_2	50.56
TiO_2	0.74
Al_2O_3	18.95
Fe_2O_3	1.25
FeO	9.90
MnO	tr.
CaO	6.67
MgO	6.82
Na_2O	3.79
K_2O	0.90
H_2O —	0.12
H_2O +	0.51
	100.21

Si può utilmente raffrontare la composizione chimica e mineralogica di questa roccia con la norite fra Chiaverano e Monsino presso Ivrea descritta da van Horn [1] e analizzata da Dittrich:

(1) Loc. cit.

Digitized by Google

SiO_2	49.95
TiO_2	0.69
Al_2O_3	19.17
Fe_2O_3	4.72
FeO	6.71
MgO	5.03
CaO	9.61
Na_2O	3.13
K_2O	0.74
p. arrov.	0.09
	99.84

Per differenziazione ultramelanocratica del magma noritico, cioè con la totale scomparsa dell'elemento salico si giunge ad una *pirossenite* (*websterite*) che forma nella stessa Val Sessera dei banchi non molto estesi, nè potenti. Macroscopicamente questa roccia presenta color bruno scuro, quasi nero per prevalenza di un pirosseno di tipo iperstenico.

I suoi costituenti essenziali sono pirosseno trimetrico e pirosseno monoclino, questo subordinato. Il pirosseno trimetrico è *iperstene* schietto, cioè ricco in ferro, con pleocroismo: α rossiccio, β giallo chiaro, γ verde grigiastro. Il pirosseno monoclino è *diallagio* di color verde, quasi incoloro in sezione sottile, con le tracce di piani di sfaldatura e di piani di separazione caratteristiche e con le caratteristiche inclusioni, frequenti anche nell'iperstene, con il quale è spesso associato.

Più rara in questa websterite è un'*orneblenda* bruna con forte pleocroismo: α verde oliva chiaro, β bruno scuro, γ bruno giallastro e schema di assorbimento $\beta > \gamma > \alpha$, in estese plaghe interstiziali fra i pirosseni.

Cristalli isotropi di color verde scuro sono da riferirsi a uno *spinello*.

Entro il massiccio noritico–gabbrico descritto si presentano le rocce a corindone, con un complesso di filoncelli [1] ad andamento quasi parallelo e poco discosti l'un dall'altro; il maggiore è stato oggetto di escavazione. Questo ha direzione approssimativamente NE-SO, inclinazione che di pochi gradi si discosta dalla verticale verso NO, larghezza media fra il metro e il metro e mezzo, e si può eseguire per più di un centinaio di metri di profonda trincea e per più del doppio di affioramento ancora inesplorato. Dopo l'Alpe Aines, verso NE è interrotto da un valloncello e non si ritrova dall'altro lato.

(1) Adopero la parola filone nel comune significato; ma non di rocce filoniane si tratta in questo caso, bensì di schizoliti leucocratiche delle rocce intrusive descritte.

Digitized by Google

La roccia del filone principale che da Lacroix [1] fu opportunamente paragonata alla *plumasite* di Lawson [2] risulta di una massa feldspatica bianca finamente granulare, entro la quale sono irregolarmente disseminati cristalli e noduli di *corindone armofane* di color bigio chiaro o. bigio verdastro, di dimensioni variabilissime, dalle microscopiche a quelle visibili ad occhio nudo; e queste, che comunemente sono quelle di un pisello o di una noce, possono non di rado raggiungere proporzioni notevoli. Ho raccolto un nocciolo di cm. 15 di diametro e del peso di 2250 gr., ma sono state rinvenute anche masse di peso superiore ai 5 Kg.

Nella maggior parte dei casi i noduli di corindone sono semplicemente limitati da qualche piano di scorrimento, ma Gonnard [3] descrisse cristalli di 15-20 mm. secondo l'asse ternario, con abito spesso pseudottaedrico e con le forme {100}, {111}, {101}, {113}.

La massa feldspatica fresca è un fino aggregato granulare a mosaico di cristalli per la massima parte non geminati, fra i quali sono racchiusi rari individui di dimensioni un po' maggiori con lamelle di geminazione albitica. I granuli feldspatici hanno un indice di rifrazione medio uguale o di poco superiore a quello del comune balsamo (circa 1.54); ciò porta a concludere per un termine *oligoclasio-albite*.

La determinazione è stata confermata dal Dr. Onorato con quello dei metodi fondati sull'impiego del tavolino universale di Fedorow-Nikitin, che, in casi come questo, in cui non si hanno direzioni cristallografiche di riferimento, riesce più comodamente ed utilmente applicabile; cioè col metodo dell'estinzione caratteristica. Dai risultati:

Carattere della doppia rifrazione: +

$$n_x = n_\gamma \quad ; \quad n_y \,||\, A_4 = n_\alpha \quad ; \quad n_z = n_\beta$$

$$2V = 86°$$

si calcola una percentuale di anortite del 15 %.

I pochi cristalli con lamelle di geminazione hanno in genere angoli di estinzione simmetrica piccoli, ma non ho potuto fare su di essi esatte determinazioni, anche perchè si presentano piuttosto alterati.

Nella massa feldspatica oltre ai cristalli di corindone si trovano costantemente, benchè in proporzione accessoria, lamelle di una mica chiara (*muscovite*). Qua e là ho osservato cristalli di *granato* bruno-rossastro e masserelle, talora di considerevoli dimensioni, di *epidoto*. La separazione dei granuli feldspatici delle lamelle di mica non è agevole, mentre invece è agevole la separazione dal corindone: di conseguenza l'omogeneità e la

(1) Loc. cit.

(2) Lawson, A. C., *Plumasite*, «Bull. Dept. Geol. University of California», 1903, 3, p. 219.

(3) Loc. cit.

Digitized by Google

purezza del materiale che ho analizzato coi risultati che seguono, non possono ritenersi perfette; anche perchè, verosimilmente, la composizione di tutta la massa feldspatica non può essere assolutamente uniforme:

SiO_2	65.26
Al_2O_3	22.40
Fe_2O_3	tr.
CaO	2.61
Na_2O	8.58
K_2O	0.75
H_2O	0.30
	99.90 p. sp. a 17° = 2.623

Pongo a confronto con questa mia le analisi di Rocholl [1] sul feldspato di Pettinengo I, di Cossa su quello di Monte Foggia II, e di Lawson su quello della plumasite californiana III.

	I	II	III
SiO_2	62.52	61.36	62.76
Al_2O_3	22.40	22.97	21.95
CaO	2.29	5.38	2.68
Na_2O	10.78	8.08	10.31
K_2O	1.19	—	1.08
p. arr.	—	1.72	0.29
	99.18	96.51	99.07
p. sp.	—	2.628	2.633

La roccia dei filoni bianchi del Monte Foggia è dunque una plagioclasite a corindone, molto simile alla *plumasite* di Lawson, salvo la minore uniformità e regolarità di distribuzione del corindone e la presenza di muscovite, invece di margarite: per essa si può adottare il medesimo nome.

Oltre al filone principale di plumasite altri ve ne sono in vicinanza della stessa roccia, ma di dimensioni minori. Uno si attraversa salendo dal Ponte di Babbiera verso il filone più grande; altri formano come un com-

(1) Questa indicazione di Pettinengo, evidentemente erronea, può essere rettificata con Monte Foggia o con Cima della Ragna (Mosso S. Maria), altra località del Biellese, dove si trova una roccia consimile. Nelle collezioni e nella letteratura mineralogica è più comune questa seconda indicazione.

Digitized by Google

plesso di banchi nelle immediate vicinanze di questo, alternando con altri banchi di una roccia pure corindonifera che merita una attenzione speciale.

Trattasi di una roccia a grana piuttosto grossa e ad elementi grigio chiari e verde oscuro quasi neri: corindone, anfibolo e feldspato, quest'ultimo in quantità subordinata; e inoltre qua e là granuli di pirite.

Al microscopio l'*anfibolo* prevalente fra gli elementi colorati si rivela di due sorta: un'*orneblenda* bruna in grandi individui coi seguenti caratteri di pleocroismo: α giallo chiaro, β bruno scuro, γ bruno chiaro; assorbimento $\beta > \gamma > \alpha$; e un *anfibolo* di carattere *actinolitico* con pleocroismo sui toni giallo chiaro e verde azzurrognolo in prismi tozzi o in fibre allungate in fascetti subparalleli. Quest'ultimo dimostra origine secondaria, sia dall'orneblenda bruna, delle cui sezioni occupa plaghe interne e periferiche, sia da un pirosseno monoclino di cui rimane visibile qualche sezione inalterata o poco alterata. Tale *pirosseno monoclino* verdognolo o verde giallognolo, e appena pleocroico, ha carattere non schiettamente diallagico, ma fra l'augitico e il diallagico.

Il *feldspato*, in quantità subordinata al corindone, non è di facile determinazione, perchè prevale in esso una granulazione clastica e, quando si presenta in sezioni estese, queste non hanno una lamellazione regolare di geminazione, ma lamelle interrotte, sfrangiate o terminate a punta, con estinzioni ondulose; fenomeni tutti che rivelano effetti di dinamometamorfismo, il quale ha agito anche sugli altri elementi della roccia, sul pirosseno originario, come si è visto, meno intensamente sull'anfibolo e anche sul corindone. Per l'indice medio di rifrazione e per i massimi di estinzione simmetrica, dove si sono potuti osservare, si può attribuire il feldspato alla serie della *labradorite*.

Il *corindone* è abbondante e in masse cristalline grandi, che occupano talora una parte assai estesa della sezione; generalmente ha contorno idiomorfo e limitato da piani di scorrimento. Grigio verdastro a luce riflessa è, per trasparenza, incolore. Lo caratterizzano una geminazione polisintetica, dovuta alle pressioni subite dalla roccia, che si manifesta con intreccio di lamelle geminate secondo i piani del romboedro di scorrimento (100), una rifrazione più elevata di quella del feldspato e una birifrazione più energica, quasi uguale a quella del quarzo. Per lo più fresco, in qualche sezione appare con un principio di alterazione in una mica alcalina, che occupa regolari fessure nell'interno della massa del cristallo.

Accessorio costante e abbondante è la *clorite*, che riveste, non solo, e si interpone nelle sezioni di anfibolo, ma penetra qua e là in tutta la roccia, formando vene e suture negli spazi fra i diversi minerali componenti. Scarsi gli ossidi neri di ferro (forse *ilmenite*); appare invece frequente, ma irregolarmente distribuita a formare qua e là piccoli aggregati granulari la *pirite*.

Digitized by Google

Un campione medio scelto molto accuratamente, con eliminazione, naturalmente, di questa pirite, mi ha rivelato all'analisi la seguente costituzione chimica.

SiO_2	43.18
TiO_2	0.51
Al_2O_3	28.40
Fe_2O_3	0.98
FeO	4.15
MgO	4.07
CaO	13.82
Na_2O	3.07
K_2O	0.80
H_2O —	0.27
H_2O +	1.21
	100.46

Si può concludere che la roccia in questione rappresenta un'associazione di minerali non ancora conosciuta come tipo roccioso e propongo per essa il nome di s e s s e r a l i t e ad indicare un gabbro anfibolico con corindone, che si può considerare una differenziazione periferica di un magma noritico-gabbrico, molto alluminifero.

Sino ad oggi roccie eruttive con corindone come elemento essenziale erano conosciute in relazione con magmi sienitici o sienitico-nefelinici negli Urali, nell'India (distretto di Combaitore, Madras), nella contea di Hastings (Ontario Canadà), sia sotto forma di schizoliti a base essenzialmente feldspatica, pegmatiti a corindone e plagioclasiti a corindone (barsowite, kyschtymite), sia sotto forma di masse differenziate periferiche degli stessi magmi (sieniti e sieniti-nefeliniche a corindone). Erano inoltre note rocce filoniane con feldspato e corindone in relazione con magmi basici, essenzialmente peridotici, nella Carolina del Nord e in altri Stati dell'Unione Americana (qui compresa la plumasite di Lawson). Le rocce di Val Sessera ci offrono invece un esempio, sia di schizoliti leucocratiche corindonifere (plumasite), sia di masse differenziate periferiche corindonifere (sesseralite) in relazione con magmi intermedi, cioè noritico-gabbrici ricchi di allumina e, relativamente anche, di magnesia, ma poveri di alcali.

Giova notare che il massiccio intrusivo basico dei monti Biellesi ci offre in altre località esempi di filoni di rocce feldspatiche corindonifere. Il più noto è quello di Mosso S. Maria e che trovasi precisamente sul fianco sud-orientale della cima della Ragna a 1200 m. di altitudine sopra la frazione di Capo Mosso del comune di Mosso S. Maria. Le dimensioni di questo

Digitized by Google

filone sono minori che in quello di Monte Foggia; la roccia appare alterata e la lavorazione, forse la prima iniziata nel Biellese, si limitò ad una breve e poco profonda trincea nella direzione del filone. Ho motivo di ritenere che la maggior parte dei campioni di corindone che si trovano nei più importanti musei mineralogici provengano da questo filone che dista in linea d'aria più di due chilometri e mezzo da quello di Monte Foggia. Quasi certamente l'analisi di Rocholl è stata eseguita su materiale di Cima della Ragna, che non è lontana da Pettinengo.

I due giacimenti son separati da una cresta montuosa, nella quale devonsi trovare uno o più filoncelli consimili; infatti in un valloncello detto dell'Obelisco, che da questa cresta scende alla Val Sessera, ho notato fra il materiale trasportato dal torrente frammenti numerosi di roccia di tipo plumasitico.

Resta da aggiungere qualche parola sull'importanza tecnica di queste rocce del Biellese. Dall'epoca della scoperta di cui dà notizia il Lelièvre i giacimenti furono sfruttati saltuariamente. Una lavorazione abbastanza regolare si ebbe a Monte Foggia nel decennio 1890–1900 per opera dell'industriale francese Durrschmidt, fabbricante a Lione di mole in smeriglio e poi della ditta A. Grammont di Pont de Chérny (Isère). Nel 1896 la produzione fu di circa 2000 kg., ma in seguito i lavori furono quasi abbandonati o ripresi su piccola scala in qualche stagione estiva. In istato di abbandono completo erano nel 1917, quando, per mia iniziativa, fu ripresa l'estrazione del corindone da un manipolo di minatori del 5° reggimento Genio e di territoriali. In quell'anno di guerra la penuria di materiale abrasivo per le varie necessità dell'industria bellica era diventata gravissima; non potevamo disporre dello smeriglio dell'Asia Minore e solo uno scarso contingente di quello di Naxos toccava a noi, fra i vari alleati: nè avevamo disponibilità sufficiente di abrasivi artificiali. La lavorazione durò pochi mesi e cessò col finire delle ostilità; non riuscì certo tecnicamente perfetta, perchè mancò il tempo per una seria organizzazione; riuscì comunque allo scopo di fornire all'industria italiana una buona parte dell'abrasivo indispensabile. Non si potè fare a quel tempo, perchè la lavorazione era eseguita con mano d'opera militare, un conto esatto del costo di estrazione del minerale, che ad ogni modo dovrebbe risultare elevato, perchè il filone è poco potente e la sua posizione quasi verticale entro rocce assai tenaci ostacola un facile ed economico abbattimento della massa, la quale, secondo un computo da me fatto in quel tempo, contiene in media dal 12 al 15 per cento di materiale utile.

Il riconoscimento, che ho potuto fare solo a lavorazione sospesa, cioè dopo l'armistizio, dell'esistenza e dell'alternanza coi filoncelli di plumasite di un'altra roccia che contiene corindone in quantità superiore, può costituire un elemento importante per una valutazione più ottimistica della economica e redditizia sfruttabilità del giacimento.

Digitized by Google

Patologia vegetale. — *Sul metodo di applicazione della luce di Wood in alcune ricerche di patologia vegetale.* Nota [1] del Corrisp. L. PETRI.

In una recente pubblicazione [2] ho riferito brevemente sopra alcuni primi tentativi di applicazione delle radiazioni ultraviolette (3650 unità Angström) alla diagnostica delle alterazioni che l'anidride solforosa determina negli organi aerei delle piante.

La prosecuzione di simili ricerche se non ha condotto ancora a un risultato definitivo, mi ha permesso tuttavia di stabilire alcuni fatti che meritano di esser resi noti sia per l'interesse scientifico che essi presentano, sia perchè servono ad indicare quale possa essere il metodo migliore per applicare con vantaggio la diagnostica fluoroscopica in alcuni casi fitopatologici.

Riassumerò ora concisamente quanto risulta da queste prime ricerche di orientamento.

Il metodo che sino ad ora mi ha dato migliori risultati è quello di esporre alla luce di Wood la carta da filtro di pura cellulosa, sulla quale per capillarità si sia lasciato diffondere il liquido che proviene da una poltiglia acquosa di tessuti vegetali da esaminare. I campi di diffusione capillare così ottenuti si lasciano disseccare alla temperatura del laboratorio in un essiccatore. È questo un metodo che è stato largamente adoperato alcuni anni fa dal Grüss [3] per compiere l'analisi capillare degli enzimi contenuti nei tessuti vegetali. Il metodo è stato adottato dopo che erano stati ottenuti risultati negativi esponendo direttamente alla luce di Wood gli organi o i tessuti o il loro estratto acquoso.

I campi di diffusione capillare, ottenuti coi tessuti fogliari uccisi dalla SO_2 e con quelli uccisi con l'acqua bollente, presentano dei fotogrammi diversi quando sieno esposti alla luce di Wood. In alcuni casi i campi di diffusione corrispondenti ai tessuti uccisi dalla SO_2 presentano un'intensa luminiscenza azzurro-violacea, mentre i campi corrispondenti ai tessuti uccisi col calore umido o disseccati naturalmente, appariscono di un colore più più chiaro del fondo rosso-violaceo della carta, ma privi di ogni traccia di luminiscenza. Se questo risultato si conservasse costante si potrebbe attribuire all'azione della SO_2 la luminescenza, ma invece in molti altri casi ho ottenuto il risultato opposto, e cioè si sono mostrati fortemente luminescenti i fotogrammi relativi ai tessuti uccisi col calore.

(1) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1927.

(2) *L'applicazione della luce di Wood in patologia vegetale*, « Boll. della R. Stazione di Pat. vegetale », ottobre, 1926.

(3) GRÜSS I., *Biologie und Kapillaranalyse der Enzyme*, Berlino, G. Borntraeger, 1912.

Digitized by Google

Il fatto dimostra che la sostanza luminogena è contenuta normalmente nei tessuti fogliari e che non è distrutta dall'azione della SO_2 e dalla temperatura di 100° C. Il presentarsi o no della luminiscenza è dovuto semplicemente alla minore o maggiore diffusione per capillarità nella carta di particolari sostanze dei tessuti fogliari che proteggono la sostanza luminogena dell'azione eccitatrice delle radiazioni ultra-violette assorbendo quest'ultime. Le sostanze tanniche sono da considerarsi come agenti in un tal senso.

Se la poltiglia dei tessuti che viene deposta sulla carta contiene molta acqua, l'evaporazione completa di questa richiede un maggior tempo e quindi una più grande quantità di sostanze solubili si diffonde per capillarità; se invece l'acqua è poca, il disseccamento è assai rapido e quindi il campo di diffusione capillare è costituito in gran parte dalle sostanze più rapidamente diffusibili, mentre quelle dotate di minor rapidità di trasporto per capillarità restano limitate a una ristretta zona intorno alla poltiglia dei tessuti.

Da tutto questo si può comprendere quanta esattezza occorra nella preparazione dei campi di diffusione capillare perchè essi forniscano, alla luce di Wood, dei fotogrammi comparabili. Occorre non solo che sia rigorosamente identica la diluizione della poltiglia dei tessuti, ma identico deve essere anche il periodo di tempo in cui si compie la completa evaporazione dell'acqua.

Operando con le dovute precauzioni si può riuscire tuttavia ad ottenere dei risultati comparabili fra loro dal punto di vista diagnostico.

Le differenze che, per es., si possono constatare fra i fotogrammi dei tessuti uccisi con la SO_2 e quelli dei tessuti uccisi col calore o disseccati naturalmente, riguardano il colore della luminiscenza e l'analisi spettroscopica può fornire a questo riguardo utili elementi di confronto.

Siccome le prove fatte sino ad ora si riferiscono a foglie di piante diverse sottoposte all'azione della SO_2 sotto campana di vetro, attendo, per riferire dettagliatamente sopra la possibilità di un'applicazione della diagnostica fluoroscopica a queste alterazioni, di avere a disposizione del materiale raccolto in aperta campagna nelle normali condizioni di vegetazione.

Scopo di questa Nota è solo quello di richiamare l'attenzione di quanti si occupano delle applicazioni della luce di Wood in patologia vegetale sulla presenza di una particolare sostanza luminogena che è contenuta presumibilmente in tutti i tessuti vegetali viventi, giacchè ho potuto constatarne la presenza anche nei tuberi di patata, sieno essi sani o affetti da degenerazione. I fotogrammi dei tessuti verdi sono però molto più luminescenti. È da notare che l'estratto alcoolico bruto di clorofilla dà un fotogramma di una fluorescenza di color rosso–vinoso, e che d'altra parte, i tessuti fogliari, privati con l'alcool della clorofilla, dànno un fotogramma mediocremente luminescente.

È degno pure di nota che l'acido solforico diluito non modifica la proprietà luminogena e che la particolare sostanza che la presenta è rapidamente diffusibile per capillarità nella carta da filtro.

Digitized by Google

Fisiologia. — *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Variazioni della glicemia e dell'alcoolemia in seguito ad ingestione di bevande alcooliche o di saccarosio.* Nota II del Corrisp. S. BAGLIONI e dei dottori L. BRACALONI e A. GALAMINI [1].

Le esperienze furono fatte in soggetti giovani sani di 25-30 anni a digiuno nel mattino.

Ai risultati delle esperienze si fanno precedere i dati di due prove di controllo, eseguite ricercando lo zucchero e l'alcool del sangue, a distanza di tempo nelle ore abituali di sperimento [2].

	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Alcool °/oo in peso nel sangue	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Glicosio °/oo nel sangue
C. 0.1 cc. di sangue . .	0	0.063	0	0.7
»	25′	—	2′	0.7
»	45′	—	23′	0.7
»	65′	0 01	44′	0.64
»	85′	—	64′	0.68
»	105′	0.03	84′	0.67
»	125′	—	104′	0.64
»	—	—	124′	0.68
P. 0.1 cc. di sangue . .	0	0.011	0	0.64
»	2′	0.015	15′	0.64
»	20′	0.015	35′	0.64
»	40′	0.015	55′	0.55
»	60′	0.02	75′	0 64
»	80′	0.02	95′	0.60
»	100′	0.02	115′	0.64

In una prima serie di ricerche si somministrarono cc. 200 di marsala di buona qualità contenente il 16.30 °/o di alcool e il 4.6 °/o di zucchero riducente. Oscillando il peso dei soggetti da 65 a 72 kg. si somministrò loro in media circa cc. 0.476 di alcool assoluto per kg. di peso. Insieme coll'alcool essi ingerirono, secondo i dati su riferiti, gr. 9.2 di zucchero. I risultati ottenuti furono i seguenti:

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1926.

(2) Per la ricerca dello zucchero si usò il metodo di Bang: per quella dell'alcool il metodo di Widmark modificato come si è detto nella Nota precedente. Questo metodo ci dà il valore complessivo di tutte le sostanze volatili riducenti del sangue, ossia alcool, corpi acetonici, ecc., perciò più esattamente di esse si dovrebbe parlare e non solo dell'alcool.

Digitized by Google

	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Alcool °/oo in peso nel sangue	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Glicosio °/oo nel sangue
G. A. 0.1 cc. di sangue.	0	0.0249	0	0.8
»	3′	0.143	5′	1
»	17′	0.365	19′	0.7
»	37′	0.382	45′	0.95
»	62′	0.399	67′	0.92
»	93′	0.451	99′	0.85
»	138′	0.270	143′	0.89
»	—	—	—	0.75
G. A. 0.1 cc. di sangue.	0	0.155	0	0.95
»	3′	0.186	7′	0.95
»	19′	0.414	21′	1.14
»	39′	0.310	44′	1.14
»	79′	0.336	55′	1.07
»	101′	0.357	76′	0.95
»	129′	0.357	104′	1.08
»	—	—	134′	0.95
C. D. 0.1 cc. di sangue.	0	0.07	0	0.84
»	5′	0.18	8′	0.84
»	45′	0.4	48′	0.77
»	85′	0.29	88′	0.77
»	125′	0.19	128′	0.67
»	165′	0.15	168′	—
C. D. 0.1 cc. di sangue.	0	0.056	0	0.62
»	3′	0.27	5′	0.9
»	42′	0.52	45′	1
»	82′	0.33	85′	0.69
»	122′	0.28	125′	0.84
»	162′	0.19	165′	0.76
P. 0.1 cc. di sangue.	0	0.03	0	0.7
»	5′	0.26	10′	0.45

Digitized by Google

	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Alcool °/oo in peso nel sangue	Tempo dall'ingestione dell'alcool	Glicosio °/oo nel sangue
P. 0.1 cc. di sangue. .	45′	0.58	50′	0.63
»	85′	0.35	90′	0.55
»	125′	0.28	130′	0.53
»	165′	0.19	170′	0.45
P. 0.1 cc. di sangue. .	0	0.03	0	0.61
»	7′	0.29	2′	0.67
»	47′	0.52	42′	0.74
»	87′	0.35	62′	0.67
»	117′	0.25	92′	0.58
»	157′	0.18	113′	0.61

Le variazioni del glicosio nel sangue, in seguito ad ingestione di marsala, non sono state costanti; talvolta non hanno superato quelle osservate in condizioni normali nell'uomo a digiuno; in sei delle otto esperienze, eseguite sui quattro soggetti, si è osservato un aumento sensibile dello zucchero nel sangue dopo 20′–40′–60′ dall'ingestione dell'alcool. Spesso il massimo della concentrazione del glicosio o uno dei massimi, quando vi furono più oscillazioni in più o in meno, coincise con la maggiore concentrazione dell'alcool nel sangue in P. e in C., nei quali l'alcool del sangue, dopo un rapido aumento diminuì anche rapidamente; in M., nel quale si manifestarono i primi sintomi di ubbriachezza, lo zucchero aumentò poco, ma continuamente, variando insieme coll'alcool; in G. A., nel quale si osservò il *plateau* di Gréhant, lo zucchero una volta non subì variazioni, due volte aumentò concordemente coll'alcool, ma diminuì prima di questo, subendo poi oscillazioni varie. Non si è osservato che tre volte, su otto, l'aumento rapido dello zucchero del sangue, subito dopo l'ingestione del marsala. Ciò, con i fatti su notati, fa pensare che l'aumento dello zucchero osservato dopo 40′–60′ non sia dovuto soltanto allo zucchero ingerito, ma anche all'alcool.

In un'altra serie di esperimenti si ricercò in tre soggetti il contenuto dell'alcool e dello zucchero del sangue dopo avere somministrato loro gr. 100–150 di saccarosio. I risultati furono i seguenti:

Digitized by Google

Grammi 150 di saccarosio.

	Tempo dall'ingestione dello zucchero	Alcool °/oo in peso nel sangue	Tempo dall'ingestione dello zucchero	Glicosio °/oo nel sangue
B. 0.1 cc. di sangue. .	0	0.06	0	0.85
»	10′	0.03	0	0.85
»	25′	0.06	12′	1.01
»	40′	0.08	27′	1.42
»	55′	0.07	42′	1.34
»	70′	0.07	57′	1.13
»	85′	0.08	72′	1.01
»	100′	0.055	87′	0.98
»	—	—	102′	0.98

Grammi 100 di saccarosio.

C. 0.1 cc. di sangue. .	0	0.045	0	0.91
»	10′	0.038	15′	1.1
»	30′	0.06	30′	1.4
»	55′	0.06	45′	1.35
»	100′	0.045	60′	1.15
»	135′	0.08	80′	0.94
»	—	—	95′	0.8
P. 0.1 cc. di sangue. .	0	0.021	0	0.76
»	15′	0.005	20′	1.11
»	45′	0.032	30′	1.08
»	75′	0.021	48′	1.11
»	90′	0.021	60′	1.14
»	105′	0.032	75′	0.87
»	—	—	90′	0.7

Digitized by Google

Grammi 150 di saccarosio.

	Tempo dall'ingestione dello zucchero	Alcool °/oo in peso nel sangue	Tempo dall'ingestione dello zucchero	Glicosio °/oo nel sangue
P. 0.1 cc. di sangue . .	0	0.055	0	0.55
»	2′	0.055	7′	0.62
»	15′	0.05	20′	1
»	30′	0.05	35′	1.03
»	45′	0.044	50′	0.9
»	60′	0.05	65′	0.69
»	75′	0.06	75′	0.69
»	90′	0.071	95′	0.66
P. 0.1 cc. di sangue . .	0	0.015	0	0.8
»	10′	0.068	15′	0.9
»	30′	0.046	30′	1.1
»	45′	0.068	47′	1.3
»	60′	0.057	59′	1.1
»	75′	0.23	64′	1.1
»	90′	0.17	79′	0.98
»	105′	0.034	97′	0.94
»	120′	0.02	112′	0.69

L'aumento dello zucchero in circolo è stato sempre notevole, di 0.37-0.44 °/oo, quando si ingerirono 100 gr. di saccarosio, di 0.57, 0.48, 0.5, quando se ne ingerirono 150 gr.

In due soggetti la maggiore concentrazione fu raggiunta entro i primi 30′; nel terzo entro i 35′-60′. Dopo si osservò una graduale diminuzione, che, generalmente, entro 90′ ricondusse il valore glicemico al normale.

Le variazioni dell'alcool nel sangue non hanno superato quelle osservate in una delle due prove di controllo, fuorchè in un caso nel quale da 0.015 °/oo il valore alcoolemico salì a 0.23 °/oo.

Queste ricerche preliminari non consentono di giungere a definitive conclusioni: esse però richiamano l'attenzione sul fatto che l'alcool, ingerito nelle proporzioni suddette, anche in una sola volta, può determinare

Digitized by Google

modificazioni del tasso glicemico e che l'iperglicemia alimentare può essere accompagnata da variazioni del tasso alcoolemico.

Il nesso tra variazioni glicemiche e alcoolemiche potrebbe far pensare giusta, almeno in parte, l'ipotesi sostenuta da prima dal Ford e recentemente dal Serono, di eventuale scissione alcoolica dello zucchero nell'organismo.

LETTERATURA.

Ampie notizie bibliografiche si trovano nelle Memorie di PRINGSHEIM, di SCHWEISSHEIMER, di GABBE.

WM. HUTSON FORD, *On the presence of Alcohol in normal blood and tissues and its relation of calorification.* « Journal of Physiology », Bd. 34, p. 430, London, 1906.

GRÉHANT, *Dosage de l'alcool éthylique dans le sang après l'injection directe dans les veines ou après l'introduction des vapeurs alcoolique dans les poumons.* « Compt. Rend. de l'Académie », 123, Nr. 1896.

ID., *Construction de courbes, qui indiquent les proportions d'alcool que renferme le sang après l'injection dans l'estomac de volumes determinés d'alcool èthylique: application.* « C. R. Soc. Biol. », 1899. t. I, ser. III, p. 946.

ID., *Nouvelles recherches sur l'alcoolisme aigu.* « C. R. Soc. Biol. », 1900, p. 894.

PRINGSHEIM, *Chemische Untersuchungen über das Wesen der Alkoholtoleranz.* « Biochem. Zeitschr. », N. 12, 1908, p. 143.

SCHWEISSHEIMER, *Der Alkoholgehalt des Blutes unter verschiedenen Bedigungen.* « Deut. Archiv. f. klin. Mediz. », Bd. 109, S. 269, 1913.

E. GABBE, *Ueber den Gehalt des Blutes an Alkohol nach intravenöser Injection desselben beim Menschen.* « Deut. Archiv. f. Klin. Mediz. », Bd. 122, S. 81, 1917.

E. M. P. WIDMARK, *Eine Mikrometode zur Bestimmung von Aethylalkohol im Blut.* « Biochem. Zeitschrift », Bd. 131, Heft 5/6, S. 475, 1922.

SERONO, *Sul metabolismo degli idrati di C nell'organismo animale e sulla probabile origine delle glicosurie.* « Rass. di Clin. Terap. e Scienze affini », Anno XXV, fasc. V-VI.

Digitized by Google

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Limitazione delle soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali.* Nota di F. TRICOMI, presentata dal Socio F. SEVERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Quadriche aventi per generatrici le tangenti asintotiche in un punto di una superficie.* Nota di E. P. LANE, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle funzioni metarmoniche.* Nota di M. PICONE, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *Una notevole deduzione della teoria di Bohr.* Nota di N. SIRACUSANO, presentata dal Socio L. PUCCIANTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Il problema della moltiplicazione complessa per un qualsiasi corpo puro di funzioni abeliane.* Nota di N. SPAMPINATO, presentata dal Socio G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Chimica. — *Sul calcolo dell'affinità chimica in base alle entropie.* Nota di G. Bozza e G. Devoto, presentata dal Socio L. Cambi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Borati anidri di argento, bario e zinco.* Nota di F. De Carli, presentata [1] dal Socio N. Parravano [2].

L'ossido di argento si scioglie nell'anidride borica dando vetri limpidi, incolori o gialli a seconda della composizione.

Questa osservazione fu fatta anche dal Guertler, ma nè lui nè altri autori isolarono mai borati di argento anidri di composizione definita.

Su questo argomento esiste solo un lavoro di Soulin [3] il quale asserì di aver isolato un borato idrato: $11Ag_2O \cdot 10B_2O_3 \cdot 10H_2O$.

Ho applicato allo studio del sistema $Ag_2O - B_2O_3$, e di quelli che seguono, il metodo basato sulla misura della temperatura di devetrificazione che venne già ampiamente descritto in una Nota precedente [4].

La preparazione dei vetri di Ag_2O e B_2O_3 è molto difficile per la decomponibilità dell'ossido di argento. L'unico sistema che permette di ottenere dei buoni risultati consiste nel mettere a contatto a poco per volta il nitrato di argento con B_2O_3 fuso. In tal modo nell'atto stesso in cui il nitrato si scompone, l'ossido che si forma reagisce con l'anidride borica, formando un prodotto abbastanza stabile. Si ottengono così vetri limpidi che, per forti concentrazioni in B_2O_2, sono incolori e vanno leggermente colorandosi in giallo con l'aumentare del contenuto di Ag_2O.

Anche usando queste precauzioni non è stato però possibile preparare miscugli che contengano più del 61 % circa di Ag_2O perchè, salendo troppo con la temperatura, si finisce per provocare la decomposizione del borato formato. La zona che ho potuto esplorare è stata perciò limitata nel campo dei borati acidi, che contengono da 5 a 3 molecole di B_2O_3 per 1 di Ag_2O.

I miscugli si devetrificano con notevole difficoltà. In alcuni casi si è potuto raggiungere l'equilibrio solo dopo 4 o 5 giorni di continuo riscaldamento. In altri casi non si è potuta in nessun modo ottenere formazione di cristalli.

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1926.
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(3) « Ann. de Chim. et Phys. » (4), 30 (1873), 272.
(4) « Gazz. Chim. Ital. », 56, 19, 1926.

Digitized by Google

Per controllare la composizione dei cristalli, essi sono stati analizzati. Nei miscugli studiati l'ossido di argento non aveva subito in nessun caso scomposizione in misura tale da alterare l'esattezza dei risultati.

Dall'esame dei dati raccolti nella tabella, e dal diagramma appare chiara la esistenza del composto $Ag_2O \cdot 4B_2O_3$, che si presenta come massa formata da minutissimi cristalli bianchi.

TABELLA I.

N.	Ag_2O %	B_2O_3 %	t°	Osservazioni
1	61,8	58,2	525°	
2	59,0	41,0	465°	
3	54,0	46,0	420°	Devetrificazione molto lenta. I cristalli si formano molto stentatamente e in piccola quantità.
4	52,0	48,0	410°	
5	50,0	50,0	480°	
6	49,0	51,0	515°	
7	48,3	51,7	520°	
8	47,0	53,0	570°	Devetrificazione pronta, cristallizzazione abbondante.
9	45,1	54,9	530°	
10	44,3	55,7	520°	
11	42,5	57,5	450°	Devetrificazione estremamente lenta, in alcuni miscugli la temperatura di equilibrio fu letta dopo quattro giorni.
12	41,4	58,6	400°	
13	39,82	60,10	380°	
14	35,27	64,73	520°	

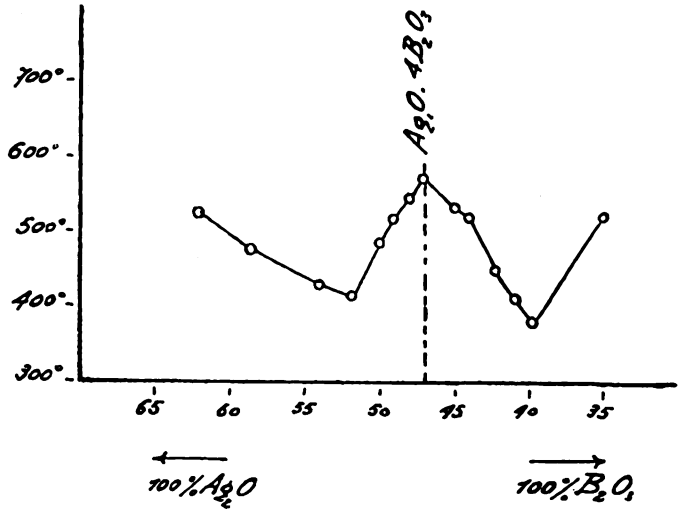


Diagramma 1.

Digitized by Google

Borati di bario.

Fondendo miscugli formati da ossidi alcalino-terrosi e anidride borica si possono ottenere, a seconda delle concentrazioni, composti definiti sotto forma di masse cristalline o prodotti vetrosi.

Ditte [1] ottenne borati di calcio, bario e stronzio, introducendo in un bagno di alogenuro alcalino fuso l'ossido metallico e l'anidride borica nelle proporzioni volute. I composti si separavano bene cristallizzati alla superficie del bagno. In questa maniera furono isolati dei cristalli aventi le seguenti composizioni:

$3MeO \cdot B_2O_3$; $3MeO \cdot 2B_2O_3$; $2MeO \cdot B_2O_3$; $MeO \cdot B_2O_3$; $2MeO \cdot 3B_2O_3$.

Benedikt [2], Ouvrard [3], Blount [4], con metodi analoghi a quello seguito da Ditte, ottennero sostanze cristallizzate le cui composizioni concordavano con quelle dei composti ricordati.

Guertler [5] studiò mediante l'analisi termica i sistemi binari:

$$BaO — B_2O_3 \quad ; \quad CaO — B_2O_3 \quad ; \quad SrO — B_2O_3$$

Essendo difficile l'apprezzamento diretto dell'inizio della cristallizzazione (sempre per i forti sopraraffreddamenti ai quali queste miscele vanno soggette), l'A. ricorse alle osservazioni oculari notando le temperature alle quali si vedeva apparire nella massa un intorbidamento dovuto a separazione di cristalli. A questo modo potè costruire dei diagrammi i quali dimostrano chiaramente l'esistenza dei tre borati

$$3MeO \cdot B_2O_3 \; ; \; 2MeO \cdot B_2O_3 \; ; \; MeO \cdot B_2O_3$$

e per lo stronzio ed il calcio anche $MeO \cdot 2B_2O_3$.

I risultati di Guertler concordano abbastanza con quelli dei precedenti autori. Solo c'è da notare che nei suoi diagrammi le composizioni corrispondenti a $3MeO \cdot 2B_2O_3$ e $2MeO \cdot 3B_2O_3$ non rappresentano dei massimi, ma si trovano al contrario in vicinanza dei punti eutettici.

Ricollegandomi alle esperienze di Guertler ho voluto studiare i miscugli degli ossidi alcalino-terrosi ricchi di anidride borica, al fine di stabilire se anche questi ossidi, come quelli dei metalli alcalini, di piombo, manganese, ecc., fossero capaci di formare borati acidi facilmente identificabili.

L'ultimo miscuglio che Guertler ha studiato contiene 0,27 equivalenti di ossido di bario per un equivalente di anidride borica, e cioè, riferendoci alle composizioni centesimali, 62,94 % di ossido di bario: esso cristallizza a circa 1005°. Il primo miscuglio con il quale ho sperimentato conteneva 59,48 % di ossido di bario e la temperatura di equilibrio tra liquido e fase cristallina si aggirava intorno agli 820°.

(1) « C. R. », 77, 785, 803 (1873).
(2) « Ber. », 7, 703.
(3) « C. R. », 130, 172; 132, 258; 141, 353.
(4) « Chem. News », 54, 208.
(5) « Z. anorg. Chem. », 40, 243, 1904.

Digitized by Google

I risultati ottenuti sono riportati nella tabella e nel diagramma. In questo ho anche riportato la parte (tratteggiata) studiata dal Guertler.

TABELLA II.

N.	BaO %	B_2O_3 %	t°	Osservazioni
1	59,48	40,52	850°	
2	55,29	44,71	700°	
3	53,50	46,50	765°	Vetri limpidi ed incolori. La velocità di devetrificazione che è abbastanza forte per i nn. 1, 2, 3, va successivamente diminuendo fino a diventare piccolissima per il numero 8.
4	52,25	47,75	810°	
5	50,53	49,47	780°	
6	48,62	51,38	750°	
7	46,00	54,00	620°	
8	44,27	55,73	605°	
9	43,82	56,18	670°	I miscugli 9, 10, 11 devetrificano abbastanza facilmente e danno masse cristalline ben nette. L'equilibrio si raggiunge in media dopo 12 ore.
10	43,50	56,50	695°	
11	42,20	57,33	740°	
12	41,48	58,52	610°	Tutti i miscugli dal 12 al 17 presentano notevole velocità di devetrificazione. L'equilibrio si raggiunge in media dopo 8 ore e si ottengono belle masse cristalline compatte. I miscugli 16 e 17 cominciano a formare cristalli dopo appena un'ora di ricottura.
13	40,05	59,05	580°	
14	38,24	61,76	680°	
15	36,82	63,18	690°	
16	35,20	64,80	750°	
17	34,15	65,85	740°	
18	33,00	67,00	715°	Separazione in due strati.

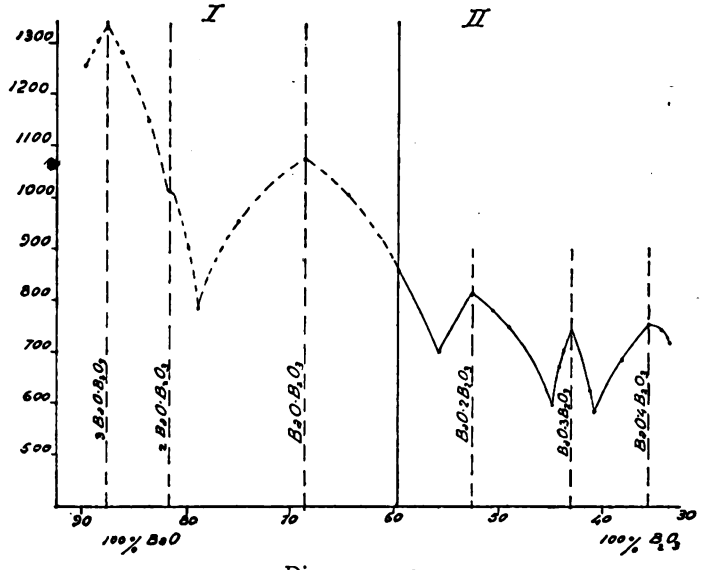
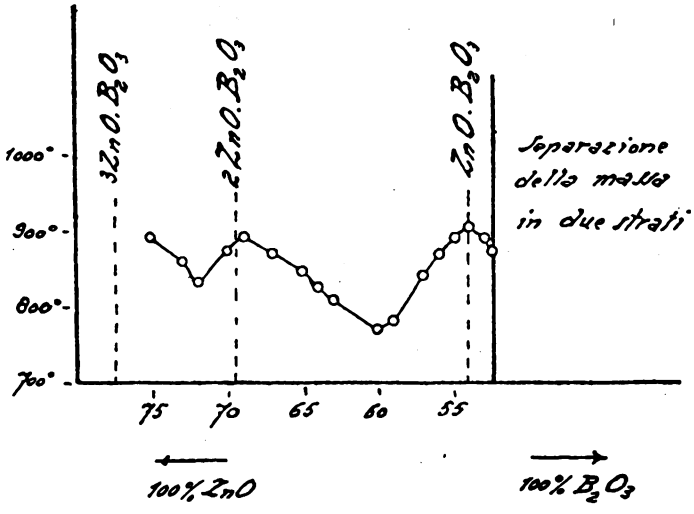


Diagramma 2.

Digitized by Google

TABELLA III.

N.	ZnO %	B_2O_3 %	t°	Osservazioni
1	75	25	892°	I numeri 1 e 2 cristallizzano con discreta velocità e danno masse cristalline ben definite. Equilibrio in 8–10 ore. I numeri 3 e 4 presentano velocità in cristallizzazione piccolissima.
2	73	27	865°	
3	72	28	835°	
4	70	30	872°	
5	69	31	891°	Devetrificazioni pronte e abbondanti, in 4–6 ore si raggiunge equilibrio.
6	67	33	870°	
7	65	35	850°	
8	64	36	830°	La velocità di devetrificazione diminuisce fino a raggiungere un minimo nel numero 10 per poi tornare ad aumentare lentamente. L'equilibrio si raggiunge dopo 10-14 ore.
9	63	37	815°	
10	60	40	770°	
11	50	41	785°	
12	57	43	840°	—
13	56	44	870°	—
14	55	45	890°	Devetrificazione pronta. Cristalli bene formati di aspetto prismatico.
15	54	46	895°	
16	53	47	885°	—
17	52,5	47,5	867°	Si comincia a notare una tenue separazione in 2 strati, che aumenta nei miscugli successivi.



~ Diagr. 3 ~

Digitized by Google

Dall'esame del diagramma si rileva come la parte II, da me costruita, si ricollega perfettamente con la parte I di Guertler. Dopo il massimo corrispondente al composto $BaO \cdot B_2O_3$ la temperatura scende regolarmente fino a raggiungere un eutettico a 650° circa, poi torna a salire per raggiungere un nuovo punto caratteristico a 810° che corrisponde al composto : $BaO \cdot 2B_2O_3$.

Continuando a salire con il contenuto in anidride borica la temperatura di devetrificazione prima scende di nuovo fino a circa 605°, poi risale e raggiunge un nuovo massimo a 740° in corrisponenza di $BaO \cdot 3B_2O_3$. L'esistenza di questo era stata prevista da Ditte [1] che l'ottenne però soltanto come massa vetrosa deacquificando il composto idrato corrispondente.

Infine il diagramma permette di identificare chiaramente il terzo composto che si devetrifica a 750°, e corrisponde a $BaO \cdot 4B_2O_3$.

A partire da questo punto le masse fuse cominciano a separarsi in due strati.

Borati di zinco.

I borati di zinco finora conosciuti sono $3ZnO \cdot B_2O_3$ e $3ZnO \cdot 2B_2O_3$ ottenuti per via ignea mediante l'aiuto di un fondente.

Guertler trovò che la miscibilità di ZnO in B_2O_3 si spinge solo fino ai miscugli contenenti circa il 53,5 % di ossido basico.

L'A. dichiara però di non essere riuscito a ottenere in nessun modo la cristallizzazione di questa massa vetrosa.

Per fusione diretta dei due componenti si cominciano ad ottenere liquidi limpidi e bene omogenei a partire dai miscugli al 75 % circa di ZnO. Volendo spingersi a concentrazioni maggiori di ZnO occorrerebbero temperature molto superiori a quelle ottenibili con un forno elettrico a resistenza di nichel-cromo; oppure bisognerebbe ricorrere all'aiuto di un fondente. Ho pertanto limitato le ricerche alla zona di composizione che dà miscugli facilmente fusibili e bene omogenei.

La devitrificazione si compie con discreta facilità in quasi tutti i casi, e si ottengono in tal modo zone cristallizzate molto abbondanti formate da un insieme di elementi cristallini bene definiti di aspetto prismatico.

I dati riportati nella tabella, con i quali è stato costruito il diagramma, mostrano la separazione molto evidente dei due composti:

$$2ZnO \cdot B_2O_3 \text{ e } ZnO \cdot B_2O_3 .$$

Verso le concentrazioni più ricche di ZnO si nota che la temperatura di devetrificazione e l'attitudine a cristallizzare diminuiscono notevolmente per poi aumentare di nuovo in corrispondenza di $3ZnO \cdot B_2O_3$. Questo

(1) Ditte, loc. cit.

Digitized by Google

però, è difficilmente fusibile e deve avere, almeno per quanto si può desumere dalle osservazioni fatte nei miscugli di composizione vicina, maggiore tendenza a cristallizzare.

Nulla di notevole invece si è notato in corrispondenza di $3ZnO \cdot 2B_2O_3$ la cui formazione, nelle condizioni nelle quali ho operato, se pure avviene, non deve essere accompagnata da un aumento tale di velocità di cristallizzazione da poter essere messo in evidenza con il metodo usato.

Cristallografia. — *Studi sui reticolati cristallini. Spazio molecolare e numero atomico.* Nota di U. PANICHI, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Su l'eredità del tipo metabolico nei bachi da seta: le capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di Bombyx Mori.* Nota di C. JUCCI, presentata [1] dal Socio F. BOTTAZZI.

I bachi da seta costituiscono un materiale eccellente per lo studio dell'eredità: in una stessa specie, *Bombyx Mori*, accogliendosi numerosissime razze distinte più o meno profondamente da caratteri i più svariati. Vogliamo studiare come si eredita la capacità di accrescimento. Facciamo gli incroci reciproci tra le due razze A e B: ab e ba. La femmina A, anche fecondata da maschio B, depone uova grosse e pesanti; la femmina B, anche fecondata da maschio A, depone uova piccole e leggiere; perchè le uova sono già mature nell'organismo materno e lo spermio non le raggiunge che mentre scendono lungo l'ovidotto per la deposizione. Come il peso dell'uovo, così anche il peso dei bacolini è, nei due incroci reciproci, rispettivamente uguale (o quasi) a quello della razza materna.

Ma alla fine dello sviluppo larvale i due incroci avranno raggiunto (è prevedibile teoricamente e la pratica parla in questo senso) uno sviluppo intermedio, un peso uguale alla media dei due valori parentali. Ora, per raggiungere questo peso, il bacolino più piccolo, della razza B, deve avere fatto più cammino; deve essere cresciuto di più che il bacolino più grosso dalla razza A. Per giungere, da punti di partenza diversi, allo stesso punto di arrivo, i due incroci debbono aver percorso una curva di sviluppo di-

(1) Nella seduta del 19 dicembre 1926.

Digitized by Google

versa. Seguire questa curva di sviluppo si presenta di singolare interesse per determinare come è andato modificandosi, nelle quattro successive età dello sviluppo larvale, la capacità di accrescimento; come, nel corso dello sviluppo, è andata svolgendosi l'influenza ereditaria paterna, progressivamente slontanando l'organismo ibrido dal tipo metabolico materno.

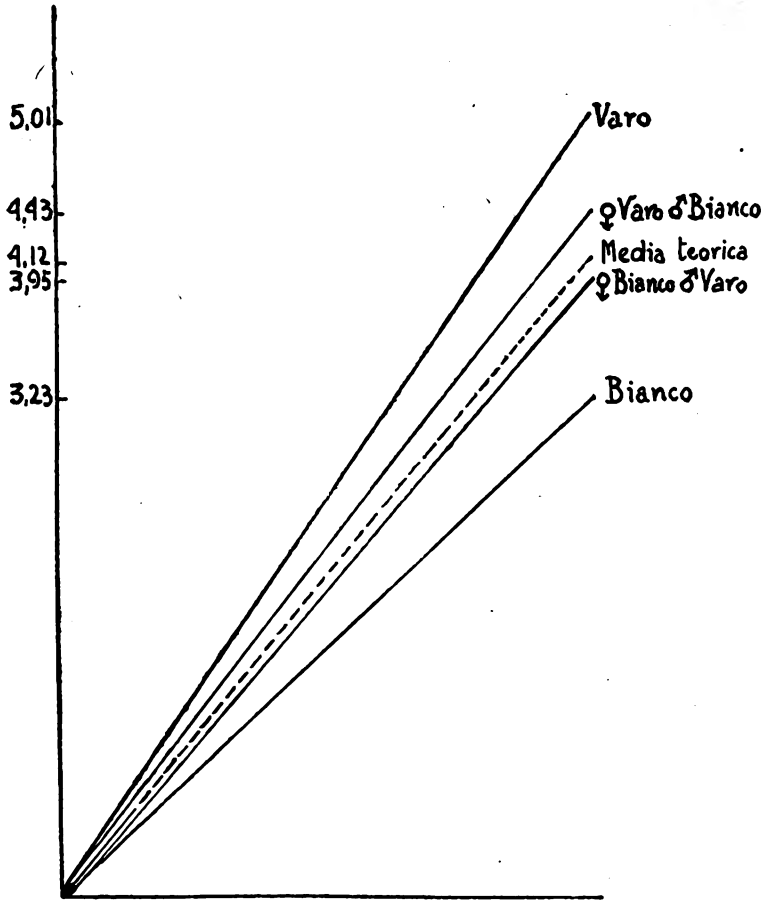


Diagramma 1.

Ho allevato contemporaneamente, negli stessi locali, nelle identiche condizioni, le due razze pure, Varo e Bianco chinese, e i due incroci reciproci ♀ Varo ♂ Bianco, ♀ Bianco ♂ Varo.

Mi sono messo così nelle condizioni migliori per confrontare i due incroci fra loro e con le razze parentali.

Ho pesato i miei bachi a ogni muta, prima e dopo, determinando così, per ogni età, il peso iniziale e il peso raggiunto; sì da poter tracciare la curva di sviluppo e calcolare, per ogni età, la capacità di accrescimento (peso

Digitized by Google

raggiunto: peso iniziale). Il numero dei bachi in ogni pesata è stato sempre abbastanza grande (200,100,50, secondo lo stadio di sviluppo) per eliminare le cause di errore inerenti alla determinazione del peso e alle variazioni di sviluppo individuali. Del resto, avendo raccolto ed allevato separatamente i bacolini sgusciati dal seme in tre giornate successive, ho spesso ripetuto

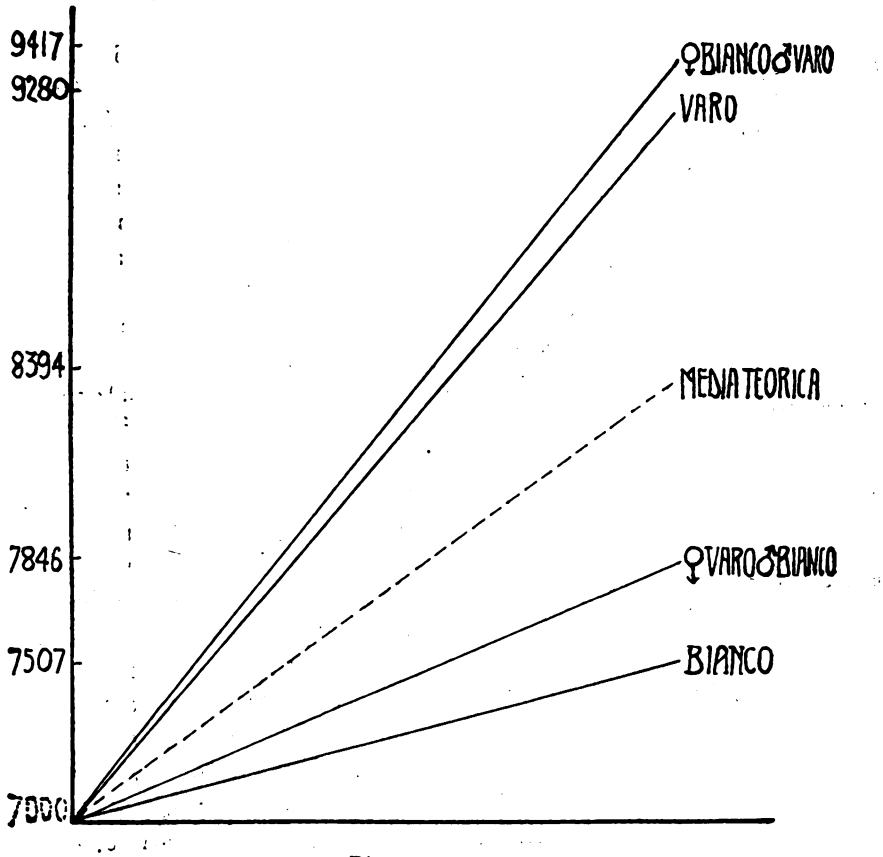


Diagramma 2.

su ciascuno dei tre lotti la determinazione di un peso, per ottenere dalla media un valore ancora più attendibile.

Non ho seguito i miei incroci e le relative razze parentali soltanto lungo lo sviluppo larvale; ma ben anche prima, durante la incubazione del seme, e dopo, durante lo sviluppo crisalidale e la vita imaginale; raccogliendo i dati per tracciare la curva di sviluppo embrionale e crisalidale e determinare i caratteri della ovificazione (1).

Prenderemo per ora in esame i dati concernenti lo sviluppo larvale.

(1) Determinazioni, queste ultime, già state pubblicate da un mio scolaro, l'Alibrandi.

Digitized by Google

Del Varo, una delle più grosse razze giallo-indigene, il baco a massimo accrescimento ha raggiunto i cinque Gr. (5.011); del Bianco Chinese, tipo delle piccole razze bianche orientali, il baco a massimo accrescimento ha superato di poco i 3 Gr. (3.228). I due incroci reciproci non presentano lo stesso peso, uguale alla media dei due valori parentali, come secondo le previsioni teoriche: ♀ Varo ♂ Bianco, presenta un peso di quasi 4 ½ Gr. (4.433); ♀ Bianco ♂ Varo un peso che rasenta appena i 4 Gr. (3.955). I due incroci presentano dunque pesi diversi, intermedi si rispetto a quelli delle razze parentali, ma spostati in sopra e in sotto della media (4.120), rispettivamente verso la razza materna. Dunque dei pesi del baco a massimo accrescimento, mentre il peso del Bianco rappresenta il 64 % di quello del Varo, il peso del ♀ Bianco ♂ Varo, rappresenta l'89 % di quello del reciproco: il distacco del 36 % tra le due razze parentali si è ridotto all'11 % tra i due incroci reciproci.

Il nostro schema teorico subisce dunque, saggiato al fuoco dell'esperimento, una importante modificazione: il punto di arrivo (il peso alla fine dello sviluppo larvale – il solo stadio dello sviluppo durante il quale abbia luogo accrescimento, essendo il periodo crisalidale dedicato alla differenziazione e l'imaginale alla riproduzione) il punto di arrivo, dunque, non è lo stesso per i due incroci reciproci: tendono a raggiungerlo, ma non vi riescono: nei prodotti dell'incrocio si ha una netta prevalenza del carattere materno.

Constatazioni tutte analoghe avevo già fatto per gli incroci reciproci fra le razze Oro e Treotti: ♀ Treotti ♂ Oro, ♀ Oro ♂ Treotti; e Giallo sferico e Treotti: ♀ Treotti ♂ Giallo sferico, ♀ Giallo sferico ♂ Treotti.

Mi risultò verificata, come per l'incrocio tra razza a tre mute con razza a 4 mute orientale, così per l'incrocio tra razza a tre mute con razza a 4 mute indigena, la regola che *gli incroci reciproci presentano un peso, alla fine dello sviluppo, intermedio rispetto a quello delle due razze parentali, spostato in sopra e in sotto della media, rispettivamente, verso la razza materna.*

Ma se i due incroci non raggiungono lo stesso punto di arrivo, tendono però ad avvicinarvisi e la distanza tra i due punti di arrivo è spiccatamente minore (in senso relativo) che tra i due punti di partenza. Difatti il neonato di ♀ Bianco ♂ Varo pesa mg. 0.42, presso a poco come il neonato della razza materna Bianca (0.43); e il neonato di ♀ Varo ♂ Bianco pesa mg. 0.565, presso a poco come il neonato della razza materna Varo (0.54).

Il rapporto ponderale ♀ Bianco ♂ Varo: ♀ Varo ♂ Bianco alla nascita ha dunque il valore di 0.74, mentre sale a un valore di 89 % alla fine dello sviluppo.

Il baco dell'incrocio a razza materna più piccola, a uova più piccole, salendo da un un punto di partenza inferiore, deve ascendere, deve crescere di più.

Lasciamo dunque da parte per ora i pesi raggiunti alla fine dello sviluppo larvale, nel loro valore assoluto, e consideriamo gli accrescimenti: di quante volte il peso iniziale, di nascita, si è moltiplicato nel corso dello sviluppo.

Digitized by Google

La razza Bianca chinese, presenta un accrescimento larvale di 6507 volte il peso di nascita; la razza Varo di 9280 volte. Delle due razze parentali, dunque, ha capacità di accrescimento maggiore la razza che ha superiore il punto di partenza, il peso di nascita. La superiorità spiccata della razza Varo rispetto alla Bianca chinese dipende, insomma, da due fattori, peso di nascita superiore e maggiore capacità di accrescimento.

Dei due incroci reciproci il ♀ Bianco ♂ Varo presenta un accrescimento di 9417 volte il peso di nascita; il ♀ Varo ♂ Bianco di 7846. L'incrocio ♁ Varo ♂ Bianco raggiunge un accrescimento superiore solo del 4 % a quello del Bianco chinese, mentre è inferiore del 16 % a quello del Varo e del 7 % alla media teorica. Invece l'incrocio ♁ Varo ♂ Bianco raggiunge un accrescimento superiore del 25 % a quello del Bianco chinese, e che non solo si avvicina a quello del Varo, ma lo raggiunge e leggermente lo oltrepassa, restando superiore alla media teorica del 12 %.

Vi è dunque per la capacità di accrescimento un predominio spiccatissimo del carattere paterno. Questo predominio tende a portare i due incroci verso un punto comune di arrivo nello sviluppo larvale. Difatti il rapporto ponderale $\frac{♀B. ♂V.}{B.}$ sale da 0.97 alla nascita ad 1.22 a massimo accrescimento; e il rapporto ponderale $\frac{♀V. ♂B.}{V.}$ scende da 1.04 a 0.88. Il ♀ Bianco ♂ Varo guadagna, dunque, rispetto al Bianco, il 24 %: il doppio di quello di quello che perde il ♁ Varo ♂ Bianco rispetto al Varo (il 12 %). Ora la differenza finale (fra il peso a massimo accrescimento) tra Varo e Bianco è proprio del 36 % (essendo il peso del Bianco chinese il 64 % di quello del Varo). Questa differenza parrebbe dovere essere interamente colmata dal guadagno del ♀ Bianco ♂ Varo sommato alla perdita del ♀ Varo ♂ Bianco.

Ma non lo è e non lo può essere; perchè il 24 % che il ♀ Bianco ♂ Varo guadagna, rispetto al peso del Bianco, è un peso minore del 24 % del peso del Varo che rimane di differenza tra il peso del ♀ Bianco ♂ Varo e il peso del Bianco; in ragione della inferiorità iniziale del Bianco rispetto al Varo.

Può dirsi dunque che il ♀ Bianco ♂ Varo guadagna, rispetto alla sua razza materna, il doppio di quello che perde, rispetto alla sua razza materna, il reciproco. E che, se gli effetti inversi dell'influenza materna non conducono i due incroci reciproci all'identico accrescimento, gli è che questa influenza paterna, per forte che sia, non riesce a colmare il dislivello d'una inferiorità iniziale.

A questo punto due domande ci si presentano:

1° Perchè nella determinazione della capacità di accrescimento dell'incrocio predomina l'influenza della razza paterna?

2° E allora in che consiste, a che si riduce l'eredità materna?

Digitized by Google

Anatomia. — *Il Telencefalo dei Tritoni. (Contributo allo studio comparativo del sistema nervoso centrale degli Anfibi)* [1]. Nota di E. BENEDETTI, presentata [2] dal Socio E. GIACOMINI.

Ho compiuto una serie di ricerche intorno al sistema nervoso centrale degli Anfibi urodeli, prendendo particolarmente in esame il cervello dei Tritoni (*Triton cristatus* e *Tr. taeniatus*) genere trascurato finora quasi del tutto dagli studiosi di neurologia comparata. A tale scopo mi sono valso di una tecnica istologica poco usata finora dagli Autori: l'impregnazione argentica secondo Bielschowsky-Agdhur lievemente modificata, la quale, con la sua elettività su talune vie nervose mi offrì un grande aiuto per l'esatta determinazione dell'intero percorso di esse. Sono così riuscito a stabilire alcuni fatti nuovi, che probabilmente sfuggirono alle indagini di altri autori per la diversa tecnica da essi adottata, e qui mi limito a riferire soltanto alcuni risultati principali, riguardanti il Telencefalo.

Nell'apparecchio olfattorio centrale, che risiede nell'estremo rostrale di ciascun emisfero, si nota, per quanto riguarda gli elementi istologici, una disposizione diversa da quella solita degli altri Vertebrati. Infatti mentre, di regola, allo strato glomerulare fanno seguito lo strato delle cellule mitrali e poi le cellule granulari separate dalle precedenti da una zona molecolare più o meno estesa, nel *Triton*, all'incontro, si nota un ampio strato molecolare subito addossato ai glomeruli, e le cellule mitrali sono situate all'indietro, frammiste alle cellule granulari. In regioni molto rostrali, queste ultime sono ammassate prevalentemente sulla parete mediale dell'emisfero, formando degli ispessimenti e delle stratificazioni. Ciò avviene, con ogni probabilità, in seguito all'inserzione laterale del nervo olfattorio, che determina lo schieramento degli elementi istologici componenti il lobo su una linea latero-mediale, rispetto al piano sagittale dell'intero encefalo. Per la medesima causa anche l'estremità rostrale del ventricolo è spostata medialmente e dorsalmente.

Per quanto riguarda la disposizione delle cellule nei quadranti degli emisferi, è da rilevarsi che l'area cellulare dorso-mediale è pochissimo sviluppata in stadi larvali. Le cellule nervose sono allora quasi tutte ancora allo stato di neuroblasti senza prolungamenti sviluppati, e pertanto è quasi totalmente assente la sostanza bianca, che, nel corso dello sviluppo, sarà poi per la maggior parte costituita dai prolungamenti delle cellule di quest'area.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Bologna, diretto dal prof. E. Giacomini.

(2) Nella seduta del 2 gennaio 1927.

Digitized by Google

L'impregnazione argentica elettiva permise un'esatta ricostruzione dell'intero tratto olfattorio dorso–laterale descritto soltanto in parte negli Urodeli da Roethig, Kappers, Bindewald e Herrick, e visto recentemente soltanto dal Roethig esattamente negli Anuri. Esso rappresenta una imponente connessione olfattoria di II° ordine tra il bulbo olfattorio e tutta la porzione emisferica dorso–laterale, come pure tra il bulbo e i nuclei anteriori e dorsali del diencefalo. Si origina dalle cellule granulari del bulbo olfattorio con singole fibrille (1), che dopo un breve percorso disordinato si riuniscono nel lato mediale in un imponente fascio ascendente, il quale in regioni poco più caudali piega verso l'esterno decorrendo obliquamente in senso laterale e dall'avanti all' indietro. Acquista così la posizione dorso-laterale conosciuta dalle descrizioni degli altri Autori, e, mantenendola, raggiunge il polo posteriore dell'emisfero, ove si volge improvvisamente in basso, e poi medialmente, per avvicinarsi alla parete talamica, nella quale si porta nuovamente verso l'alto e va poi ad unirsi alle altre componenti della *stria medullaris*. Durante questo ultimo percorso esso abbandona delle fibre che si portano al nucleo sopracommessurale e alla *pars dorsalis thalami*. Una simile via nervosa venne osservata da me anche in cervelli di *Proteus*, *Rana* e *Lacerta*. In un cervello di *Mus musculus* ho potuto osservare che le fibre del tratto olfattorio laterale erano impregnate in modo del tutto analogo alle fibre del tratto dorso–laterale anzidetto.

Un'altro tratto, che, a quanto mi consta, non è stato finora descritto, venne messo in evidenza dall' impregnazione. Esso si origina dalla porzione posteriore del bulbo olfattorio; le sue fibre si portano poi ventro-lateralmente in prossimità della periferia ove si uniscono a quelle del tratto olfatto-abenulare anteriore. Mantenendosi in questa posizione raggiungono il polo posteriore, si volgono qui dorsalmente, attraversano dal basso in alto la commessura anteriore ed entrano nella porzione caudale della commessura dorsale. Sembra che queste fibre passino nell'emisfero opposto e in questo caso il tratto rappresenterebbe una commessura interbulbare come quella che, per i Pesci, fu già descritta dal Goldstein, Holmgren ed altri.

Nella parte posteriore degli emisferi, in prossimità della cresta commessurale, osservai due nuclei, costituiti da cellule grandi, poco colorate, congiunti attraverso la linea mediana da una commessura ben evidente. Tutto all' intorno numerose fibre li mettono in connessione pure col fascetto prosencefalico laterale, con la *stria medullaris* e con le aree emisferiche ventro-laterali. Per la loro posizione, per i caratteri istologici delle loro cellule e per le loro connessioni tali nuclei possono omologarsi ai nuclei amigdalini descritti dall'Herrick negli Anfibi anuri.

Le commessure che nel *Triton*, come in tutti gli Anfibi urodeli, sono sottoventricolari, si dispongono su tre piani sovrapposti. Nel piano inferiore

(1) Alcune di queste fibre vennero dal Bindewald ritenute per un tratto autonomo e denominate « radiatio olfactoria longitudinalis ».

Digitized by Google

passano fibre provenienti dall'area ventro-laterale degli emisferi, dal *nucleus medianus septi*, dal nucleo preottico, e inoltre fibre che dal quadrante dorso-laterale si portano all' ipotalamo. Insieme a queste incrociano anche le fibre ipotalamiche ascendenti descritte dall'Herrick e le fibre incrociate del fornice primitivo o tratto ippocampo-ipotalamico. Nel piano intermedio passano in prevalenza le componenti incrociate del fascetto prosencefalico laterale. Nel piano dorsale incrociano, nella porzione anteriore, quasi esclusivamente fibre appartenenti alle regioni dorsali degli emisferi e del *primordium hippocampi*; nella porzione posteriore le fibre appartenenti al sistema della *stria medullaris*, e cioè: componenti dei tratti olfatto-abenulari, laterale, mediale e anteriore, del tratto septo-abenulare e del tratto cortico abenulare.

Per lo sviluppo che assumono i vari centri e per la importanza delle connessioni risulta indubbio che il cervello anteriore dei Tritoni è per la maggior parte un cervello olfattorio. I centri a diretto servizio del sensorio dell'olfatto, come i bulbi olfattivi e il nucleo olfattorio anteriore, occupano più di un terzo della lunghezza totale di ciascun emisfero. I bulbi olfattivi mandano fibre di proiezione di II° ordine, dirette, sino nella parte dorsale del talamo mediante il tratto olfattorio dorso-laterale, e sono altresì con tutta probabilità in interdipendenza a mezzo della commessura interbulbare.

Il nucleo olfattorio anteriore si rivela, per le sue connessioni, come un centro di distribuzione degli stimoli olfattori ai vari quadranti emisferici, che, per il prevalere delle fibre olfattorie, diventano dei centri olfattori di III° ordine. Le porzioni emisferiche latero-basali si rivelano, per le loro connessioni, maggiormente atte a provocare i movimenti riflessi di origine olfattoria, stando in rapporto diretto, a mezzo del fascetto prosencefalico laterale, coi centri motori tegmentali e del midollo allungato.

Le porzioni medio-ventrali, con le loro proiezioni ipotalamiche dirette, a mezzo del fascetto prosencefalico mediale potrebbero essere prevalentemente destinate alla emissione di stimoli olfattori verso i centri di correlazione gustatoria situati nell' ipotalamo. Dobbiamo però anche tener presente che questi due quadranti sono alla loro volta centri di correlazione per i vari stimoli che, attraverso le vie di associazione interna omolaterale ed eterolaterale, pervengono ad essi dai quadranti dorsali.

Questi ultimi, con le loro numerosissime connessioni talamiche ed epitalamiche, sono senza dubbio la sede di correlazioni più varie e più complesse: ottiche, somestesiche, latero-acustiche ecc. Per comprender ciò basta tener conto delle connessioni abenulari e di quelle con la porzione talamica pretettale, centro di correlazione principale per tutto il sistema viscero e somato-sensitivo del midollo allungato e del tetto mesencefalico.

Digitized by Google

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente GARBASSO rivolge ai Soci il suo augurio per il nuovo anno ed esprime il voto che l'Accademia possa dare un impulso sempre più vigoroso allo sviluppo scientifico nazionale.

Il Socio PATERNÒ a nome dell'Accademia ringrazia il Presidente.

Il Socio N. PARRAVANO legge la Commemorazione del compianto Socio A. Peratoner, illustrandone la vita e il valore dell'opera scientifica.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio GUIDI presenta un suo opuscolo « Studi sperimentali su costruzioni in cemento armato » e ne espone brevemente il contenuto.

Il Socio MARCHIAFAVA presenta il volume degli atti del Primo Congresso internazionale della malaria tenutosi in Roma nel 1925, redatti dal prof. BASTIANELLI, segretario generale del Congresso.

L'Accademico Segretario Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando i tre volumi delle « Ricerche di Morfologia » di R. VERSARI, i « Principii scientifici di Elettrotecnica » di G. GRASSI, il « Manual of Meteorology » di SIR NAPIER SHAW, il quinto volume delle opere e della corrispondenza scientifica di Florentino Ameghino (« Paranà y Monte Hermoso », La Plata, 1916).

COMUNICAZIONI

Il Presidente annuncia che è presente alla seduta il prof. O. E. Kennelly dell'Università Harvard Cambridge Mass. al quale porge il saluto dell'Accademia.

Digitized by Google

Digitized by Google

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 gennaio 1927

AMEGHINO F. — Obras completas. Correspondencia científica. Vol. V. Paraná y Monte Hermoso. La Plata, 1916. 8°, pp. 1-521.

COMPTE-RENDU du premier Congrès international du paludisme. Publié par le Sécretaire général du Congrès. Rome, 1926. 4°, pp. 1-345.

DACOS F. — Étude expérimentale des phénomènes de phosphorescence (Extr. du « Bulletin de l'Association des Ingénieurs Electriciens »). Liège, 1926. 8°, pp. 1-54.

DE ANGELIS D'OSSAT G. — Temperatura dell'aria e del suolo a Perugia (IV Conferenza internazionale di pedagogia). Roma, 1925. 8°, pp. 1-18.

GRASSI G. — Principii scientifici della elettrotecnica. Torino, 1926. 8°, pp. I-VIII, 1--338.

GUIDI C. — Studi sperimentali su costruzioni in cemento armato. (Estr. dal « Rendiconto dell'undicesima Riunione dell'Associazione italiana per gli studi sui materiali da costruzione »). Torino, 1926. 8°, pp. 1-40.

HARRIS H. M. — Distributional Notes on Some Neotropical Bugs of the Family Nabidae, with Description of a new Species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1-4.

KIRK E. — Cymbiolium, a new Genus of Silurian Pentameroid Brachiapodis from Alaska. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1-5.

MARSHALL W. B. — New Land and Fresh-Wather Mollusks from Central and South America. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 69). Washington, 1926. 8°, pagine 1-11.

NAPIER SHAW. — Manual of Meteorology. Vol. I. Cambridge, 1926. 8°, pp. I-XX, 1-339.

NEUBERG I. — Bibliographie des triangles spéciaux. (Extr. des « Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège ». Tome XII). Bruxelles, 1924. 8°, pp. 1-54.

NEUBERG J. — Formules relatives aux points de Bracard. (Extr. de « Mathesis ». Tome XXXVII, pp. 11-13). Bruxelles, 1923. 8°.

NEUBERG J. — Géométrie et Mécanique. (Extr. des « Bulletins de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique ». 1922, pp. 587-591). Bruxelles, 1922. 8°.

NEUBERG J. — Mécanique élémentaire et géométrie du triangle. (Extr. de « Mathesis », pp. 241-245). Bruxelles, s. d. 8°.

NEUBERG J. — Mécanique et géométrie. (Extr. de « Mathesis », pp. 441-442). Bruxelles, s. d. 8°.

NEUBERG J. — Notes mathématiques. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Tome XLII, pagine 89-96). Louvain, 1922, 8°.

NEUBERG J. — Nouveaux triangles spéciaux. (Extr. de « Mathesis ». Tome XXXVI, pp. 257-259). Bruxelles, 1922. 8°.

NEUBERG J. — Sur certains groupes de trois cercles coaxiaux. (Extr. des « Mémoires

Digitized by Google

de la Société royale des Sciences de Liège ». Tomo X). Bruxelles, 1922. 8°, pp. 1-17.

NEUBERG J. — Sur les polygones podaires d'un quadrilatère plan. (Extr. des « Annales de la Société scientifiques de Bruxelles ». Tome XLI, pp. 296-333). Louvain, 1922. 8°.

NEUBERG J. — Sur l'actaëdre à faces triangulaires. (Extr. de « Annaes da Academia Polytechnica do Porto ». To. XIII, XIV). Coimbra, 1919, 1921. 8°, pagine 1-11; 1-12.

NEUBERG I. — Sur quelques transformations géométriques. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Tom. XXXVIII). Louvain, 1914. 8°, pp. 1-11.

NEUBERG J. — Sur un hexagone particulier. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Tom. XXIX, pp. 186-196). Bruxelles, s. d. 8°.

NEUBERG J. — Sur une transformation par affinité. (Extr. des « Annales de la Société scientifiques de Bruxelles ». Tome XXXVII). Louvain, 1912-13. 8°, pp. 1-49.

NEUBERG J. — Ueber die Kiepertsche Parabel. (Separat-Abdruch aus den « Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft ». Jahre 1926). Bern, 1911. 8°, pp. 1-11.

NEUBERG I. — Ueber die Schrötersche Raumkurve vierter Ordnung. (Sonderabd. aus « Archiv der Mathematik und Physik ». Band XIV, pp. 200-209). Leipzig, 1909. 8°.

NEUBERG J. — Ueber verknüpfte Determinanten vierter Ordnung. (Sonderabd. aus « Archiv der Mathematik und Physik ». Band XXIII, pp. 124-125). Leipzig, 1914. 8°.

NEUBERG J. — Ueber verknüpfte hyperboloidische Würfe. (Sonderabd. aus « Archiv der Matematik and Physik ». Band XX, pp. 57-61). Leipzig, 1912. 8°.

NEWTON I. — Principii di filosofia naturale; Teoria della gravitazione, con note critiche sullo sviluppo dei concetti della meccanica per cura di F. Enriques e U. Forti. Roma, 1925. 8°, pp. 1-215.

TATTERSALL W. M. — Crustaceaus of the Orders Euphausiacea and Mysidacea from the Western Atlantic. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°.

VERSARI R. — Ricerche di morfologia. Volumi III, IV, V, VI fasc. I. Roma, 1923-1926. 4°, pp. 1-270; 1-384; 1-422; 1-175; 1-118.

VICENTINI F. — Sulla diagnosi botanica della « Leptotrix Racemosa » e sulle sue relazioni con la moderna dottrina batteriologica. Chieti, 1926. 8°, pp. 1-40.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Jucci C. — Su l'eredità del tipo metabolico nei bachi da seta: le capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di Bombyx Mori (pres. dal Socio *F. Bottazzi*) . . . . . Pag. 47

Benedetti E. — Il Telencefalo dei Tritoni. (Contributo allo studio comparativo del sistema nervoso centrale degli Anfibi) (pres. dal Socio *E. Giacomini*) 52

PERSONALE ACCADEMICO

Garbasso A. (Presidente). — Rivolge ai Soci il suo augurio per il nuovo anno . 55

Paternò E. — A nome dell'Accademia ringrazia il Presidente . . . . . »

Parravano N. — Commemora il Socio *A. Peratoner* . . . . . »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Guidi C. — Presenta un suo opuscolo: « Studi sperimentali su costruzioni in cemento armato » . . . . . »

Marchiafava E. — Presenta il volume degli atti del Primo Congresso internazionale della malaria, redatti dal prof. *Bastianelli* . . . . . »

Castelnuovo G. (Segretario). — Presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando i tre volumi delle « Ricerche di Morfologia » di *R. Versari*; i « Principi scientifici di Elettrotecnica » di *G. Grassi*; il « Manual of Meteorology » di *Sir Napier Shaw*; il quinto volume delle opere e della corrispondenza scientifica di Fiorentino Ameghino (« Paranà y Monte Hermoso », La Plata, 1916). . . . . »

COMUNICAZIONI VARIE

Garbasso A. (Presidente). — Annuncia che è presente alla seduta il prof. *O. E. Kennelly*, al quale porge il saluto dell'Accademia . . . . . »

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella Seduta del 2 gennaio 1927 57

Digitized by Google

RENDICONTI - Gennaio 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 gennaio 1927

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

VOLTERRA V. — Sulle fluttuazioni biologiche . . . . . Pag. 3
ID. — Leggi sulle fluttuazioni biologiche 10
SOMIGLIANA C. — Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità. 11
CISOTTI U. — Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski 16
CORBINO M. — L'effetto Volta e il funzionamento della pila 21
ID. — Teoria elettronica della pila . . . . . »
CAMBI L. e CLERICI A. — Sui cianuri ferroso-ferrici . . . . . »
MILLOSEVICH F. — Le rocce a Corindone della Val Sessera (Prealpi Biellesi) . . 22
PETRI L. — Sul metodo di applicazione della luce di Wood in alcune ricerche di patologia vegetale. 32
BAGLIONI S., BRACALONI L. e GALAMINI A. — Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Variazioni della glicemia e dell'alcoolemia in seguito ad ingestione di bevande alcooliche o di saccarosio 34

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

TRICOMI F. — Limitazione delle soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali (pres. dal Socio *F. Severi*). 40
BOMPIANI E. — Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*). . . . . »
LANE E. P. — Quadriche aventi per generatrici le tangenti asintotiche in un punto di una superficie (pres. *Id.*) . . . . . »
PICONE M. — Sulle funzioni metarmoniche (pres. dal Socio *R. Marcolongo*) . . . »
SIRACUSANO N. — Una notevole deduzione della teoria di Bohr (pres. dal Socio *L. Puccianti*) . . . . . »
SPAMPINATO N. — Il problema della moltiplicazione complessa per un qualsiasi corpo puro di funzioni abeliane (pres. dal Socio *G. Scorza*) . . . . . »
BOZZA G. e DEVOTO G. — Sul calcolo dell'affinità chimica in base alle eutropie (pres. dal Socio *L. Cambi*) 41
DE CARLI F. — Borati anidri di argento, bario e zinco (pres. dal Socio *N. Parravano*) . . . . . »
PANICHI U. — Studi sui reticolati cristallini. Spazio molecolare e numero atomico (pres. dal Socio *F. Millosevich*) 47

(*Segue in terza pagina*).

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 16 gennaio 1927.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Biologia matematica. — *Leggi delle fluttuazioni biologiche.* Nota [1] del Socio V. VOLTERRA.

1. Nella Memoria: *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* [2] ho dato, nel § 3, le tre leggi delle fluttuazioni. Ho in parte estesa al *caso ereditario* la prima di esse nella mia recente Nota: *Sulle fluttuazioni biologiche* [3]. Il risultato ottenuto consiste in questo, che nel caso ereditario si conserva la proprietà delle infinite fluttuazioni dei numeri d'individui delle due specie, una delle quali si nutre dell'altra. Nessun resultato fu stabilito in quella Nota riguardo alla periodicità, che sappiamo sussistere nel caso non ereditario.

Mi permetto in questa Nota di procedere alla estensione delle altre due leggi le quali si mantengono, nella loro essenza, inalterate, e quindi conservano la loro forma semplice, sebbene l'analisi che conduce a dimostrarle sia piuttosto complessa [4].

2. Riprendiamo le equazioni (A) e (B) della Nota citata, le quali possono scriversi, tenendo conto che per $\tau > T_0$, $F_1(\tau) = F_2(\tau) = 0$,

$$(A') \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, N_2(t-\tau)\, d\tau\right)$$

$$(B') \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, N_1(t-\tau)\, d\tau\right)$$

(1) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1927.

(2) «Memorie della R. Accademia dei Lincei», S. VI, vol. II, fasc. III.

(3) «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», sedute 5 dicembre 1926 e 2 gennaio 1927 (questo volume, p. 3).

(4) Spero esporre in una prossima Nota questioni riguardanti la periodicità.

Digitized by Google

o anche

$$(A'') \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{t-T_0}^{t} F_1(t-\tau)\, N_2(\tau)\, d\tau\right)$$

$$(B'') \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_{t-T_0}^{t} F_2(t-\tau)\, N_1(\tau)\, d\tau\right).$$

Supporremo che ε_1 e ε_2 siano diverse da zero e positive e che γ_1, γ_2, F_1, F_2 non siano mai negative.

Da esse si deduce, se una almeno delle quantità γ_1 e Γ_1 è diversa da zero, e una almeno delle quantità γ_2 e Γ_2 è pure diversa da zero, siccome N_1 e N_2 sono sempre positive,

$$\varepsilon_1 > \frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} > -\gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\xi)\, N_2(t-\xi)\, d\xi$$

$$-\varepsilon_2 < \frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} < \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\xi)\, N_1(t-\xi)\, d\xi$$

e, integrando fra τ e t, essendo $\tau < t$,

$$(1) \qquad e^{-\varepsilon_1(t-\tau)} < \frac{N_1(\tau)}{N_1(t)} < e^{\gamma_1 \int_\tau^t N_2(\xi)\, d\xi + \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_1(\eta)\, N_2(\xi-\eta)\, d\eta}$$

$$(1') \qquad e^{\varepsilon_2(t-\tau)} > \frac{N_2(\tau)}{N_2(t)} > e^{-\gamma_2 \int_\tau^t N_1(\xi)\, d\xi - \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_2(\eta)\, N_1(\xi-\eta)\, d\eta}.$$

A cagione della (1') sarà

$$\gamma_1 \int_\tau^t N_2(\xi)\, d\xi + \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_1(\eta)\, N_2(\xi-\eta)\, d\eta <$$

$$< N_2(t) \int_\tau^t e^{\varepsilon_2(t-\xi)}\, d\xi \left(\gamma_1 + \int_0^{T_0} F_1(\eta)\, e^{\varepsilon_2 \eta}\, d\eta\right) < N_2(t)\, \frac{e^{\varepsilon_2(T_0+t-\tau)}}{\varepsilon_2}(\gamma_1 + \Gamma_1).$$

Le equazioni (1) e (1') potranno dunque scriversi

$$(2) \qquad N_1(t)\, e^{-\varepsilon_1(t-\tau)} < N_1(\tau) < N_1(t)\, e^{N_2(t)\frac{e^{\varepsilon_2(T_0+t-\tau)}}{\varepsilon_2}(\gamma_1+\Gamma_1)}$$

$$(2') \qquad N_2(t)\, e^{\varepsilon_2(t-\tau)} > N_2(\tau) > N_2(t)\, e^{-\gamma_2 \int_\tau^t N_1(\xi)\, d\xi - \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_2(\eta)\, N_1(\xi-\eta)\, d\eta}.$$

Se $t - \tau \leq T_0$, dalle equazioni precedenti seguirà,

$$(3) \qquad N_1(t)\, e^{-\varepsilon_1 T_0} < N_1(\tau) < N_1(t)\, e^{N_2(t)\frac{e^{2\varepsilon_2 T_0}}{\varepsilon_2}(\gamma_1+\Gamma_1)}$$

$$(3') \qquad N_2(t)\, e^{\varepsilon_2 T_0} > N_2(\tau) > 0.$$

Digitized by Google

Se poi $t - \tau \leqq T_0$ e nello stesso tempo $N_2 < K_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1}$ si avrà in conseguenza delle (3)

$$N_1(t)\, e^{-\varepsilon_1 T_0} < N_1(\tau) < N_1(t)\, e^{\varepsilon_1 m} \tag{4}$$

ove

$$m = \frac{1}{\varepsilon_2} e^{2\varepsilon_2 T_0} .$$

3. Supponiamo che al valore t del tempo corrisponda un massimo o un minimo di N_1, a cagione della (A') avremo

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, N_2(t-\tau)\, d\tau = 0$$

e, in virtù della (3'), se $F_1 > 0$,

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) > 0$$

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - N_2(t)\, e^{\varepsilon_2 T_0} \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, d\tau < 0$$

quindi, se $\gamma_1 > 0$, $\Gamma_1 > 0$ sarà

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1 e^{\varepsilon_2 T_0}} < N_2(t) < \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \tag{5}$$

mentre se $\gamma_1 > 0$, $\Gamma_1 = 0$ sarà $N_2(t) = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$.

Osserviamo ora che, in virtù del teorema VIII della Nota precedente, debbono esistere, col crescere indefinito del tempo, infiniti minimi di N_1 inferiori a K_1 ed infiniti minimi di N_2 inferiori a K_2; supponiamo che uno di questi minimi di N_2 corrisponda al valore t del tempo.

A cagione della equazione (B') sarà

$$\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t) - \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, N_1(t-\tau)\, d\tau = 0$$

e in conseguenza delle (4), se $F_2 > 0$,

$$\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t) - N_1(t)\, e^{-\varepsilon_1 T_0} \Gamma_2 > 0$$

$$\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t) - N_1(t)\, e^{\varepsilon_1 m} \Gamma_2 < 0$$

d'onde

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{-\varepsilon_1 T_0} \Gamma_2} > N_1(t) > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{\varepsilon_1 m} \Gamma_2} . \tag{5'}$$

Digitized by Google

Noi potremo dunque enunciare le proposizioni seguenti:

LEMMA I. - *Se* $\gamma_1 > 0$, *ai massimi e minimi di* N_1 *corrispondono valori di* N_2 *compresi fra i limiti seguenti*

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1 e^{\varepsilon_2 T_0}} \leqq N_2 \leqq \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} ;$$

i segni superiori corrispondono a $\Gamma_1 > 0$, *gl'inferiori a* $\Gamma_1 = 0$.

LEMMA II. - *Se uno almeno dei numeri* γ_2, Γ_2 *è maggiore di zero, ai minimi di* N_2 *inferiori a* K_2 *corrispondono valori di* N_1 *compresi fra i limiti seguenti*

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{-\varepsilon_1 T_0} \Gamma_2} \geqq N_1 \geqq \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{\varepsilon_1 T_0} \Gamma_2} ;$$

i segni superiori corrispondono a $\Gamma_2 > 0$, *gl'inferiori a* $\Gamma_2 = 0$.

LEMMA III. - *Se* $N_1(t_1)$ *e* $N_2(t_2)$ *sono minimi di* $N_1(t)$ *e* $N_2(t)$ *rispettivamente inferiori a* K_1 *e* K_2, *avremo*

$$(t_1 - T_0 \leqq \tau \leqq t_1) \quad , \quad N_1(\tau) < p_1 K_1 \quad , \quad p_1 = e^{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\gamma_1 + \Gamma_1}{\gamma_1} e^{2\varepsilon_2 T_0}\right)} .$$

$$(t_2 - T_0 \leqq \tau \leqq t_2) \quad , \quad N_2(\tau) < p_2 K_2 \quad , \quad p_2 = e^{\varepsilon_2 T_0},$$

supponendo $\gamma_1 > 0$ *e uno almeno dei numeri* γ_2, Γ_2 *maggiore di zero.*

4. Passiamo adesso a dimostrare il TEOREMA: *Se* $\gamma_1 > 0$ *e uno almeno dei numeri* γ_2 *e* Γ_2 *è maggiore di zero, il valore medio di* N_1, *fra un istante iniziale qualunque e un istante in cui raggiunge un minimo inferiore a* K_1, *tende verso* K_1 *col crescere indefinito del tempo nel quale il minimo viene raggiunto; ed il valore medio di* N_2, *fra un istante iniziale qualunque e un istante nel quale raggiunge un minimo inferiore a* K_2 *tende verso* K_2 *col crescere indefinito del tempo nel quale il minimo viene raggiunto.*

Osserviamo prima di tutto che le due equazioni (A'') e (B'') possono scriversi sotto una forma unica mediante l'equazione:

$$(C) \qquad (-1)^{i+1} \frac{dN_i}{dt} = N_i(t) \left(\varepsilon_i - \gamma_i N_{i+1}(t) - \int_{t-T_0}^{t} F_i(t-\tau) N_{i+1}(\tau) \, d\tau \right)$$

facendo la convenzione di sostituire i, e $i+1$ con i numeri 1, o 2 secondochè essi sono dispari o pari.

Ciò premesso dividiamo ambo i membri della (C) per $N_i(t)$ e integriamo fra il tempo iniziale t_0 e il tempo $t_{i+1} > t_0 + T_0$. Avremo:

Digitized by Google

$$(6)\quad (-1)^{i+1}\log\frac{N_i(t_{i+1})}{N_i(t_0)} = \varepsilon_i(t_{i+1}-t_0) - \gamma_i\int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(t)\,dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_{i+1}} dt\int_{t-T_0}^{t} F_i(t-\tau)\,N_{i+1}(\tau)\,d\tau\,.$$

L'ultimo integrale può scriversi

$$I_i = \int_{t_0}^{t_{i+1}} dt\int_{t_0-T_0}^{t_0} F_i(t-\tau)\,N_{i+1}(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_{i+1}} dt\int_{t_0}^{t} F_i(t-\tau)\,N_{i+1}(\tau)\,d\tau\,.$$

Applicando al secondo di questi integrali il principio di Dirichlet [1], si avrà

$$I_i = \int_{t_0}^{t_{i+1}} dt\int_{t_0-T_0}^{t_0} F_i(t-\tau)\,N_{i+1}(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\,d\tau\int_{\tau}^{t_{i+1}} F_i(t-\tau)\,dt$$

$$= \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_{i+1}(\tau)\,d\tau\int_{t_0}^{t_{i+1}} F_i(t-\tau)\,dt + \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\,d\tau\int_{0}^{t_{i+1}-\tau} F_i(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_{i+1}(\tau)\,d\tau\int_{t_0}^{t_{i+1}} F_i(t-\tau)\,dt + \int_{t_0}^{t_{i+1}-T_0} N_{i+1}(\tau)\,d\tau\int_{0}^{t_{i+1}-\tau} F_i(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_{t_{i+1}-T_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\,d\tau\int_{0}^{t_{i+1}-\tau} F_i(\xi)\,d\xi\,.$$

Ora osserviamo che nel primo termine e nel terzo termine della espressione precedente abbiamo

$$\int_{t_0}^{t_{i+1}} F_i(t-\tau)\,dt \leqq \Gamma_i \qquad , \qquad \int_{0}^{t_{i+1}-\tau} F_i(\xi)\,d\xi \leqq \Gamma_i$$

mentre nel secondo termine

$$\int_{0}^{t_{i+1}-\tau} F_i(\xi)\,d\xi = \int_{0}^{T_0} F_i(\xi)\,d\xi = \Gamma_i$$

giacchè in questo termine il più piccolo valore di $t_{i+1}-\tau$ è T_0 e $F_i(\xi)$ è zero per $\xi > T_0$.

(1) Con « principio di Dirichlet » si intende qui la nota trasformazione di integrali doppii

$$\int_a^b dx\int_a^x F(x,y)\,dy = \int_a^b dy\int_y^b F(x,y)\,dx\,.$$

Digitized by Google

Si avrà dunque

$$I_i = \Gamma_i \left\{ \theta' \int_{t_0 - T_0}^{t_0} N_{i+1}(\tau)\, d\tau + \theta'' \int_{t_{i+1} - T_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t_{i+1} - T_0} N_{i+1}(\tau)\, d\tau \right\},$$

ove θ' e θ'' denotano numeri compresi fra o e 1.

Potremo ancora scrivere

$$(7)\quad I_i = \Gamma_i \left\{ \theta' \int_{t_0 - T_0}^{t_0} N_{i+1}(\tau)\, d\tau - (1 - \theta'') \int_{t_{i+1} - T_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Supponiamo che al tempo t_{i+1}, N_{i+1} raggiunga un minimo inferiore a K_{i+1}, in virtù del Lemma III, sarà

$$\int_{t_{i+1} - T_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau < p_{i+1} K_{i+1} T_0 .$$

Denotiamo poi con M_{i+1} il massimo valore raggiunto da $N_{i+1}(\tau)$ nell'intervallo di tempo $(t_0 - T_0, t_0)$; esso sarà un valore finito indipendente da t_{i+1}, e avremo

$$\int_{t_0 - T_0}^{t_0} N_{i+1}(\tau)\, d\tau < M_{i+1} T_0 .$$

Se dunque θ''' e θ^{IV} sono due numeri rispettivamente compresi fra o e θ', e o e $1 - \theta''$ l'equazione (7) potrà sostituirsi con

$$I_i = \Gamma_i \left\{ \theta''' M_{i+1} T_0 - \theta^{IV} p_{i+1} K_{i+1} T_0 + \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Sostituendo nella (6) all'ultimo integrale I_i questa espressione trovata per esso, si avrà

$$(-1)^{i+1} \log \frac{N_i(t_{i+1})}{N_i(t_0)} = \varepsilon_i (t_{i+1} - t_0) - (\gamma_i + \Gamma_i) \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau -$$

$$- T_0 \Gamma_i \{ \theta''' M_{i+1} - \theta^{IV} p_{i+1} K_{i+1} \},$$

e quindi

$$\frac{1}{t_{i+1} - t_0} \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i + \Gamma_i} +$$

$$- \frac{1}{(\gamma_i + \Gamma_i)(t_{i+1} - t_0)} \left\{ (-1)^i \log \frac{N_i(t_{i+1})}{N_i(t_0)} - T_0 \Gamma_i (\theta''' M_{i+1} - \theta^{IV} p_{i+1} K_{i+1}) \right\}.$$

Consideriamo ora minimi inferiori a K_{i+1} che si hanno in tempi sempre più lontani, ossia facciamo crescere indefinitivamente t_{i+1}.

Digitized by Google

In virtù dei Lemma I e II, $N_i(t_{i+1})$ si manterrà compreso fra due limiti finiti positivi indipendenti da t_{i+1} onde $\log \frac{N_i(t_{i+1})}{N_i(t_0)}$ si manterrà sempre inferiore ad un limite finito, e la equazione precedente ci darà

$$\lim_{t_{i+1}=\infty} \frac{1}{t_{i+1} - t_0} \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i + \Gamma_i} = K_{i+1}$$

il che dimostra il teorema.

5. Le equazioni che regolano le fluttuazioni biologiche ereditarie sono le (I) e (II) della Nota citata, le quali si possono ricavare dalle (A) e (B) facendo rispettivamente $F_1 = 0$, e $\gamma_2 = 0$, mentre si mantengono diverse da zero e positive γ_1 e F_2, quindi anche Γ_2. Saranno dunque soddisfatte nel caso ereditario le condizioni di validità del teorema precedente.

Noi potremo chiamare *valore medio assintotico* o *media assintotica* del numero N di individui di una specie oscillante attorno ad un valore costante K, corrispondente ad uno stato stazionario, il limite della media di N calcolata per un periodo di tempo compreso fra un istante iniziale qualunque ed un istante di minimo di N inferiore a K, quando il suddetto periodo di tempo cresce indefinitamente.

Le medie assintotiche dei numeri N_1 e N_2 d'individui delle due specie saranno perciò, in virtù del teorema enunciato, K_1 e K_2.

Riassumendo dunque ciò che è stato ottenuto nella Nota precedente e ciò che è stato ora ottenuto, avremo che le tre leggi fondamentali delle fluttuazioni assumeranno, nel caso ereditario, la forma seguente:

1ª (Legge delle fluttuazioni). *I numeri di individui delle due specie oscillano indefinitamente attorno ai valori corrispondenti allo stato stazionario, passando, col crescere indefinito del tempo, per infiniti massimi e minimi.*

2ª (Legge della conservazione delle medie). *I valori medii assintotici dei numeri di individui delle due specie sono indipendenti dallo stato iniziale, e coincidono con i valori corrispondenti allo stato stazionario.*

3ª (Legge della perturbazione delle medie). *Se si cerca di distruggere uniformemente e proporzionalmente al loro numero gl'individui delle due specie, cresce la media assintotica del numero d'individui della specie mangiata e diminuisce quella del numero d'individui della specie mangiante.*

Infatti le medie assintotiche dei numeri d'individui delle due specie coincidendo con i valori corrispondenti allo stato stazionario $\frac{\varepsilon_2}{\Gamma_2}$ e $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ (giacchè $\gamma_2 = \Gamma_1 = 0$) sono indipendenti dalle condizioni iniziali. Inoltre distruggere uniformemente e proporzionalmente al loro nnmero gl'individui delle due specie equivale ad aumentare ε_2 ed a diminuire ε_1 lasciando inalterati Γ_2 e γ_1, quindi il primo valore medio cresce ed il secondo diminuisce.

Digitized by Google

Astrofisica. — *Il diametro orizzontale del sole nel 1925 e nel 1926.* Nota del Corrisp. G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *L'effetto Volta e il funzionamento della pila.* Nota [1] I del Socio O. M. CORBINO.

1. Da esperienze dirette, come anche dallo studio dei fenomeni termoionici e fotoelettrici, risulta ormai definitivamente accertato che due metalli in contatto creano nello spazio anche perfettamente vuoto che li circonda un campo elettrico il quale è, nei suoi effetti esterni, del tutto indistinguibile da quello che si otterrebbe attribuendo ai due metalli due potenziali elettrostatici diversi. Questo campo, se l'elettricità è in equilibrio, deve anche esistere al contatto dei due metalli, per virtù di un doppio strato che si forma in esso. La differenza dei potenziali è legata alle differenti energie di estrazione W_1 e W_2 dell'elettrone da due metalli diversi. La termodinamica insegna infatti che detti V_1 e V_2 i due potenziali e V la loro differenza dev'essere

$$W_1 - W_2 = eV - eT\frac{dV}{dT}$$

dove e è la carica dell'elettrone e T la temperatura assoluta.

In questa relazione V è l'effetto Volta, mentre il 2° termine rappresenta il calore corrispondente all'effetto Peltier, che è, come è noto, una piccolissima parte di eV.

La diversa energia W di vincolamento degli elettroni per i vari metalli, rivelata dai fenomeni termoionici e fotoelettrici, giustifica così la piccolezza dell'effetto Peltier che si considera come obbiezione insuperabile contro l'esistenza dell'effetto Volta. Invero il lavoro fornito dalla quantità di elettricità q nell'oltrepassare la differenza di potenziale di Volta V propria del doppio strato al contatto è nella massima parte impiegato a conferire agli elettroni l'energia necessaria ad abbandonare un metallo che li attira di più e passare ad un metallo che li attira di meno.

Riconosciuta l'esistenza dell'effetto Volta come proprietà intrinseca dei metalli, non è più giustificato dimenticarla nella teoria della pila, come si fa tuttora in Elettrochimica. Solo in una teoria statistica dovuta a Butler la

(1) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1927.

Digitized by Google

f. e. m. di Volta riprende la giusta considerazione per il computo della f. e. m. totale. Mi propongo in questo studio di contribuire alla chiarificazione dell'importante problema.

*
* *

2. La pila a gas ionizzato. – Per stabilire quali rapporti intercedono fra l'esistenza dell'effetto Volta e il funzionamento della pila voltaica, esamineremo prima due tipi di pile non idroelettriche, per le quali è più facile stabilire quelle relazioni.

Cominceremo dalla pila a gas ionizzato.

Introduciamo fra i due piatti metallici A e B, rilegati fra loro, un gas chimicamente inerte, esempio dell'argon, e ionizziamolo, per esempio, con un fascio di raggi X.

Se i piatti sono di egual metallo non esisterà alcun campo elettrico fra A e B; gli ioni dei due segni si ricombineranno in parte direttamente; gli altri urtando sui piatti cederanno in misura eguale tanto sull'uno che sull'altro le loro cariche opposte; è il noto fenomeno della ricombinazione degli ioni sulle pareti metalliche, ricombinazione che non dà luogo a fenomeni elettrici macroscopici, ma solo a uno sviluppo locale in forma di calore dell'energia di ricombinazione degli ioni medesimi.

Ma se i piatti A e B sono di metalli diversi gli ioni positivi, per l'esistente campo elettrico, si muoveranno prevalentemente verso B e i negativi verso A. Una corrente continua di elettroni traverserà il sistema dei due metalli, da A verso B, attraverso al contatto C e il metallo si riscalderà per il passaggio della corrente. L'energia svolta nel circuito sarà prelevata dall'energia di ricombinazione degli ioni, che in un certo senso riequilibrano le loro cariche attraverso all'intero circuito metallico, mentre senza il campo elettrico fra i due piatti l'energia corrispondente si sarebbe svolta, come calore, localmente sulle facce dei piatti dove avviene la ricombinazione.

Si riconosce da ciò come avvenga che la differenza di potenziale elettrostatica esterna tra i due metalli, la quale non sarebbe di per sè sola capace di alimentare una corrente continua con sviluppo permanente di energia, renda possibile ad una sorgente esterna di energia, quella che ionizza il gas tra i piatti, di funzionare da alimentatrice energetica della corrente. La differenza di potenziale elettrostatico fra i piatti disciplina in parte il moto degli ioni che sarebbe senza di essa pienamente disordinato; ed è tanto necessaria alla produzione della corrente da potersi ben considerare come la causa fisica di essa, pur senza essere la sorgente dell'energia svolta nel circuito.

Una pila come qui è stata descritta non è un semplice schema concettuale, ma può essere realizzata. Così avendo rinchiuso in un tubo contenente 100 millicurie di emanazione, e azoto a pressione ordinaria, due piccole

Digitized by Google

lamine di rame e di zinco affacciate, ho constatato in un galvanometro che rilega le lamine una corrente notevole, che può essere annullata intercalando nel circuito una forza elettromotrice dell'ordine di grandezza dell'effetto Volta, e opposta ad esso.

*
* *

3. La pila meccanica. - I piatti A e B di metalli diversi (fig. 1) siano uniti a due fili flessibili del corrispondente metallo, e questi siano in contatto permanente nel punto C. Inoltre il piatto B si possa avvicinare fino a B'.

L'esistenza di un campo elettrico permanente fra i piatti A e B richiede che sulle superfici di essi siano distribuite cariche elettriche opposte, le quali diverranno più intense nelle parti prospicienti dei piatti quando questi si

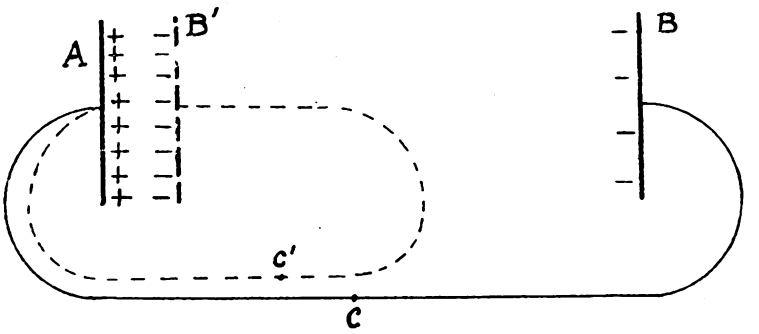


Fig. 1.

avvicinano verso la posizione A B'. Durante l'avvicinamento si renderà disponibile del lavoro meccanico; inoltre i fili di congiunzione saranno sede di una corrente elettrica e di riscaldamento per effetto Joule. L'origine dell'energia totalmente svolta si ritrova nel fatto che per l'avvicinamento gli elettroni passano da A a B, cioè da un metallo che ha una forza di vincolamento per gli elettroni a uno che ne ha una maggiore.

Essendo W_A e W_B i due potenziali interni o fotoelettrici dei due metalli, l'energia liberata per il passaggio di n elettroni sarà

$$n\,(W_B - W_A) = ne\,(V_B - V_A) = ne\,V$$

dove V è l'effetto Volta. In questa pila transitoria l'origine dell'energia meccanica e della corrente è perciò tutta nell'effetto Volta.

Se poi si tornano ad allontanare i piatti, si dovrà eseguire lavoro e il filo sarà percorso da una corrente di senso opposto. Con un moto periodico dei piatti si avranno delle correnti alternate, che possono essere

Digitized by Google

raddrizzate da un commutatore comandato dal meccanismo che muove i piatti. Correnti di questo tipo furono ottenute da Majorana; io ne potei accrescere di molto l'intensità immergendo nel mercurio ed estraendo una lamina di alluminio ricoperta di uno strato isolante dello spessore di qualche micron. Naturalmente in queste esperienze il lavoro di produzione della corrente permanente è fatto dal meccanismo motore.

4. La pila a elettrolito. – Si immagini che un sistema di due piatti di metalli diversi in contatto elettrico sia immerso in una o più soluzioni elettrolitiche, contenenti perciò ioni dei due segni. Si tratti per esempio, della pila Daniell (rame, solfato di rame, solfato di zinco, zinco). Si avrà una pila che avrà qualche analogia con quella a gas ionizzato. Avviene in essa che sotto l'azione del campo elettrico esistente fra gli elettrodi l'unione SO_4 accorre sul metallo elettrostatico positivo, lo zinco; ma anzichè neutralizzare la sua carica e liberarsi, ne stacca un ione di zinco e resta nel liquido carico come prima. Contemporaneamente il catione metallico, il rame, esce dal liquido e si libera sul catodo pure di rame. Il processo perciò lascia inalterato lo ione SO_4 e tutto si riduce al distacco di un ione Zn dallo zinco e all'entrata di un ione Cu nel rame *mentre nel circuito esterno, attraverso al contatto dei due metalli, due elettroni passano dallo zinco al rame.*

Si riconosce già, anche prima di ulteriori precisazioni, che a un fenomeno quale si manifesta nel modo indicato e che si può svolgere esattamente in senso inverso contrapponendo alla pila una sorgente esterna di forza elettromotrice capace di invertire il campo elettrostatico nell'elettrolito, non può essere estraneo il campo elettrostatico voltiano proprio degli elettrodi in contatto. I due elettrodi rame e zinco rilegati esternamente producono certamente un campo nel vuoto, e continueranno a *produrlo nel dielettrico costituito dal solvente*; questo campo potrà essere perturbato dagli eventuali altri campi, che possono formarsi al contatto dell'elettrolito, con gli elettrodi; ma se, come avviene nella pila Daniell chiusa in corto circuito, la differenza di potenziale regnante nel liquido è poco diversa da quella che i due elettrodi produrrebbero nel vuoto, o nel solo dielettrico, ciò vuol dire che quella perturbazione non dev'essere molto importante. Solo le pile di concentrazione, con elettrodi eguali fra loro, e costituiti col metallo che trovasi in soluzione, possono avere un funzionamento indipendente dall'effetto Volta degli elettrodi.

Ma più chiare illustrazioni sul meccanismo di funzionamento della pila e sulla importanza che ha in tale meccanismo l'esistenza dell'effetto Volta, ci saranno fornite da un modello della pila che ne riproduce con singolare corrispondenza tutte le caratteristiche teoriche e sperimentali.

Rappresenteremo un metallo con una soluzione, facendo corrispondere il corpo sciolto agli atomi-ioni del metallo e le molecole d'acqua agli elettroni. Inoltre paragoneremo un metallo immerso in una soluzione di un suo sale a una soluzione satura in contatto col corpo disciolto. Gli ioni

Digitized by Google

positivi interni del metallo corrispondono alle molecole del soluto, gli elettroni di conduzione del metallo corrispondono alle molecole del solvente, per esempio alle molecole di acqua; infine l'elettrolito con cui il metallo è in contatto sarà il soluto nella fase solida presente in soluzione. Il metallo può guadagnare o perdere solo elettroni in contatto con altri metalli nel vuoto; può guadagnare o perdere solo ioni metallici, e cioè ioni positivi attraverso all'elettrolito; così come la soluzione può perdere o guadagnare solo acqua in contatto con altre soluzioni attraverso a un setto semipermeabile o al vuoto; può perdere o guadagnare solo molecole del soluto in contatto con la fase solida di questo.

La combinazione rame-solfato di rame-solfato di zinco-zinco della pila Daniell (fig. 2) corrisponderà perciò a quella rappresentata dalla fig. 3.

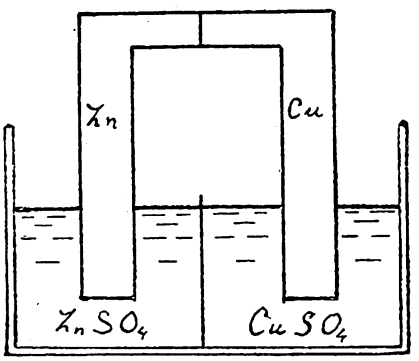


Fig. 2.

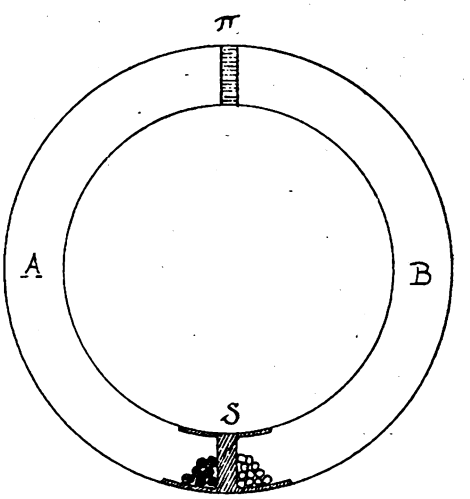


Fig. 3.

In un tubo circolare sono due soluzioni sature, di due corpi A e B, separate in II da un setto semipermeabile fisso e in S da uno stantuffo mobile; sulle due facce di S sono addensati i corpi A e B allo stato solido, così da mantenere sature le corrispondenti soluzioni anche durante il lento moto dello stantuffo. Sullo stantuffo S graveranno le due pressioni osmotiche diverse delle soluzioni, ed S si muoverà; al moto di S, per esempio verso sinistra, corrisponde una circolazione d'acqua pura attraverso al setto semipermeabile; una diminuzione di volume della soluzione A, con deposito del soluto A, e un aumento del volume della soluzione B con dissoluzione del soluto B. Il processo è continuo, fino a che lo stantuffo S nel suo moto raggiunge il setto II, cioè fino a che sparisce la soluzione A; naturalmente se è disponibile una sufficiente quantità di soluto B. Un bagno in cui è immerso tutto l'apparecchio provvede a mantenere costante la temperatura.

Digitized by Google

In perfetta corrispondenza con il modello, nella pila della fig. 2 gli elettroni circolano fuori della pila, dallo zinco al rame, attraverso al contatto che come abbiamo detto funziona da setto semipermeabile; corrispondentemente lo zinco si distrugge passando allo stato di ioni Zn nel liquido, mentre il rame dallo stato di ione Cu si deposita come metallo sulla lastra di rame, e ciò fino a che c'è zinco e solfato di rame disponibili. La differenza di pressione idrostatica tra A e B corrisponde alla differenza dei potenziali elettrostatici tra zinco e rame.

Perchè l'analogia con la pila sia più prossima, immagineremo che come la formazione di rame da ioni ed elettroni è una reazione esoenergetica, lo sia anche la formazione della soluzione; e perciò la dissoluzione senza lavoro osmotico, cioè quella che si studia al calorimetro, sia esotermica, in virtù di una reazione chimica fra il solvente e il soluto; esempio l'acqua e i sali di calcio.

E allora l'origine del lavoro di circolazione dell'acqua nel modello sarà l'energia di formazione dell'unità di volume delle due soluzioni, e precisamente il cosiddetto calore di dissoluzione con lavoro osmotico. La parte di questa energia di formazione che corrisponde alla produzione di lavoro risulta dalla teoria eguale appunto alla differenza delle pressioni osmotiche delle due soluzioni, ciò che del resto si ottiene anche direttamente dalla considerazione del modo di funzionamento dell'apparecchio.

Analogamente per la pila entreranno in gioco i diversi potenziali interni (fotoelettrici) dei due metalli e la variazione di energia al contatto degli elettrodi con l'elettrolito, per il passaggio dello ione Zn in soluzione, e per quello dello ione Cu sul metallo. L'energia complessivamente disponibile sarà data da quella propria della formazione di un certo peso di rame neutro partendo da ioni Cu che entrano dalla soluzione, e da due elettroni che entrano dal contatto bimetallico, diminuita dell'energia di formazione corrispondente di un peso equivalente di zinco neutro. Naturalmente queste energie di formazione del metallo non son da confondere col potenziale di ionizzazione doppia dell'atomo isolato.

L'analogia è ulteriormente seguibile. Se si apre il tubo della fig. 3 al posto del setto II, lasciando liberi gli estremi, le pressioni idrostatiche si equilibrano, e cessa la circolazione d'acqua. Così staccando i due metalli della pila al posto del contatto, il campo elettrico dentro l'elettrolito si annulla e il moto degli ioni si arresta. E come le due parti superiori e separate A, B del tubo potrebbero comunicare attraverso a un tubo contenente la fase vapore, che ricostituirebbe la circolazione, così una evaporazione elettronica fra Zn e Cu, tenuti per esempio nel vuoto e ad alta temperatura, ricostituirebbe la corrente, poichè anche questa comunicazione equivale a un contatto.

Ancora: se nel tubo della fig. 3 si fa una chiusura orizzontale tanto in A che in B, al di sopra si avrà la differenza di pressione idrostatica

Digitized by Google

creata dal setto semipermeabile, al disotto le pressioni liquide saranno all'incirca egualizzate dallo stantuffo mobile S. Si riconosce da ciò la funzione essenziale del setto semipermeabile, che crea e tende a mantenere la differenza di pressione idrostatica, mentre lo stantuffo mobile tende ad annullarla, donde la circolazione continua per la contrapposizione dei due.

Analogamente se si taglia orizzontalmente la parte superiore della coppia bimetallica, in alto si avrà la differenza di potenziale elettrostatica di Volta, in basso, fra i tronconi di Zn e di Cu, si avrà una differenza di potenziale elettrostatica molto minore. Può perciò a buon diritto affermarsi che il contatto dei metalli tende a mantenere la differenza dei potenziali elettrostatici; la immersione nel liquido tende a diminuirla, e che perciò l'equilibrio è turbato e si determina la corrente continua. *È l'interpretazione di Volta.*

Naturalmente ciò non esclude che la f. e. m. E della pila sia alquanto diversa dall'effetto Volta nel vuoto. Il valore esatto di E, in virtù dell'applicazione dei due principî della termodinamica deve corrispondere alla variazione totale della energia libera che ha luogo *nel totale circuito*, secondo la formula di Gibbs-Helmholtz, la quale non può essere contraria all'interpretazione sintetica data sopra, poichè è indipendente da ogni ipotesi sul meccanismo di produzione della corrente.

Esamineremo in una Nota seguente come possa dedursi il valore esatto di E partendo dai valori della energia di formazione dei metalli neutri, rame e zinco, da ioni metallici e da elettroni.

Fisica. — *Teoria elettronica della pila.* Nota II [1] del Socio O. M. Corbino.

In una Nota precedente abbiamo stabilite le relazioni qualitative tra l'effetto Volta e il meccanismo di funzionamento della pila a elettrolito. Ci resta a esaminare come si possa dedurre il valore della forza e. m. della pila partendo dai valori della energia di formazione dei metalli neutri, per esempio, rame e zinco, e di conseguenza come la f. e. m. totale si ripartisce fra i vari contatti che hanno luogo nella pila.

Nel caso della pila Daniell, per la quale è piccolo il termine correttivo termico di Helmholtz, la valutazione dell'energia $2Ee$ liberata per il passaggio di due elettroni, cioè per lo spostamento nell'elettrolito di un ione metallico bivalente, può farsi nel modo che segue:

Sia W_{Zn} il lavoro di estrazione fotoelettrico di un elettrone dallo zinco, e W_{Cu} quello del rame; la liberazione di energia al contatto per il passaggio di due elettroni dallo zinco al rame, trascurando l'effetto Peltier, sarà

$$2\left(W_{Cu}^{-} - W_{Zn}^{-}\right).$$

(1) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1927.

Digitized by Google

Al contatto rame-solfato di rame avviene il passaggio dello ione Cu dal liquido al rame, con sviluppo di una quantità di energia libera che chiameremo W^{+}_{Cu}.

Lo stesso dicasi per lo zinco, che svolgerà, per il passaggio dello ione Zn nel liquido, la quantità di energia libera $-W^{+}_{Zn}$. Avremo perciò in totale

$$(1) \qquad 2Ee = 2W^{-}_{Cu} + W^{+}_{Cu} - (2W^{-}_{Zn} + W^{+}_{Zn})$$

Si può così avere E, f. e. m. della pila, come un rapporto caratteristico di essa, presa globalmente, tra l'energia elettrica totalmente svolta nel circuito e la quantità di elettricità passata.

Procuriamo adesso di distribuire E fra i vari contatti che hanno sede nel circuito. Si noti intanto che la (1) può mettersi sotto la forma

$$E = \frac{1}{2e}(W^{+}_{Cu} - W^{+}_{Zn}) + \frac{1}{e}(W^{-}_{Cu} - W^{-}_{Zn})$$

Ma l'ultimo termine è l'effetto Volta V perciò

$$(2) \qquad E = V + \frac{1}{2e}(W^{+}_{Cu} - W^{+}_{Zn})$$

Se, come avviene nell'elemento Daniell, la f. e. m. della pila è assai vicina all'effetto Volta fra gli elettrodi, ciò significa che W^{+}_{Cu} e W^{+}_{Zn} sono poco diversi fra loro, e cioè che le energie liberate per il passaggio dello ione dal metallo alla soluzione si compensano in parte nei due elettrodi; o anche che il grosso del lavoro della pila è dato dal passaggio degli elettroni dallo zinco al rame.

Questo risultato non deve sorprenderci. Occorre infatti chiarire un punto di importanza notevole.

L'elettricità può passare da un metallo all'altro solo allo stato di elettroni; da un metallo ad un elettrolito solo allo stato di ioni metallici. Ma una proprietà è comune a tutti i passaggi. A ogni contatto dove esiste dalle due parti una diversa energia di vincolamento per l'elettricità, esiste anche certamente una differenza di potenziale elettrostatico, cioè un campo elettrico esterno, e un doppio strato al contatto, equivalente alla differenza di energia; e viceversa a ogni contatto ove si constata tra le due parti una differenza di potenziale elettrostatico con un campo elettrico esterno, esiste una differenza di energia di vincolamento per l'elettricità tra le due panti medesime, e quindi, in un certo senso, una sorgente (positiva o negativa) di energia per il passaggio di elettricità attraverso al contatto. Da questo lato nessuna differenza può farsi fra ciò che avviene in ciascuno dei tre contatti principali della pila.

Digitized by Google

Pertanto se le grandezze W^{+}_{Cu} e W^{+}_{Zn}, (variazioni di energia libera per il passaggio di un ione dal metallo al liquido), sono diverse da zero, esisterà una differenza di potenziale equivalente fra metallo liquido e un campo elettrico esterno fra loro; e inoltre poichè esiste certamente la differenza di potenziale elettrostatica fra i due metalli al contatto, e cioè il campo elettrico esterno, esisterà certamente al contatto una sede di variazione di energia, metallo-elettronica, per il passaggio di elettroni da un metallo all'altro. Sola differenza fra i tre contatti è la diversa natura del ione elettrico che li può traversare: e cioè l'elettrone al contatto bimetallico, lo ione metalllico ai due contatti con gli elettroliti; ma tutti e tre contribuiscono alla produzione della corrente, con le rispettive variazioni energetiche, per il movimento delle cariche, e i corrispondenti doppi strati che ne derivano. Non è perciò giustificato dimenticare il primo e tener presenti solo gli altri due. *La corrente deriva dal fatto che la somma algebrica delle potenze dei tre doppi strati non è nulla.*

Considerando la formola (1) abbiamo detto che essendo E vicino V, risulta che W^{+}_{Cu} e W^{+}_{Zn} sono vicini fra loro; ma potrebbero, ciascuno, essere molto grandi o molto piccoli; a W^{+}_{Cu} e a W^{+}_{Zn} corrispondono le differenze di potenziale metallo-liquido, che Volta considerava molto piccole, ciò che non è necessario, poichè solo la differenza interviene nel valore di E.

Tali differenze di potenziale possono pure considerarsi, come nella formola di Nenst, dipendenti dalla concentrazione degli ioni metallici nella soluzione. Esse dovrebbero però essere misurate *elettrostaticamente*, non con i metodi soliti della elettrochimica *i quali trascurano deliberatamente i salti di potenziale elettrostatico ai contatti dei metalli*, e sono sempre soggetti alla incertezza del cosiddetto punto zero dei potenziali assoluti elettrolitici.

La conoscenza della differenza di potenziale elettrostatica fra Cu e $CuSO_4$ darebbe W^{+}_{Cu} e analogamente per lo zinco.

E allora, avendosi dai dati fotoelettrici anche $2W^{-}_{Cu}$ si potrebbe ricostituire il totale lavoro di formazione della miscela - ioni metallici, elettroni – che costituisce il metallo neutro. Questi dati sarebbero di notevole interesse; essi fornirebbero per differenza fra rame e zinco la f. e. m. della pila Daniell. Si giunge nella ordinaria teoria della pila Daniell a un valore esatto della f. e. m. considerando invece la variazione di energia per la formazione del solfato di zinco e la scomposizione del solfato di rame, e quindi la differenza dei rispettivi calori di formazione

$$(Zn, O, SO_3, \text{acqua}), \text{ e } (Cu, O, SO_3, \text{acqua})$$

determinati dal Thomsen. Ma si fanno con ciò intervenire degli elementi del tutto estranei all'effettivo funzionamento della pila, che è praticamente indipendente dalla presenza del radicale acido SO_4; quegli elementi estranei

Digitized by Google

si eliminano naturalmente nell'eseguire la differenza fra i due calori di formazione.

Se, però, invece di solfati si trattasse, ad esempio, di nitrati, o in genere di sali qualunque, occorrerebbe ogni volta, per il calcolo della f. e. m., ricorrere ad altre esperienze termochimiche, pure ottenendosi, come è noto per la legge di Hess, lo stesso numero come differenza dei calori di formazione dei sali acquosi omologhi di Cu e di Zn.

Assai più semplicemente la teoria elettronica prende in considerazione le energie di formazione degli elettrodi, che non dipendono dalla natura del radicale acido, ma solo e, in piccola parte, dalla concentrazione degli ioni metallici nella soluzione. La stessa semplificazione e unificazione concettuale si ha del resto nella teoria di Nernst, nella quale interviene solo la pressione di soluzione del metallo e la pressione osmotica degli ioni metallici nella soluzione; mentre non entra in conto la presenza dell'anione acido.

A questa interpretazione, che inverte l'importanza relativa attribuita comunemente al contatto bimetallico e ai contatti con gli elettroliti, si potrebbe obiettare che il metallo rame si fabbrica, bensì, con ioni metallici che vengono dall'elettrolito e con elettroni che vengono dal contatto bimetallico; ma che la costituzione del metallo neutro avviene in definitiva al contatto con l'elettrolito. Ma se ciò fosse a questo contatto si dovrebbe trovare la differenza di potenziale elettrostatica corrispondente all'energia globale di formazione $W^{+}_{Cu} + 2W^{-}_{Cu}$ che chiameremo Ω_{Cu}, e al contatto $Zn - ZnSO_4$ si avrebbe la differenza di potenziale corrispondente a Ω_{Zn}; dalla loro combinazione sorgerebbe la f. e. m. totale E.

Ora, per le considerazioni già svolte, le differenze di potenziale di cui stiamo parlando sono quelle elettrostatiche, cui corrisponde perciò un campo elettrico esterno. Ma se in una pila, per esempio, una Daniell, gli elettrodi di rame e di zinco vengono prolungati in due piatti pure di rame e zinco formanti un condensatore, questo si carica poco, e cioè solo fino alla differenza fra 1.06 volt (f. e. m. totale della pila) e l'effetto Volta zinco-rame (circa 0.86 volt). Se fra i due elettrodi, a pila aperta, si ha una così piccola differenza di potenziale elettrostatica, sarà pure piccolo il contributo dato dai contatti liquido-metallo, e liquido–liquido alla f. e. m. totale.

Si noti inoltre che quando constatiamo la formazione di *metallo neutro* dove si deposita il rame, ciò non significa che si sono depositati *atomi neutri*, poichè anzi è ben probabile che nel metallo esistano solo ioni positivi, privi degli elettroni di valenza, e una fitta nube interna di elettroni di conduzione; cosicchè nel costituire il metallo neutro può ben avvenire che lo ione positivo metallico entri dall'elettrone e *resti tale*, ciò allo stato di ione, mentre gli elettroni entrano dal contatto bimetallico e si mescolano alla nube elettronica.

Sono pertanto quattro le grandezze che caratterizzano il funzionamento della pila: contributo ionico W^{+}_{Cu} e contributo elettronico $2W^{-}_{Cu}$ relativi al

Digitized by Google

rame; e i due elementi analoghi relativi allo zinco. La parte $2(W^{-}_{Cu} - W^{-}_{Zn}) = 2eV$ dove V è l'effetto Volta non può essere fornita che dall'efflusso elettronico, come risulta anche dal fatto che nella pila meccanica della Nota precedente un lavoro equivalente a V è compiuto appunto ed esclusivamente dallo spostamento di elettroni poichè manca l'elettrolito. Solo il resto del lavoro, $W^{+}_{Cu} - W^{+}_{Zn}$ può nella pila idroelettrica essere fornito dall'elettrolito; e perciò, essendo V molto vicino a E, la quasi totalità del lavoro ottenuto spetta all'assorbimento di elettroni che il rame compie dallo zinco, cioè alla stessa causa dell'effetto Volta, mentre in gran parte si compensano i lavori di spostamento dello ione metallico. È il risultato apparentemente paradossale che avevamo enunciato.

Conclusione. – Accertata l'esistenza dell'effetto Volta anche nel vuoto, e perciò indipendentemente da ogni azione chimica, la coppia bimetallica, ad esempio rame-zinco, costituisce un mezzo naturale e perpetuo atto a produrre in uno spazio, anche di grandi dimensioni, un campo elettrostatico; così come un magnete permanente (però con minore stabilità) crea intorno a sè un campo magnetico. L'origine dell'energia di questo campo elettrostatico è puramente fisica; essa deriva dalla diversa energia di vincolamento degli elettroni di conduzione ai diversi metalli.

Nella pila a ionizzazione, che si ottiene immergendo una coppia bimetallica in un gas ionizzato, il campo elettrostatico dovuto all'effetto Volta produce una corrente permanente senza fornire energia propria, ma in quanto esiste una sorgente esterna di energia. In tal caso il campo elettrostatico determina semplicemente, senza seguire lavoro, un disciplinamento direttivo del moto degli ioni, e quindi una corrente nel filo che unisce i due piatti; l'energia è quella di ricombinazione degli ioni. Ma il campo non può essere trascurato o ignorato. Anche in una dinamo Pacinotti a magnete permanente la corrente è prodotta per virtù del lavoro meccanico esterno, ma il campo induttore è condizione indispensabile a che quel lavoro diventi energia elettrica.

Nelle pile idroelettriche il compito dell'effetto Volta è assai più importante; così nella pila Daniell l'energia è prodotta per virtù della formazione del rame neutro e della distruzione dello zinco neutro; e, come si è visto, in questo processo si deve ritenere che la maggior parte del lavoro ottenuto sia dovuto al passaggio elettronico, e la maggior parte della f. e. m. abbia sede al contatto dei due metalli diversi.

Il caso estremo si ha nella pila meccanica, dove lo spostamento elettronico da solo può produrre lavoro elettrico e lavoro meccanico. Basta pensare a due dischi di rame e di zinco neutri di notevole superficie, situati a distanza e rilegati da un filo. Per il loro avvicinamento si produrrà una corrente e un lavoro meccanico di attrazione, dovuti al fatto che degli elettroni abbandonano il disco di zinco per accorrere a quello del rame che

Digitized by Google

li attira di più. La piccolezza della capacità elettrostatica limita la possibilità di afflusso di un gran numero di elettroni; ma se su un blocco di rame si fanno accorrere insieme elettroni da una parte e ioni positivi dall'altra, così da lasciare immutato il potenziale elettrostatico, le correnti e le energie ottenute possono diventare molto maggiori. È questo che in fondo avviene nella pila idroelettrica. Ecco perchè la spiegazione del funzionamento della pila sulla base dell'effetto Volta non può condurre a contradizioni sostanziali, e va anzi considerata come scientificamente corretta.

Chimica. — *Sui cianuri ferroso-ferrici* [1]. Nota [2] del Corrispondente L. Cambi e Ada Clerici.

L'antica quistione della struttura dei ben noti sali bleu, cianuri ferroso-ferrici, è ancora oggetto di discussione per precisare l'aggruppamento cromogeno in essi contenuto. Rimandiamo in merito alla vasta letteratura esistente.

Esponiamo in questa Nota alcuni dati sperimentali che permettono di considerare tale problema sotto un nuovo aspetto. Le nostre osservazioni riguardano da un lato i sali corrispondenti ai cosidetti bleu di Prussia e di Turnbull prodotti dai ferro- e ferri-pentacianuri; dall'altro i sali ferrosi e ferrici derivati dai metallo-esacianuri aventi in generale l'aggruppamento $[M(CN)_6]$.

I. — Bleu ferro-ferri-pentacianuri.

È noto che in generale i ferro e ferri-pentacianuri presentano rispettivamente, con i sali ferrici o ferrosi, reazioni analoghe agli esacianuri. Si presentava la quistione se nei bleu pentacianuri è contenuto l'aggruppamento $Fe(CN)_5$, giacchè, come è pure noto, questo si trasforma facilmente in quello esa, ad es., secondo lo schema

$$6\,[Fe(CN)_5H_2O]''' \xrightarrow{+\,OH'} 5\,[Fe(CN)_6]'''' + Fe(OH)_2\,[3].$$

Per il problema della struttura su accennato interessava stabilire le reazioni di formazione e di scissione dei bleu pentacianuri.

1. *Ferro-acquo-pentacianuro ferrico.* – $Fe_2(CN)_5H_2O \cdot Acq.$ – Venne preparato versando a 0° una soluzione al 10 % circa di $Na_3[Fe(CN)_5H_2O]$ in altra di cloruro ferrico al 2 % in debole eccesso. Il precipitato bleu venne lavato per decantazione ed infine, asciugato su piastra porosa, analizzato

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1927.

(3) L. Cambi, questi «Rend.», III (6°), I (1926), 8.

Digitized by Google

come tale. I risultati analitici corrispondono al rapporto 2 Fe : 5 CN. La scissione con KOH 2n. a 0° fornisce ossido ferrico idrato nel rapporto 1 Fe : 5 CN. Dalla soluzione alcalina abbiamo separato $K_3[Fe(CN)_5H_2O]$. Si ha cioè la reazione

$$Fe_2(CN)_5H_2O + 3OH' \longrightarrow [Fe(CN)_5H_2O]''' + Fe(OH)_3 .$$

Il bleu sospeso in acqua e portato a 100° per 2' si scinde con alcali, dopo raffreddamento a 0°, producendo penta- ed esa-ferrocianuro; riscaldato per 6' fornisce soltanto ferrocianuro. Analogamente, il bleu essicato, a lungo perde le reazioni dei pentacianuri.

2. *Ferri-acquo-pentacianuro ferroso.* - $Fe_2(CN)_5H_2O \cdot Acq.$ - Venne preparato dal $Na_2[Fe(CN)_5H_2O]$ e da solfato ferroso in modo analogo al precedente sale: è affatto simile a questo. I componenti risultarono nel rapporto 2 Fe : 5 CN. Decomposto con KOH nel modo anzidetto fornisce ossido ferrico idrato e ferro-acquo-pentacianuro. Il ferro separato come ossido ferrico corrispondeva a 1.12 Fe : 5 CN. Il bleu sospeso in acqua e portato a 100° si comporta come il precedente.

3. *Ferro-ammoniaco-pentacianuro ferrico.* - $Fe_2(CN)_5NH_3 \cdot Acq.$ - Precipita con le soluzioni del sale sodico come il sale n°. 1. Il colore è più chiaro dei bleu generati dagli acquosali. All'analisi è risultato 2 Fe : 6 N. Scisso a 0° con alcali fornisce ossido ferrico idrato e soluzione di ferro-ammoniaco-pentacianuro. Il ferro separato dall'alcali corrisponde a 1 Fe : 6 N.

4. *Ferri-ammoniaco-pentacianuro ferroso.* - $Fe_2(CN)_5NH_3 \cdot Acq.$ - È stato preparato analogamente al sale n°. 2. È di colore più chiaro di questo. L'analisi ha indicato il rapporto 2 Fe : 6 N. Decomposto con l'alcali genera ferro-ammoniaco-pentacianuro alcalino ed ossido ferrico idrato.

5. *Ferro-solfito-pentacianuro ferrico.* - $Fe_8(CN)_5SO_3 \cdot Acq.$ - Preparato dal sale $Na_5[Fe(CN)_5SO_3]$ è di colore azzurro carico. I dati dell'analisi corrispondono ai rapporti 8 Fe : 14.01 CN : 3.5 SO_3. Si decompone con gli alcali in modo analogo ai precedenti. L'ossido ferrico separato per scissione corrisponde a 5.1 Fe : 8 Fe (totale). Nella soluzione alcalina si riconosce il ferro-solfito-pentacianuro alcalino.

6. *Ferro-nitrito-pentacianuro ferrico.* - Il bleu preparato dal sale $Na_4[Fe(CN)_5NO_2]$ è di composizione variabile. Nella soluzione ferrica residua dalla sua precipitazione è presente nitroprussiato, dovuto alla nota trasformazione del nitrito-cianuro operata dall'ambiente acido per sale ferrico.

Generalmente il bleu separato contiene un eccesso di ferro-ferrico. Si scinde con gli alcali a 0° rigenerando nitrito-pentacianuro. Ne deve quindi contenere l'aggruppamento.

7. *Ferri-nitrito-pentacianuro ferroso.* – Il comportamento del sale $K_2Na[Fe(CN)_5NO_2]$ [1] con i sali ferrosi è singolare. Si precipita dapprima

(1) K. A. Hofmann, «Liebig's Ann.», 312 (1900), I.

Digitized by Google

un bleu intenso, questo si trasforma rapidamente in un precipitato verdastro e nella soluzione si nota la presenza di nitroprussiato. Si osserva poi una lenta separazione di nitroprussiato ferroso, roseo, accompagnato da idrato ferrico che rimane più a lungo in sospensione.

Analogamente noi osservammo una riduzione quantitativa del ferri-nitrito-pentacianuro alcalino trattandolo con quantità equimolecolare di idrato ferroso in atmosfera inerte. Osservammo inoltre analoga riduzione in mezzo acido con ioduro di potassio. Verificammo cioè le seguenti reazioni:

$$Fe(OH)_2 + [O_2\overset{III}{N}Fe(CN)_5]''' + H' \longrightarrow Fe(OH)_3 + [\overset{II}{ON}Fe(CN)_5]''$$

$$HI + [O_2\overset{III}{N}Fe(CN)_5]''' + H' \longrightarrow I + [\overset{II}{ON}Fe(CN)_5]'' + H_2O\ .$$

Questa facile riduzione dell'aggruppamento del cianuro ferrico a nitroprussiato spiega l'instabilità del bleu ottenuto con i sali ferrosi. Infatti questi si decompone generando idrato ferrico e nitroprussiato il quale, con l'eccesso di sale ferroso presente, fornisce nitroprussiato ferroso [1].

8. *Nitroprussiato ferroso.* - $Fe_2(CN)_5NO \cdot Acq.$ - Il sale è noto. Precipita con il colore roseo comune ad altri nitroprussiati insolubili. Si scinde rigenerando il nitroprussiato. Costituisce una eccezione nella serie degli analoghi ai bleu di Turnbull che abbiamo descritti.

Riassumendo, dai fatti su esposti risulta che gli aggruppamenti $[Fe(CN)_5X]$ possono manifestare funzioni cromogene analoghe a quelle dei gruppi $[Fe(CN)_6]$; che cioè gli aggruppamenti contenuti nei cianuri-ferroso-ferrici possono conservare la distribuzione coordinativa degli ioni complessi dei sali alcalini da cui derivano; che infine non è sufficiente la presenza di atomi ferrosi e ferrici per dare i cianuri bleu, come lo dimostra il caso del nitroprussiato ferroso.

II. — Sali di ferro dei metallo-esacianuri.

In relazione alla quistione che ci occupa abbiamo esaminato i sali ferrosi seguenti, noti dalle antiche ricerche,

1° $Fe_3[Co(CN)_6]_2$ 2° $Fe_3[Cr(CN)_6]_2$ 3° $Fe_3[Mn(CN)_6]_2$ [2]

che preparammo dai sali potassici corrispondenti.

(1) Il nitrito-ferro-pentacianuro, come abbiamo descritto, dà luogo ad un bleu stabile che mostra contenere l'aggruppamento dello stesso pentacianuro. In base alla struttura che noi assegneremo ai bleu è probabile che il diverso comportamento dei due sali, ferri-nitrito ferroso e ferro-nitrito ferrico, sia dovuto ad una diversa struttura del gruppo $-NO_2$. Ci riserviamo di ritornare su questo argomento.

(2) Come è noto il cromicianuro alcalino è giallo; il manganicianuro roseo.

Digitized by Google

Il primo è *incoloro*, debolmente verde quando è essiccato. Si decompone con gli alcali, in atmosfera inerte, con formazione di idrato ferroso e cobalticianuro alcalino.

Il secondo è di colore *rosso-cupo*. Di esso notammo una scissione con gli alcali in due tempi: si decompone a freddo con formazione di cromicianuro alcalino e di un residuo bruno insolubile, che a sua volta a caldo dà luogo ad una soluzione contenente ferrocianuro e ad un residuo con idrato cromico. A 100° il sale rosso si scinde con gli alcali generando direttamente ferrocianuro.

Il terzo sale, *bleu-verdastro*, si decompone con gli alcali in ferrocianuro ed idrato manganico, come è già noto [1].

Cioè, il cobalticianuro ferroso si comporta come un sale ferroso insolubile normale, analogamente al nitroprussiato ferroso; invece, i sali prodotti dal cromi- e manganicianuro, l'uno parzialmente, l'altro totalmente, presentano lo scambio indicato dallo schema

$$Fe(OH)_2 + OH' + [M(CN)_6]''' \longrightarrow M(OH)_3 + [Fe(CN)_6]'''' ,$$

che trova riscontro nella reazione complessiva che si realizza con la scissione alcalina dei bleu di Turnbull

$$Fe(OH)_2 + OH' + [Fe(CN)_6]''' \longrightarrow Fe(OH)_3 + [Fe(CN)_6]'''' .$$

Da questi fatti si deduce che il cobalticianuro ed il nitroprussiato ferrosi possono essere rappresentati con le formole $Fe[Fe(CN)_5NO]$, $Fe_3[Co(CN)_6]_2$, che indicano l'ione ferroso trattenuto nella cosidetta seconda sfera del complesso di Werner; che per contro i sali ferrosi colorati cromi, mangani, ferricianuri appartengano alla classe dei complessi polinucleari del tipo

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \cdot & CN & \cdot & CN & \cdot & CN & \cdot & CN & \cdot & \\ \cdot & Fe & \cdot CN \cdot & Cr & \cdot CN \cdot & Fe & \cdot CN \cdot & Cr & \cdot CN \cdot & Fe & \cdot \\ & \cdot & CN & \cdot & CN & \cdot & CN & \cdot & CN & \cdot & \end{array} \quad (2)$$

Questa struttura, che implica l'esistenza dei legami fra i diversi nuclei, trova fondamento nei processi di scissione che abbiamo descritti e che indicano appunto la concorrenza fra i diversi atomi metallici a combinarsi con i gruppi —CN.

Ricordiamo inoltre che il $Co_3[Co(CN)_6]_2 \cdot Acq.$ è un sale cobaltoso normale: è roseo, si disidrata assumendo colore azzurro, per riprendere il colore primitivo idratandosi. I sali ferrici dànno un precipitato rossastro col $K_4[Co(CN)_6]$ (sale violaceo) che si trasforma rapidamente, assumendo co-

(1) Straus, «Z. Anorg. Chem.», 9, (1895), 6.

(2) Indichiamo valenze e controvalenze in modo affatto schematico senza distinzione.

Digitized by Google

lore rossiccio, in cobalticianuro ferroso ferrico, come noi abbiamo osservato. In questo caso pur verificandosi il processo

$$Fe^{\cdots} + [Co(CN)_6]''' \rightarrow Fe^{\cdot\cdot} + [Co(CN)_6]'''$$

non si ha formazione di sali colorati, in accordo al comportamento predetto del cobalticianuro ferroso.

L'alto grado di stabilità, nelle condizioni di reazione con i sali ferrosi, dei due ioni $[Co(CN)_6]'''$ e $[Fe(CN)_5NO]''$ non permette il collegamento polinucleare predetto. È ben noto d'altra parte che i cobalticianuri sono i più stabili cianuri complessi; che il nitroprussiato resiste all'azione riducente degli ioduri in mezzo acido. Tale stabilità manifestano anche verso l'ione ferroso. Per contro la decomponibilità dei manganicianuri, dei cromicianuri, la reattività ed il potere ossidante dei ferricianuri alcalini corrisponde alla formazione dei sali anomali colorati su indicati.

Tenendo conto di quanto abbiamo osservato con i pentacianuri del ferro e dei fatti notati nei sali di ferro dei diversi metallo-esacianuri, l'aggruppamento cromogeno dei cianuri colorati può ricondursi, con molta probabilità, indicando in via affatto schematica le diverse valenze, a

$$\begin{array}{ccc} \cdot\ \cdot CN\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot CN\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot CN\cdot\ \cdot \\ \overset{II}{\cdot}Fe\cdot CN\cdot\overset{III}{Cr}\cdot & \overset{II}{\cdot}Fe\cdot CN\cdot\overset{III}{Mn}\cdot & \overset{II}{\cdot}Fe\cdot CN\cdot\overset{III}{Fe}\cdot \\ \cdot\ \cdot CN\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot CN\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot CN\cdot\ \cdot \\ \text{(rosso-bruno)} & \text{(verde-azzurro)} & \text{(azzurro)} \end{array}$$

Questi aggruppamenti, derivanti dalla struttura polinucleare che abbiamo ammessa, recano nella catena polimera quella maggiore libertà degli elettroni di valenza [1], cui verosimilmente si deve l'elevato potere assorbente della luce dei composti intensamente colorati, che è collegata in molti casi con l'estrinsecazione delle valenze secondarie [2].

La struttura che ammettiamo nei cianuri ferroso-ferrici deve probabilmente estendersi ai diversi composti ferroso-ferrici, che presentano colorazioni analoghe [3], ed a numerosi complessi contenenti uno stesso elemento a due diversi gradi di valenza.

Una conferma indiretta di tale struttura ci è data anche dalle relazioni ben note che possiamo rappresentare con lo schema

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{II}{Fe}(CN)_3\overset{II}{Fe} & - \ominus \longrightarrow & \overset{II}{Fe}(CN)_3\overset{III}{Fe} & - \ominus \longrightarrow & \overset{III}{Fe}(CN)_3\overset{III}{Fe}, \\ \text{(incoloro)} & & \text{(azzurro)} & & \text{(verde-bruno)} \end{array}$$

e che richiamano il comportamento di molte sostanze organiche colorate.

(1) *Gelockerte Valenzelektrone*, degli Autori tedeschi.
(2) W. Biltz, «Z. Anorg. All. Chemie», 127 (1923), 169, 174.
(3) Vedi Biltz, loc. cit. e K. A. Hofmann, «Lehrbuch Anorg. Chemie» (1924), 62.

Digitized by Google

Ci riserviamo di estendere le ricerche su gli argomenti trattati. Ma notiamo fin d'ora che la nostra interpretazione supera la vecchia discussione se i bleu siano ferro o ferricianuri [1]. Il ferro ferrico risulta, in mezzo alcalino per lo meno, più labilmente legato di quello ferroso ai gruppi —CN, ma i legami fra questi gruppi e gli atomi del metallo nei due gradi di valenza sono della stessa natura e nei bleu non può sussistere l'ione ferro o ferricianidrico [2].

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace.* Nota di E. Bompiani presentata [3] dal Socio G. Castelnuovo.

1. – Forme differenziali invarianti associate ad una equazione di Laplace.

L'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} + cx = 0 \qquad (1)$$

(a, b, c funzioni di u e v) possiede notoriamente due *invarianti relativi* [4]

$$h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab - c \quad , \quad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab - c\,;$$

essi non si alterano quando si cambi x in $\lambda(u, v)\,x'$, mentre per una trasformazione delle variabili indipendenti del tipo $u = \varphi(u')$ e $v = \psi(v')$ si ha, per l'equazione trasformata, $h' = h\varphi'\psi'$, $k' = k\varphi'\psi'$. Sicchè h/k è *invariante assoluto* della (1) per le trasformazioni dette [5].

(1) Vedi K. A. Hofmann, loc. cit., 624; Fr. Ephraim, « Anorg. Chemie » (1923), 238.

(2) Con la struttura polinucleare si può chiarire anche la costituzione del violetto di Williamson derivato per ossidazione dal leuco-sale ferroso corrispondente

$$\left[(CN)_3\overset{II}{Fe}(CN)_3\overset{III}{Fe}\begin{matrix}\diagup OH\\ \diagdown HO\end{matrix}\overset{III}{Fe}(CN)_3\overset{II}{Fe}(CN)_3\right]K_4$$

(Hofmann, Heine, Höchtlen, « Lieb. Ann. », 337 (1904), 3.

(3) Nella seduta del 2 gennaio 1927.

(4) G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, to. II, cap. II.

(5) Un'interpretazione geometrica (per mezzo di birapporti) si trova nella mia Nota: *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* [« Rend. Acc. dei Lincei », vol. III, s. 6; 1926], n. 2.

Digitized by Google

La conoscenza di h/k *non* basta a caratterizzare la (1)[1]. Si riesce invece facilmente a ciò notando che, per le formole stesse di trasformazione di h e k sono invarianti le due forme differenziali quadratiche

$$(2) \qquad h\,du\,dv \quad , \quad k\,du\,dv;$$

e che la conoscenza di queste individua di fatto la (1) come si riconosce subito p. es. sopra una qualsiasi delle *forme ridotte* assegnate per la (1) dal Darboux (loc. cit.).

Sicchè:

Ad ogni equazione di Laplace (1) *sono associate due forme differenziali quadratiche invarianti che la determinano completamente (nel gruppo delle trasformazioni indicate).* In altri termini *la teoria dell'equazione* (1) *nel gruppo indicato equivale alla teoria invariantiva del sistema delle forme* (2)[2].

2. Significato geometrico delle forme differenziali associate.

S'interpretino $n+1$ $(n \geqq 2)$ soluzioni indipendenti $x_i(u, v)$ della (1) come coordinate proiettive omogenee di un punto $P(u, v)$ di S_n; al variare di u e v, P descrive una superficie Φ sulla quale le linee u $(dv = 0)$ e v $(du = 0)$ formano un doppio sistema coniugato. La trasformazione di Laplace $x^1 = \frac{\partial x}{\partial v} + ax$ $\left(\text{o } x^{-1} = \frac{\partial x}{\partial u} + bx\right)$ fa passare da P ad un punto P^1 (o P^{-1}) di una superficie Φ^1 (o Φ^{-1}) sulla quale pure le linee u e v formano un doppio sistema coniugato. Anzi la linea u di Φ^1 (o v di Φ^{-1}) passante per P^1 (o P^{-1}) ha per tangente la retta P^1P (o $P^{-1}P$) e per piano osculatore ivi quello tangente in P a Φ[3].

Si consideri una curva qualsiasi di questo piano osculatrice in P^1 alla linea u: per fissare le idee possiamo prendere (ma non è necessario) la conica Γ^1 che tocca la PP^{-1} in P^{-1}. Sia poi t una tangente in P a Φ, individuata da du, dv ed r una retta per P^1.

Il birapporto dei punti nei quali r taglia le due tangenti coniugate in P $(dv = 0 \quad , \quad du = 0)$ *la tangente t e* Γ^1 *(fuori di* P^1*) quando r si fa tendere alla retta* P^1P *ha per termine principale* $\frac{1}{2} h\,du\,dv$.

Si ha in modo analogo $\frac{1}{2} k\,du\,dv$ servendosi p. es. della conica Γ^{-1} osculatrice alla linea v per P^{-1} e tangente in P^1 alla P^1P; quindi un nuovo

(1) Nel gruppo delle trasformazioni indicate.

(2) Si può anche dire così: La teoria proiettiva dell'equazione di Laplace (in cui si riguardano come equivalenti la (1) e le equazioni da essa ottenute per mezzo delle trasformazioni indicate) equivale alla teoria della rappresentazione conforme fra due superficie; i quadrati dei loro elementi lineari sono $h\,du\,dv$ e $k\,du\,dv$.

(3) Tutto ciò è notissimo: cfr. p. es. la mia Nota *Sull'equazione di Laplace* [« Rend. Circ. Mat. di Palermo », to. XXXIV, 1912].

Digitized by Google

significato dell'invariante assoluto h/k e una nuova dimostrazione del teorema di Koenigs ($\Gamma^1 \equiv \Gamma^{-1}$) nel caso $h = k$.

3. Estremali delle forme associate.

Se h e k sono diversi da zero, cioè se la (1) non è integrabile col metodo di Monge, sono legate in modo invariante alla (1) le equazioni differenziali delle estremali di $h\,du\,dv$ e $k\,du\,dv$; p. es.

$$(3) \qquad du\,d^2v - dv\,d^2u = \left(\frac{\partial \log h}{\partial u}\,du - \frac{\partial \log h}{\partial v}\,dv\right) du\,dv.$$

Consideriamo questi sistemi di curve sulla superficie Φ di S_n ($n > 3$); essi appartengono a quel tipo che ho chiamato di *sistemi planari* [1], cioè tali che i piani osculatori alle curve del sistema uscenti da P incidono (in rette) uno stesso *piano d'appoggio* (passante per P e non secante in una retta il piano π tangente in P a Φ).

Nello S_4 2 — osculatore in P a Φ, determinato dai punti x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}, i piani osculatori alle curve (3) formano un cono cubico, e si appoggiano (in rette), oltre che a π, ad un *piano* (doppio per il cono) che, come la (3), è *invariante* con Φ: questo piano congiunge $P \equiv x$ ai punti

$$Ax_u - x_{uu} \quad , \quad Bx_v - x_{vv} \quad \text{con} \quad A = \frac{\partial \log h}{\partial u} - 2b \quad , \quad B = \frac{\partial \log h}{\partial v} - 2a$$

appartenenti rispettivamente ai piani π_u e π_v osculatori in P alle linee u e v.

Ad un altro *piano invariante* si arriva partendo da $k\,du\,dv$; invece di A e B si avranno i coefficienti A′ e B′ ottenuti da quelli scambiando h con k.

Si hanno così in ciascuno dei piani π_u e π_v due *rette invarianti: condizione necessaria e sufficiente affinchè l'invariante assoluto h/k della* (1) *sia funzione della sola u (o della sola v) è che coincidano le due rette invarianti situate in π_v (o in π_u). E se quelle rette coincidono sia in π_u che in π_v si ha $h/k =$ costante; e viceversa.*

Se invece per esempio $A \neq A'$ si può avere il significato dell'invariante (infinitesimo) $\frac{\partial \log h/k}{\partial u}\,du$. Si consideri perciò una curva qualsiasi di π_u avente con la linea u contatto del 2° ordine in P e su questa si prenda un punto variabile $M \to P$: *il* log. *del birapporto delle due rette invarianti in π_u, della retta* PM *e della tangente in* P *alla linea u ha per termine principale, quando* $M \to P$, $\frac{1}{2}\frac{\partial \log h/k}{\partial u}\,du$.

(1) *Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari*, « Boll. Un. Mat. Ital. », a. IV, 1925.

Digitized by Google

4. Altre configurazioni invarianti legate alla (1).

Oltre ai due coni cubici descritti dai piani osculatori alle estremali di $h\,du\,dv$ e $k\,du\,dv$ è pure legato in modo intrinseco ed invariante ad ogni punto P di Φ il cono quadrico (V_3^2) definito in P dal piano ivi tangente π e dai due piani invarianti ora trovati. I piani generatori del cono appartenenti allo stesso sistema di π (e che perciò hanno con esso in comune il punto P soltanto) si possono prendere come piani d'appoggio di sistemi planari su Φ; e anche questi sistemi costituiscono su Φ una totalità invariante (dipendente da una funzione arbitraria di u, v che serve a fissare in ogni punto P un piano generatore del cono). Se si mette in evidenza il birapporto D formato dai piani invarianti relativi ad $h\,du\,dv$ e a $k\,du\,dv$, dal piano d'appoggio che si considera e dal piano tangente in P l'equazione differenziale di questi sistemi è

$$(D-1)\,(du\,d^2v - dv\,d^2u) = \left\{\left(D\,\frac{\partial \log k}{\partial u} - \frac{\partial \log h}{\partial u}\right)du - \right.$$

$$\left. - \left(D\,\frac{\partial \log k}{\partial v} - \frac{\partial \log h}{\partial v}\right)dv\right\}du\,dv$$

cioè *in ogni direzione uscente da* P *i piani osculatori alle estremali delle forme associate, il piano osculatore alla curva del sistema ora definito e il piano tangente formano lo stesso birapporto dei piani invarianti, del piano d'appoggio e di quello tangente.* Ciò si conferma facilmente anche per via sintetica; particolare interesse avranno i sistemi per i quali D = costante $(\neq 1$, altrimenti il piano d'appoggio coinciderebbe col piano tangente).

Analogamente sono intrinsecamente legate alla (1) le *coppie* di sistemi planari i cui piani d'appoggio, per ogni punto P, sono polari rispetto al cono quadrico considerato.

Altri sistemi planari invarianti si ottengono così. Se si congiungono le rette invarianti situate nei piani π_u, π_v nei vari modi possibili si ottengono (oltre a π_u, π_v e ai due piani invarianti già considerati) due nuovi piani invarianti i quali, insieme a π, definiscono un cono quadrico V_3^2 pure invariante. Il cono cubico V_3^3, relativo alle estremali di $h\,du\,dv$, e il cono V_3^2 ora trovato hanno in comune (tolti π, π_u, π_v) un cono V_2^3: i piani tangenti a questo (tutti passanti per P) si possono prendere come piani d'appoggio di sistemi planari pure invarianti. Lo stesso dicasi per le estremali di $k\,du\,dv$ [1].

(1) Questi sistemi invarianti hanno particolare interesse per la teoria delle corrispondenze, fra due superficie come Φ, che conservano i sistemi coniugati. Di ciò mi occuperò altrove.

Digitized by Google

5. Le equazioni di Laplace che ammettono trasformazioni infinitesime. — Esse sono state determinate da Lie [1] che ne ha assegnato le forme canoniche. Le forme differenziali quadratiche associate alla (1) permettono di ritrovarle nel modo più semplice e senza alcun calcolo.

Infatti il problema proposto equivale all'altro di trovare tutte le coppie di forme $h\,du\,dv$ e $k\,du\,dv$ (h e $k \neq 0$) che ammettono trasformazioni infinitesime (le quali naturalmente devono lasciare inalterato il doppio sistema di linee u v).

Nella (1) può, sempre farsi, con eventuale cambiamento di x in

$$\lambda(u, v)\,x \quad , \quad a = 0 ; \qquad \text{quindi} \qquad h = -c \quad , \quad k = b_v - c.$$

Se la trasformazione infinitesima lascia inalterate le singole linee u ($dv = 0$), cambiando invece una linea v in un'altra, la forma quadratica $h\,du\,dv$ (e così l'altra) ha necessariamente curvatura nulla [2]. Con un eventuale cambiamento dei parametri u e v in loro funzioni può farsi $h = \text{cost.} \neq 0$ e p. es. $h = -1$, $c = 1$. L'invariante assoluto $k/h = -k = -b_v + 1$, e perciò b_v, non può dipendere dal parametro u, e perciò anche $b = \theta(v) + \Omega(u)$. Con una trasformazione (che non altera più i parametri nè a) di x in $\rho(u)\,\bar{x}$ ove $\rho'/\rho = -\Omega(u)$ si ha l'equazione (in $\bar{x}$ che scriveremo di nuovo in x)

$$x_{uv} + \theta(v)\,x_v + x = 0 \tag{4}$$

e questa è appunto una delle forme canoniche assegnate da Lie.

Supponiamo invece che la trasformazione *non* lasci inalterate (individualmente) le linee u nè le linee v; si può ridurre la trasformazione infinitesima al tipo $\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}$ (cioè si possono scegliere i parametri in modo che le traiettorie della trasformazione siano rappresentate da $du = dv$); necessariamente [3] $h\,du\,dv$ è del tipo $h(u - v)\,du\,dv$ e perciò $c = \psi(u - v)$. Anche k/h, e perciò k, è funzione soltanto di $u - v$; sicchè integrando rispetto a v, $b = \varphi(u - v) + \Omega(u)$. Con la stessa trasformazione di prima di x in $\rho(u)\,\bar{x}$, si ha la forma canonica

$$x_{uv} + \varphi(u - v)\,x_v + \psi(u - v)\,x = 0$$

che è la seconda assegnata da Lie.

(1) *Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen*, « Gesammelte Abhandlungen », III Bd., 1922, p. 492.

(2) S. Lie, *Differentialgleichungen mit bekan. infinites. Transformationen*, Teubner, Leipzig, 1891, p. 371.

(3) S. Lie, ibidem., p. 370, ov'è data la forma $e^{mu}\,\psi(u - v)$ con $m = \text{cost}$; qui è $m = 0$ perchè mentre Lie determina le trasformazioni *conformi* infinitesime che lasciano inalterate le geodetiche, a noi occorrono proprio le applicabilità.

Digitized by Google

Se poi cerchiamo le equazioni (1) che ammettono più di una trasformazione infinitesima, per esse le forme associate debbono avere curvatura costante e di più le stesse geodetiche.

Per la prima forma canonica le due forme hanno già curvatura nulla sicchè basta imporre che sia $k/h =$ costante, cioè $b_v =$ cost. e perciò $b = Av$, A = cost. (potendosi render nulla la funzione additiva $\Omega(u)$ con la solita trasformazione). La forma canonica è quindi

$$x_{uv} + Avx_v + x = 0 \tag{6}$$

ed è chiaro che per essa si hanno le trasformazioni corrispondenti alle traslazioni, rotazioni e similitudini del piano euclideo.

Per la seconda forma canonica invece affinchè $h\,du\,dv$ abbia curvatura costante occorre e basta prendere $-h = c = A/(u-v)^2$, A = cost. (elemento lineare della sfera riferito alle linee isotrope). Perciò $k = \frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{A}{(u-v)^2}$; e poichè h/k dev'essere costante su tutta la superficie deve essere $\frac{\partial\psi}{\partial v} = -\frac{d\psi}{d(u-v)} = -\frac{B}{(u-v)^2}$, B = cost.; e in conseguenza $\psi(u-v) = \frac{B}{u-v} + c$. Cambiando x in $e^{cu}\bar{x}$ si fa sparire la costante additiva e si ha la forma canonica

$$x_{uv} + \frac{B}{u-v}x_v + \frac{A}{(u-v)^2}x = 0 \tag{7}$$

la quale ammette le tre trasformazioni infinitesime corrispondenti a quelle della sfera.

6. Le equazioni riducibili al tipo (4) si lasciano caratterizzare anche per mezzo di relazioni fra gli invarianti (relativi) h , k dell'equazione stessa e delle sue trasformate di Laplace. Vale infatti il teorema:

Se fra gli invarianti h e k ($\neq 0$) di un'equazione di Laplace e quelli delle sue trasformate valgono le relazioni

$$h - k = h_1 - k_1 = h_{-1} - k_{-1} = h_{-2} - k_{-2}$$

la equazione (1) *appartiene al tipo* (4) *e viceversa.*

Tenute presenti le relazioni [1] fra gli invarianti ora scritti segue dalle due prime che $h\,du\,dv$ e $k\,du\,dv$ sono a curvatura nulla; l'ultima relazione dà poi $\frac{\partial^2 \log(2k-h)}{\partial u\,\partial v} = 0$. Con eventuale cambiamento dei parametri u e v

(1) G. Darboux, loc. cit.

Digitized by Google

può quindi farsi $h = -1$, $k = U(u)\,V(v)$ e per l'ultima relazione dev'essere anche $k = \overline{U}(u)\,\overline{V}(v) - 1/2$. Derivando le due espressioni di k rispetto ad u si ricava $U'V = \overline{U}'\overline{V}$, quindi se $U' \neq 0$ e $\overline{U}' \neq 0$ segue dal confronto delle espressioni di k che è $V = \text{cost.}$; se invece $U' = 0$ (e di conseguenza $\overline{U}' = 0$) è $U = \text{cost.}$ e V arbitraria; in ogni caso (con lo scambio nel primo delle lettere u e v) l'equazione è del tipo (4).

Viceversa se l'equazione è di questo tipo si verifica subito che valgono le relazioni scritte fra gli invarianti.

Matematica. — *Sulle funzioni metaarmoniche.* Nota di M. PICONE presentata[1] dal Socio R. MARCOLONGO.

L'occasionale lettura dell'elegante Nota del sig. Bouligand: *Quelques théorèmes sur les fonctions métaharmoniques* (« Bulletin de la Société mathématique de France », t. LIII, 1925, pp. 55-59)[2] mi richiama di nuovo alla mente un teorema stabilito nei nn. 5, 6, 7 e 8 della mia conferenza tenuta il 19 marzo 1922 ai giovani del Circolo matematico di Catania: *Sopra alcuni problemi d'Analisi matematica posti dalla Fisica*[3]. Tale teorema consente non soltanto un'immediata estensione alle soluzioni della più generale equazione ellittico-parabolica a derivate parziali del second'ordine in *qualsiasi numero* di variabili di un risultato che il sig. Bouligand ottiene nella Nota citata per le funzioni in *tre* variabili da lui dette *epiarmoniche*, ma anche, nello stesso indirizzo del Bouligand, l'ottenimento di risultati nuovi per le dette equazioni ellittico-paraboliche, laddove è ben presumibile che un ulteriore perfezionamento di quel teorema possa condurre all'estensione indicata di *tutti* i risultati del Bouligand.

Il detto teorema, che è forse meritevole d'essere tolto dall'oblio cui pare relegarlo anche la scarsa diffusione del giornale al quale è stato consegnato, concerne le soluzioni dell'equazione a derivate parziali del secondo ordine:

$$(1) \qquad E[u] \equiv \sum_{h,k}^{1,n} a_{hk}(P)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_h\,\partial x_k} + \sum_{h}^{1,n} b_h(P)\,\frac{\partial u}{\partial x_h} + c(P)\,u = 0,$$

ove $a_{hk}(P)$, $b_h(P)$, $c(P)$ $(h, k = 1, 2, \cdots, n)$, essendo $a_{hk}(P) = a_{kh}(P)$, sono assegnate funzioni del punto $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, definite nell'interno

(1) Nella seduta del 2 gennaio 1927.

(2) BOULIGAND chiama *metaarmoniche* le soluzioni dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda u = 0$ finite e continue con le loro derivate, λ essendo un parametro, e secondochè λ è positivo o negativo le dice *epiarmoniche* o *ipoarmoniche*.

(3) *Esercitazioni matematiche* [« Circolo matematico di Catania », vol. II, 1922, pp. 183-205].

Digitized by Google

di un dominio A dello spazio euclideo $S_{(n)}$ a n dimensioni, continue in ogni punto e tali che la seguente forma quadratica nelle λ:

$$\sum_{hk}^{1,n} a_{hk}(P)\,\lambda_h\,\lambda_k$$

riesca, per ogni punto P interno ad A, definita o semidefinita positiva e sia sempre $c(P) \not\equiv 0$. Un caso particolare del teorema consente [1] d'asserire che:

I. *Supposto il dominio* A *illimitato e* $c(P) \not\equiv 0$, *se ad ogni dominio limitato* T, *interno ad* A, *è sempre possibile far corrispondere una funzione* $\omega(P)$, *continua e positiva in* T, *dotata, nell'interno di* T, *delle derivate parziali dei due primi ordini finite e continue, per le quali sia sempre, nell'interno di* T,

$$E[\omega] < 0,$$

oppure, se almeno uno dei coefficienti $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ *si mantiene in* T *sempre positivo, soltanto*

$$E[\omega] \not> 0,$$

ogni funzione $u(P)$ *che verifichi la* (1) *nell'interno di* A, *infinitesima all'infinito e, se questa esiste, sulla frontiera di* A, *è identicamente nulla in* A.

Per capire bene la generalissima portata del teorema giova forse osservare [cfr. la citata mia Conferenza] che alle ipotesi di esso si può soddisfare quando, per esempio, per ogni dominio T limitato e interno ad A, si può trovare uno dei coefficienti

$$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn} \quad , \quad b_1, b_2, \cdots, b_n$$

di $E[u]$ che si mantiene in T sempre diverso da zero. Non è dunque escluso che l'equazione (1) si riduca ad essere del primo ordine, che cioè si abbia in A, identicamente, $a_{hk}(P) \equiv 0$ $(h, k = 1, 2, \cdots, n)$ che si riduca ad essere sempre parabolica, per esempio del tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sum_h^{1,n} b_h(P)\,\frac{\partial u}{\partial x_h} = 0\,, \text{ ecc.}$$

Nella presente Nota mi limito, per semplicità, a considerare le funzioni *metaarmoniche* in n variabili, cioè le soluzioni dell'equazione:

$$(2_{\mp}) \qquad \Delta_2 u \mp c^2 u \equiv \sum_h^{1,n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} \mp c^2 u = 0,$$

ove c è una costante reale e positiva.

(1) Altri casi particolari e taluni corollarii di questi, riguardanti lo studio delle singolarità delle soluzioni della (1), sono stati indicati in una mia comunicazione inviata alla recente XV riunione, tenutasi a Bologna nei primi giorni dello scorso novembre, della Società italiana per il progresso delle Scienze.

Digitized by Google

1. Ed ecco il risultato che immediatamente si trae dal teorema I:

II. *Detta* $\omega(P)$ *una qualsiasi fissata particolare soluzione della* $(2_{\mp})$ *sempre diversa da zero nell'interno del dominio illimitato* A *di* $S_{(n)}$, *se, per una soluzione* $u(P)$ *della* $(2_{\mp})$, *nell'interno di* A, *il rapporto*

$$v(P) = \frac{u(P)}{\omega(P)}$$

riesce infinitesimo all'infinito e, se questa esiste, sulla frontiera di A, *la* $u(P)$ *è identicamente nulla in* A.

Ed invero, il rapporto $v(P)$ è soluzione dell'equazione:

$$\omega \Delta_2 v + 2 \sum_h^{1..n} \frac{\partial \omega}{\partial x_h} \frac{\partial v}{\partial x_h} = 0,$$

alla quale si applica il teorema I.

2. In particolare, si può, per esempio, prendere per $\omega(P)$ una soluzione della (2_-) che sia soltanto funzione della distanza $\rho = \overline{OP}$ del punto P dall'origine O delle coordinate. Si ha allora per ω l'equazione

$$\rho \frac{d^2 \omega}{d\rho^2} + (n - 1) \frac{d\omega}{d\rho} - c^2 \rho \omega = 0,$$

e perciò, indicando con $J_\mu(\rho)$ la funzione di Bessel d'ordine μ, si può porre

$$\omega(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(ic\rho) = (n-2)!! \sum_h^{0..\infty} \frac{(c\rho)^{2h}}{(2h)!!\,(n+2h-2)!!},$$

ove, designando N un numero naturale, con N!! intendiamo indicare il prodotto di tutti i numeri naturali non superiori a N aventi la stessa parità di N.

Per $n = 2$, si ha dunque: *Se per una funzione* $u(P)$ *in due variabili, soluzione della* (2_-) *nell'interno del dominio illimitato* A, *il rapporto*

$$\frac{u(P)}{J_0(ic \cdot \overline{OP})}$$

è infinitesimo all'infinito e, se questa esiste, sulla frontiera di A, *la* $u(P)$ *è identicamente nulla in* A.

Per $n = 3$ si ha il risultato di Bouligand: *Se per una funzione* $u(P)$ *in tre variabili, soluzione della* (2_-) *nell'interno del dominio illimitato* A, *l'espressione*

$$\overline{OP} \frac{u(P)}{\operatorname{senh}(c \cdot \overline{OP})}$$

Digitized by Google

è infinitesima all'infinito e sulla frontiera di A, *la* u (P) *è identicamente nulla in* A.

3. Altra soluzione particolare della (2_), sempre positiva, è

$$\omega(P) = e^{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n},$$

ove $p_1, p_2, \cdots, p_n$ designano costanti positive arbitrariamente fissate per le quali $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 = c^2$. Donde il teorema: *Se per una funzione* u (P) *in* n *variabili, soluzione della* (2_) *nell'interno del dominio illimitato* A, *il prodotto:*

$$e^{-p_1 x_1 - p_2 x_2 - \cdots - p_n x_n}\, u(P) \qquad (p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 = c^2)$$

è infinitesimo all'infinito e sulla frontiera di A, *la* u *è identicamente nulla in* A.

Per $n = 3$ e per $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = c$ si ha così un risultato che si avvicina assai a quello che il Bouligand stabilisce limitatamente a dominii A dello spazio ordinario, di forma speciale, ch'egli dice *dotati di un ramo cilindrico*, per i quali cioè la parte di essi all'esterno di una certa sfera di centro nell'origine è un cilindro a sezione retta limitata: Posto $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ e supposto che l'asse della z abbia la direzione delle generatrici del ramo cilindrico di A, Bouligand asserisce che si può allora dedurre l'identico annullarsi in A di una soluzione $u(x, y, z)$ della (2_) anche quando si sappia che all'infinito e sulla frontiera di A riesce infinitesimo il prodotto

$$e^{-\sqrt{c^2 + \alpha_1^2}\, z}\, u(x, y, z),$$

ove α_1 designa una costante che è il primo termine di una certa *successione caratteristica* che quell'Autore, nella sua tesi di Dottorato, lega alla sezione retta del ramo cilindrico di A.

4. Nella citata Nota di Bouligand è anche indicato un notevole teorema sulle funzioni *ipoarmoniche* in *tre* variabili, secondo il quale una tale funzione u (P), regolare in un dominio A dotato di ramo conico illimitato, nulla sulla frontiera e per cui il prodotto

$$u(P) \cdot \overline{OP}$$

è infinitesimo all'infinito, è identicamente nulla in A. Il collega prof. Marcolongo m'ha fatto osservare che già il Picciati [1] aveva stabilito, con un'esauriente dimostrazione, l'annullarsi identico di una funzione ipoarmo-

(1) G. Picciati, *Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 1° sem. 1903.

Digitized by Google

nica in *tre* variabili, regolare in un semispazio A, nulla sulla frontiera di A e per la quale i prodotti

$$u(P)\cdot\overline{OP}^2\quad,\quad u_x(P)\cdot\overline{OP}^2\quad,\quad u_y(P)\cdot\overline{OP}^2\quad,\quad u_z(P)\cdot\overline{OP}^2,$$

si mantengono limitati.

Il nostro teorema II consente di sostituire alle precedenti, condizioni meno restrittive quando il dominio A abbia forme speciali. Si ha così, per esempio, che: *Se il dominio illimitato* A *è contenuto in un iperstrato di* $S_{(n)}$, *limitato da due iperpiani paralleli, ad una reciproca distanza eguale a* π/c, *una soluzione* $u(P)$ *della* (2_+), *nell'interno di* A, *per la quale il rapporto*

$$\frac{u(P)}{\operatorname{sen}[c\delta(P)]},$$

$\delta(P)$ *designando la distanza del punto* P *da uno dei due iperpiani indicati, riesce infinitesimo all'infinito e sulla frontiera di* A, *è identicamente nulla in* A.

Ed invero, se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + a = 0 \qquad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1)$$

è l'equazione di uno dei detti iperpiani, la funzione

$$\omega(P) = \operatorname{sen} c\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + a)$$

è una soluzione della (2_+) sempre diversa da zero nell'interno del considerato iperstrato e riesce ivi

$$\left|\frac{u(P)}{\operatorname{sen} c\,(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + a)}\right| = \frac{|u(P)|}{\operatorname{sen}[c\delta(P)]}.$$

Ed evidentemente: *Se l'iperstrato contenente il dominio* A *ha larghezza minore di* π/c, *l'identico annulla si in* A *di una funzione ipoarmonica nell'interno di* A, *segue anche quando, soltanto, essa è infinitesima all'infinito e sulla frontiera di* A.

Si ha pure in modo analogo: *Se il dominio illimitato* A *dello spazio ordinario a tre dimensioni, è contenuto in un cilindro circolare retto avente raggio eguale a*

$$\frac{\alpha}{c} > \frac{2{,}4048}{c},$$

ove α *designa la radice di minimo modulo della funzione di Bessel* $J_0(\rho)$, *una funzione* $u(P)$, *soluzione della* (2_+) *nell'interno di* A *e per la quale il rapporto:*

$$\frac{u(P)}{J_0[c\delta(P)]},$$

Digitized by Google

$\delta(P)$ *indicando la distanza di* P *dall'asse del cilindro sopradetto, riesce infinitesimo all'infinito e sulla frontiera di* A, *è identicamente nulla in A. Se il cilindro ha raggio minore di* α/c, *l'annullarsi identico di* $u(P)$, *segue anche quando, soltanto, essa è infinitesima all'infinito e sulla frontiera di* A [1].

Matematica. — *Maggiorazione delle integrali delle equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine.* Nota di M PICONE, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Limitazione delle soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali.* Nota di F. TRICOMI, presentata [2] dal Socio F. SEVERI.

L'amico prof. Picone ha gentilmente richiamata la mia attenzione sull'elegante procedimento con cui il sig. Kriloff [3] ha recentemente dimostrato che, se si considera la soluzione $\bar{y}$ dell'equazione differenziale autoaggiunta

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right] + \alpha(x)\,y = f(x) \quad , \quad [\theta(x) \geqq p > 0 \quad , \quad \alpha(x) \leqq 0]$$

annullantesi agli estremi dell'intervallo (a, b); questa soluzione, ch'è identicamente nulla se è $f \equiv 0$, in caso diverso è soggetta alla limitazione:

$$Max\,|\bar{y}| \leqq \frac{(b-a)^2}{p}\,Max\,|f|\,.$$

Questo risultato che - come Picone ha osservato - può estendersi al caso in cui $\alpha(x)$ prenda anche valori positivi, purchè sufficientemente piccoli, è assai importante per la teoria della risoluzione approssimata delle equazioni differenziali. Pertanto interessava molto la sua estensione alle due dimensioni, cioè al caso delle equazioni alle derivate parziali. Sfortunata-

(1) Questi teoremi devono essere avvicinati a quelli di una mia Nota di quindici anni or sono: *Sul problema di Dirichlet per la più generale equazione lineare ellittica autoaggiunta alle derivate parziali del second'ordine*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 1° semestre del 1911.

(2) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1927.

(3) Verrà pubblicato in uno dei prossimi fascicoli del « Mémorial des Sciences Mathématiques ».

Digitized by Google

mente il procedimento di Kriloff non è estendibile, essendo fondato sull'osservazione che se una funzione $u(x)$, nulla nel punto a, è tale che

$$\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \leq \eta, \tag{1}$$

regge la disuguaglianza

$$(\mathrm{M}ax\,|\,u\,|\,)^2 \leq (b-a)\,\eta;$$

ora questo lemma non vale più in due variabili. Invero l'integrale che in tal caso sostituisce quello che figura nella (1), e cioè l'integrale di Dirichlet:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy,$$

può benissimo essere molto piccolo senza che sia tale il massimo di $|u$ nell'area S [1].

Ciò non ostante, l'estensione del teorema del sig. Kriloff al caso delle due dimensioni è possibile per altra via. Precisamente nella presente Nota, in cui desidero mettermi nelle condizioni più semplici possibili, farò vedere come, data un'equazione *autoaggiunta* alle derivate parziali di second'ordine, di tipo ellittico:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \alpha(x,y)\,\zeta = f(x,y), \tag{2}$$

purchè la funzione α sia negativa oppure prenda anche valori positivi ma sufficientemente piccoli, è possibile assegnare una limitazione del genere di quella di Kriloff per il massimo modulo della soluzione regolare $\bar{\zeta}$ della (2) annullantesi sul contorno s di un'area S. E propriamente dimostrerò che si ha

$$\mathrm{M}ax\,|\,\bar{\zeta}\,| \leq \frac{k}{1-k\mathrm{A}}\,\mathrm{M}ax\,|f| \tag{3}$$

dove k denota un coefficiente dipendente solo dall'area S (che, per esempio, se questa è rinchiudibile in un cerchio di raggio R, è certamente non su-

(1) Per persuadersi di ciò, detto O un punto qualsiasi interno all'area S, basta considerare la funzione continua u definita dalle formule:

$$u(\mathrm{P}) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots (r \geq r_0) \\ c\,\dfrac{\log r_0 - \log r}{\log r_0 - \log r_1} \ (r_1 < r < r_0) \\ c \ldots\ldots\ldots (r \leq r_1) \end{cases}$$

dove r denota la distanza del punto variabile P da O ed r_0 e r_1 $(r_0 > r_1)$ sono i ragg di due cerchi col centro in O interni all'area S.

Digitized by Google

periore ad $\frac{R^2}{4}$) ed A denota il massimo di $\alpha(x, y)$ oppure lo zero, secondo che questa funzione prende oppure non prende anche valori positivi, con l'avvertenza che nel primo di questi due casi la formula è vera soltanto se si ha

$$A < \frac{1}{k} . \tag{4}$$

Per dimostrare la (3) cominciamo con l'osservare che non è restrittivo supporre che la funzione regolare $\bar{\zeta}$, nulla sul contorno dell'area S, non cambi mai di segno nell'interno di questa; cioè che sia sempre, per fissare le idee, $\bar{\zeta} \geqq 0$. Infatti, se così non fosse, basterebbe considerare separatamente le varie parti di S in cui $\bar{\zeta}$ conserva segno costante chè, anche così operando, non verrebbe meno la circostanza essenziale che $\bar{\zeta}$ sia nulla su tutto il contorno dell'area che si considera.

Ciò premesso osserviamo che l'equazione (2) può scriversi sotto la forma

$$\Delta_2 \zeta = -(\alpha\zeta - f);$$

conseguentemente, detta G la funzione di Green dell'area S, posto cioè

$$G(P, Q) = \log \frac{1}{r} - g(P, Q),$$

dove r denota la distanza dei due punti P, Q e $g(P, Q)$ la funzione armonica nell'area assumente sul contorno s i valori di $\log \frac{1}{r}$: pel teorema di Green, avremo

$$2\pi\zeta(P) = \int_s \frac{dG}{dn} \zeta(Q)\, ds_Q + \iint_S G(P, Q)\,(\alpha\zeta - f)_Q\, dS_Q ,$$

formula che, nel caso della soluzione ζ nulla sul contorno s, diviene, più semplicemente:

$$\bar{\zeta}(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_S G(P, Q)\,(\alpha\bar{\zeta} - f)_Q\, dS_Q . \tag{5}$$

Ricordiamo ora che la funzione di Green G è sempre positiva nell'area S; pertanto, detto P′ un conveniente punto di questa, dalla (4) potremo dedurre che

$$\bar{\zeta}(P) = (\alpha\bar{\zeta} - f)_{P'} \frac{1}{2\pi} \iint_S G(P, Q)\, dS_Q$$

da cui, ponendo

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S G(P, Q)\, dS_Q = \bar{n}(P), \tag{6}$$

Digitized by Google

si trae infine che:

$$\bar{\zeta}(P) = [\alpha(P')\,\bar{\zeta}(P') - f(P')]\,\bar{u}(P)\,. \tag{7}$$

A questo punto giova distinguere due casi secondochè è $\alpha(P') \leq 0$ oppure $\alpha(P') > 0$.

Nel primo caso, considerato che il termine $\alpha(P')\,\bar{\zeta}(P')\,\bar{u}(P)$ che figura nella (6) è negativo (o nullo), da quest'equazione si trae senz'altro che

$$\bar{\zeta}(P) \leq |f(P')|\,|\bar{u}(P)$$

e quindi *detto* k *il massimo modulo della funzione* $\bar{u}(P)$, *nell'area* S, si avrà *a fortiori che*

$$|\bar{\zeta}(P)| \leq k\,\mathrm{M}\,ax\,|f|\,.$$

Nel secondo caso invece, essendo $\alpha(P')\,\bar{u}(P) \geq 0$, si avrà anzitutto

$$\bar{\zeta}(P) \leq \alpha(P')\,\bar{u}(P)\,\mathrm{M}\,ax\,|\zeta| - f(P')\,\bar{u}(P)$$

da cui, tenuto conto che $\alpha \leq A$, si trae successivamente

$$|\bar{\zeta}(P)| \leq k\,A\,\mathrm{M}\,ax\,|\zeta| + k\,\mathrm{M}\,ax\,|f|\,.$$

La conclusione è che, in entrambi i casi, sussiste la disuguaglianza

$$|\bar{\zeta}(P)| \leq k\,A\,\mathrm{M}\,ax\,|\zeta| + k\,\mathrm{M}\,ax\,|f|$$

e quindi dovrà anche essere

$$\mathrm{M}\,ax\,|\bar{\zeta}| \leq k\,A\,\mathrm{M}\,ax\,|\zeta| + k\,\mathrm{M}\,ax\,|f|$$

ovvero

$$(1 - k\,A)\,\mathrm{M}\,ax\,|\bar{\zeta}| \leq k\,\mathrm{M}\,ax\,|f|$$

da cui, purchè sia $1 - k\,A > 0$ cioè sia soddisfatta la (4), si trae finalmente che

$$\mathrm{M}\,ax\,|\zeta| \leq \frac{k}{1 - k\,A}\,\mathrm{M}\,ax\,|f|\,.$$

Resta ora da limitare il coefficiente k. A tale scopo cominciamo con l'osservare che la funzione $\bar{u}$, di cui k è il massimo modulo, può interpretarsi come la soluzione nulla sul contorno s dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 1 = 0\,. \tag{8}$$

In secondo luogo osserviamo che, detta u_0 una soluzione particolare qualsiasi della (7), posto cioè per esempio,

$$u_0(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{4} + C^{te};$$

Digitized by Google

poichè si ha ovviamente

$$\Delta_2(u - u_0) = 0\,,$$

la funzione $\bar{u}$ potrà rappresentarsi con la formula

$$\bar{u} = u_0 + v_0$$

avendo denotato con v_0 la funzione armonica che prende su s i valori di $-u_0$. Ma una funzione armonica in un'area assume il suo massimo modulo sul contorno di questa; quindi, detto U_0 il massimo modulo di u_0 nell'area S (contorno incluso) si avrà contemporaneamente

$$|u_0| \leq U_0 \quad , \quad |v_0| \leq U_0\,,$$

da cui segue $|\bar{u}| \leq 2\,U_0$ e se ne conclude che

$$k \leq 2\,U_0\,. \tag{9}$$

Per esempio, se l'area S è rinchiudibile in un cerchio di raggio R (il cui centro verrà assunto come origine delle coordinate), ponendo

$$u_0 = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2) + \frac{R^2}{8}$$

avremo ovviamente $U_0 \leq \frac{R^2}{8}$ e quindi $k \leq \frac{R^2}{4}$ (1). Similmente, per mezzo della soluzione

$$u_0(x\,,\,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{D^2}{4}$$

si sarebbe trovato che se l'area S è rinchiudibile in una striscia indefinita di larghezza $2\,D$, è certamente $k \leq \frac{D^2}{2}$; ecc.

Osserviamo finalmente che dalle limitazioni trovate si deduce in particolare che, purchè sia $\alpha(x\,,y) < \frac{1}{k}$, ad $f \equiv 0$ corrisponde $\bar{z} \equiv 0$; dunque, nel caso indicato, l'equazione omogenea

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \alpha(x\,,y)\,z = 0$$

non può avere piu di *una* soluzione regolare assumente valori assegnati sul contorno dell'area S.

Questo teorema di unicità viene di solito dimostrato sotto l'ipotesi più restrittiva che sia sempre $\alpha(x\,,y) \leq 0$.

(1) Questo valore estremo: $k = \frac{R^2}{4}$ è effettivamente raggiunto quando l'area S coincide col cerchio di raggio R, nel qual caso si ha $\bar{u}(x\,,y) = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)$.

Digitized by Google

Geometria. — *Quadriche aventi per generatrici le tangenti asintotiche in un punto di una superficie.* Nota di E. P. LANE, presentata [1] dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Le ∞^4 quadriche aventi per generatrici le tangenti asintotiche in un punto P di una superficie σ di S_3 formano un sistema lineare contenente tutte le quadriche *osculatrici* in P a σ; specialmente interessanti sono le quadriche di Moutard, le quadriche di Darboux, la quadrica di Lie, e le due *quadriche asintotiche osculatrici* in P ad una curva di σ definite [2] da Bompiani. Questo sistema contiene anche alcune quadriche le quali hanno come diremo *contatto armonico* con σ in P.

Per mezzo delle quadriche asintotiche osculatrici ad una curva si può dare una nuova caratterizzazione molto semplice delle *pangeodetiche*. Le quadriche asintotiche osculatrici (dello stesso sistema) a due curve appartenenti ad un doppio sistema coniugato su σ ci danno una caratterizzazione delle superficie con la semicurvatura media proiettiva -1. Dette quadriche per le ∞^1 curve di un *fascio* uscenti da P inviluppano una superficie algebrica del 5^o ordine, collegata in modo invariante al punto P di σ purchè il fascio sia invariante.

Le quadriche di Moutard per le curve di un fascio uscenti da P determinano un cono quadrico invariante, il quale ci dà una nuova caratterizzazione delle direttrici di Sullivan, e due nuove rette interessanti del fascio canonico.

2. La superficie σ sia descritta dal punto P di coordinate normali $x^{(i)}(u, v)$ e le linee u, v siano le sue asintotiche non rettilinee, cosicchè le $x^{(i)}$ soddisfino al sistema

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_{uu} &= \theta_u x_u + \beta x_v + n x, \\ x_{vv} &= \gamma x_u + \theta_v x_v + \nu x, \end{aligned} \qquad \theta = \log(\beta\gamma).$$

Un punto

$$x_1 x^{(i)} + x_2 x^{(i)}_u + x_3 x^{(i)}_v + x_4 x^{(i)}_{uv}$$

abbia *coordinate locali* x_1, x_2, x_3, x_4. Queste coordinate di un punto collegato in modo invariante a σ si trasformano per mezzo della trasformazione $\bar{u} = U(u), \bar{v} = V(v)$ secondo le formole

$$(2)\qquad \rho \bar{x}_1 = x_1 \quad , \quad \rho \bar{x}_2 = U' x_2 \quad , \quad \rho x_3 = V' x_3 \quad , \quad \rho \bar{x}_4 = U' V' x_4 .$$

(1) Nella seduta del 2 gennaio 1927.

(2) BOMPIANI, *Ancora sulla geometria delle superficie considerata nello spazio rigato*, « Rend. Acc. dei Lincei », ser. VI, vol. III, 1926.

Digitized by Google

Se N_1, N_2, Ω, T sono le coordinate locali qualche volta usate da Fubini e da Bompiani, si hanno le relazioni

$$(3) \qquad \rho x_1 = -\Omega \quad , \quad \rho x_2 = N_2 \quad , \quad \rho x_3 = -N_1 \quad , \quad \rho x_4 = T .$$

3. L'equazione di una quadrica non degenere Q_1 contenente le tangenti asintotiche nel punto P è del tipo

$$(4) \qquad x_2 x_3 + x_4 (K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4) = 0 \quad , \quad K_1 \neq 0 .$$

Se Q_1 è invariante i coefficienti K_i si trasformano secondo le formole

$$(5) \qquad \bar{K}_1 = K_1 \quad , \quad \bar{K}_2 = \frac{1}{U'} K_2 \quad , \quad \bar{K}_3 = \frac{1}{V'} K_3 \quad , \quad K_4 = \frac{1}{U' V'} K_4 .$$

Quindi $-K_1$ è un invariante assoluto che Bompiani ha interpretato [1] come il valor limite di un birapporto. Se $K_1 = 1$, il valor limite di questo birapporto è -1, e diremo che Q_1 ha *contatto armonico* con σ in P.

Se $K_1 = -1$, Q_1 è una quadrica osculatrice a σ. Se $K_1 = -1$, e $K_2 = K_3 = 0$, Q_1 è una quadrica di Darboux, essendo la quadrica di Lie se pure $K_4 = \beta\gamma H/2$, posto $H = -(\beta\gamma + \theta_{uv})/\beta\gamma$. Se

$$(6) \qquad \begin{cases} K_1 = -1 \quad , \quad K_2 = -\dfrac{\beta}{\lambda} \quad , \quad K_3 = \dfrac{\beta}{\lambda^2}, \\ K_4 = \dfrac{\beta}{2\lambda^2}\left[\lambda' - \beta + \dfrac{\gamma_u}{\gamma}\lambda - \left(\dfrac{3\beta_v}{\beta} + \dfrac{\gamma_v}{\gamma}\right)\lambda^2 + \gamma H \lambda^3\right], \end{cases}$$

ove $\lambda' = d\lambda/du$, Q_1 è la quadrica asintotica osculatrice $Q^{(u)}$ (per la rigata delle tangenti u) ad una curva C definita da $dv - \lambda\, du = 0$. Se

$$(7) \qquad \begin{cases} K_1 = -1 \quad , \quad K_2 = \gamma\lambda^2 \quad , \quad K_3 = -\gamma\lambda , \\ K_4 = \dfrac{\gamma}{2}\left[-\lambda' - \gamma\lambda^3 + \lambda\dfrac{\beta_v}{\beta}\lambda^2 - \left(\dfrac{3\gamma_u}{\gamma} + \dfrac{\beta_u}{\beta}\right)\lambda + \beta H\right], \end{cases}$$

Q_1 è la quadrica asintotica osculatrice $Q^{(v)}$ alla C. Se

$$(8) \qquad \begin{cases} K_1 = -1 \quad , \quad K_2 = \dfrac{1}{3\lambda}(\gamma\lambda^3 - 2\beta) \quad , \quad K_3 = -\dfrac{1}{3\lambda^2}(2\gamma\lambda^3 - \beta), \\ K_4 = -\dfrac{1}{36\lambda^3}\left[4\beta^2 - 3\beta\psi_1\lambda + 12\beta\psi_2\lambda^2 + (8\beta\gamma + 18\theta_{uv})\lambda_3 + \right. \\ \qquad\qquad \left. + 12\gamma\psi_1\lambda^4 - 3\gamma\psi_2\lambda^5 + 4\gamma^2\lambda^6\right], \end{cases}$$

(1) BOMPIANI, *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie*, ecc., « Atti Acc. di Torino », vol. LIV, 1924.

Digitized by Google

ove

$$\psi_1 = \frac{\partial}{\partial u}\log \beta\gamma^2 \quad , \quad \psi_2 = \frac{\partial}{\partial u}\log \beta^2\gamma ,$$

Q_1 è la quadrica di Moutard relativa alla tangente di C.

4. Le quadriche $Q^{(u)}$ e $Q^{(v)}$ s'incontrano (all'infuori delle tangenti asintotiche) in una conica sulla quadrica di Darboux

$$(9) \qquad 2(\gamma\lambda^3 + \beta)Q - \beta\gamma(\gamma\lambda^3 + \psi_2\lambda^2 + \psi_1\lambda + \beta)x_4^2 = 0 ,$$

posto

$$Q = x_2x_3 - x_1x_4 - \frac{1}{2}\beta\gamma H x_4^2 .$$

Si vede subito che *una curva uscente da* P *in una della terna di direzioni definite da*

$$\gamma\lambda^3 + \psi_2\lambda^2 + \psi_1\lambda + \beta = 0 \quad , \quad \gamma\lambda^3 + \beta \neq 0 ,$$

ha quadriche $Q^{(u)}, Q^{(v)}$ *le quali s'incontrano in una conica sulla quadrica di Lie.* Si può dimostrare pure il teorema di Bompiani: una curva uscente da P in una direzione di Darboux ha quadriche $Q^{(u)}, Q^{(v)}$ le quali s'incontrano solamente nelle tangenti asintotiche. Di più *le quadriche* $Q^{(u)}, Q^{(v)}$ *coincidono se, e solo se, la* C *è tangente ad una curva di Darboux su una superficie* σ *per cui* $\gamma\psi_1^3 = \beta\psi_2^3$, *cioè per cui la coniugata della tangente canonica è una tangente di Darboux.*

L'equazione del piano contenente la conica residua intersezione delle $Q^{(u)}, Q^{(v)}$ è

$$(10) \quad 2\lambda(\gamma\lambda^3 + \beta)(x_3 - \lambda x_2) + \Big[(\gamma\lambda^3 + \beta)(\lambda' + \gamma\lambda^3 - \beta) + \frac{\gamma_u}{\gamma}\beta\lambda - \\ - \Big(\frac{3\beta_v}{\beta} + \frac{\gamma_v}{\gamma}\Big)\beta\lambda^2 + \Big(\frac{3\gamma_u}{\gamma} + \frac{\beta_u}{\beta}\Big)\gamma\lambda^4 - \frac{\beta_v}{\beta}\gamma\lambda^5\Big]x_4^2 = 0 .$$

e l'equazione del piano osculatore a C è

$$(11) \qquad 2\lambda(x_3 - \lambda x_2) + (-\lambda' - \beta + \theta_u\lambda - \theta_v\lambda^2 + \gamma\lambda^3)x_4^2 = 0 .$$

Questi due piani coincidono se, e solo se,

$$(12) \qquad 2(\gamma\lambda^3 + \beta)\lambda' - \beta_u\lambda - 2\beta_v\lambda^2 + 2\gamma_u\lambda^4 + \gamma_v\lambda^5 = 0 ,$$

cioè C è una *pangeodetica* (1).

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva sia una pangeodetica è che in ogni punto della curva il piano contenente la conica residua intersezione delle due quadriche asintotiche osculatrici ed il piano osculatore coincidano.

(1) Fubini e Čech, *Geometria proiettiva differenziale*, vol. I, p. 141.

Digitized by Google

5. Le due quadriche $Q^{(u)}$ corrispondenti alle due curve di un doppio sistema coniugato $dv^2 - \lambda^2 du^2 = 0$ uscenti da P s'incontrano nelle tangenti asintotiche e nella retta

$$(13) \qquad \begin{cases} 2\lambda^2 x_2 - (B\lambda^2 - \beta)\, x_4 = 0 \ , \\ 2\lambda^2 x_1 - (B\lambda^2 + \beta)\, x_3 - \beta (A + \gamma H \lambda^2)\, x_4 = 0 \ , \end{cases}$$

ove

$$A = \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda\gamma \quad , \quad B = \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\gamma}{\beta^3 \gamma} \ .$$

Questa retta e la tangente asintotica v s'incontrano nel punto $(B\lambda^2 + \beta, 0, \ 2\lambda^2, 0)$. Scambiando le tangenti asintotiche si ottiene un altro punto. *La retta congiungente di questi punti è la congiungente degli spigoli di regresso delle sviluppabili circoscritte a* σ *lungo le due curve se, e solo se,* $\theta_{uv} = 0$. *Allora si può fare* $\beta\gamma = 1$, *e si vede che* σ *ha semicurvatura media proiettiva* -1.

Per avere la retta (13) per una curva $dv - \lambda h du = 0$ di un fascio (h = cost.) basta scrivere λh invece di λ. Il luogo di queste rette variando h è la quadrica

$$(14) \qquad x_2 x_3 + x_4 \left[x_1 + A x_2 - B x_3 - \frac{1}{2} (AB + \beta\gamma H)\, x_4 \right] = 0 \ .$$

Questa ha *contatto armonico* con σ in P. Scambiando u e v si ottiene un'altra quadrica con contatto armonico.

Una quadrica con contatto armonico ha la proprietà seguente. Adoperando questa quadrica come *quadrica d'appoggio* si trova [1] un sistema ∞^2 di curve per cui le quadriche $Q^{(u)}$ osculatrici in P alle curve che vi passano segano la quadrica d'appoggio solamente in rette. Scegliendo quattro sistemi ∞^1 di queste curve si trova che il birapporto delle quattro tangenti di queste nel punto P non dipende da u, v; cioè il birapporto è costante. Viceversa, data una quadrica d'appoggio, se detto birapporto è costante o la quadrica d'appoggio ha contatto armonico o la quadrica d'appoggio *associata* per cui le quadriche $Q^{(v)}$ definiscono lo stesso sistema ∞^2 di curve ha contatto armonico.

L'equazione della quadrica $Q^{(u)}$ per una curva di un fascio è

$$(15) \qquad 2\lambda^3 Q h^3 + \beta\lambda^2 x_4 l h^2 + \beta\lambda x_4 m h - \beta^2 x_4^2 = 0 \ ,$$

posto

$$l = -2x_2 + B x_4 \quad , \quad m = 2x_3 + A x_4 \ .$$

Per un punto dello spazio passano tre quadriche corrispondenti a tre curve del fascio. Se queste curve hanno tangenti formanti una terna apolare alle asintotiche, il luogo del punto è la retta $l = m = 0$.

(1) BOMPIANI, *Ancora sulla geometria*, ecc., p. 263.

Digitized by Google

La superficie inviluppata dalle quadriche (15) variando h ha l'equazione

$$(16) \qquad 4(3\beta x_4 l + m^2)(6Qm - \beta x_4 l^2) + \beta x_4 (18Q + lm)^2 = 0 .$$

Le proprietà di questa superficie sono proprio proprietà della σ e del fascio $dv - \lambda h du = 0$. Se questo è invariante così pure è la superficie (16).

6. Si consideri ora la quadrica di Moutard relativa alla tangente di una curva $dv - \lambda h du = 0$ di un fascio. Per un punto dello spazio passano tre quadriche corrispondenti a tre curve del fascio. Se le loro tangenti formano una terna apolare alle asintotiche, le tre quadriche s'incontrano all'infuori delle tangenti asintotiche in un punto sulla retta

$$(17) \qquad \begin{cases} 4(\gamma\lambda^3 h^3 - 2\beta) x_2 + (\gamma\lambda^3 h^3 - 4\beta)\psi_2 x_4 = 0 , \\ 4(2\gamma\lambda^3 h^3 - \beta) x_3 + (4\gamma\lambda^3 h^3 - \beta)\psi_1 x_4 = 0 . \end{cases}$$

Variando h il luogo delle rette (17) è *il cono quadrico invariante*

$$(18) \qquad 48 x_2 x_3 + 28\psi_1 x_2 x_4 + 28\psi_2 x_3 x_4 + 15\psi_1\psi_2 x_4^2 = 0 .$$

La generatrice di questo cono corrispondente alla tangente asintotica u contata tre volte ($h = 0$) è *la seconda direttrice* (1) *di Sullivan,*

$$2x_2 + \psi_2 x_4 = 0 \quad , \quad 4x_3 + \psi_1 x_4 = 0 .$$

La *prima direttrice di Sullivan*

$$4x_2 + \psi_2 x_4 = 0 \quad , \quad 2x_3 + \psi_1 x_4 = 0$$

corrisponde alla tangente asintotica v contata tre volte (per cui $\lambda \to \infty$).

Il piano canonico $\psi_1 x_2 - \psi_2 x_3 = 0$ taglia questo cono in due rette congiungenti P ai punti

$$x_{uv} + K(\psi_2 x_u + \psi_1 x_v) \quad , \quad K = -\frac{3}{4} \quad , \quad K = -\frac{5}{12} .$$

La prima retta corrisponde alle direzioni di Segre per cui $h^3 = \beta/\gamma\lambda^3$, e la seconda corrisponde alle direzioni di Darboux, per cui $h^3 = \beta/\gamma\lambda^3$. Sicchè *la prima (seconda) retta canonica congiunge* x *al punto intersezione delle tre quadriche di Moutard relative alle tre tangenti di Segre (o risp. di Darboux).*

La tangente asintotica u come generatrice del cono corrisponde alla terna di direzioni $h^3 = 2\beta/\gamma\lambda^3$, e la tangente asintotica v come generatrice corrisponde alla terna $h^3 = \beta/2\gamma\lambda^3$.

(1) Vedi la mia Nota: *Le direttrici di Sullivan*, «Bullettino dell'Unione Matematica Italiana», a. V, 1926.

Digitized by Google

Matematica. — *Il problema della moltiplicazione complessa per un qualsiasi corpo puro di funzioni abeliane.* Nota di N. SPAMPINATO, presentata dal Socio Corrisp. G. SCORZA.

In una Memoria, pubblicata nel 1925 e dedicata alla determinazione delle trasformazioni birazionali in sè di una varietà abeliana a tre dimensioni, ebbi già occasione di riconoscere che per lo studio delle questioni riferentisi alla teoria delle funzioni abeliane (indi di tutte le teorie geometriche che ad essa si riconnettono) occorre sfruttare largamente non solo l'ordinaria teoria dei numeri e quella delle algebre, com'era stato fatto precedentemente dallo Humbert e dallo Scorza, ma anche quella dei numeri algebrici.

L'importanza dei sussidi forniti da questa teoria per quello studio mi si è rivelato recentemente in modo notevolissimo, poichè essi soltanto mi hanno permesso di risolvere il problema della determinazione delle trasformazioni birazionali in sè di una qualunque varietà abeliana pura, cioè il problema della moltiplicazione complessa per un qualsiasi corpo puro di funzioni abeliane; ed è noto che per i problemi di questa natura l'interesse della ricerca si concentra tutto sui casi puri giacchè gli altri si riportano ad essi.

I dettagli della ricerca compiuta saranno pubblicati altrove; qui mi permetto di indicare rapidamente l'enunciato e le grandi linee della dimostrazione del teorema che ne costituisce il fondamento.

1. È noto che ad ogni trasformazione birazionale in sè di una varietà abeliana V_p, di dimensione p, risponde una ed una sola sostituzione riemanniana intera modulare della varietà; viceversa ad ogni tale sostituzione riemanniana intera risponde una schiera di ∞^p di trasformazioni birazionali della varietà in sè. Se indichiamo con $u_1, \cdots, u_p$ le variabili indipendenti delle funzioni abeliane che determinano la V_p e con

$$\omega = |\omega_{j,1}, \cdots, \omega_{j,2p}| \qquad (j = 1, \cdots, p) \tag{1}$$

la matrice di Riemann legata alla V_p, data la sostituzione riemanniana intera modulare

$$x'_r = a_{r,1}x_1 + \cdots + a_{r,2p}x_{2p}, \qquad (r = 1, \cdots, 2p) \tag{2}$$

la schiera ∞^p corrispondente è costituita dalle trasformazioni

$$u'_j = \lambda_{j,1}u_1 + \cdots + \lambda_{j,p}u_p = c_j \qquad (j = 1, \cdots, p) \tag{3}$$

(1) Nella seduta del 2 gennaio 1927.

Digitized by Google

dove $c_1, \cdots, c_p$ sono numeri complessi qualunque, e le λ sono determinate dalle relazioni

$$(4) \qquad \lambda_{j,1}\omega_{s,r} + \cdots + \lambda_{j,p}\omega_{p,r} = a_{r,1}\omega_{j,1} + \cdots + a_{r,2p}\omega_{j,2p}$$
$$(j = 1, \cdots, p \quad ; \quad r = 1, \cdots, 2p)$$

Il problema della determinazione delle schiere ∞^p di trasformazioni birazionali in sè della V_p equivale, dunque, al problema della determinazione delle sostituzioni riemanniane intere modulari della V_p.

Ora le matrici corrispondenti alle sostituzioni riemanniane della V_p costituiscono un'algebra razionale $[\omega]$ ad $h + 1$ unità se è h l'indice di moltiplicabilità di ω, si tratta dunque di determinare le matrici ad elementi interi e di modulo 1 contenute nell'algebra $[\omega]$, problema che abbiamo risolto facendo vedere che se la V_p è pura ogni sottoalgebra $\{A\}$ di $[\omega]$ generata da una matrice A di rango ρ_1 si può mettere in corrispondenza biunivoca con un corpo algebrico K di grado ρ_1 e tale corrispondenza è sì fatta che alle matrici di modulo 1 di $\{A\}$ corrispondono le unità del corpo K e viceversa. Tenendo conto allora di un importante teorema del Dirichlet sul gruppo di composizione delle unità di un corpo algebrico mi è stato possibile risolvere il problema propostomi pervenendo al seguente

TEOREMA FONDAMENTALE:

Le schiere ∞^p di trasformazioni birazionali in sè di una varietà abeliana pura V_p, di dimensione p qualunque, costituiscono un insieme di gruppi, le operazioni di ciascuno dei quali si possono supporre date tutte, e ciascuna una volta sola, dalle formole

$$(5) \qquad u_j' = \theta^m u_j + c_j \qquad (j = 1, \cdots, p)$$

o dalle formole

$$(6) \qquad u_j' = \theta_j^m \xi_{j,1}^{m_1}, \cdots, \xi_{j,s}^{m_s} u_j + c_j \qquad (j = 1, \cdots, p)$$

al variare di m fra gl'interi

$$0, 1, \cdots, n - 1,$$

e di $m_1, \cdots, m_s$ fra tutti gl'interi

$$\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,$$

e dove:

a) *n è un intero pari tale che $\varphi(n)$ è divisore del rango ρ di V^p;*

b) *s è un intero $< p$;*

c) *$\theta_1, \cdots, \theta_p$ sono radici primitive n—me dell'unità;*

d) *$\xi_{1,t}, \cdots, \xi_{p,t}$ $(t = 1, \cdots, s)$ sono unità algebriche coniugate di grado $\leq \rho$ e non radici dell'unità;*

e) *$c_1, \cdots, c_p$ sono numeri complessi qualunque.*

Digitized by Google

Matematica. — *Sopra la stabilità geodetica.* Nota di G. VRANCEANU, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Memoria recentemente pubblicata [2] il prof. T. Levi-Civita ha dato sotto una forma estremamente concisa ed espressiva, le equazioni alle variazioni delle geodetiche vicine ad una geodetica data in una varietà riemanniana V_n.

Risoluto questo problema, si impone nel modo più naturale, come osserva il prof. Levi-Civita, il problema della stabilità (in prima approssimazione) delle geodetiche, il cui interesse anche meccanico appare manifesto dal fatto, che le traiettorie di un sistema olonomo sottoposto a sollecitazione conservativa, si possono sempre riguardare come geodetiche di una opportuna V_n. Vogliamo far vedere in primo luogo, come si possono trovare le equazioni alle variazioni delle geodetiche di una varietà anolonoma, che sono nello stesso tempo le traiettorie spontanee di un sistema meccanico anolonomo [3]. Daremo poi *il criterio di stabilità, che si riduce in sostanza a decidere se una forma quadratica è definita positiva o no.*

1. Sia una varietà anolonoma V_n^m definita dalle equazioni [4]

$$(1)\qquad \begin{cases} ds^2 = \sum_{ij}^{n} a_{ij}\, dx_i\, dx_j , \\ \dfrac{dx_i}{ds} = \sum_{h}^{m} \lambda_h^i\, u_h , \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

dove λ_h^i sono i parametri di m ($\leq n$) direzioni ortogonali in V_n.

Le geodetiche di V_n^m sono definite dalle equazioni

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds} = \sum_{h}^{m} \lambda_h^i\, u_h , \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \dfrac{du_h}{ds} = \sum_{ke}^{m} \gamma_{hke}\, u_k\, u_e , \qquad (h = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

dove γ_{hke} sono i coefficienti di rotazione del Ricci delle m direzioni ortogonali λ.

(1) Nella seduta del 19 dicembre 1926.

(2) *Sur l'écart géodésique*, « Mathematische Annalen », vol. 97, form. (I).

(3) Cfr. *Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo*, questi « Rend. » (1926) (II semestre).

(4) Cfr. *Sur les espaces non holonomes*, « Comptes Rendus » (1926), II semestre, pp. 852-854.

Digitized by Google

Sia una soluzione delle equazioni (2)

$$(B) \qquad x_i = \varphi_i(\sigma),$$

dove σ indica l'arco della geodetica (B).

Una curva g vicina a (B) sarà rappresentata da equazione della forma

$$(g) \qquad x_i = \varphi_i(\sigma) + \xi^i,$$

dove le ξ^i sono quantità infinitesime.

In questo modo a qualunque punto M di (B) corrisponde un punto P di (g), e le ξ^i rappresentano proprio le componenti del vettore $\overline{PM}$ secondo le tangenti alle linee coordinate x_i. Supponiamo senz'altro che $\overline{PM}$ sia sempre normale a (B).

In quanto $\overline{PM}$ è un vettore situato in V_n^m, le ξ^i si possono scrivere sotto la forma

$$(3) \qquad \xi^i = \sum_1^m{}_h \lambda_h^i \varepsilon_h,$$

dove le ε_h sono a considerarsi come quantità infinitesime insieme alle loro derivate.

Introduciamo la nozione di vettore derivato di un vettore lungo una curva. Una tale derivata, per il vettore $\overline{PM}$ e la curva (B) ha le componenti controvarianti

$$(4) \qquad (D\varepsilon)^h = \frac{d\varepsilon_h}{d\sigma} - \sum_1^m{}_{kl} \gamma_{hkl} \varepsilon_k c_l,$$

(c_r indicano i coseni che la direzione di (B) forma colle congruenze λ).

In modo analogo si hanno le componenti del vettore derivato di $(D\varepsilon)^h$

$$(4') \qquad (D^2\varepsilon)^h = \frac{d(D\varepsilon)^h}{d\sigma} - \sum_1^m{}_{kl} \gamma_{hkl} (D\varepsilon)^k c_l.$$

Con ciò, le equazioni cui devono soddisfare le ε, purchè la curva vicina (g) sia una geodetica, sono

$$(5) \qquad (D^2\varepsilon)^h = - \sum_1^m{}_{klr} \gamma_{kh,lr} c_k c_l \varepsilon_r, \qquad (h = 1, 2, \cdots, m)$$

dove $\gamma_{kh,lr}$ sono i coefficienti di Ricci a quattro indici, che intervengono coi loro valori lungo la (B).

Queste equazioni hanno carattere invariantivo, nel senso che di fronte alle trasformazioni di coordinate restano invarianti termine a termine, e per un cambiamento delle congruenze λ, in altre congruenze ortogonali λ

Digitized by Google

pure situate in V_n^m, i due membri delle equazioni (5) si comportano come le componenti secondo le λ di un vettore in V_n^m.

Si può avere una grande semplificazione nelle equazioni (5), prendendo la m^{esima} congruenza, λ in modo da contenere la curva (B), e le altre $m - 1$ congruenze in modo che tutti i γ_{bkl} siano nulli lungo la curva (B), ciò che è sempre possibile. Le m equazioni (5) si riducono alle $m - 1$ equazioni

$$\frac{d^2 \varepsilon_h}{d\sigma^2} = - \sum_1^{m-1}{}_r \gamma_{mh,mr} \varepsilon_r , \qquad (h = 1, 2, \cdots, m - 1) \tag{6}$$

la m^{esima} essendo identicamente soddisfatta.

Nel caso di una V_n^2 esiste una sola equazione (6)

$$\frac{d^2 \varepsilon_1}{d\sigma^2} = - \gamma_{21,21} \varepsilon_1 , \tag{7}$$

che, quando si tratta di una superficie ($n = 2$), si identifica colla formula di Jacobi, $\gamma_{21,21}$ essendo la curvatura di Gauss della superficie.

Perciò si può estendere il concetto di curvatura di Gauss ($\gamma_{21,21}$), ad una giacitura qualunque, ossia ad una V_n^2.

2. Si sa, tenendo conto della equazione (7), che sopra una superficie (ed in generale sopra una V_n^2), una geodetica (B) è stabile, se la curvatura di Gauss

$$\gamma_{21,21} > 0 \tag{8}$$

lungo la geodetica (B).

Siccome una geodetica vicina (g) forma sempre con (B) una certa giacitura, avremo *stabilità* se tutte le possibili giaciture passanti per (B), avranno le rispettive curvature di Gauss positive lungo la geodetica (B).

Ora una giacitura passante per (B), sarà completamente determinata da una semplice infinità di direzioni ortogonali a (B), nei punti di questa curva e inversamente. Siano $\overline{\lambda}_h^i$ i parametri di queste direzioni.

Facciamo una trasformazione di congruenze in modo che $\overline{\lambda}_h^i$ appartenga ad una delle congruenze fondamentali, e la base (B) rimanga sempre la m^{esima} congruenza. Indicando con $c_{h\alpha}$ i coefficienti di questa trasformazione ortogonale si avrà

$$c_{mm} = 1 \quad , \quad c_{m\alpha} = 0 \qquad \alpha < m). \tag{8'}$$

Per il fatto che i coefficienti $\gamma_{hk,lr}$ individuano un tensore del quarto ordine [1] in V_n^m, abbiamo le formule di trasformazione

$$\gamma_{mh,mh} = \sum_1^m{}_{\alpha\beta rs} \gamma_{r\alpha,s\beta} c_{mr} c_{ms} c_{h\alpha} c_{h\beta} . \tag{9}$$

(1) Cfr. *Sur le calcul différentiel absolu pour les variétés non holonomes*, « Comptes Rendus » (1926) (décembre), p. 1083.

Digitized by Google

Tenuto conto della formula (8') abbiamo

$$\bar{\gamma}_{mh,\,mh} = \sum_{1}^{m-1}{}_{\alpha\beta}\, \gamma_{m\alpha,\,m\beta}\, c_{h\alpha}\, c_{h\beta}\,. \tag{10}$$

Sopra la base (B) la curvatura Gaussiana della giacitura (B, λ_h^i) coincide con $\bar{\gamma}_{mh,\,mh}$, e le quantità $c_{h\alpha}$ (funzioni dei punti di (B)), devono soddisfare soltanto alla condizione di ortogonalità

$$\sum_{1}^{m-1}{}_{\alpha}\, c_{h\alpha}^2 = 1\,. \tag{11}$$

Perciò i rapporti di due quantità $c_{h\alpha}, c_{h\beta}$ possono prendere (in relazione a tutte le possibili giaciture $(B, \bar{\lambda}_h^i)$), qualunque valore in ciascun punto della (B). Risulta allora che per avere lungo (B) la curvatura di Gauss

$$\bar{\gamma}_{mh.\,mh} > 0,$$

qualunque sia la congruenza λ_h^i, è necessario e sufficiente che la forma quadratica

$$\sum_{1}^{m-1}{}_{\alpha\beta}\, \gamma_{m\alpha,\,m\beta}\, x_\alpha\, x_\beta, \tag{12}$$

sia una forma definita positiva, quando i coefficienti del Ricci $\gamma_{m\alpha,\,m\beta}$ delle congruenze originarie λ, assumano i valori che loro competono lungo la geodetica base (B).

È questo appunto il criterio di stabilità che abbiamo enunciato in principio.

Astronomia. — *Osservazioni sulla scintillazione delle stelle eseguite nel R. Osservatorio del Campidoglio.* Nota di G. Rossi, presentata dal Corrisp. G. Armellini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Geodesia. — *Determinazione di latitudine astronomica eseguita ad Andrate nell'agosto 1926.* Nota di U. Barbieri, presentata [1] dal Corrisp. G. Loria.

A continuazione del programma propostomi di determinare la latitudine e l'azimut astronomici in vertici situati lungo il meridiano di Mondovì, feci, nell'estate del decorso anno 1926, stazione nel villaggio d'Andrate, estremo nord dell'arco di meridiano già determinato dal P. Beccaria nel 1762 [2].

Non essendovi nel paesello anzidetto che un vertice di 4° ordine, nè essendomi possibile di pormi nella località occupata dal P. Beccaria per ulteriori costruzioni eseguite nella località medesima, nè, d'altra parte, rivestendo ciò particolare importanza, scelsi in posizione dominante e acconcia, sul margine NE di Andrate, un luogo adatto, ove feci costruire un pilastro d'osservazione.

Le determinazioni compiute vennero poi ridotte al vertice di 4° ordine accennato, rappresentato dal campanile del paese, il quale vertice fu poi, con successive operazioni di cui darò conto in seguito, collegato alla rete di 1° ordine dello Stato, in guisa da ridurlo, esso stesso, vertice di 1° ordine.

La riduzione in centro fu eseguita con particolare cura; si scelsero due basi differenti, che si misurarono due volte con un doppio decametro in acciaio di nota equazione, ottenendo per la loro lunghezza, tenuto conto della temperatura, i valori rispettivi

$$27^m,9317 \qquad \text{e} \qquad 50^m,7095 .$$

Dalle basi misurate, mediante due triangoli, si passò agli elementi necessarî alla riduzione, che, in unione all'angolo α, azimut della direzione centro-stazione, dedotto dalla collimazione ad un vertice di 1° ordine circostante, cui si riferisce altresì l'angolo ε, risultarono i seguenti:

$$e = 190^m,781 \qquad \varepsilon = 33° 03' 30'' \qquad \alpha = 72° 46' 40'' .$$

Le osservazioni di latitudine, di cui si dà notizia nella Nota presente, ebbero luogo nei giorni 1, 2, 6 agosto, l'interruzione essendo dovuta a tempo avverso.

Il materiale scientifico adoperato, dall'Universale Bamberg a tutto il resto occorrente, appartiene all'Istituto di Geodesia dell'Università di Genova.

Il metodo impiegato fu il solito della osservazione del passaggio di molte stelle al meridiano; si osservarono precisamente ogni sera cinque

(1) Nella seduta del 16 gennaio 1927.

(2) Beccaria, *Gradus Taurinensis*, « Augustae Taurinorum », 1774. Alle osservazioni astronomiche da me compiute, ne furono contemporaneamente aggiunte altre di gravità relativa, per parte del mio assistente dott. I. Gennaro, che con un apparato bipendolare di Sterneck, determinò la differenza di gravità fra Genova (Istituto Idrografico della R. Marina) e Andrate (sacrestia della chiesa parrocchiale di S. Maria).

Digitized by Google

gruppi di otto stelle ciascuno, metà delle stelle culminanti a nord dello zenit, e metà a sud, alternando le osservazioni ad ovest, con quelle ad est. Come sempre, si ebbe poi cura che le distanze zenitali delle singole stelle non oltrepassassero i 30°, e che la somma delle distanze medesime fosse contenuta, in ogni gruppo, entro 1° o poco più.

Nello specchio che segue sono riportati i risultati complessivi delle determinazioni fatte, nelle varie sere d'osservazione.

Gruppo	1 agosto	2 agosto	6 agosto	Media	Numero delle osservazioni
	φ	φ	φ	φ	
1°	45° 31′ 11″.7	45° 31′ 12″.2	45° 31′ 12″.9	45° 31′ 12″.3	32
2°	10 .2	11 .4	10 .9	11 .1	32
3°	10 .4	11 .4	12 .8	12 .1	32
4°	11 .2	12 .4	11 .9	11 .8	32
5°	10 .5	11 .9	12 .2	11 .5	32
Media	45° 31′ 10″.8	11 .8	12 .1	11 .8	160

Dalla media dei valori riportati nella penultima colonna si deduce come risultato finale

$$\varphi = 45° 31′ 11″.76,$$

da cui, applicando la riduzione in centro $\Delta\varphi = -1″.83$, dedotta con gl elementi riferiti precedentemente, si trova in definitiva

$$\varphi = 45° 31′ 09″.93 \qquad m = \pm 0″.21$$

(1926.6)

quale valore per la latitudine di Andrate, centro del campanile ora esistente, a sud della chiesa parrocchiale.

Ad Andrate la stazione astronomica del P. Beccària era stata disposta nell'angolo NO della chiesa ancor oggi esistente all'estremo nord del paese; una piccola lapide ricorda il luogo esatto ove era disposto il suo settore zenitale: la stazione degli astronomi Plana e Carlini, che nel 1821 ripeterono le medesime osservazioni [1] fu fatta, invece, in un punto situato nel mezzo, circa, del porticato della casa Bruneri, presentemente dimora del parroco del paese; la latitudine determinata fu quindi da essi ridotta ad una torre o campanile, oggi non più esistente, situata circa 10 m. a SO dell'attuale campanile di Andrate, il cui asse costituisce il vertice di 4° ordine, da me poi collegato alla rete di 1° ordine del Regno.

Riducendo i valori da me dedotti a Mondovì (1925) [2] e ad Andrate,

(1) PLANA e CARLINI, *Operations géod. et astron. pour la mesure d'un arc du parallèle moyen exécutées en Piémont et en Savoie, etc., en 1821, 1822, 1823.* Tome Ier (Milan, 1825), Tome IIme (Milan, 1827).

(2) Vedi questi « Rendiconti ».

Digitized by Google

e quelli del Plana e Carlini ai punti stazioni astronomiche del Beccaria, al fine di istituire un confronto, si ottiene:

	Beccaria (Gradus Taur.)	Beccaria (Zach)	Plana e Carlini	Barbieri
Latitudine di Mondovì .	44° 23′ 33″.6	44° 23′ 38″.0	44° 23′ 44″.4	44° 23′ 42″.5
» » Andrate .	45 31 18 .3	45 31 22 .3	45 31 15 .4	45 31 12″.8
Segue come amplitudine dell'arco	1° 07′ 44″.7	1° 07′ 44″.3	1° 07′ 31″.0	1° 07′ 30″.3

Per quanto la differenza di circa 15″ fra le odierne determinazioni e quelle del Beccaria possa sembrare rilevante, è fuor di dubbio il fatto che tale differenza rimane giustificata dall'essere ormai trascorsi ben 164 anni dall'epoca in cui quelle osservazioni furono compiute, onde certo non poteva pretendersi precisione maggiore dal Beccaria, che operò da solo e con mezzi di limitata, o meglio ancora, grossolana esattezza. Gli appunti a lui mossi dai suoi contemporanei e successori, non trovano pertanto ragion d'essere.

Dai dati elencati a p. 346 del vol. II dell'op. cit. di Plana e Carlini, relativi alle osservazioni dei detti AA., si ricava:

amplitudine astronomica dell'arco meridiano compreso tra Mondovì (Torre del Belvedere) e Andrate (campanile non più esistente) . . 1° 07′ 26″.98

idem, geodetica $\left(\text{per l'ellissoide di costanti } \begin{cases} a = 6.376.986 \\ \alpha = \frac{1}{308.65} \end{cases}\right)$ . . . 1° 08′ 14″.82

onde ne consegue che l'amplitudine geodetica sorpassa l'astronomica di 47″.84.

Le determinazioni di cui è oggetto la presente Nota, in unione alle altre fatte da me nel 1925 a Mondovì, permettono di stabilire fra gli stessi punti il seguente confronto:

Latitudine geodetica di Mondovì 44° 23′ 24″.3
» » » Andrate 45° 31′ 38″.9 (1)

Latitudine astronomica di Mondovì 44° 23′ 42″.48
» » » Andrate 45° 31′ 09″.8

da cui fra i due punti

amplitudine geodetica 1° 08′ 14″.6
» astronomica 1° 07′ 27″.3,

e quindi una differenza di 47″.3.

Si vedrà in appresso se una qualche correzione sia da apportare a quest'ultimo valore, in conseguenza del collegamento del vertice di Andrate alla rete di 1° ordine dello Stato, dal quale collegamento dovrà seguire un valore più esatto della latitudine geodetica del detto vertice.

(1) Dai dati pubblicati dall'Istituto Geografico Militare.

Digitized by Google

Fisica. — *Una notevole deduzione dalla teoria di Bohr.* Nota del dott. N. SIRACUSANO, presentata [1] dal Socio Corrispondente L. PUCCIANTI.

Prima della scoperta degli elementi radioattivi nulla si sapeva intorno alla possibilità di nuovi elementi a peso atomico elevato, e quindi non era previsto un limite finito al sistema periodico del Mendelyeff. L'ordinamento di questo sistema in serie di 2, 8, 18, 32 elementi e precisamente in 6 serie di cui la 1ª di 2, la 2ª e la 3ª di 8, la 4ª e la 5ª di 18, la 6ª di 32 elementi [2] lasciano prevedere che la 7ª serie, che termina con l'Uranio e che si compone di 6 elementi, sia l'inizio di un'altra serie di 32 elementi, ma che questi non possono esistere a causa della loro instabilità. Però si noti che la esistenza teorica non è esclusa: « D'après les faits observés en radioactivité, on est conduit à envisager que *les conditions réalisées sur notre globe ne permettent pas l'existence des éléments à haut poids atomique* », dice il Sommerfeld [3].

È mio intento dimostrare in questa Nota che, *se il modello atomico del Bohr fosse l'unico, gli elementi chimici della natura non potrebbero mai raggiungere il numero di 138.*

Supponiamo dapprima le orbite circolari: la velocità di un elettrone sulla sua orbita sarà data dalla formula:

$$v = \frac{2\pi E e}{h} \frac{1}{n},$$

dove E è la carica nucleare, e quella dell'elettrone, h la costante di Planck, n il numero quantico dell'orbita.

È presumibile che, come ha dimostrato l'esperienza finora, qualunque sia l'elemento considerato, debba esistere sempre un'orbita cui spetti il numero quantico *uno*, ed allora esisterà sempre il valore (massimo) della velocità:

$$v_1 = \frac{2\pi E e}{h}.$$

Se c è la velocità della luce, qualunque sia l'ordine di grandezza di v_1, dovrà essere sempre:

$$v_1 < c,$$

(1) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1927.

(2) BOHR, « Nature », marzo 1921.

(3) SOMMERFELD, *La constitution de l'atome et raies spectrales*, 1923, p. 71.

Digitized by Google

ed essendo $E = Ze$, dove Z è il numero atomico, da questa diseguaglianza si trae:

$$(1) \qquad Z < \frac{hc}{2\pi e^2}.$$

L'espressione $\frac{hc}{2\pi e^2}$ è un numero puro, giacchè $[e]^2 = ML^3 T^{-2}$ (u.c.s.), $[h] = [\text{azione}] = L^2 MT^{-1}$, $[c] = LT^{-1}$. Sostituendo i valori:

$$2\pi = 6.28 \quad , \quad c = 3.10^{10} \quad , \quad h = 6.55 \cdot 10^{-27} \quad , \quad e = 4.77 \cdot 10^{-10},$$

si trova

$$Z < 137.52$$

e arrotondando

$$Z < 138$$

Questa deduzione non è infirmata dalla variabilità della massa dell'elettrone con la velocità, perchè la condizione di diseguaglianza imposta è che sia sempre $v_1 < c$, comunque, la proposizione è valida sempre.

Com'è noto, infatti il Sommerfeld [1], considerando il caso più generale di orbite ellittiche e introducendo la correzione $m = m_0 \left(1 - \frac{v_2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ voluta dalla meccanica relativistica, trova per l'energia totale dell'elettrone l'espressione:

$$(2) \qquad W = \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{n}\frac{E}{e}\right)^2}{\left[\frac{n'}{n} + \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{n}\frac{E}{e}\right)^2}\right]} \right\}^{-\frac{1}{2}} m_0 c^2 - m_0 c^2$$

dove $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$, n è il numero quantico azimutale, n' quello radiale, definiti dalla condizione quantica generale

$$J_r = \int p_r \, dr = n' h \quad , \quad J_\varphi = \int p_\varphi \, d\varphi = nh,$$

essendo p_r e p_φ rispettivamente i momenti dell'impulso radiale e azimutale (coordinate di Hamilton-Poisson). Per orbite circolari si ricava, essendo $|n'| = 0$

$$(3) \qquad 1 + \frac{W}{m_0 c^2} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2}.$$

(1) Op. cit., p. 564, App. 16.

Digitized by Google

Per la condizione di realtà dev'essere

$$1 \geqq \frac{\alpha^2}{n^2} Z^2;$$

però è da escludersi il caso dell'uguaglianza perchè sarebbe $c = \frac{2\pi Ee}{h} \frac{1}{n}$, il che è impossibile, perchè il secondo membro è uguale alla velocità dell'elettrone sull'orbita. Dunque dev'essere:

$$\frac{Z}{n} < \left\| \frac{2\pi e^2}{hc} \right\|$$

se $n = 1$ si ricade nella (1).

Il secondo membro della (3) riferentesi ad orbite circolari figura anche nella (2), che si riferisce ad orbite ellittiche, perciò per la medesima ragione dovrà essere valida la diseguaglianza (1). Resta così pienamente dimostrato il nostro asserto.

Il risultato mi sembra di una certa importanza, non solo nei riguardi della filosofia naturale, ma anche perchè si può considerare come una conferma in più a favore della struttura atomica del Bohr e della relatività speciale, giacchè, come è ben noto, gli elementi finora conosciuti e quelli previsti dalla teoria dei raggi X (elementi a peso atomico inferiore a quello dell'uranio) sono 92. È probabile che una discussione più approfondita, sui fondamenti di quest'ultima teoria, possa ancora meglio definire questo limite.

Chimica. — *Sulla peptizzazione dell'ossido di torio «Meta».* Nota di G. Levi e A. Reina, presentata dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-Fisica. — *Numero d'ordine, peso eccedente e struttura atomica.* Nota di G. Piccardi, presentata dal Corrisp. L. Rolla.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Elettrochimica. — *Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo.* Nota II di L. Mazza presentata [1] dal Corrisp. L. Rolla [2].

5. Piombo. – I campioni di piombo [3] usati per le prove furono ridotti in polvere oppure, per trafilazione, in forma di piccole bacchette cilindriche di 1 mm. di diametro. La polvere venne introdotta e compressa leggermente in un tubicino di carta velina pure di 1 mm. di diametro. Le fotografie furono eseguite usando camere di precisione con film di 180 mm. avvolte su portafilm cilindrici di 57.3 mm. di diametro, e un tubo metallico per raggi X di grande potenza [4], munito di 5 finestre. Il tubo venne eccitato con 65 KV. max. e 14 mA.

L'esposizione di ciascuna prova è stata di circa 3.000 mA.-minuti. In tal modo le fotografie sono risultate molto nitide.

Le posizioni delle linee, opportunamente determinate sulle film per mezzo di un comparatore, e le intensità misurate con un microfotometro Hartmann concordano bene con i risultati ottenuti per il piombo da precedenti autori.

Solfato di piombo. – Questo prodotto, ottenuto per precipitazione con H_2SO_4, è stato introdotto e leggermente compresso in un tubicino di carta velina sottilissima di 1 mm. di diametro e poi esaminato con le radiazioni K del rame. L'esposizione è stata di 3200 mA–minuti, nelle condizioni già descritte. Il fotogramma relativo è riportato nella fig. 1 (fot. 1°). Per semplicità è stata riprodotta una sola metà del fotogramma mantenendo invariate al possibile le dimensioni della film originale. La linea verticale esistente nella figura, a destra dei vari fotogrammi, passa sensibilmente per il centro di essi.

Biossido di piombo. - Ho esaminato due preparati purissimi uno della Casa Merk, l'altro della Casa Schuchardt. Ho eseguito un fotogramma per ciascuno sia con le radiazioni di un anticatodo di rame che con quelle del ferro. L'esposizione è stata di 2500 mA–minuti.

La riproduzione di due fotogrammi è fatta nella figura I, fot. 2° (anticatodo di rame) fot. 3° (anticatodo di ferro).

6. Mescolanze di PbO_2 e $PbSO_4$. - Sono state mescolate quantità variabili di PbO_2 e $PbSO_4$ e i miscugli così ottenuti sono stati esaminati con

(1) Nella seduta del 7 novembre 1926.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica-Fisica della Regia Università di Firenze. V. questi « Rendiconti ». IV, 1926, 2° sem. pp. 215-218.

(3) Piombo puro della casa Kahlbaum.

(4) L. Rolla e L. Mazza « Metall. Ital. 18 », 1926, pp. 247-280.

Digitized by Google

le radiazioni K del rame. Con esposizioni di 3000 a 4000 mA-minuti fatte nelle condizioni già indicate, è possibile individuare alcune delle linee più intense anche in miscugli al 5 per cento di uno dei componenti.

I fotogrammi di mescolanze contenenti circa il 50 per cento di $PbSO_4$ mostrano, se esaminati con cura, tutte le linee che derivano dai due reticoli cristallini del PbO_2 e $PbSO_4$. Il fotogramma di un campione al 50 per cento è riprodotto nella fig I (fot. 4°).

Mescolanze di Pb e $PbSO_4$ - Quel che è stato detto a proposito dei miscugli di PbO_2 e $PbSO_4$ vale anche in questo caso.

7. Sostanze prelevate dalle piastre positive di accumulatori a piombo. - Ho preso in esame due tipi di accumulatori del commercio a formazione articiale (Faure) e precisamente il tipo J3 della Casa Hensemberger di Monza e quello La I della Società Generale Italiana Accumulatori Elettrici di Melzo. Ho esaminato inoltre una piastra positiva ottenuta sottoponendo al processo solito di formazione, per un tempo assai lungo, una piccola rete di piombo puro ricoperta di una pasta di Pb_3O_4 (minio) e H_2SO_4.

Sono stati eseguiti alcuni fotogrammi di campioni prelevati su piastre positive: *a*), sottoposte a lunga sovraccarica corrispondente ad un tempo uguale al triplo di quello necessario per una carica normale; *b*) caricate normalmente; *c*) nel periodo medio di scarica; *d*) completamente scariche (fino a 1.85 volt) (1).

Tutti i campioni furono asciugati rapidamente comprimendoli fra dei fogli di carta da filtro. Si possono così ottenere in pochi minuti dei prodotti asciutti e ridotti in polvere molto sottile. I campioni asciugati e polverizzati nel modo ora detto furono introdotti in tubicini di carta velina paraffinata ed esaminati con i raggi X. Quasi tutti i fotogrammi furono ottenuti con le radiazioni K emesse da un anticatodo di rame, solo in qualche caso particolare fu impiegato un anticatodo di ferro. Nella fig. 1 sono stati riportati alcuni dei fotogrammi ottenuti; uno per ciascuno dei campioni *a*), *b*), *c*), *d*) esaminati - fot. 5° *a*); fot. 6° *b*); fot. 7° *c*); fot. 8° *d*).

8. Dall'esame dei fotogrammi si può subito trarre alcuni interessanti risultati. Il confronto dei fotogrammi dei campioni *a*) e *b*) (fot. 5° e 6°) con quelli del biossido di piombo (fot. 2° e 3°) permette di stabilire che nei due casi le linee di interferenza osservate si trovano in posizioni coincidenti e presentano intensità relative uguali. Si deve inoltre notare che nessun'altra riga, anche debolissima, appare nei fotogrammi dei campioni *a*) e *b*) (v. fig. I, fot. 5° e 6°) oltre alle linee di cui abbiamo verificato la coincidenza, esistenti

(1) In tutte le esperienze sia la carica che la scarica è stata sempre eseguita con densità di corrente di 0.5 amp. per dm^2 di superficie apparente.

Digitized by Google

nei fotogrammi del PbO_2 fig. 1; fot. 3°. Dalla identità dei reticoli spaziali si deve ammettere che i campioni *a*) e *b*) sono costituiti da PbO_2 o almeno che se un altro eventuale composto del piombo vi si trova frammisto, esso è contenuto in quantità esigua. Osservando accuratamente i fotogrammi 5° e 6° si rileva inoltre che le linee del campione *b*) ed ancor più quelle del campione *a*) appaiono molto sottili mentre le corrispondenti linee dei fotogrammi del PbO_2 ottenuto per via chimica sono sensibimente allargate per quanto, come già ho detto, la posizione dei massimi di intensità sia coincidente.

La larghezza delle righe di interferenza dipende, come è noto, dalla grandezza delle particelle cristalline. Così è spiegata la differenza di colore presentata dal biossido di piombo ottenuto per via elettrolitica che, in preparati ottenuti per prolungata elettrolisi a 2.7 volt con densità di corrente di 0.01 amp. per cm.^{2} di superficie apparente, può perfino apparire nero.

I campioni *c*) danno dei fotogrammi (v. fig. I, fot. 7°) in cui sono ben visibili tutte le righe già trovate nei campioni *a*) e *b*) ed anche alcune altre linee.

Confrontando la posizione di queste nuove linee si può verificare che tale posizione corrisponde a quella delle righe più intense già riscontrate nel fotogramma del $PbSO_4$ (fot. 1°).

Nei fotogrammi dei campioni *d*) (v. fig. I, fot. 8°) appare un numero assai rilevante di righe, di cui talune sono così vicine da sembrare ad un esame superficiale quasi sovrapposte.

Il confronto di questi fotogrammi con quello della figura I, fot. 4° permette di stabilire l'identità di essi. Infatti confrontandone la posizione delle righe e la loro intensità relativa con quella determinata per le righe dei fotogrammi del PbO_2 e $PbSO_4$ si può stabilire facilmente che quasi tutte le linee presenti nei fotogrammi del PbO_2 e $PbSO_4$ esistono pure nei fotogrammi del campione *d*). Si deve quindi logicamente concludere che i campioni *c*) e *d*) siano formati da mescolanze di PbO_2 e $PbSO_4$, Inoltre non è rilevabile la presenza di altri eventuali prodotti frammisti al PbO_2 e $PbSO_4$ a meno che questi non si trovino in stato amorfo. Un'altra informazione si può trarre dall'esame dei fotogrammi dei campioni *d*), cioè che la quantità di PbO_2 presente nelle piastre positive scariche deve essere assai notevole. Il confronto microfotometrico di tali fotogrammi con quelli delle mescolanze di PbO_2 e $PbSO_4$ indicherebbe approssimativamente una quantità di PbO_2 superiore al 40 per cento. Questo risultato, per quanto approssimativo, illumina la questione controversa del colore delle piastre positive scariche e conforta in pari tempo le ricerche analitiche di Ayrton [1] e Robertson [2].

(1) « Elektrotech. Zeitschr. », 12, 1891, pp. 66-68.
(2) « Proc. Roy. Soc. », 50, p. 105, 1891.

Digitized by Google

Mineralogia. — *Sopra una dimostrazione di interdipendenza fra le leggi di Curie e di Haüy.* Nota di A. BARTORELLI, presentata[1] dal Corrisp. G. D'ACHIARDI.

1. Il prof. Carlo Viola pubblicò nei « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », serie 5ª, vol. XXVII, 1° sem. 1918, fasc. 12, pp. 421–428, col titolo: *Sulle leggi di Curie e di Haüy*, ed altrove[2] uno studio nel quale si propose di presentare la legge di Curie sotto una forma, com'egli dice, più comprensibile e di mostrare la interdipendenza fra detta legge e quella di Haüy.

Tale scopo egli cercò di raggiungere con una trattazione analitica, per la quale rimando il lettore alla citata Nota, pubblicata nei « Rendiconti », per quanto non è indispensabile riportare in questo scritto.

2. Io prendo qui in esame cotesta trattazione perchè mi pare non possa andare immune da gravi obiezioni, tali cioè da far dubitare della validità delle conclusioni alle quali l'A. credette di poter giungere.

Nella citata Nota il Viola, esaminando il problema nella sua più grande generalità, considera un cristallo limitato da n faccie, $1, 2, 3, \cdots r \cdots n$ con le aree rispettive $s_1, s_2, s_3, \cdots s_r \cdots s_n$, aventi le costanti capillari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_r \cdots \alpha_n$, e le distanze normali, contate da un centro O scelto nel cristallo $p_1, p_2, p_3 \cdots p_r \cdots p_n$. Egli esprime quindi con questi dati la tensione superficiale totale del cristallo

$$E = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 + \cdots + \alpha_r s_r + \cdots + \alpha_n s_n = \Sigma \alpha_r s_r \qquad (r = 1, 2 \cdots n)$$

ed il suo volume totale

$$V = \frac{1}{3}(p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + \cdots + p_r s_r + \cdots + p_n s_n) = \frac{1}{3} \Sigma p_r s_r = \Sigma v_r \qquad (r = 1, 2 \cdots n) .$$

Immaginando, come già fece il Curie, il cristallo mantenuto nella soluzione satura nella quale si è formato, è noto come in generale esso subisca una deformazione continua, sciogliendosi in certe direzioni e accrescendosi in altre, fino a che raggiunga un equilibrio stabile.

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1926.

(2) Lo stesso argomento è stato trattato dal VIOLA in identico modo nel « Bulletin de la Société française de Minéralogie », t. XLI, avril-juin 1918 in una Nota dal titolo: *Sur les lois de Curie et de Haüy*. Egli fa uso poi, nel cap. II del suo *Trattato di Cristallografia*, Hoepli, Milano, 1920, delle relazioni stabilite in questo studio.

Digitized by Google

L'A. considera risoluto il problema dell'equilibrio con le due condizioni

$$\delta E = o \quad , \quad \delta V = o$$

nelle quali ritiene inclusa la legge di Curie.

3. Con una analisi, per lo svolgimento della quale rimando alla citata Nota, il Viola arriva alla conclusione che le condizioni precedenti danno luogo ad altrettante relazioni quante sono le faccie del cristallo considerato, n nel nostro caso, cioè:

$$\frac{p_1}{\alpha_1} = \frac{p_2}{\alpha_2} = \frac{p_3}{\alpha_3} = \cdots = \frac{p_r}{\alpha_r} = \cdots = \frac{p_n}{\alpha_n} = M' .$$

Questa, secondo l'A., è l'espressione matematica della legge di Curie, che egli enuncia come segue:

Gli accrescimenti normali delle faccie di un cristallo in equilibrio stabile sono proporzionali direttamente alle loro costanti capillari.

4. I simboli δ adoperati dall'A. e lo svolgimento del calcolo fanno ritenere che egli abbia voluto applicare al problema i procedimenti del Calcolo delle variazioni e, se è così, si possono fare, fra le altre, le seguenti osservazioni.

Dire, come fa l'A., che quando il cristallo non può nè crescere nè decrescere, la variazione della tensione superficiale totale E per l'equilibrio deve essere nulla, significa che ci troviamo dinanzi ad una questione di massimo o di minimo condizionato o relativo che dir si voglia. Dev'essere cioè nulla la variazione di E sotto la condizione che sia V costante. Bisognerebbe poi che E assumesse la forma di un integrale, cosa che potrebbe per esempio avvenire quando si considerasse sopra ogni faccia la costante capillare α funzione di punto sulla faccia stessa, ritenendosi α costante su tutta la faccia soltanto quando fosse raggiunta la configurazione di equilibrio. La variabile di integrazione sarebbe l'elemento di superficie di ogni faccia e sarebbe necessario fare lo studio annullando la variazione della somma di cosiffatti integrali estesi ad ogni faccia, sotto la condizione V = costante. Ci troviamo dunque dinanzi ad un problema analogo a quello noto nel Calcolo delle variazioni sotto il nome di problema del Lagrange, il quale richiederebbe uno sviluppo analitico ben diverso da quello esposto dall'A.

5. Ed invero la stessa natura dei resultati ai quali porta lo svolgimento analitico proposto dall'A., resultati che lasciano molto dubbiosi sulla loro attendibilità, fa ritenere che la trattazione completa e rigorosa del problema debba essere più complessa.

È difficile ammettere infatti la reciproca indipendenza delle singole variazioni di estensione delle superficie di ciascuna faccia, perchè la variazione

Digitized by Google

della estensione di una faccia porta con sè per necessità geometrica e fisica quella di alcune altre.

Ma vi è di più. All'analisi che l'A. svolge si possono muovere anche altre obiezioni.

Egli prende le mosse da quella che chiama: « la variazione del volume v_r dovuta alla deformazione sulla faccia r » e la esprime con

$$\delta v_r = (s_r + \delta s_r)\,\delta p_r = s_r\,\delta p_r \ ,$$

trascurando, com'egli dice, quantità minime del secondo ordine. Ma, così facendo, egli ottiene una espressione che non contiene più la variazione dell'area della faccia, che è precisamente il fenomeno che si vuole studiare.

Ammessa la variazione di distanza δp_r, ne segue che la variazione di volume, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, è proprio quella che egli scrive successivamente e cioè

$$\delta v_r = \frac{1}{3}\,(s_r\,\delta p_r + p_r\,\delta s_r) \ .$$

Cosicchè le conseguenze alle quali egli perviene dipoi sono basate sopra il fatto di avere scritto successivamente, senza giustificazione, due diverse espressioni per il valore della stessa grandezza, e perciò non sembrano accettabili.

6. Se si segue invece l'A. e si assume come valida la relazione (3) del § 2 della sua Nota, dedotta nel modo sopra indicato, si trova che essa diviene

$$s_r\,dp_r = \frac{1}{2}\,p_r\,ds_r$$

quando, per limitarsi agli infinitesimi del primo ordine, si sostituiscono le d alle δ.

Si ha così una equazione differenziale la quale, integrata, dà

$$s_r = cp_r^2$$

con c costante.

Resulterebbe quindi l'area di ogni faccia proporzionale al quadrato della sua distanza da un punto arbitrario scelto nell'interno del cristallo.

Una tale legge, quando la costante di integrazione c fosse presa uguale per tutte le faccie e le distanze fossero contate dal centro del cristallo, significherebbe geometricamente che le figure ammissibili per il cristallo sarebbero tutte quelle simili ad una figura fondamentale. Si cadrebbe dunque in una legge particolarissima, che non è affatto quella legge matematica generale che l'A. si era proposto di trovare, nell'intendimento di rappresentare i fenomeni realmente offerti dai cristalli, mantenuti immersi nelle soluzioni sature nelle quali si sono formati.

Digitized by Google

7. Dalle osservazioni critiche precedentemente sviluppate si deduce che difficilmente si potrebbero ritenere valide, oltre la legge, indicata con (II) a p. 423 della citata Nota, e presentata come l'espressione matematica della legge di Curie, anche quelle corrispondenti a (III) e (IV) della p. 425, le quali ne discendono come conseguenze.

Se ne può ricavare e concludere che il passaggio dalla legge di Curie a quella di Haüy, così come è fatto nella ultima parte della Nota stessa, viene a mancare di base.

Cristallografia. — *Studi sui reticolati cristallini.* – I. *Spazio molecolare e numero atomico.* Nota di U. PANICHI, presentata [1] dal Socio F. MILLOSEVICH.

Coi reticolati atomici vien distrutto il concetto di molecola quale piccola massa situata, nei reticolati, a determinate distanze da altre masse eguali. Tuttavia la molecola ha valore nei reticolati come sottomultiplo della cella sia in riguardo al peso, sia in riguardo al volume. Ogni atomo esiste in uno spazio che è il suo dominio e che noi penseremo come adiacente senza discontinuità a spazi analoghi e perciò non sferico; quindi diverso dalle « sfere d'azione » di Barlow e Pope e poi di Bragg. La somma degli spazi relativi agli atomi che fanno parte di una molecola, la chiameremo « spazio molecolare ». Il valore Sm di questo è dato dal volume della cella diviso per il numero n di molecole facenti parte della cella stessa.

Applichiamo questo concetto al caso degli alogenuri dei metalli alcalini, composti molto studiati, e dei quali, salvo per il fluoruro di rubidio, è stato determinato röntgenograficamente il lato A_0 della cella cubica. Sarà $Sm = \frac{A_0^3}{n}$. Si sa anche che in tutti, eccetto tre, la cella è cubica a facce centrate, mentre nel cloruro, bromuro, e ioduro di cesio si trova il cubo centrato; ora nella cella a facce centrate $n = 4$, mentre in quella a cubo centrato $n = 1$; e perciò il valore di Sm sarà rispettivamente $\frac{1}{4} A_0^3$ e A_0^3.

È naturale cercare come questo valore dipenda dalla natura degli atomi e, anzitutto, dal numero atomico. Chiameremo « numero molecolare » la somma Nm dei numeri atomici corrispondenti agli atomi di una molecola. Nei due quadri qui uniti si vedono scritti in carattere grosso i numeri molecolari; il quadro di sinistra si riferisce agli alogenuri alcalini; a destra poi sono considerati i componenti binari dei metalli bivalenti, che rispet-

(1) Nella seduta del 2 gennaio 1927.

Digitized by Google

tivamente hanno lo stesso numero molecolare dei composti a sinistra, il che avviene perchè gli elementi dei composti a sinistra appartengono alle colonne I e VII del sistema periodico, e quelli dei composti a destra sono i loro corrispondenti nelle colonne II e VI. Ma anche in ogni quadro troviamo composti con eguale valore di Nm, come ad esempio KF e NaCl a sinistra, CaO e MgS a destra. Ciò permetterà di confrontare i composti aventi ugual numero molecolare, sia se appartenenti ad un medesimo quadro, sia se di quadri differenti.

		F (9)	Cl (17)	Br (35)	I (53)
Li . . (3)	Nm	**12**	**20**	**38**	**56**
	R	0,333	0,176	0,086	0,056
	A_o	4,01	5,14	5,49	6
	Sm	16	33	41	54
	A	**20**	**28**	**46**	**64**
Na (11)		1,222	0,647	0,314	0,207
		4,62	5,63	6	6,46
		24	44	54	67
		28	**36**	**54**	**72**
K (19)		2,111	1,111	0,542	0,358
		5,33	6,26	6,57	7,05
		38	61	70	87
		46	**54**	**72**	**90**
Rb (37)		4,111	2,176	1,057	0,698
			6,53	6,86	7,32
			69	80	98
	B				
		64	**72**	**90**	**108**
Cs (55)		6,111	3,235	1,571	1,037
		6	4,12	4,29	4,56
		51	69	78	86

		O (8)	S (16)	Se (34)	Te (52)
Be . . (4)	Nm	**12**	**20**	**38**	**56**
	R	0,5	0,25	0,117	0,075
	A_o				
	Sm				
	A	**20**	**28**	**46**	**64**
Mg (12)		1,5	0,75	0,352	0,230
		4,20	5,08		
		18	35		
		28	**36**	**54**	**72**
Ca (20)		2,5	1,25	0,588	0,384
		4,79	5,68	5,91	
		27	45	51	
		46	**54**	**72**	**90**
Sr (38)		4,75	2,375	1,117	0,730
		5,10	5,87	6,23	
		34	50	58	
	B				
		64	**72**	**90**	**108**
Ba (56)		7	3,50	1,647	1,076
		5,54	6,35	6,62	
		42	64	72	

Digitized by Google

Nei quadri sono segnati i valori sperimentali di A_0; è da notare che anche i composti di destra, per i quali è determinato A_0, hanno maglia cubica ($n = 4$); dai valori di A_0 son dedotti quelli di Sm.

Osservando il quadro degli alogenuri, troviamo che A_0 è crescente sia da sinistra a destra nelle orizzontali, sia dall'alto al basso nelle verticali, eccetto pei tre valori di CsCl, CsBr, CsI; lo stesso avviene per Sm, salvo che qui anche nell'ultima orizzontale i valori sono crescenti. Nel quadro di destra poi troviamo lo stesso andamento, ma senza eccezione. E siccome lo stesso andamento hanno in ambedue i quadri i valori di Nm, si può dire, in linea generale, che Sm cresce con Nm.

Confrontando poi composti con egual numero molecolare troviamo ad es. a sinistra

$$Sm = 38 \text{ per KF} \qquad \text{e} \qquad Sm = 44 \text{ per NaCl};$$

ora costantemente si verifica che il valore di Sm è minore dove il numero atomico del metallo è maggiore; la stessa cosa si verifica anche nel quadro a destra: così ad es.

$$Sm = 27 \text{ per CaO} \qquad \text{e} \qquad Sm = 35 \text{ per MgS}.$$

Dai due esempi addotti e dagli altri analoghi, risulta ancora un altro fatto: e cioè che i valori di Sm a sinistra sono maggiori di quelli corrispondenti a destra.

Per chiarir meglio questi fatti, consideriamo anche il rapporto R fra i valori dei numeri atomici del metallo e del metalloide.

Se sarà $R > 1$ avrà valore predominante il metallo; se $R < 1$ il metalloide. Ora in ciascuno dei due quadri si trova che per metà dei composti $R > 1$ e per metà $R < 1$. La linea spezzata AB segnata in ciascun quadro separa i due gruppi di composti.

Ed ora possiamo vedere che fra due composti analoghi, cioè appartenenti al medesimo quadro, ed aventi lo stesso Nm, ha maggiore spazio molecolare quello cui corrisponde il minor valore di R. Se poi i due composti di pari numero molecolare appartengono a quadri differenti, anche allora è maggiore Sm dove è minore R; ma in tal caso occorre osservare che a due valori di R si trovano corrispondere valori di Sm fra loro più distanti di quelli che si troverebbero fra composti dello stesso quadro. Così ad es. confrontando NaCl prima con KF e poi con MgS (in tutti $Nm = 28$), nel primo caso Sm scende da 44 a 38 mentre R scende da 0,647 a 2,111, invece nel secondo caso Sm scende assai di più, cioè da 44 a 35, mentre R cresce appena da 0,647 a 0,75.

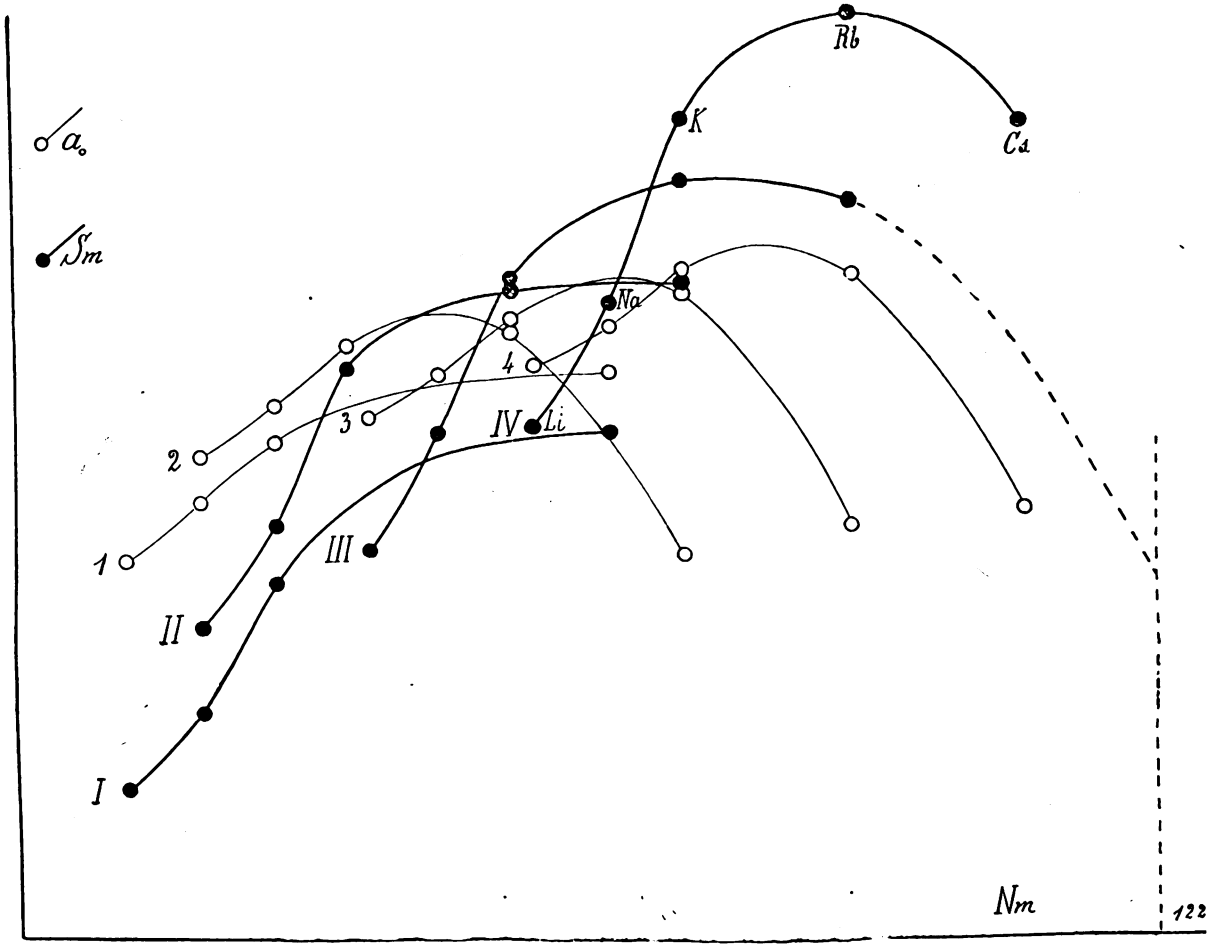
Ciò fa comprendere che interviene nella variazione un altro fattore; ed è logico attribuire il fenomeno al fatto della diversa valenza dei rispettivi elementi; cioè passando da cationi monovalenti a cationi bivalenti,

Digitized by Google

(a parità di numero molecolare e quasi a parità di rapporto R) troviamo che gli spazi molecolari sono minori quando la valenza è maggiore.

Altre osservazioni si possono fare portando sopra assi ortogonali i valori considerati. Limitandoci agli alogenuri, porteremo sull'asse delle ascisse i valori di Nm; come ordinate prenderemo prima i valori di A_o, poi quelli di Sm. In ambedue i casi congiungeremo con una linea i punti corrispondenti a tutti i fluoruri (rispettivamente 1 e I), poi con altra quelli dei cloruri (2 e II), e così per i bromuri (3 e III) e gli ioduri (4 e IV). Essendo pochi e distanziati i punti, la linea non è ben determinata; ma seguendo la regolarità d'andamento che l'occhio suggerisce possiamo facilmente scoprire le analogie che esistono fra le varie curve.

Considerando da prima le curve che hanno per ordinate le A_o (tratto sottile nella figura) esse hanno tutte un primo tratto saliente, e in questo si nota in tutte una lieve inflessione; i tratti di ogni curva compresi fra



Digitized by Google

il punto iniziale ed il punto di flesso, proiettati sull'asse delle ascisse dànno proiezioni uguali; il flesso è compreso fra i punti che indicano rispettivamente i composti del sodio e del potassio. Vi è poi, eccetto per i fluoruri la cui curva si arresta prima, un tratto discendente; esso non è simmetrico del tratto saliente rispetto all'ordinata del punto di culminazione; ha discesa più ripida; i tre rami discendenti proiettati sull'asse delle X vi determinano segmenti uguali.

È da notare che i punti indici dei composti del cesio con cella a cubo centrato stanno pressochè allineati, in basso mentre tutti gli altri punti corrispondenti a celle con facce centrate formano più in alto un gruppo separato.

Esaminando ora le curve costruite coi valori di Sm (tratto grosso), in esse pure è un tratto saliente (con flesso più accentuato); in quella dei fluoruri manca il tratto discendente; esso si inizia in quella dei cloruri, diviene più visibile per i bromuri, è ben deciso per gli ioduri.

La regolarità di queste curve ci avverte che gli spazi molecolari e quindi anche il volume della cella dei rispettivi reticolati, variano da composto a composto obbedendo a leggi determinate nelle quali ha gran parte il numero atomico dei componenti. D'altra parte queste leggi non sono che l'espressione delle azioni fisiche e chimiche attive fra gli atomi e dentro gli atomi; la posizione di questi è il prodotto delle forze che entrano in gioco.

Su questo importante argomento tornerò nella Nota seguente. Intanto voglio chiudere questa Nota con una ultima osservazione.

Le curve tracciate potrebbero prolungarsi, oltre i rispettivi composti di cesio, se fosse noto l'elemento che segue nel 1° gruppo, cioè l'ekacesio, che ha per numero atomico 87; attribuendo, come è naturale agli alogenuri dell'ekacesio lo stesso tipo di formula MX, il numero molecolare sarà noto e quindi nei nostri diagrammi possiamo tracciare le ordinate corrispondenti. Ove queste incontrano i prolungamenti delle curve abbiamo i punti rappresentativi di tali alogenuri. Ora, sebbene non sappiamo esattamente tracciare i prolungamenti di dette curve, è lecito dai diagrammi rilevare che i detti punti rappresentativi si trovano in prossimità e forse più bassi di quelli corrispondenti ai composti di cesio; da ciò si deduce che essi appartengono alla zona dei cubi centrati. Anche la curva dei fluoruri avrà dunque un tratto discendente.

Se ora ad es. osserviamo la curva degli Sm per i bromuri, e la prolunghiamo, sia pure intuitivamente, fino ad incontrare l'ordinata che corrisponde all'ascissa 122 (= 35 + 87), ammettendo che l'ordinata del punto d'incontro, cioè Sm, abbia un valore compreso all'incirca fra 30 e 40, la densità del bromuro di ekacesio sarà compresa fra 3 e 4; essendo poi il valore di $A_0 = \sqrt[3]{Sm}$, esso sarà compreso in un campo più ristretto, cioè fra 3,1 e 3,4 unità Å.

Digitized by Google

Abbiamo dunque visto che lo spazio molecolare cresce, nei composti considerati, col numero molecolare. A parità di numero molecolare, e fra composti analoghi, lo spazio molecolare è tanto maggiore quanto minore è il rapporto fra i numeri atomici del metallo e del metalloide; a parità poi, o quasi, anche di tale rapporto, fra composti non analoghi, cioè con metalli non isovalenti, lo spazio è minore dove la valenza è maggiore.

I diagrammi ci hanno permesso di prevedere per i 4 alogenuri dell'ekacesio reticolati cubici a cella centrata.

Geologia. — *I terreni miocenici tra la Valle dell'Amone e quella del Bidente.* Nota di P. PRINCIPI, presentata dal Corrispondente G. ROVERETO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Vulcanologia. — *Sulla temperatura delle colate laviche dell'Etna.* Nota di G. PONTE, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *L'eredità materna e la paterna nelle capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di bachi da seta.* Nota di C. JUCCI presentata[1] dal Socio F. BOTTAZZI.

Di fronte ai risultati ottenuti dai due incroci reciproci tra razze di bachi da seta, ♀ Varo ♂ Bianco e ♀ Bianco ♂ Varo; per i quali – mentre il valore del peso alla fine dello sviluppo larvale mostrava una prevalenza del carattere materno – il valore della capacità di accrescimento attestava un vero dominio del carattere paterno; due domande ci si sono affacciate: 1° *Perchè nella determinazione della capacità di accrescimento dell'incrocio predomina l'influenza della razza paterna?* 2° *E allora in che consiste, a che si riduce la così detta eredità materna?*

Quanto al predominio della influenza paterna non possiamo che affacciare una considerazione che può metterci però sulla strada di una vera spiegazione. Nella fecondazione lo spermio ha due distinte, se non indipendenti, funzioni: la trasmissione del carattere ereditario paterno e l'attivazione dell'uovo, sia essa o no morfologicamente espressa nell'apporto di un centrosoma. Ora lo spermio del Bianco chinese è fatto per attivare il territorio citoplasmatico dell'uovo di Bianco; e quando è portato ad attivare il terri-

(1) Nella seduta del 19 dicembre 1926.

Digitized by Google

torio maggiore dell'uovo di Varo, l'accrescimento ne soffre, scendendo al disotto della media teorica.

Viceversa lo spermio del Varo è fatto per attivare l'uovo di Varo, e quando è portato ad attivare il territorio minore dell'uovo di Bianco, l'impulso è sovrabbondante e l'accrescimento ne guadagna, superando la media teorica (sino alla quale dovrebbe arrivare per influenza del carattere ereditario Varo).

Ma una spiegazione di questo genere - certamente plausibile se applicata a caratteri come la velocità di sviluppo embrionale - sembra poco verosimile applicata a dar ragione dell'accrescimento del baco durante lo sviluppo larvale. E crederei più probabile che possa applicarsi a spiegare non tutta questa prevalenza del fattore paterno rispetto al materno, ma piuttosto soltanto la maggiore prevalenza del fattore nello incrocio ♀ Bianco ♂ Varo, rispetto ad una minore prevalenza di esso nel reciproco ♀ Varo ♂ Bianco. Benchè sia da riflettere che, probabilmente, l'impulso cinetico comunicato dallo spermio non si limita nè si esaurisce al momento della fecondazione, con la formazione dei primi blastomeri; ma si esercita ancora, attivatore dello sviluppo, e si svolge, non possiamo dire sino a che punto immedesimato nello svolgimento del carattere ereditario paterno.

In realtà i prodotti di quelle partenogenesi sperimentali nelle quali l'azione attivatrice dello spermio è sostituita da vari mezzi chimico-fisici, ci rivelano non solo un corredo ereditario esclusivamente materno (per assenza di un paterno), ma benanche una caratteristica debolezza costituzionale che potrebbe interpretarsi come dovuta a deficienze di un fattore che normalmente assiste, attivandolo, lo sviluppo del prodotto della fecondazione.

Passiamo alla seconda domanda: ma allora in che consiste, a che si riduce l'eredità materna?

La superiorità (del peso del baco a massimo accrescimento) del ♀ Varo ♂ Bianco rispetto al reciproco, e rispetto anche alla media dei valori, non si costituisce, sembra, per una prevalenza del carattere ereditario materno (capacità d'accrescimento maggiore della razza materna Varo), ma sussiste malgrado una prevalenza del carattere ereditario paterno (capacità d'accrescimento minore della razza Bianca) grazie al vantaggio iniziale dato dal punto di partenza elevato, dal forte peso di nascita. L'eredità materna, il predominio del carattere materno, che vedevamo espresso in quella superiorità, si riduce dunque ad una superiorità del peso di nascita, del peso dell'uovo? È *nella quantità, essa sola, del vitello che la madre dà in provvigione al germe, tutta la superiorità del corredo ereditario materno?*

Una risposta non può venirci dalla sola considerazione dei pesi raggiunti alla fine dello sviluppo larvale e degli accrescimenti relativi. È d'uopo seguire, nel corso dello sviluppo, il variare della capacità dell'accrescimento dell'organismo ibrido, per cercare di dissociare, dal prodotto dell'incrocio, i due fattori ereditari paterno e materno.

Digitized by Google

Paragoniamo le capacità di accrescimento degli incroci reciproci e delle razze parentali, nella prima età. Alla fine della prima età il ♀ Varo ♂ Bianco era ancora vicino alla razza materna, inferiore ad essa di appena il 6 %; e ancora superiore del 7 % alla media teorica. Nel corso dello sviluppo l'inferiorità rispetto alla razza materna si è quasi triplicata (e corrispondentemente la superiorità rispetto alla razza materna Bianca, che era del 23 % alla prima età, si é ridotta di quasi 5 volte, al 4 %).

Il ♀ Bianco ♂ Varo, poi, alla fine della prima età era ancora sensibilmente inferiore alla media teorica (del 2 %) e ancora del 13 % inferiore alla razza paterna, come del 13 % superiore alla materna.

Dunque: *nel corso dello sviluppo l'influenza paterna, ancora inferiore più o meno spiccatamente alla materna nella prima età, è andata ulteriormente sviluppandosi, giungendo a prevalere di moltissimo sulla materna.*

È da notare, comparando gli accrescimenti alla seconda età, che alla fine della seconda età il ♀ Varo ♂ Bianco è già del 19 % per cento inferiore al Varo e del 7 % alla media teorica; mentre il ♀ Varo ♂ Bianco è soltanto del 12 % superiore al Bianco e ancora del 2 % inferiore alla media teorica, alla quale diviene superiore, del 10 %, nella terza età.

Dunque: nel corso della seconda età il ♀ Varo ♂ Bianco ha già raggiunta la posizione (relativa alla razza materna) che manterrà sino alla fine dello sviluppo. Invece il ♀ Bianco ♂ Varo non ha progredito nel suo slontanamento dalla razza materna; resta, nella seconda età, nella posizione raggiunta con la prima; e solo nella terza raggiunge (a mala pena) la posizione definitiva.

Veramente noi ci attendevamo, giusta il nostro schema teorico, uno svolgimento progressivo graduale, dalla prima alla quinta età, del carattere ereditario paterno, rivelato da uno slontanamento progressivo, graduale, dalla prima alla quinta età, dell'ibrido dalla razza materna, con avvicinamento all'incrocio reciproco.

Ma uno studio accurato della curva di sviluppo delle due razze parentali ci persuade che non potevamo attenderci questo.

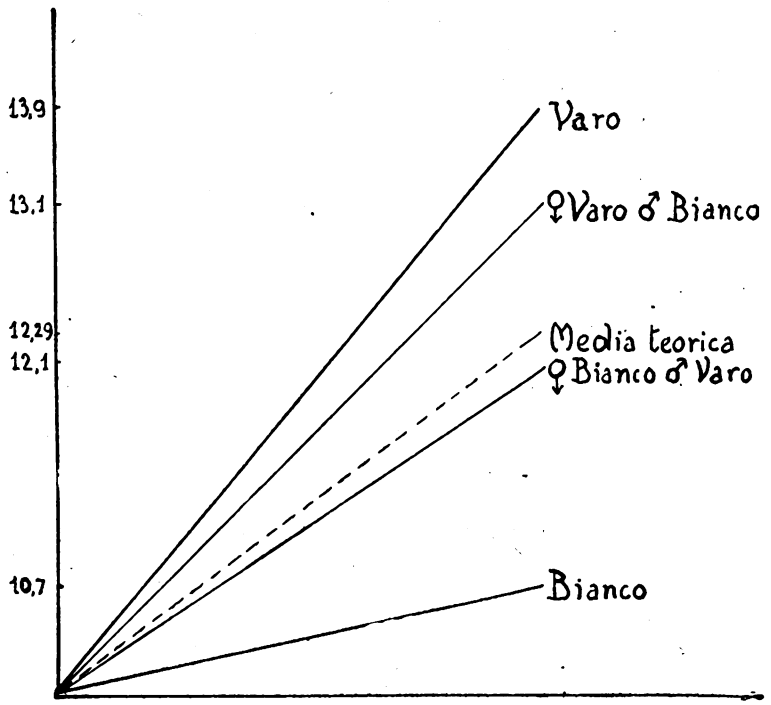
Il valore della capacità d'accrescimento del Bianco chinese rispetto al Varo è basso nella prima età, va salendo nelle successive (0.77 nella prima; 1.075 nella quinta). Sicchè l'accrescimento assoluto del Bianco rispetto al Varo si sposta da un valore del 77 % nella prima età ad un valore dell'81 % nella quinta. Ma, per il minore accrescimento nella prima età, il valore del peso del Bianco chinese rispetto al Varo è sceso dal 79 % (alla nascita) al 60 % (dopo la prima muta) e non si risolleva che di poco nelle età successive, sicchè il peso a massimo accrescimento del Bianco chinese rispetto al Varo è il 64 % appena.

Dunque: il Varo cresce, anche relativamente (al peso di nascita) più del Bianco chinese; e questo maggiore accrescimento (9280 anzichè 7507 volte) dipende sopratutto dalla maggiore capacità di accrescimento nella prima età.

Digitized by Google

Essendo nelle due razze parentali la differenza spiccata tra le capacità di accrescimento limitata alla prima età. non potremmo attenderci nell' incrocio la evidenza di uno svolgimento progressivo, graduale, dalla prima alla quinta età, del carattere ereditario paterno.

Del resto conviene forse spingere sino ad un certo punto, e non oltre, le considerazioni sulla capacità di accrescimento nelle singole età dell' incrocio rispetto alle corrispondenti delle razze parentali. Giacchè il carattere paterno, svolgendosi in ritardo rispetto al materno, potrebbe contribuire



Diagramma

magari ad allontanare, anzichè avvicinare, al valore paterno il rapporto tra la capacità di accrescimento di due età successive dell' ibrido.

Consideriamo ad esempio il valore della capacità di accrescimento dell' incrocio ♀ Varo ♂ Bianco alla seconda età. Il rapporto tra le capacità di accrescimento: $\frac{♀V.♂B.}{V.}$ alla seconda età è 0.86 che rappresenta precisamente la media tra i due valori che assume il rapporto $\frac{B.}{V.}$ nella prima e seconda età: 0.77 0.95.

S'intuisce che l'abbassamento spiccato che avviene nella capacità di accrescimento del ♀ Varo ♂ Bianco, al disotto del valore della razza paterna,

Digitized by Google

dipende dal fatto che nella seconda età dell'incrocio la capacità d'accrescimento è determinata da un fattore materno (capacità d'accrescimento della razza materna nella seconda età) e da un fattore paterno che dipende dalle capacità d'accrescimento della razza paterna non solo nella seconda, ma anche nella prima età. Insomma, svolgendosi il carattere paterno in sensibile ritardo rispetto al materno, la capacità d'accrescimento della razza paterna nella prima età - che ha cominciato nella prima età ad influire sulla capacità d'accrescimento dell'ibrido, senza riuscire ad abbassarla sino alla media teorica - seguita, nella seconda età, a influire sulla capacità d'accrescimento dell'ibrido, anzi concorre, con la capacità d'accrescimento della razza paterna alla seconda età, a determinarne il valore.

Questa nostra intuizione della differenza di svolgimento, di attuazione di un carattere secondo che è paterno o materno, è precisata dalla seguente considerazione.

Il rapporto tra i pesi raggiunti alla fine dello sviluppo ♀ Varo ♂ Bianco : Varo = 0.884 è eguale al rapporto tra gli accrescimenti alla prima età ♀ Bianco ♂ Varo : Varo = 0.87.

E il rapporto tra i pesi raggiunti alla fine dello sviluppo ♀ Bianco ♂ Varo : Bianco = 1.225 è eguale al rapporto tra gli accrescimenti alla prima età ♀ Varo ♂ Bianco : Bianco = 1.227.

Dunque: *il rapporto di un incrocio alla sua razza materna, tra i pesi alla fine dello sviluppo, è uguale al rapporto dell'incrocio reciproco alla sua razza paterna, tra gli accrescimenti alla prima età.*

I due valori numerici 0.88 e 1.22 (o, se si preferisce, le loro differenze con l'unità — 0.12 e + 0.22) possono rappresentare il valore ereditario che spiegano nei loro incroci (quale si sia il senso dell'incrocio) le razze Bianca e Varo rispettivamente.

Il carattere Bianco, agendo come paterno nell'incrocio ♀ Varo ♂ Bianco, ha svolto, in tutto lo sviluppo, un'influenza - sul peso – uguale alla influenza – sull'accrescimento - che ha svolto, nella prima età, lo stesso carattere Bianco nello incrocio reciproco, agendo come materno. E così per il carattere Varo.

Si direbbe che ognuno dei due caratteri Bianco e Varo abbia un determinato valore o potenza ereditaria che non cangia invertendo il senso dell'incrocio: ma che, *mentre si esercita di un subito quando il fattore agisce come materno, si va esplicando invece lentamente quando il fattore agisce come paterno, dovendo combattere, vincere, superare le condizioni avverse di iniziale prevalenza materna* (data dal corredo citoplasmatico dell'uovo, di origine materna, di carattere, per quantità e qualità, tutto materno).

Biologia. — *L'accrescimento dell'alosa nel Tevere.* Nota di U. D'Ancona, presentata dal Socio F. Silvestri.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

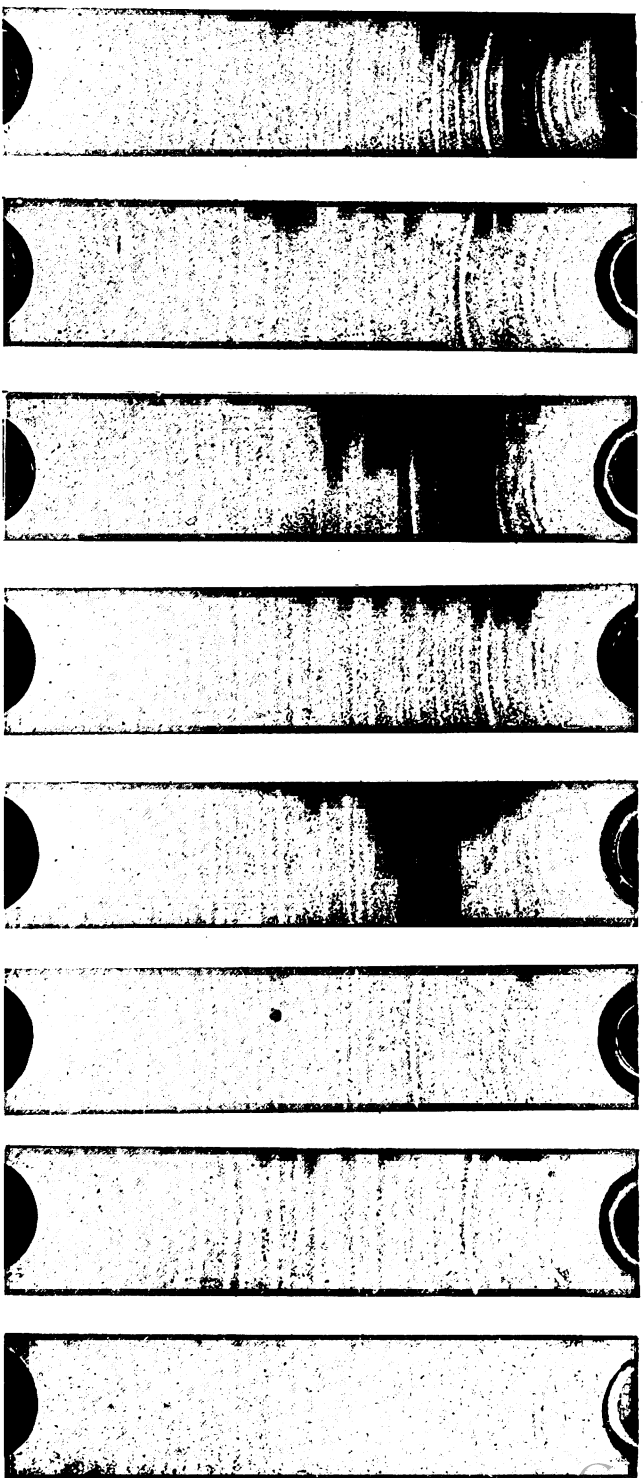
G. C.

Digitized by Google

L. Mazza. — *Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell' accumulatore a piombo.* Nota II.

Fig. 1.

(Diametro del cilindro portafilm : 5.73 cm.)



Fot. 1° (Anticatodo di rame)

Fot. 2° (Anticatodo di rame)

Fot. 3° (Anticatodo di ferro)

Fot. 4° (Anticatodo di rame)

Fot. 5° (Anticatodo di ferro)

Fot. 6° (Anticatodo di ferro)

Fot. 7° (Anticatodo di rame)

Fot. 8° (Anticatodo di rame)

Digitized by Google

Digitized by Google

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomi XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). — Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV, V, VI, VII, VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII, Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. (1892-1924).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI. (1904-1924).

Serie 6ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I.-VI. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-II. (1925-1927).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-III. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I. (1925-1927).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-III. (1925-1927).

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti Adunanze Solenni. Vol. I-III. (1892-1927.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. 12 Volumi.
» » » » » 3 Bollettini.
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1927.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXXI.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-IV.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia. (1908).
Indice degli Atti Accademici (alfabetico per nomi autori) dall'inizio al 1910.

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1927
SERIE 6ª

Rendiconti Scienze fisiche, ecc. Vol. V (1° semestre 1927) in fascicoli bimensili . . . L. 54 —
» » » » Vol. VI (2° » 1927) » » . . . » 54 —
Memorie » » » Vol. II (continuazione) in fascicoli progressivi . . . . prezzi vari
Rendiconti Scienze morali, ecc. Vol. II, in fascicoli trimestrali . . . . . L. 54 —
Memorie » » » Vol. I (continuazione) in fascicoli progressivi . . . . prezzi vari
Notizie degli Scavi, Vol. III (52° dall'inizio) in fascicoli trimestrali . . . . . L. 120 —

Rendiconto adunanza solenne, Vol. III, fascicolo 13 . . . . . L. 8 —
Annuario . . . . . » 4 —
Monumenti antichi, Vol. XXX, ecc. . . . . prezzi vari

N. B. - Le pubblicazioni dell'Accademia sono in vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (104) e presso le principali Librerie. I prezzi sono franco Roma. È concesso uno sconto ai Librai.

Nelle richieste indicare sempre: la pubblicazione, la serie, il volume e il fascicolo. Le richieste precise e scritte in italiano o in francese potranno essere esaurite più sollecitamente delle altre.

Digitized by Google

RENDICONTI - Gennaio 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Fascicolo del 16 gennaio 1927

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

VOLTERRA V. - Leggi delle fluttuazioni biologiche. . . . . Pag. 61
ARMELLINI G. - Il diametro orizzontale del sole nel 1925 e nel 1926 68
CORBINO O. M. - L'effetto Volta e il funzionamento della pila . . . . . »
ID. - Teoria elettronica della pila 74
CAMBI L. e CLERICI A. - Sui cianuri ferroso-ferrici 79

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

BOMPIANI E. - Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*). 84
PICONE M. - Sulle funzioni metaarmoniche (pres. dal Socio *R. Marcolongo*) . . . 90
ID. - Maggiorazione delle integrali delle equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine (pres. dal Corrisp. *G. Scorza*) 95
TRICOMI F. - Limitazione delle soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali (pres. dal Socio *F. Severi*) . . . . . »
LANE E. P. - Quadriche aventi per generatrici le tangenti asintotiche in un punto di una superficie (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 100
SPAMPINATO N. - Il problema della moltiplicazione complessa per un qualsiasi corpo puro di funzioni abeliane (pres. dal Corrisp. *G. Scorza*) 105
VRANCEANU G. - Sopra la stabilità geodetica (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) . . 107
ROSSI G. - Osservazioni sulla scintillazione delle stelle eseguite nel R. Osservatorio del Campidoglio (pres. dal Corrisp. *G. Armellini*) 110
BARBIERI U. - Determinazione di latitudine astronomica eseguita ad Andrate nell'agosto 1926 (pres. dal Socio *G. Loria*) 111
SIRACUSANO N. - Una notevole deduzione dalla teoria di Bohr (pres. dal Corrispondente *L. Puccianti*) 114
LEVI G. e REINA A. - Sulla peptizzazione dell'ossido di torio « meta » (pres. dal Socio *G. Bruni*) 116
PICCARDI G. - Numero d'ordine, peso eccedente e struttura atomica (pres. dal Corrispondente *L. Rolla*) . . . . . »
MAZZA L. - Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo (pres. *Id.*) 117
BARTORELLI A. - Sopra una dimostrazione di interdipendenza fra le leggi di Curie e di Haüy (pres. dal Corrisp. *G. D'Achiardi*) 120
PANICHI U. - Studi sui reticolati cristallini (pres. dal Socio *F. Millosevich*) . . . 123
PRINCIPI P. - I terreni miocenici tra la Valle del Lamone e quella del Bidente (pres. dal Corrisp. *G. Rovereto*) 128
PONTE G. - Sulla temperatura delle colate laviche dell'Etna (pres. dal Socio *F. Millosevich*) . . . . . »
JUCCI C. - L'eredità materna e la paterna nelle capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di bachi da seta (pres. dal Socio *F. Bottazzi*) . . »
D'ANCONA U. - L'accrescimento dell'alosa del Tevere (pres. dal Socio *F. Silvestri*) 132

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 febbraio 1927

Presidenza del Socio anziano E. PATERNÒ

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Il diametro orizzontale del Sole nel 1925 e nel 1926.* Nota[1] del Socio Corrisp. G. ARMELLINI.

1. Abbiamo già esposto in altre Note[2] i valori del diametro orizzontale del Sole, risultanti dalle misure eseguite nel R. Osservatorio Astronomico di Roma sul Campidoglio nel venticinquennio 1876-1900, nel 1923 e nel 1924; e presto speriamo di completare il cinquantennio esponendo i valori del diametro solare nel periodo 1901-1922 già interamente calcolati e ridotti. Frattanto in questa breve Nota ci onoriamo di comunicare all'Accademia i risultati delle nostre osservazioni nell'ultimo biennio 1925-1926.

Il metodo seguìto è quello stesso che viene adoperato in Campidoglio fin dal 1876. Vale a dire, al mezzodì di ogni giornata serena esaminiamo il Sole col cannocchiale meridiano di Ertel proiettandone l'immagine assai ingrandita (circa 80 centimetri di diametro) sopra uno schermo bianco e determinando gli istanti di appulso dei due bordi dell'astro sopra sette fili orari del micrometro, proiettati sopra il medesimo schermo. L'osservazione viene fatta *simultaneamente* da tre osservatori, che si pongono presso lo schermo, in modo che ciascuno possa effettuare le misure indipendentemente dai suoi compagni.

(1) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1927.

(2) Cfr. questi « Rendiconti », 1924, sem. I, fasc. 9; e 1925, sem. II, fasc. 9. Cfr. anche: « Astron. Nachr. », 5419, Bd. 226.

Digitized by Google

Nel biennio 1925–1926, di cui ora ci occupiamo, i tre osservatori furono i medesimi degli anni precedenti e cioè: G. Armellini Conti, astronomo aggiunto presso il R. Osservatorio; P. Mignucci, tecnico calcolatore dell'Osservatorio stesso e lo scrivente. Nel 1926 s'iniziò anche alle osservazioni il nuovo assistente, dott. N. Squillace, per continuarle, insieme ai tre indicati, negli anni futuri.

2. Ciò posto, riepiloghiamo i risultati delle nostre misure nella seguente tabella, limitandoci, per economia di spazio, alle sole medie mensili del raggio R del Sole ottenuto da ciascun osservatore e ridotto alla distanza media dalla Terra. Con A. C. indichiamo G. Armellini Conti, con P. M. Pietro Mignucci e con A. lo scrivente; N_{ac}, N_{pm}, N_a danno il numero di osservazioni eseguite da ciascuno nel mese corrispondente.

DATA	A. C.	A.	P. M.	N_{ac}	N_a	N_{pm}
1925						
Gennaio	961".6	959".9	960".3	13	11	18
Febbraio	961 .7	959 .6	960 .3	7	7	5
Marzo	961 .5	959 .6	959 .9	9	9	10
Aprile	962 .2	960 .0	960 .0	5	4	12
Maggio	961 .4	960 .6	960 .3	8	5	11
Giugno	961 .4	960 .6	960 .0	15	9	18
Luglio	—	—	960 .0	—	—	21
Agosto	961 .4	961 .0	—	12	12	—
Settembre . . .	961 .8	960 .7	959 .3	4	5	9
Ottobre	961 .5	960 .3	959 .6	7	7	8
Novembre . . .	961 .6	960 .4	959 .3	6	4	5
Dicembre . . .	961 .0	960 .0	960 .0	7	7	11
1926						
Gennaio	960".3	959".0	959".3	11	12	12
Febbraio	959 .6	959 .3	958 .9	10	8	11
Marzo	960 .4	959 .6	959 .2	6	6	13
Aprile	959 .6	959 .2	958 .5	6	6	14
Maggio	960 .2	959 .3	959 .3	13	8	13
Giugno	960 .7	960 .0	959 .6	15	11	19
Luglio	960 .4	960 .4	959 .6	19	13	19
Agosto	960 .0	959 .3	—	4	3	—
Settembre . . .	960 .3	959 .6	959 .6	4	5	17
Ottobre	—	—	959 .3	—	—	11
Novembre . . .	959 .3	959 .0	959 .6	13	9	13
Dicembre . . .	959 .9	959 .3	959 .3	12	12	15

Digitized by Google

Da questa tabella, eseguendo le medie, otteniamo immediatamente il seguente specchietto per il raggio R del Sole, alla distanza media dalla terra:

	1925.5	1926.5	Δ
G. Armellini Conti:	961″.58 ± 0″.10	960″.06 ± 0″.10	1″.52 ∓ 0″.14
Giuseppe Armellini:	960 .24 ± 0 .10	959 .45 ∓ 0 .10	0 .79 ± 0 .14
Pietro Mignucci:	959 .91 ± 0 .10	959 .29 ∓ 0 .10	0 .62 ± 0 .14
Media:	960″.58 ± 0″.06	959″.60 ± 0″.06	0″.98 ∓ 0″.09

Ricordando quindi i valori del raggio solare R ottenuti per il 1923.5 e per il 1924.5 e riportati nelle Note sopra citate, abbiamo il prospetto qui unito che riassume i risultati dell'ultimo triennio:

1924.0	**R = 16′**	**1″.03 ± 0″.04**
1925.0	**16′**	**0″.63 ± 0″.04**
1926.0	**16′**	**0″.09 ± 0″.04**

3. In conclusione, ed in completa uniformità con quanto vedemmo nella passata Nota, sembra di assistere ad una lieve diminuzione del diametro solare, in relazione col massimo delle macchie che ha luogo appunto nel 1927-1928. Ed è importante mettere in relazione questo fatto con un analogo fenomeno, messo in luce dal consocio prof. Giorgio Abetti [1], e cioè che dal 1922 fino alla pubblicazione della sua Nota l'altezza della cromosfera solare fu in continua diminuzione, sia nell'emisfero sud che nell'emisfero nord del Sole [2].

Fisica. — *L'elettrolisi senza elettrodi.* Nota del Socio O. M. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geochimica. — *I costituenti degli involucri terrestri e il numero molecolare.* Nota del Socio Corrisp. P. Vinassa.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. questi «Rendiconti», 1926, I sem., fasc. 3. Per comodità dei lettori ricordiamo ancora che il valore medio visuale del raggio solare R, alla distanza media dalla Terra, è 16′ 1″.18.

(2) Benchè sembri sempre più probabile che tra i vari fenomeni solari esista una qualche relazione, essendo tutti dovuti all'attività di un medesimo astro, occorre però tener presente - ad evitare ogni equivoco – che le misure del Campidoglio e quelle di Arcetri vertono sopra campi ben differenti: e precisamente al Campidoglio si misura *il diametro orizzontale della fotosfera*, mentre ad Arcetri si misura *lo spessore della cromosfera*.

Digitized by Google

Biologia. — *Nuova imitazione delle amebe in movimento.* Nota del Socio A. L. HERRERA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Il potere germinativo delle cellule somatiche dei metazoi e dei metafiti e la ripresa del potere sessuale nei Gametogeni impuri in « Cryptochilum echini », in rapporto al comportamento dei nuclei durante il ciclo di sviluppo.* Nota del Socio Corrispondente A. RUSSO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Azione nell'accrescimento, nell'alimentazione insufficiente, nel digiuno e nella rialimentazione del ratto albino.* Nota del Corrisp. S. BAGLIONI e del dott. A. GALAMINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia vegetale. — *Sulla presenza nelle piante di una sostanza che diventa luminescente alla luce ultravioletta.* Nota [1] del Corrisp. L. PETRI.

In una Nota precedente [2] ho accennato alla presenza nei tessuti vegetali di una sostanza facilmente estraibile con l'acqua e che diventa luminescente se esposta alle radiazioni ultraviolette, dopo che sia stata fatta diffondere per capillarità e poi disseccare sulla carta da filtro. È questo l'unico mezzo, sino ad ora, per separarla dalle altre sostanze dei tessuti vegetali solubili nell'acqua o che in questa possono trovarsi allo stato colloidale.

Ulteriori ricerche compiute per stabilire la presenza e la localizzazione di questa sostanza nei diversi vegetali e la sua natura, hanno dato per ora i seguenti resultati.

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1927.
(2) Questi « Rendiconti », p. 32.

Digitized by Google

L'estrazione della sostanza in questione dai tessuti e dalle cellule può avvenire sia con la pressione, sia con lo spappolamento. Per alcune piante è necessario uccidere previamente i tessuti immergendoli per due o tre minuti nell'acqua bollente, per altre occorre far agire una soluzione diluita di soda o potassa caustica o di acido solforico. Così, per es., mentre le foglie della *Plantago major* cedono molto facilmente la sostanza luminogena con lo spappolamento nell'acqua fredda, dalle foglie delle graminacee non la si estrae che dopo l'immersione in acqua bollente, certe alghe e le foglie del pino non la cedono che a contatto di una soluzione al 3 % di potassa caustica. L'ammoniaca, l'alcool, l'etere, il cloroformio, il benzolo e tutti gli altri solventi dei grassi non la estraggono. Il calore secco sino a 170° C. non la distrugge, ma vien distrutta con l'incinerazione dei tessuti.

La sostanza luminogena è contenuta in maggior quantità negli organi capaci di compiere l'assimilazione fotosintetica del carbonio. Nelle foglie caduche la sostanza in questione scompare dopo la caduta. Nei tessuti degli organi sotterranei si trova solo in quelli che, esposti alla luce, formano clorofilla. Manca nel tessuto legnoso e nell'endosperma dei semi. Si trova nei cotiledoni ancora racchiusi nei tegumenti seminali. Manca nei funghi e nei batteri che per ora sono stati esaminati.

Le ricerche sono state fatte su alghe e su diversi rappresentanti delle seguenti famiglie: *Conifere, Graminacee, Aracee, Platanacee, Leguminose, Oleacee, Apocinacee, Solanacee, Plantaginacee.*

È lecito ritenere che la presenza di questa sostanza sia comune a tutte le piante verdi.

Circa la sua natura e il suo significato fisiologico, le ricerche sono ancora all'inizio. Si può però asserire che essa non è un prodotto diretto dell'assimilazione, giacchè si trova in tutti i tessuti destinati a compiere la fotosintesi prima che questo processo siasi iniziato. Così pure trovasi nei tessuti eziolati delle piante fatte sviluppare all'oscurità.

Devesi aggiungere che ogni tentativo per identificare la sostanza luminogena con composti organici, come carboidrati, glucosidi, aminoacidi, più comunemente contenuti nei tessuti vegetali, hanno avuto per ora esito negativo.

Il fatto che la presenza di questa sostanza precede ed accompagna la formazione e la funzione della clorofilla, tende a far ammettere la possibilità che essa costituisca un fattore necessario all'assimilazione fotosintetica del carbonio, per quanto essa non sia parte integrante dei pigmenti contenuti nei cloroplasti, giacchè non è stato possibile di ritrovarla nell'estratto alcoolico di clorofille e di carotinoidi delle foglie. È molto più probabile che questa problematica sostanza sia contenuta nel plasma dei cloroplasti o nel plasma cellulare, dove potrebbe prender parte alla fotosintesi, in quella fase del processo, ancora così oscura, in cui entra in giuoco l'attività del plasma vivente o, meglio, quella di un suo prodotto ad azione prettamente specifica.

Digitized by Google

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del second'ordine.* Nota di M. PICONE, presentata [1] dal Corrisp. G. SCORZA.

La funzione reale $f(P)$ del punto $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sia definita nel dominio $\boldsymbol{T}$ dello spazio $\boldsymbol{S}_{(n)}$ a n dimensioni, dirò che essa è *maggiorabile* in $\boldsymbol{T}$ se si possiede un procedimento mediante il quale è possibile calcolare un numero M (non negativo) per cui si abbia, sempre in $\boldsymbol{T}$, $|f(P)| \leqq M$. Dirò allora che la funzione $f(P)$ è *maggiorata* in $\boldsymbol{T}$ dal numero M.

Nella mia Nota *Sulle funzioni metaarmoniche*, ultimamente apparsa in questi « Rendiconti », presentata nella seduta dello scorso 2 gennaio, ho avuto occasione di ricordare i teoremi contenuti ai nn. 5, 6, 7, 8 della mia conferenza: *Sopra alcuni problemi d'analisi matematica posti dalla fisica* [2]; ebbene, tali teoremi possono anche riguardarsi come atti a fornire la maggiorazione degli integrali delle equazioni ellittico-paraboliche alle derivate parziali del second'ordine [3]. Circostanza questa - ovviamente - della massima importanza e perchè dà una notevole nozione quantitativa dell'integrale [4] e perchè, potendo essa in molti casi consentire la maggiorazione del resto di eventuali serie, costruite per esempio al modo di FOURIER, approssimanti l'integrale nel dominio di sua esistenza, può dare altresì la maggiorazione dell'errore in taluni calcoli d'approssimazione dell'integrale stesso. Nella Nota presente riprenderò a considerare quei teoremi per perfezionarli e per ben stabilire l'importante indicata loro proprietà. Per semplicità di esposizione mi limiterò qui a considerare le equazioni lineari, cioè le equazioni del tipo:

$$(1) \qquad E[u] \equiv \sum_{hk} a_{hk}(P) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h b_h(P) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(P)\, u = f(P),$$

ove a_{hk}, b_h, c, f sono funzioni reali, assegnate nel dominio $\boldsymbol{T}$ di $\boldsymbol{S}_{(n)}$, ivi finite e continue, nell'ipotesi che sia $a_{hk} \equiv a_{kh}$ e la forma quadratica $\sum a_{hk} \lambda_h \lambda_k$, per ogni punto P di $\boldsymbol{T}$, definita o semidefinita positiva.

(1) Nella seduta del 16 gennaio 1927.

(2) *Esercitazioni matematiche* [Circolo matematico di Catania, vol. II, 1922]. Citerò qui con la notazione (C) questa conferenza.

(3) Per le quali è anche lecito supporre una certa non linearità, com'è indicato nella mia citata conferenza.

(4) Di evidente utilità, per esempio, nelle applicazioni a quei problemi dell'ingegneria e della fisica che hanno per iscopo la determinazione di limiti di sicurezza.

Digitized by Google

1. LEMMA DI MOUTARD. – *Se le forme quadratiche* $\sum a_{kh}\lambda_h\lambda_k$, $\sum \alpha_{kh}\lambda_h\lambda_k$, *a coefficienti reali, sono semidefinite o definite, la somma* $\sum a_{hk}\alpha_{hk}$, *riesce non negativa o non positiva secondochè le due forme hanno, quando non sono nulle, lo stesso segno o segno opposto. Se le due forme sono entrambe definite, la somma indicata è sempre diversa da zero* (1).

2. Come applicazione immediata di questo lemma, si ha il teorema:

I. *Se nel dominio* $\boldsymbol{T}$ *è sempre* $c < 0$, *un integrale* u *della* (1) *non può, in un punto interno a* $\boldsymbol{T}$, *avere un minimo negativo se* $f \leqq 0$, *un massimo positivo se* $f \geqq 0$.

Ed infatti, indicando, come sempre faremo, con $u^{(h)}, u^{(hk)}$ le derivate parziali prime e seconde di una funzione u rispetto alle variabili x_h, x_k, se, per esempio, nel punto P, interno a $\boldsymbol{T}$, si verifica per u un minimo, si ha $u^{(h)}(P) = 0$ $(h = 1, 2, \cdots, n)$, mentre la forma $\sum u^{(hk)}(P)\lambda_h\lambda_k$ riesce semidefinita o definita positiva. Pertanto, se detto minimo è negativo si ha, in P, in virtù del lemma di MOUTARD, $\mathrm{E}[u] > 0$. Ne segue:

II. *Se* $\boldsymbol{T}$ *è limitato e se è possibile definirvi una funzione sempre positiva* $\omega(P)$, *per la quale sia sempre, nell'interno di* $\boldsymbol{T}$, $\mathrm{E}[\omega] < 0$; *quando* $f \leqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre positivo o nullo su* $F\boldsymbol{T}$ (2) *si conserva tale in* $\boldsymbol{T}$; *quando* $f \geqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre negativo o nullo su* $F\boldsymbol{T}$ *si conserva tale in* $\boldsymbol{T}$.

Posto infatti $u = v \cdot \omega$, si ha per v l'equazione:

$$(2)\quad \mathrm{E}_\omega[v] = \sum_{hk} a_{hk} v^{(hk)} + \sum_h \left(b_h + \frac{2}{\omega} \sum_k a_{hk}\omega^{(k)} \right) v^{(h)} + \frac{\mathrm{E}[\omega]}{\omega} v = \frac{f(P)}{\omega}.$$

Sia $f \leqq 0$. Se l'integrale u della (1) è sempre positivo o nullo su $F\boldsymbol{T}$, tale risulta l'integrale v della (2). Se questo prendesse, talvolta, in $\boldsymbol{T}$, valori negativi avrebbe ivi un minimo assoluto negativo che dovrebbe verificarsi in un punto interno a $\boldsymbol{T}$, il che è assurdo, in forza del teorema I. Si tenga presente che [cfr. (C) teorema VI del n. 7]:

Se $\boldsymbol{T}$ è limitato ed uno dei coefficienti $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ vi si mantiene positivo, riuscendo sempre inoltre $c \leqq 0$, si può costruire una funzione ω sempre positiva in $\boldsymbol{T}$ per la quale è ivi $\mathrm{E}[\omega] < 0$. Ne segue, ragionando come per il teorema II,

III. *Se* $\boldsymbol{T}$ *è limitato ad uno dei coefficienti* $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ *vi si mantiene sempre positivo se, inoltre, è possibile costruire una funzione sempre positiva* $\omega(P)$, *per la quale sia sempre, nell'interno di* $\boldsymbol{T}$, $\mathrm{E}[\omega] \leqq 0$; *quando* $f \leqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre positivo o nullo su* $F\boldsymbol{T}$ *si conserva tale in* $\boldsymbol{T}$; *quando* $f \geqq 0$, *ogni integrale della* (1) *sempre negativo o nullo su* $F\boldsymbol{T}$ *si conserva tale in* $\boldsymbol{T}$.

(1) Dei teoremi che qui non sono dimostrati si troverà la dimostrazione nella mia citata conferenza. Rimando pure a questa per le indicazioni bibliografiche.

(2) Per un insieme $\boldsymbol{T}$ di punti, ne indico con $F\boldsymbol{T}$ la frontiera.

Digitized by Google

3. Dai teoremi precedenti subito si deduce il seguente, generalissimo, di maggiorazione per gli integrali della (1). Per renderne più breve e nello stesso tempo più espressivo l'enunciato, indicheremo con

$$\min_{\boldsymbol{T}} f \quad , \quad \max_{\boldsymbol{T}} f,$$

rispettivamente, il minimo ed il massimo valore di una funzione $f(P)$ in un insieme $\boldsymbol{T}$ di punti di $\boldsymbol{S}_{(n)}$.

IV. *Nelle ipotesi del teorema* II *o in quelle del teorema* III, *supposta nota la funzione* ω, *ogni integrale* u *della* (1) *è sempre facilmente maggiorabile in* $\boldsymbol{T}$, *non appena esso sia stato maggiorato su* $F\boldsymbol{T}$. *Il numero maggiorante è una combinazione lineare dei due che maggiorano, rispettivamente,* u *su* $F\boldsymbol{T}$ *e il termine noto* $f(P)$ *in* $\boldsymbol{T}$, *e i coefficienti della combinazione si calcolano assai semplicemente mediante i minimi e i massimi in* $\boldsymbol{T}$ *della funzione* ω *e dei coefficienti di* $\mathrm{E}[u]$. *Se, in particolare, risulta, inoltre, in* $\boldsymbol{T}$, $c \leqq 0$, *un numero maggiorante* u *in* $\boldsymbol{T}$ *è dato da*

$$\max_{F\boldsymbol{T}} |u| + H \cdot \max_{\boldsymbol{T}} |f|, \tag{3}$$

designando H *un numero non inferiore al massimo di una funzione* $w(P)$, *sempre non negativa in* $\boldsymbol{T}$, *per la quale si ha ivi:*

$$\mathrm{E}[w] \leqq -1. \tag{4}$$

In tal caso: se, per esempio, si suppone, in primo luogo, che riesca in $\boldsymbol{T}$

$$a_{11}(P) \geqq a > 0 \quad , \quad |b_1(P)| \leqq B \quad , \quad |x_1| \leqq \delta, \tag{5}$$

detto α *un numero positivo tale che sia*

$$\alpha \geqq \frac{2B}{a} \quad , \quad \alpha \geqq \frac{1}{\delta} \log \frac{2}{a},$$

si può porre

$$H = \frac{1}{\alpha^2} (e^{2\alpha\delta} - e^{\alpha\delta});$$

se, in secondo luogo, si suppone che riesca in $\boldsymbol{T}$,

$$a_{11}(P) \geqq 1 \quad , \quad b_1(P) \geqq 0 \quad , \quad |x_1| \leqq \delta, \tag{6}$$

si può porre

$$H = 2\delta^2.$$

Cominciamo dal dimostrare la seconda parte del teorema, per la quale è fatta anche l'ipotesi $c \leqq 0$. Porremo $\max_{F\boldsymbol{T}} |u| = N$, $\max_{\boldsymbol{T}} |f| = M$. Se la funzione non negativa $w(P)$ verifica la (4), posto $v = Mw$, la funzione non negativa v verifica la seguente

$$\mathrm{E}[v] \leqq -M. \tag{7}$$

Digitized by Google

Poniamo $v_1 = u - N$, $v_2 = u + N$, risulta $E[v_1] = f - cN$, $E[v_2] = f + cN$, donde, in virtù della (7),

$$E[v - v_1] \leqq -M - f + cN \leqq 0 \quad , \quad E[-v - v_2] \geqq M - f - cN \geqq 0 ,$$

pertanto, visto che su FT, $v - v_1 \geqq 0$ e $-v - v_2 \leqq 0$, in forza del teorema II o del teorema III, si deduce che riesce, in T, $v - v_1 \geqq 0$, $v + v_2 \geqq 0$, cioè

$$|u| \leqq N + v = N + Mw \leqq \max_{FT} |u| + H \cdot \max_T |f| . \qquad \text{C. D. D.}$$

Se si verificano le (5), posto

$$w = \frac{1}{\alpha^2}\left[e^{3\alpha\delta} - e^{\alpha(x_1 + 2\delta)}\right],$$

si ha $E[w] \leqq -1$, $0 \leqq w \leqq (e^{3\alpha\delta} - e^{\alpha\delta})/\alpha^2$; se si verificano le (6), posto

$$w = 2\delta^2 - \frac{1}{2}(x_1 + \delta)^2,$$

si ha $E[w] \leqq -1$, $0 \leqq w \leqq 2\delta^2$.

Dimostrata la seconda parte del teorema, posto $u = \omega v$, ne segue, per essere $E[\omega] \leqq 0$ e tenendo conto della (2), un modo di maggiorare v, e quindi - supposto che ω sia nota - anche la dimostrazione della prima parte. E, come numero maggiorante u in T, si trova

$$(8) \qquad \frac{\max_T \omega}{\min_T \omega}(\max_{FT} |u| + H \cdot \max_T |f|),$$

H designando un numero non inferiore al massimo in T di una funzione $w(P)$ ivi sempre non negativo, per la quale risulta $E_\omega[w] \leqq -1$, del quale numero, nell'ipotesi che uno dei coefficienti $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ si conservi positivo, abbiamo già imparato, negli esempii addotti, a fare il calcolo. Rileviamo il caso particolare notevole, del teorema dimostrato:

V. *Nelle ipotesi del teorema* II *o in quelle del teorema* III, *se inoltre è sempre* $c \leqq 0$, *ogni integrale* u *dell'equazione omogenea* $E[u] = 0$, *è maggiorato in* T *dallo stesso numero che la maggiora su* FT[1]. Con la solita posizione $u = v\omega$ se ne deduce subito che:

VI. *Nelle ipotesi del teorema* II *o in quelle del teorema* III, *ogni integrale* u *dell'equazione omogenea* $E[u] = 0$, *è maggiorato in* T *dal numero*

$$\frac{\max_{FT} \omega}{\min_{FT} \omega} \max_{FT} |u| .$$

(1) Si sapeva già [cfr. (C), n. 8] che se, più particolarmente, è $c \equiv 0$, il massimo e il minimo di u in T sono valori che u prende su FT. Nel caso $c \leqq 0$ si può solo affermare quanto esprime il teorema del testo, come assicura l'esempio della funzione $y = \cosh x$, verificante l'equazione $y'' - y = 0$, considerata in un intervallo al quale sia interno lo zero.

Digitized by Google

Questi ultimi teoremi V e VI sono ricchi di conseguenze nelle ricerche tendenti a stabilire, per un assegnato dominio illimitato, quale comportamento all'infinito, su quel dominio, prescritto ad un integrale della (1) sia atto ad individuarlo, col concorso dei valori sulla frontiera [1].

4. Volendo, per esempio, considerare la particolare equazione ellittica autoaggiunta in due variabili:

$$(9) \qquad \mathrm{E}[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y)\, u = f(x, y),$$

poichè, posto $\omega = R^2 - x^2 - y^2$, si ha $\mathrm{E}[\omega] = -4 + (R^2 - x^2 - y^2)\, c$, si vede che: Se il dominio $\boldsymbol{T}$ è *interno* ad un cerchio di centro nell'origine e di raggio R, ogni integrale u della (9), del quale siano dati i valori su $F\boldsymbol{T}$, è immediatamente maggiorabile in $\boldsymbol{T}$, quando si abbia ivi

$$(10) \qquad c(x, y) \leqq 4/R^2 \ [2].$$

Ma si può rendere più larga la limitazione (10), sostituendola con la seguente:

$$c(x, y) \leqq \alpha^2/R^2 \qquad (\alpha^2 > 5.76),$$

ove α designa la radice di minimo modulo della funzione di Bessel $J_0(\rho)$. Posto invero $\omega = J_0\left[(\alpha/R)\sqrt{x^2 + y^2}\right]$, si ha $\omega > 0$, $\mathrm{E}[\omega] = (c - \alpha^2/R^2)\,\omega$.

Se $\boldsymbol{T}$ è *interno* ad un quadrato avente il centro nell'origine e di semidimensione R, il nostro procedimento di maggiorazione è immediatamente applicabile, se

$$c(x, y) \leqq \pi^2/(2R^2);$$

posto, invero,

$$\omega = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{R}\right), \text{ si ha } \omega > 0, \ \mathrm{E}[\omega] = \left(c - \frac{\pi^2}{2R^2}\right)\omega. \text{ Ecc.}$$

5. Considerando, infine, le equazioni in una variabile:

$$(11) \qquad \mathrm{E}[u] \equiv u'' + b(x)\, u' + c(x)\, u = f(x),$$

(1) Cfr. la mia citata Nota *Sulle funzioni metaarmoniche.*

(2) Nel caso particolare che l'integrale u della (9) sia identicamente nullo su $F\boldsymbol{T}$ e che sia regolare un dominio di $\boldsymbol{T}$ nel quale u non cambia segno, ivi raggiungendo il valore massimo per il suo modulo, il prof. Tricomi (nella nota recente: *Limitazioni delle soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali,* questo volume dei «Rendiconti», p. 95. facendo ricorso alle formole integrali di Green, e quindi introducendo, implicitamente, per la u, ulteriori condizioni circa il comportamento delle sue derivate parziali del primo ordine sulla frontiera, riesce a maggiorare la u, nelle stesse ipotesi, dando un'espressione ben semplice del numero maggiorante.

Digitized by Google

vediamo che, se, per esempio, $b(x) \equiv 0$, quando, in (a, b),

$$c(x) < \pi^2/(b-a)^2, \tag{12}$$

ogni integrale u della (11) è maggiorabile in (a, b). Ed invero, se per il numero positivo ε risulta $\max c(x) = \pi^2/(b-a+2\varepsilon)^2$, posto

$$\omega(x) = \operatorname{sen} \pi \left(\frac{x-a+\varepsilon}{b-a+2\varepsilon} \right),$$

si ha, in (a, b),

$$\omega(x) > 0 \quad , \quad E[\omega] = \left[c(x) - \frac{\pi^2}{(b-a+2\varepsilon)^2} \right] \omega \leqq 0.$$

Diciamo $\mu(x)$ una funzione positiva in (a, b) per cui sia $\mu' = b\mu$ e supponiamo $u(a) = u(b) = 0$; sussistono allora le relazioni:

$$\max |u| \leqq \frac{1}{4} \int_a^b u'^2 \, dx \quad , \quad \int_a^b \mu u'^2 \, dx = \int_a^b \mu c u^2 \, dx - \int_a^b \mu f u \, dx,$$

dalle quali, mediante un leggero perfezionamento di un procedimento indicatomi dal sig. KRYLOFF, si deduce facilmente e immediatamente che: Se, in (a, b),

$$\mu c < (\min \mu)/(b-a)^2 \tag{13}$$

l'integrale u della (11) nullo in a e in b è maggiorabile, ed è maggiorato da

$$\frac{1}{4} \frac{(b-a)^2 \max |\mu f|}{\min \mu - (b-a)^2 \max (\mu c)}.$$

Nel caso particolare $b(x) \equiv 0$, la (13) dà la condizione $c < 1/(b-a)^2$, molto più restrittiva della (12).

Matematica. — *Sulla geometria dell'equazione di Laplace.* Nota di E. BOMPIANI, presentata [1] dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In una Nota recente [2] ho avuto occasione di accennare che ad ogni equazione di Laplace

$$x_{uv} + a x_u + b x_v + c x = 0 \tag{1}$$

(a, b, c funzioni di u, v; $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \cdots$) sono associate due *forme invarianti* $h\,du\,dv$ e $k\,du\,dv$, ove $h = a_u + ab - c$, $k = b_v + ab - c$ sono

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) *Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», seduta del 2 gennaio 1927.

Digitized by Google

gli invarianti relativi di (1), rispetto al gruppo di trasformazioni definito da $x = \lambda(u, v)\,\dot{x}$, $u = \varphi(u')$, $v = \psi(v')$. Ed ho anche accennato che, assunte come coordinate proiettive omogenee di un punto di S_n $(n > 3)$ $n + 1$ soluzioni x (controdistinte da un indice $i = 1, \cdots, n + 1$, che ometteremo), questo descrive una superficie Φ, dotata per la (1) di un doppio sistema coniugato, sulla quale le estremali di ciascuna delle due forme costituiscono sistemi (planari) invarianti per la trasformazione del gruppo.

Mi propongo in questa Nota di assegnare una costruzione geometrica di dette estremali indipendente da qualsiasi problema di variazione; e di più di assegnare per ogni punto P di Φ, ed entro lo S_4 che ne contiene l'intorno del 2° ordine (S(2) osculatore), una piramide di riferimento e un punto unità definiti in modo geometrico invariante. Con ciò, dal punto di vista geometrico, è sostanzialmente esaurita la teoria proiettiva delle superficie Φ con un doppio sistema coniugato in S_n (le proprietà degli intorni successivi di un punto P essendo legate non soltanto alla (1) e alle sue conseguenze differenziali, ma all'eventuale esistenza di altre equazioni lineari omogenee a derivate parziali, d'ordine > 2, soddisfatte dalle soluzioni scelte x). Dal punto di vista analitico, la *normalizzazione* di x, u, v (cioè una scelta invariante di λ, φ, ψ) nell'intorno del 2° ordine di $P(u, v)$ equivale ad assegnare, nell'intorno di ciascuna coppia (u, v), una forma tipica per la (1).

Altre notevoli configurazioni legate alla (1), non essenziali allo scopo detto, come le numerose applicazioni che dei risultati qui riassunti possono farsi alla geometria delle superficie dello spazio ordinario (rispetto al gruppo proiettivo, al gruppo conforme, ecc.), alla teoria delle congruenze W di rette troveranno posto in un più ampio lavoro.

2. Le coniche di Koenigs.

Insieme al punto $P \equiv x$ di Φ consideriamo i due punti (trasformati di Laplace) $\bar{z} = x_u + ax$ e $z = x_v + bx$ appartenenti alle tangenti in x alle linee del sistema coniugato u, v.

Quando x descrive una linea $u\,(dv = 0)$, $\bar{z}$ descrive pure una linea che oscula in $\bar{z}$ il piano π tangente in x a Φ. Esiste quindi una conica osculatrice a questa linea in $\bar{z}$ e tangente in z alla retta xz. A questa conica e all'analoga (ottenuta scambiando z con $\bar{z}$) darò per brevità il nome di 1ª e 2ª conica di Koenigs. Ad un punto $\mu_0 x + \mu_1 \bar{z} + \mu_2 z$ di π possiamo attribuire le *coordinate locali* μ_0, μ_1, μ_2; con queste le equazioni delle coniche di Koenigs sono: $2h\mu_1\mu_2 = \mu_0^2$, $2k\mu_1\mu_2 = \mu_0^2$.

Lo spazio S(2) in x è individuato dai punti $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}$ o dagli altri $x, \bar{z}, z, \bar{X} = (b^2 - b_u)x - x_{uu}$, $X = (a^2 - a_v)x - x_{vv}$

Digitized by Google

il cui uso torna più vantaggioso; al punto $\mu_0 x + \mu_1 \bar{\xi} + \mu_2 \xi + \mu_3 \bar{X} + \mu_4 X$ si daranno le *coordinate locali*, in $S_4, \mu_0, \cdots, \mu_4$. I punti $x, \bar{\xi}, \bar{X}$ individuano il piano π_u osculatore in x alla linea u; e così x, ξ, X il piano π_v osculatore alla v.

3. Punti caratteristici per un elemento di 2° ordine di una curva su Φ.

Sia data una curva $\mathfrak{C}$ su Φ per x: il suo elemento di 2° ordine, E_2 (punto, tangente, piano osculatore), il solo che c'interessi, è individuato dalla coppia u, v, dai loro differenziali primi (E_1) e secondi. La tangente t a $\mathfrak{C}$ in x taglia p. es. la 1ª conica di Koenigs in due punti P_1, Q_1 (e la 2ª in P_2, Q_2): variando x su $\mathfrak{C}$ P_1 e Q_1 descrivono due curve, e le tangenti ad esse in P_1 e Q_1 stanno nel piano di E_2, quindi s'incontrano in un punto M_1 che dirò *1° punto caratteristico* di E_2; analogamente si ha un 2° punto caratteristico M_2.

Le coordinate di M_1 rispetto alla piramide $(x, \bar{\xi}, \xi, \bar{X}, X)$ sono

$$\gamma_0 = (h - k)\, du\, dv \quad , \quad \gamma_3 = du^2 \quad , \quad \gamma_4 = dv^2$$

$$\gamma_1 = A\, du^2 + \frac{1}{2} \frac{du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u}{du\, dv} du \quad , \quad \gamma_2 = B\, dv^2 - \frac{1}{2} \frac{du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u}{du\, dv} dv$$

ove si sono introdotte le abbreviazioni

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\partial \log h}{\partial u} - 2b \quad , \quad B = \frac{\partial \log h}{\partial v} - 2a \\ \delta^2 u &= d^2 u + \frac{\partial \log h}{\partial u} du^2 \quad , \quad \delta^2 v = d^2 v + \frac{\partial \log h}{\partial v} dv^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(gli ultimi sono i differenziali secondi controvarianti rispetto ad $h\, du\, dv$). Analoghe espressioni per le coordinate δ_i di M_2.

È chiaro, per la loro genesi, il carattere invariante di M_1, M_2.

4. Configurazioni invarianti in un piano tangente a Φ.

Cerchiamo il luogo di M_1, M_2 al variare di E_2.

Se si fa variare E_2 *intorno alla tangente fissa* t *(in* x*) i punti* M_1, M_2 *descrivono due punteggiate prospettive i cui sostegni passano per il punto ove la*

(1) Cfr. la Nota citata, n. 3. Qui e nel seguito mi riferisco ad un'equazione di Laplace generale, cioè per la quale non intercedano particolari relazioni fra gli invarianti relativi h e k; precisamente h/k si suppone funzione di tutt'e due le variabili u e v. Del resto i casi opposti, p. es. $h/k = U(u)$, sono già stati classificati geometricamente nella Nota citata.

Digitized by Google

retta $\bar{z}z$ *è segata dalla tangente* t' *coniugata armonica di* t *rispetto alle tangenti alle linee* u, v *in* x.

Il centro di prospettiva appartiene a t *e alla conica (da esso descritta al variare di* t*) di equazione*

$$\{4(h-k)\mu_1 - \theta_v \mu_0\}\{4(h-k) - \theta_u \mu_0\} = \theta_u \theta_v \mu_0^2,$$

ove s'è posto $\theta = \log h/k$.

Questa conica passa per x *e tocca ivi la curva* $h/k =$ *costante che vi passa* (e così questa rimane geometricamente definita); *passa inoltre per i punti* $\bar{z}$ *e* z *e le tangenti in essi s'incontrano nel punto, necessariamente invariante,*

$$U_0 \equiv 4(h-k)x + \theta_v \bar{z} + \theta_u z.$$

S'intende che un altro punto invariante, non appartenente al trilatero fondamentale $x\bar{z}z$, si avrebbe nel punto di Brianchon relativo alla conica e al trilatero tangente in $x, \bar{z}, z$ (di coordinate $4(h-k)$, $-\theta_v$, $-\theta_u$).

5. Proprietà caratteristiche delle estremali delle forme associate.

La rigata descritta dal punto M_1 (e l'analoga descritta da M_2) al variare di E_2 intorno ad x ci fornisce altri elementi invarianti per il riferimento proiettivo cercato in S_4 e nuove proprietà caratteristiche, che possono quindi sostituire la definizione variazionale, delle estremali di $h\,du\,dv$ (o di $k\,du\,dv$).

Il cono (di 1ª specie) che la proietta dal punto x ha, in coordinate locali μ_i, l'equazione

$$(\mu_1 - A\mu_3)^2 \mu_4 = (\mu_2 - B\mu_4)^2 \mu_3$$

e ad esso appartiene, come piano direttore semplice, π e come piano direttore doppio quello, che risulta dunque invariante, di equazioni

$$\mu_1 - A\mu_3 = 0 \quad , \quad \mu_2 - B\mu_4 = 0.$$

Basta confrontare il risultato ora trovato con quanto è stato detto nella Nota citata in principio per concludere che:

Il cono cubico proiettante da x *il luogo dei primi punti caratteristici* M_1 *relativi agli* E_2 *passanti per* x *ha per piani generatori proprio i piani osculatori in* x *alle estremali di* $h\,du\,dv$.

Ad un'altra proprietà caratteristica di queste si arriva chiedendosi come si può scegliere in ogni punto x un sistema ∞^1 di E_2 (o in altri termini un sistema di curve su Φ, definito da un'equazione differenziale del 2° ordine, i cui E_2 siano) tali che il luogo dei loro primi punti caratteristici sia una curva piana. E si trova che:

Digitized by Google

Condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò avvenga è che quegli elementi E_2 *appartengano alle estremali di* $h\,du\,dv$*; in tal caso poi il piano contenente i primi punti caratteristici è proprio il piano invariante trovato: e di più il luogo di essi è una conica che tocca le rette d'intersezione del piano invariante con i piani* π_u *e* π_v *in due punti i quali risultano perciò necessariamente invarianti.*

Questi due punti, insieme ad $x, \bar{z}, z$, si potrebbero assumere come vertici di una piramide di riferimento invariante in S_4: la sua definizione è legata alla forma $h\,du\,dv$ o $k\,du\,dv$; vogliamo cercarne un'altra che dipenda in modo simmetrico dalle due forme (cioè da h e k).

6. Configurazioni invarianti in uno S_4 osculatore a Φ.

Un elemento invariante di questo tipo è il cono quadrico (di 2ª specie) che dalla retta $\bar{z}z$ proietta la rigata descritta da M_1 (o da M_2). La sua equazione è infatti

$$\mu_0^2 = (h - k)^2 \mu_3 \mu_4$$

e questa mette geometricamente in evidenza uno S_3 invariante (contenente oltre alla retta $\bar{z}z$ i punti invarianti ultimamente trovati relativi alle due forme e situati nei piani π_u e π_v): questo S_3 può intanto fissarsi come faccia opposta ad x nella piramide fondamentale.

Allo stesso S_3 e di più a due nuovi punti invarianti che assumeremo come vertici residui (oltre ad $x, \bar{z}, z$) si arriva col teorema seguente:

Assegnato E_2 *in* x *si consideri sulla retta* M_1M_2 *il punto coniugato armonico della traccia di* M_1M_2 *su* π *rispetto alla coppia* M_1M_2*: al variare di* E_2 *(in* x*) questo punto descrive una rigata cubica appartenente allo* $S_3\ \mu_0 = 0$*, avente la retta* $\bar{z}z$ *per direttrice semplice e una direttrice doppia, che risulta perciò invariante. Tali sono anche i punti* $\bar{I}$ *e* I *ove questa direttrice doppia incontra i piani* π_u *e* π_v*.*

È facile di più vedere che *questa retta invariante è proprio il luogo dei punti considerati quando gli* E_2 *siano quelli (passanti per* x *e) relativi alle estremali di* $\sqrt{hk}\,du\,dv$*: e così anche queste risultano definite geometricamente.*

I nuovi punti invarianti hanno coordinate del tipo

$$\bar{I} = \mathfrak{A}\bar{z} + \bar{X} = (b^2 - b_u)\,x + \left(\frac{\partial \log \sqrt{hk}}{\partial u} - 2b\right)(x_u + bx) - x_{uu}$$

$$I = \mathfrak{B}z + X = (a^2 - a_v)\,x + \left(\frac{\partial \log \sqrt{hk}}{\partial v} - 2a\right)(x_v + ax) - x_{vv}.$$

Se si opera una trasformazione del gruppo indicato si trovano, fra le coordinate $\bar{I}, I$ e le loro trasformate $\dot{\bar{I}}, \dot{I}$, le relazioni $\dot{\bar{I}} = \bar{I}\varphi'^2/\lambda$, $\dot{I} = I\psi'^2/\lambda$ le quali provano di nuovo l'invarianza dei punti trovati.

Digitized by Google

7. Riferimento normale in un punto di Φ.

Riferendoci ormai, entro lo S_4, alla piramide invariante di vertici $(x, \bar{\xi}, \xi, \bar{I}, I)$ è naturale prendere come coordinate del punto $v_0 x + v_1 \bar{\xi} + v_2 \xi + v_3 \bar{I} + v_4 I$ le v_i. Per una trasformazione del gruppo, $\dot{x} = x/\lambda$, $\dot{\bar{\xi}} = \bar{\xi}\varphi'/\lambda$, $\dot{\xi} = \xi\psi'/\lambda$, e perciò le coordinate locali v_i si trasformano nelle $\dot{v}_i$ a norma delle relazioni

$$\dot{v}_0 = \rho\lambda v_0 \quad , \quad \dot{v}_1 = \rho\lambda v_1/\varphi' \quad , \quad \dot{v}_2 = \rho\lambda v_2/\psi' \quad , \quad \dot{v}_3 = \rho\lambda v_3/\varphi'^2 \quad , \quad \dot{v}_4 = \rho\lambda v_4/\psi'^2,$$

essendo ρ un fattore d'omogeneità ($\neq 0$).

Come punto unità U, nel piano invariante $U_0 \bar{I} I$, può prendersi, a norma delle precedenti, il punto, anch'esso invariante,

$$U = 4(h - k)x + \theta_v \bar{\xi} + \theta_u \xi + \frac{1}{4(h-k)}\left\{\theta_v^2 \bar{I} + \theta_u^2 I\right\}.$$

Se si considera il punto Ω ove il piano osculatore (pure invariante) alla linea $h/k = \text{cost.}$ passante per x taglia il piano $U_0 \bar{I} I$ si trova che i punti U, Ω, U_0 appartengono ad una retta e questa taglia la $\bar{I} I$ in un punto che con i precedenti forma il birapporto

$$\left\{\theta_{uu}\theta_v^2 + \theta_{vv}\theta_u^2 - 2\theta_{uv}\theta_u\theta_v - \theta_u\theta_v^2 \frac{\partial \log \sqrt{hk}}{\partial u} - \theta_v\theta_u^2 \frac{\partial \log \sqrt{hk}}{\partial v}\right\}/8(h-k)\theta_u\theta_v$$

che è un invariante assoluto della (1).

Se si approfitta dell'arbitrarietà di λ, φ, ψ si può far in modo che il punto $\dot{x}$ e i punti derivati primi e secondi (rispetto ad u' e v') cadano nei vertici della piramide fondamentale e il punto unità in U. Ciò equivale ad imporre, *nel punto* x (p. es. $u = v = 0$), a λ, φ, ψ le condizioni

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = -b \quad , \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = -a \quad , \quad \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} = -b_u \quad , \quad \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} = -a_v$$

$$\varphi' = \theta_v/4(h-k) \quad , \quad \psi' = \theta_u/4(h-k) \quad ,$$

$$\varphi'' = -\frac{\partial \log \sqrt{hk}}{\partial u}\varphi'^2 \quad , \quad \psi'' = -\frac{\partial \log \sqrt{hk}}{\partial v}\psi'^2;$$

cioè se x, u, v sono normalizzate in x ($\lambda = 1$, $u' = u$, $v' = v$) sono soddisfatte, per $u = v = 0$, le condizioni $a = b = a_v = b_u = 0$, $\theta_u = \theta_v = 4(h-k)\frac{\partial \log \sqrt{hk}}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{hk}}{\partial v} = 0$. Queste danno una forma canonica, legata intrinsecamente alla (1), per gli sviluppi di 5 o più solu-

Digitized by Google

zioni indipendenti fino all'intorno del 2° ordine di $u = v = 0$; il che equivale geometricamente al fatto che l'intorno del 2° ordine di un punto x di Φ appartiene al cono quadrico che dalla retta $\tilde{x}I$ proietta la conica di π_u osculatrice in x alla linea u e tangente in $\bar{I}$ alla retta $\tilde{x}\bar{I}$, e al cono analogo ottenuto con lo scambio delle linee u e v.

Matematica. — *Sulla curvatura e sul parallelismo su una superficie.* Nota di G. ANDREOLI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Nuovi contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann.* Nota di N. SPAMPINATO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui funzionali multilineari.* Nota di R. CACCIOPPOLI, presentata dal Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Il comportamento assintotico e gli zeri di una classe di funzioni intere.* Nota di O. ONICESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Sulle curve che compaiono nello studio della corrente circuito-traslatoria.* Nota di M. PASCAL, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Meccanica. — *Un teorema sul lavoro di deformazione elastica.* Nota di ARTURO CECCONI, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Lo studio dei carichi mobili, nei sistemi elastici, pur non avendo carattere dinamico, ha tuttavia portato notevoli progressi in due direzioni diverse. In una si mira a stabilire, con la minor incertezza possibile, quelle condizioni di carico, che determinano massime o minime sollecitazioni, nell'altra si tende a scoprire le relazioni, che intercedono fra gli effetti indotti dalle forze e quelli indotti dalle coppie.

Non mi risulta, che in questo senso abbia subìto alcun esame il lavoro di deformazione elastica, pur così fecondo di eleganti risultati.

Lo scopo della mia Nota è appunto quello di far conoscere un teorema che potrà aver utili applicazioni.

1. Si consideri un sistema elastico S trattenuto da vincoli rigidi e si assegni una linea c da risguardarsi come costituita da punti di S.

Avvertiamo subito, che le forze applicate ai suoi punti, devono intendersi sempre dotate (salvo avviso contrario) della direzione e del verso delle relative normali principali e le coppie devono considerarsi come operanti nei relativi piani osculatori (il verso non ha importanza).

Fissato su c una origine, O, ed un verso e indicate con ξ ed η le misure degli archi O A e O B, imaginando applicate (*staticamente*) in A e B le forze P e Q, il lavoro di deformazione elastica (supposto il sistema dotato di *elasticità perfetta* e deformabile *isotermicamente*) potrà esprimersi, come è noto, con:

$$(1) \qquad L_{PQ} = \frac{1}{2} P^2 p(\xi) + \frac{1}{2} Q^2 p(\eta) + PQ\, q(\xi, \eta),$$

essendo, ben s'intende,

$$q(\xi, \eta) = q(\eta, \xi).$$

Le funzioni p e q le riterremo regolari assieme alle loro derivate, che ammetteremo esistenti fino al secondo ordine.

2. Se si suppone $P = Q = 1$ e $\eta = \xi$, cioè si suppongono eguali le due forze ed applicate entrambe al punto A (che riterremo regolare) facendo notare che, in tal caso, il lavoro di deformazione elastica ha due espressioni, eguagliandole si ricava:

$$(2) \qquad p(\xi) = q(\xi, \xi).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1926.

Digitized by Google

Tenendo presenti la (1) e la (2) si ha:

$$(3)\qquad \frac{dp(\xi)}{d\xi} = \left(\frac{\partial q(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)_{\eta=\xi} + \left(\frac{\partial q(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)_{\eta=\xi} = 2\left(\frac{\partial q(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)_{\eta=\xi}$$

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\frac{d^2p(\xi)}{d\xi^2} = \left(\frac{\partial^2 q(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right)_{\eta=\xi} + \left(\frac{\partial^2 q(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)_{\eta=\xi}.$$

3. Ciò premesso, imaginiamo applicata al generico punto A della linea c una coppia di momento M. Il lavoro di deformazione elastica sarà esprimibile con:

$$L_M = \frac{1}{2} M\, m(\xi).$$

Se mutiamo senso alla Q e facciamo, nella (1), $\eta = \xi + h$ e $P = -Q$ abbiamo:

$$(5)\qquad L_{PQ} = \frac{1}{2} P^2 \left(p(\xi) + p(\xi + h) - 2\,q(\xi, \xi + h)\right).$$

Supponendo, ora, h infinitesimo e sviluppando secondo la formula di Taylor arrestandoci al terzo termine otteniamo:

$$p(\xi + h) = p(\xi) + h\frac{dp(\xi)}{d\xi} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2p(\xi)}{d\xi^2},$$

$$q(\xi, \xi + h) = q(\xi,\xi) + h\left(\frac{\partial q(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)_{\eta=\xi} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 q(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right)_{\eta=\xi}$$

$$= p(\xi) + \frac{h}{2}\frac{dp(\xi)}{d\xi} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 q(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right)_{\eta=\xi}.$$

Sostituendole nella (5) si deduce subito, ricordando ancora la (4):

$$L_{PQ} = \frac{1}{2} P^2 h^2 \left\{\frac{1}{2}\frac{d^2p(\xi)}{d\xi^2} - \left(\frac{\partial^2 q(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right)_{\eta=\xi}\right\} = \frac{1}{2} P^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 q(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)_{\eta=\xi}.$$

Osservando che Ph si può risguardare come il momento d'una coppia (poco importa se è infinitesima) concentrata in A, che soddisfa alle condizioni della M, si riconosce, che dovrà essere:

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial^2 q(\xi,\eta)}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)_{\eta=\xi} = m(\xi).$$

Questo risultato lo si può porre sotto un aspetto diverso. Se si pone infatti:

$$l_{PP} = \frac{1}{2} p(\xi) + \frac{1}{2} p(\eta) + q(\xi,\eta)$$

$$l_M = \frac{1}{2} m(\xi)$$

Digitized by Google

con il significato il primo, di lavoro di deformazione elastica dovuto a due forze unitarie applicate ai punti A e B ed il secondo di lavoro di deformazione indotto da una coppia di momento unitario applicata in A, si ha:

$$\left(\frac{\partial^2 l_{PP}}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_{\eta=\xi} = 2\,l_M. \tag{6'}$$

È evidente l'analogia, che presenta questo risultato con quello stabilito dal signor M. Hisely [1] e generalizzato poi dal prof. C. Parvopassu [2].

Meccanica. — *Sur un problème mixte pour les fonctions harmoniques.* Nota di A. WEINSTEIN, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Stabilità geodetica. Applicazione ai sistemi conservativi della Meccanica.* Nota di G. VRANCEANU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Una osservazione a proposito di moti viscosi simmetrici rispetto ad un asse.* Nota di B. CALDONAZZO, presentata [3] dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. Mi sono occupato recentemente dei moti di liquidi viscosi, simmetrici rispetto ad un asse [4]. A questo tipo di moti appartengono anche le cosidette *rotazioni viscose* studiate completamente dal Cisotti [5]. In tutti questi moti la pressione specifica e per conseguenza gli sforzi interni stessi possono essere, dal punto di vista analitico, funzioni *non uniformi* rispetto a cammini che circondino l'asse di simmetria. La non uniformità è della

(1) *Nouveau théorème sur les effects des moments*, « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. 155, n. 20, nov. 1912, Paris.

(2) *Intorno alle linee d'influenza relative a travi elastiche*, « Atti del Reale Istituto Veneto », t. LXXII, parte II, anno 1912-13.

(3) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

(4) « Rend. del R. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. », vol. LVIII, 1924.

(5) U. CISOTTI, *Rotazioni viscose*, questi « Rendiconti », vol. XXXIII, p. 161 (1924); *Sull'integrazione dell'equazione delle rotazioni viscose*, questi « Rend. », vol. XXXIII, p. 253 (1924).

Digitized by Google

stessa natura di quella dei potenziali cinetici con un filetto vorticoso sull'asse di simmetria.

Ho avuto occasione di ripensare a tale polidromia della pressione e degli sforzi, arrivando alla convinzione che essa non è fisicamente accettabile. Anche se si può invocare (così parve al Cisotti ed a me in un primo tempo) l'esempio di mezzi i quali sottoposti a convenienti deformazioni si comportano in un modo che si può grossolanamente esprimere dicendo che diventano meno pastosi (si pensi alla pasta per il pane, all'argilla pei mattoni in una impastatrice o a tasselli di metalli sottoposti a torsione), bisogna tener presente che le espressioni degli sforzi e della pressione, trovate dal Cisotti e da me, danno i valori locali degli stessi in un generico istante e non i loro valori relativi ad una data particella durante il suo movimento. Ora sono appunto questi valori locali istantanei che fisicamente devono ritenersi univocamente determinati e per conseguenza le loro espressioni devono essere funzioni uniformi del posto.

L'invocata uniformità dal punto di vista analitico è facilmente ottenuta eguagliando a zero una certa funzione (c') del tempo, che compare a fattore del termine ciclico, a condizione però (come era stato tacitamente supposto) che le forze conservative di massa agenti sul liquido ammettano un *potenziale uniforme*. Se tale condizione non è verificata ed il potenziale è non uniforme in quanto presenta un termine ciclico della stessa forma di quello che compare nella pressione allora ed allora soltanto la funzione c' può (e deve) valutarsi in modo da compensare la non uniformità portata alla pressione dal potenziale delle forze. Con potenziali presentanti una polidromia di natura diversa le rotazioni viscose e più generalmente i moti viscosi simmetrici rispetto ad un asse non sono fisicamente possibili.

La restrizione che così viene portata ai moti considerati in quanto viene imposta la determinazione della funzione c' ricordata viene compensata in certo qual modo dalla ulteriore validità dei moti stessi anche pel caso di forze di massa aventi un potenziale non uniforme ciclico. Come è noto il campo di tali forze è assimilabile al campo magnetico generato da una corrente elettrica lungo un filo rettilineo indefinito.

È stato precisamente lo studio di rotazioni viscose, sotto l'azione di forze di questo tipo, che mi ha condotto alle osservazioni svolte in questa Nota.

L'uniformità degli sforzi e della pressione è altresì necessaria conseguenza del bilancio energetico che deve essere verificato in ogni porzione del liquido in moto. Infatti tale bilancio esige che l'energia dissipata in causa della viscosità in una qualsiasi regione del campo del moto, durante un certo tempo, sia eguale al lavoro compiuto e dalle forze di massa e dalle forze in superficie nello stesso tempo, diminuito del corrispondente incremento di forza viva. A questa condizione si soddisfa appunto determinando la c' nel modo sopra esposto cosicchè la legge della conservazione dell'energia (considerata

Digitized by Google

nel senso lato sotto il quale va considerata pei fluidi viscosi) importa di necessità la uniformità degli sforzi.

Si ha così una conferma energetica di quanto l'intuizione fisica mi aveva suggerito per l'uniformità degli sforzi ed in particolare della pressione.

Nel n. 2 metto in evidenza la condizione caratteristica per tale uniformità, limitandomi al caso delle rotazioni viscose. Per i moti simmetrici da me considerati, la pressione, salvo termini per loro natura uniformi, coincide con quella delle rotazioni viscose.

Nel n. 3 stabilisco l'accennata verifica energetica limitandomi ancor qui alle rotazioni viscose; per i moti simmetrici generali, salvo una meno semplice espressione delle grandezze che si considerano, il procedimento è analogo ed il risultato è il medesimo.

2. La pressione specifica per le rotazioni viscose è data da [1]

$$p = \rho \int_{r_0}^{r} \frac{v^2}{r} dr + \rho (U - c' \theta) + f(t),$$

dove ρ è la densità, U il potenziale specifico delle forze di massa, c' ed f sono funzioni del tempo, r e θ sono coordinate polari nel piano generico sul quale si considera la rotazione viscosa, con polo il centro comune delle circonferenze descritte dalle particelle.

Per l'uniformità di p, se U è uniforme, deve essere manifestamente $c' = 0$. Se invece $U(r, \theta, t)$ non è uniforme deve essere

$$U(r, 2\pi, t) - U(r, 0, t) = 2\pi c', \tag{1}$$

la quale, poichè c' non dipende da r, richiede che la parte non uniforme di U sia precisamente $c'\theta$ e quindi si tratti di un potenziale ciclico nel senso che è stato precisato sopra. Dopo ciò l'espressione di p diviene

$$p = \rho \int_{r_0}^{r} \frac{v^2}{r} dr + \rho U_1 + f(t),$$

essendo U_1 la parte uniforme di U.

3. Consideriamo nel piano delle rotazioni viscose la corona circolare elementare compresa tra una circonferenza di raggio generico r e una circonferenza infinitamente vicina di raggio $r + \delta r$. Quale campo del moto

(1) A questa si riduce la (20) della 2ª Nota citata del Cisotti, salvo qualche diversità nei simboli e la presenza del potenziale U. Alla stessa si arriva dalla espressione generale data per i moti simmetrici da me studiati nella Nota ricordata sopra, al n. IV, facendovi $\psi = 0$ ed eseguendo una facile integrazione. È notevole nell'espressione ottenuta per p il primo termine del secondo membro che si può interpretare come una forza centrifuga.

Digitized by Google

assumeremo lo strato cilindrico avente la corona per base e lo spessore unitario. La *funzione di dissipazione* relativa è [1]

$$\delta X = 2\pi\mu \left\{ r\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v})^2 + 2\,\frac{\partial}{\partial r}[r\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}] + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v^2}{\partial r}\right) \right\} \delta r\,,$$

essendo μ il coefficiente di viscosità, $\boldsymbol{u}$ il versore del raggio vettore che va dal centro al generico punto. Ancora sia $\boldsymbol{i}$ un vettore unitario normale alla giacitura delle rotazioni viscose, $\boldsymbol{N}$ un ulteriore vettore unitario tale che la terna $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{N}$ risulti ortogonale sinistrorsa. In tal modo $\boldsymbol{N}$ risulta parallelo a $\boldsymbol{v}$ e si potrà porre $\boldsymbol{v} = \mathrm{H}\boldsymbol{N}$, con H funzione di r e t. Si ha allora $\mathrm{H}^2 = v^2$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\mathrm{H})}{\partial r}\boldsymbol{i}$, [cfr. la mia Nota citata]. Sostituendo in δX si ottiene, fatte le dovute riduzioni,

$$\delta X = 2\pi\mu \left\{ \frac{v^2}{r} - \frac{\partial v^2}{\partial r} + r\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 \right\} \delta r\,. \tag{2}$$

Il lavoro compiuto nell'unità di tempo dalle forze di massa $\boldsymbol{F}$ di potenziale U, nello stesso campo anulare, è

$$\frac{d}{dt}\delta L = \rho r\,\delta r \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}\,d\theta = \rho\,\delta r\,\mathrm{H}\int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \theta}\,d\theta\,.$$

È pertanto

$$\frac{d}{dt}\delta L = \rho \mathrm{H} \left\{ U(r, 2\pi, t) - U(r, 0, t) \right\} \delta r\,. \tag{3}$$

Sulla superficie cilindrica interna dell'anello elementare lo sforzo tangenziale, che viene esercitato sul liquido dell'anello stesso, è [2]

$$-\mu r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{H}}{r}\right)\boldsymbol{N}.$$

Il lavoro complessivo eseguito nell'unità di tempo da questi sforzi è

$$-2\pi\mu r^2 \mathrm{H}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{H}}{r}\right) = -2\pi\mu \left\{ \frac{r}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r} - v^2 \right\}.$$

La superficie cilindrica esterna dell'anello porta al lavoro compiuto nell'unità di tempo dagli sforzi un contributo analogo ma col segno cambiato (in causa del mutato verso della normale interna) e purchè si ponga nella precedente espressione $r + \delta r$ al posto di r. Sulle due corone circolari basi dell'anello, gli sforzi sono normali e quindi il lavoro ivi compiuto dagli stessi è nullo.

(1) Cfr. ad es. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, II, p. 65.

(2) Dalla terza della (10) della mia Nota citata sopra.

Digitized by Google

Pertanto il lavoro compiuto in superficie dagli sforzi è quello che proviene dalle sole porzioni cilindriche. Per quanto si è detto esso è

$$\frac{d}{dt}\delta L_\sigma = 2\pi\mu \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{r}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r} - v^2\right\}\delta r ,$$

ossia, eseguendo le derivazioni,

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\delta L_\sigma = 2\pi\mu\left\{\frac{r}{2}\frac{\partial^2 v^2}{\partial r^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r}\right\}\delta r .$$

La forza viva del liquido che occupa l'anello elementare è

$$\delta T = \pi\rho r v^2 \delta r ;$$

il suo incremento nell'unità di tempo è

$$\frac{d}{dt}\delta T = \pi\rho r \frac{dv^2}{dt}\delta r = \pi\rho r \frac{\partial v^2}{\partial t}\delta r ,$$

perchè nelle rotazioni viscose r non dipende da t.

Qui occorre ricordare l'equazione differenziale di moto caratteristica per le rotazioni viscose (1)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nu\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2}\right\} + \frac{c'(t)}{r} ,$$

dove è

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} .$$

Da questa equazione si ricava

$$\frac{\partial v^2}{\partial t} = 2\nu\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v^2}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r}\frac{\partial v^2}{\partial r} - \frac{v^2}{r}\right\} + \frac{2c'H}{r} .$$

Dopo ciò abbiamo

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\delta T = 2\pi\mu\left\{\frac{r}{2}\frac{\partial^2 v^2}{\partial r^2} - r\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial r} - \frac{v^2}{r}\right\}\delta r + 2\pi\rho c\, H\delta l .$$

Pel bilancio energetico nel nostro campo anulare deve essere

$$\delta X = \frac{d}{dt}\delta L + \frac{d}{dt}\delta L_\sigma - \frac{d}{dt}\delta T .$$

Sostituendo le (2), (3), (4) e (5) e semplificando, spariscono tutti i termini contenenti v, riducendosi all'equazione

$$U(r, 2\pi, t) - U(r, 0, t) = 2\pi c' ,$$

che è appunto la (1) trovata sopra quale condizione caratteristica per l'uniformità degli sforzi.

(1) Vedi il n. III della mia Nota.

Digitized by Google

Meccanica. — *Sur le théorème d'existence des jets liquides.* Nota di A. WEINSTEIN, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans une note précédente [2] j'ai posé le problème de l'existence d'une solution de la forme donnée par M. Cisotti (voir la formule (4)) du problème de l'écoulement d'un jet liquide d'un canal à parois polygonales données à priori.

J'ai réduit ce problème à l'étude des solutions d'un problème aux limites pour une fonction harmonique β (définie dans une bande $\overline{S}$ comprise entre les droites $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$ et $\psi = 0$ du plan $f = \varphi + i\psi$), les conditions aux limites étant données par les équations

(9) $\beta = 0$ pour la droite $\psi = 0$ et pour la demi-droite $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$, $-\infty < \varphi \leqq 0$

(10) $\frac{\partial\beta}{\partial n} - \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\beta = -\frac{\delta\mu}{\mu}$ pour la demi-droite $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$, $0 \leqq \varphi < +\infty$.

Il s'agit de démontrer que les solutions éventuelles β de ce problème n'ont pas, dans le cas que la constante indéterminée $\delta\mu$ (qui intervient dans (10)) est différente de zéro, l'allure qualitative (à préciser tout à l'heure) imposée par le problème hydrodynamique.

Pour le cas $\delta\mu = 0$ on sait que la solution β s'annule nécessairement pour une classe bien déterminée de parois polygonales [3].

Cette classe, qui a été récemment très étendue par M. Hamel [4], est fixée par l'unique condition que la valeur absolue de l'angle ϑ_1 entre les parois à l'orifice et la direction de la veine à l'infini (on pourrait dire « la courbure totale des parois ») soit plus petite qu'une fraction propre (constante absolue) voisine de l'unité.

Je me servirai dans la présente note de la méthode de M. Hamel.

La signification de la fonction $\beta\left(= \delta\psi - \psi\frac{\delta\mu}{\mu}\right)$, qui doit être une fonction du type qualitatif donné par la partie imaginaire de la formule (6) de ma note précédente, montre, premièrement, que cette fonction doit rester

(1) Nella seduta del 19 dicembre 1926.

(2) *Sur les jets liquides à parois données*, « Rend. Acc. Linc. », vol. IV, ser. 6ª, 2° sem., pp. 119-123. J'adopte les mêmes notations et le numérotement des formules.

(3) A. WEINSTEIN, *Ein hydrodynamischer Unitätssatz*, « Mathematische Zeitschrift », vol. 19 (1924), pp. 265-275.

(4) G. HAMEL, *Über einen hydrodynamischen Unitätssatz des Herrn Weinstein*, « Comptes Rendus du 2me Congrès International de Mécanique appliquée », Zurich, 1926.

Digitized by Google

bornée ainsi que ses derivées de direction aux deux infinis de la bande $\overline{S}$ dans le plan f.

Deuxièmement, on vérifie facilement en différentiant l'expression générale (6) de γ par rapport à f[1] et en tenant compte du fait que la constante $|\delta z_0|$ de cette formule, c'est-à-dire la variation de la largeur de l'orifice est zéro pour le cas considéré, que la derivée $\frac{d\beta}{d\varphi}$ s'annule lorsque φ tend vers zéro le long de la demi-droite $\varphi > 0$, $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$.

Or nous allons démontrer, que toute solution éventuelle β de notre problème aux limites a pour la classe considérée une derivée $\frac{d\beta}{d\varphi}$ qui tend dans ce point vers l'infini. Ceci une fois démontré nous pourrons affirmer que les solutions acceptables de notre problème s'obtiennent en posant dans (10) la valeu à priori indéterminée de $\delta\mu$ égale à zéro.

Nous allons nous servir, pour la détermination des solutions éventuelles de notre problème aux limites d'une fonction de Green G introduite par M. Hamel. Cette fonction s'annule sur la partie du bord de $\overline{S}$ sur laquelle est satisfaite la condition (9), tandis que sa derivée normale est zéro pour la partie où est remplie la condition (10). La fonction harmonique G a en outre, bien entendu, une singularité logaritmique à l'intérieur de $\overline{S}$.

M. Hamel donne d'abord l'expression explicite pour G considérée comme fonction du point variable dans le premier quadrant Q d'un plan auxiliaire F, qu'il fait correspondre à $\overline{S}$ de manière que les deux parties du bord de $\overline{S}$ portant respectivement les conditions (9) et (10) correspondent aux moitiés positives de l'axe réel et de l'axe imaginaire du plan F. Cette correspondance entre $\overline{S}$ et Q est donnée par la formule

$$F = \sqrt{1 + e^{\frac{2f}{\mu}}} \quad ; \quad f = \frac{\mu}{2} \lg (F^2 - 1). \tag{11}$$

Le point $F = +1$ correspond à l'infini en amont de $\overline{S}$, c'est-à-dire à $\varphi = -\infty$, tandis que φ tend vers $+\infty$ pour $|F|$ très grand. En outre on a $F = 0$ pour $\varphi = 0$, $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$.

En désignant par P_1 le pol de G (situé dans le premier quadrant) et par P_2, P_3, P_4 ses images par rapport aux axes, situées dans les trois autres, M. Hamel obtient comme valeur de G_{P_1} au point (variable) P l'expression

$$G_{P_1}(P) = \frac{1}{2} \lg \frac{\overline{PP_3}^2 \cdot \overline{PP_4}^2}{\overline{PP_2}^2 \cdot \overline{PP_1}^2} \tag{12}$$

où $\overline{PP_1}$, etc. signifient les distances entre les points considérés.

(1) Voir la formule (7) de ma Note précédente.

Digitized by Google

Il est à remarquer que G s'annule pour $F = +1$, tandis que ses dérivées y restent bornées. A l'infini de Q on a G égal à zéro, tandis que ses derivées de direction tendent vers zéro, comme $\frac{1}{R^2}$, $(R = |F|)$, au moins.

Vue la relation (déduite de (11))

$$df = \mu \frac{F}{F^2 - 1} dF$$

(qui montre en particulier que $|d\varphi|$ est de l'ordre $\frac{1}{R}|dF|$ pour $|F|$ très grand, c'est-à-dire pour $\varphi = -\infty$) on peut affirmer que G et ses dérivées de direction s'annulent aus infinis de $\bar{S}$. Pour $\varphi = 0$, $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$ G est zéro tandis que ses derivées de direction peuvent devenir infinies comme $\frac{1}{\sqrt{|\varphi|}}$ au plus.

Tous ces préliminaires nous servirons à démontrer que toute solution éventuelle β de notre problème aux limites doit satisfaire à une équation intégrale de seconde espèce.

En effet la formule de Green

$$2\pi\beta = \int \left(\frac{d\beta}{dn} G - \beta \frac{dG}{dn}\right) ds$$

appliquée à un rectangle infiniment long de la bande $\bar{S}$ se réduit à la limite, vues les conditions (9) et (10) à l'équation cherchée

$$(13) \qquad 2\pi\beta(\varphi) = \int_0^\infty G(\varphi, \varphi^*) \left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi^*} \beta(\varphi^*) - \frac{\delta\mu}{\mu}\right] d\varphi^* ;$$

$$0 \leqq \varphi < +\infty \quad , \quad \psi = \frac{\mu\pi}{2} .$$

En vertue des formules (11) et (12) on aura pour G l'expression suivante

$$(14) \qquad G(\varphi, \varphi^*) = \lg \left(\frac{\sqrt{e^{\frac{2\varphi}{\mu}} - 1} + \sqrt{e^{\frac{2\varphi^*}{\mu}} - 1}}{\sqrt{e^{\frac{2\varphi}{\mu}} - 1} - \sqrt{e^{\frac{2\varphi^*}{\mu}} - 1}} \right)^2 .$$

Nous pouvons maintenant calculer la derivée $\frac{d\beta}{d\varphi}$ de toute solution éventuelle [1] de l'équation (13) (et par conséquent de toute solution de

(1) Pour la classe de parois considérée par M. Hamel l'équation (13) admet une solution (unique), qui peut être obtenue par la méthode d'itération. Ce procédé démontre, les fonctions G et $\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi^*}$ étant $\leqq 0$, que la solution β a le même signe que la constante $\frac{\delta\mu}{\mu}$.

Digitized by Google

notre problème aux limites) au point $\varphi = 0$, $\psi = \frac{\mu\pi}{2}$ en nous servant de l'équation (13) elle-même.

Posons à cet effet

$$\sqrt{e^{\frac{2\varphi^*}{\mu}} - 1} = t\sqrt{e^{\frac{2\varphi}{\mu}} - 1} \quad ; \quad d\varphi^* = \mu\left(e^{\frac{2\varphi}{\mu}} - 1\right)\frac{t\,dt}{\left(e^{\frac{2\varphi}{\mu}} - 1\right)t^2 + 1}$$

et désignons pour abréger $\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi^*}$ (courbure de la ligne libre donnée) par la lettre c.

Nous obtiendrons ainsi au lieu de (13) l'équation suivante

$$(15)\quad 2\pi\beta(\varphi) = \mu\left(e^{\frac{2\varphi}{\mu}} - 1\right)\int_0^\infty \lg\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 \frac{t}{\left(e^{\frac{2\varphi}{\mu}} - 1\right)t^2 + 1}\left[c\beta - \frac{\delta\mu}{\mu}\right]dt.$$

Nous avons à calculer la limite de $\frac{\beta(\varphi) - \beta(0)}{\varphi}$ pour $\varphi = +0$, où bien, en observant que d'après (13) ou (15) on a $\beta(0) = 0$, celle de $\frac{\beta(\varphi)}{\varphi}$. Or, d'après (15), cette grandeur tend vers $\frac{1}{\pi}$ multiplié par la limite de l'intégrale du second membre de (15) pour $\varphi = 0$.

Il est facile à prouver que cette limite est infinie.

En effet, βc ayant le même signe que $-\frac{\delta\mu}{\mu}$, on peut affirmer (vu que $\lg\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2$ est de l'ordre $\frac{1}{t}$ pour t très grand) que notre intégrale est supérieure en valeur absolue à l'expression

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\left(e^{\frac{2\varphi}{\mu}} - 1\right)t^2 + 1}$$

multipliée par une constante positive convenablement choisie, et devient donc infinie pour $\varphi = 0$ comme $1 : \sqrt{e^{\frac{2\varphi}{\mu}} - 1}$.

Ayant ainsi démontré que pour les solutions du problème aux limites $\frac{d\beta}{d\varphi}$ devient infinie dans le cas que $\delta\mu$ ne s'annule pas, nous pouvons conclure, que cette constante à priori indéterminée doit être égale à zéro.

(De ce résultat se déduit d'ailleurs, vue la signification de $\delta\mu$, que pour un canal à parois rectilignes, de la classe considérée, la variation du coefficient de contraction s'annule en même temps que la variation des longueurs de ses côtés et de son orifice).

Digitized by Google

Dans le cas $\delta\mu = 0$, le problème aux limites donné par (9) et (10), n'admet pas, pour la classe des profils considérée par M. Hamel, de solutions $\beta (= \delta\psi$ cette fois) différente de zéro.

En reprenant le raisonnement de ma Note précédente, nous pouvons donc, les lacunes y-signalées étant comblées, affirmer l'existence d'une solution de Cisotti, correspondante à des parois polygonales données d'avance, pourvu qu'elles satisfont à la condition de M. Hamel, en ce qui concerne leur courbure totale.

J'ai l'intention d'utiliser les solutions de M. Cisotti pour la démonstration de l'existence de solutions correspondantes à des parois courbes données.

Astronomia. — *Osservazioni sulla scintillazione delle stelle eseguite nel R. Osservatorio del Campidoglio.* Nota della dottoressa G. Rossi, presentata [1] dal Corrisp. G. Armellini.

Le osservazioni della scintillazione si possono eseguire con vari metodi: quello di Dufour a occhio nudo, di Arago con lo scintillometro superficiale, di Montigny con lo scintillometro di curvatura, e di Respighi con lo spettroscopio.

Per avere lo scintillometro superficiale si dispone il cannocchiale di piccola apertura verso la stella, si sfoca lo strumento in modo da ridurre l'immagine della stella in un disco di sufficiente grandezza.

Si notano allora dei dischi diversamente colorati che si sovrappongono gli uni agli altri in modo rapido e continuo.

Supponiamo di voler osservar Sirio in questo modo: si vede un disco rosso, ad esso sovrapporsi un disco giallo, poi uno verde, di nuovo uno rosso, uno giallo, uno verde, e così via. Supponiamo che per contare il succedersi di 50 dischi rossi senza occuparci dei gialli e dei verdi, siano trascorsi 35^s; dividiamo 150 per 35^s avremo il numero 4.2 che si chiama *frequenza della scintillazione per il rosso.*

Dal telescopio si può avere lo scintillometro di curvatura imprimendo all'asse un leggero movimento rotatorio. L'immagine della stella descrive allora una curva luminosa, sulla quale i vari colori si susseguono con grande rapidità; analogamente a ciò che abbiamo fatto nel caso precedente possiamo fissarne uno, per es. il rosso, contare il tempo perchè si veda 50 volte, e determinare il rapporto tra il numero dei colori passati e il tempo, ottenendo così la *frequenza della scintillazione per il rosso.*

Con tali metodi ho eseguito nel R. Osservatorio del Campidoglio a Roma, 450 osservazioni di 18 stelle, dal mese di gennaio a quello di giugno

(1) Nella seduta del 16 gennaio 1927.

Digitized by Google

dell'anno 1925, disponendo i risultati in tabelle di cui riporto un tipo, come sempio, non potendo per ragione di spazio trascriverle integralmente.

18 giugno 1925: temperatura 25.3. pressione 753.84

Nome della stella	Scintillometro lineare				Scintillometro superficiale				
	Numero dei colori	N	tempo	frequenza	Num. dei colori	N	tempo	frequenza	altezza sull'orizzonte
Spica	Y G B V	50 G	42s	4.7	Y G	50 G	1m 2s	1.6	85°
Spica	»	»	45s	4.4	»	»	59s	1.6	»
Wega	Y G B V	50 G	34s	5.8	Y G	50 G	56s	1.7	80°
Wega	»	»	36s	5.5	»	»	53s	1.8	»
Deneb	R Y G B	50 R	23s	8.6	R G	50 R	36s	2.7	65°
Deneb	»	»	24s	8.3	»	»	37s	2.7	»
Capella	R Y G B	50 R	27s	7.4	R G	50 R	35s	2.8	40°
Capella	»	»	30s	6.6	»	»	36s	2.7	»
Antarès	R Y G B	50 R	19s	10.5	R G	50 R	28s	3.5	15°
Antarès	»	»	21s	9.5	»	»	31s	3 2	»
Altair	R Y G B	50 R	18s	11.1	R G	50 R	23s	4.3	10°
Altair	»	»	19s	10.5	»	»	25s	4.0	»

Nelle osservazioni eseguite con lo scintillometro superficiale ho potuto facilmente riconoscere il fenomeno di Keplero, di cui parlai nella precedente Nota. In questi dischi ho potuto notare ancora *una direzione di moto analoga a quella delle bande oscure percorrenti lo spettro, osservata da Respighi, direzione che anche in questo caso rivela la grande influenza del moto rotatorio della terra*, nel fenomeno della scintillazione delle stelle.

Inoltre con lo stesso scintillometro superficiale ho potuto vedere nelle sere del 23 e 24 gennaio 1925, serate normali, sia come temperatura che come stato del vento, che era debolissimo, il disco di *Rigel* (β Orionis) mancante di una parte, come se fosse spinto da una colonna d'aria, dalla parte opposta a quella del suo moto apparente.

La stessa cosa ho osservato la sera del 20 maggio con un vento fortissimo, nelle stelle *Capella* (α Aurigae) e *Gemma* (α Coronae), e credo che questo strano fatto, non avvertito da altri osservatori, sia dovuto ad irregolari movimenti degli alti strati atmosferici.

Dalle mie osservazioni (cfr. tabella precedente) si vede che la scintillazione è maggiore in vicinanza all'orizzonte e diminuisce con l'altezza della stella; che le stelle bianche scintillano più fortemente delle stelle gialle, e

Digitized by Google

queste più delle stelle rosse; ciò che conferma le esperienze di Montigny e di Respighi che la scintillazione dipende *dal colore proprio della stella.*

Ho eseguito ancora una seconda serie di osservazioni mediante lo spettroscopio di Hoffmann a visione diretta, applicato all'equatoriale di Mertz dell'Osservatorio del Campidoglio. Ne riporto anche qui un tipo come esempio:

25 giugno: temperatura 21.3, pressione 749.46

Nome della stella	Colori visibili nello spettro	interruzioni	tempo	frequenza	Particolarità visibili nello spettro	altezza sull'orizzonte
Wega	Y G B	50 nel G	$1^m\ 12^s$	2.0	Intensità luminosa costante. Bande oscure dal bleu al giallo.	75°
Wega	Y G B	50 nel G	$1^m\ 14^s$	2.0	Idem	75°
Antarès . . .	R Y G B	50 nel G	$1^m\ 13^s$	2.7	Colori brillantissimi. Righe e bande oscure dal violetto al rosso. Variazione dell'intensità luminosa.	25°
Antarès . . .	R Y G B	50 nel G	$1^m\ 15^s$	2.6	Idem	25°
Altair	R Y G B V	50 nel G	$1^m\ 1^s$	4.0	Spettro brillante. Vaziazioni abbastanza rapide delle interruzioni luminose. Bande e righe percorrono lo spettro dal violetto al rosso.	15°
Altair	R Y G B V	50 nel G	$1^m\ 4^s$	3.9	Idem	15°

Eseguendo le medie, i miei risultati possono riunirsi nelle due seguenti tabelle:

TABELLA I (Scintillometro lineare e superficiale)

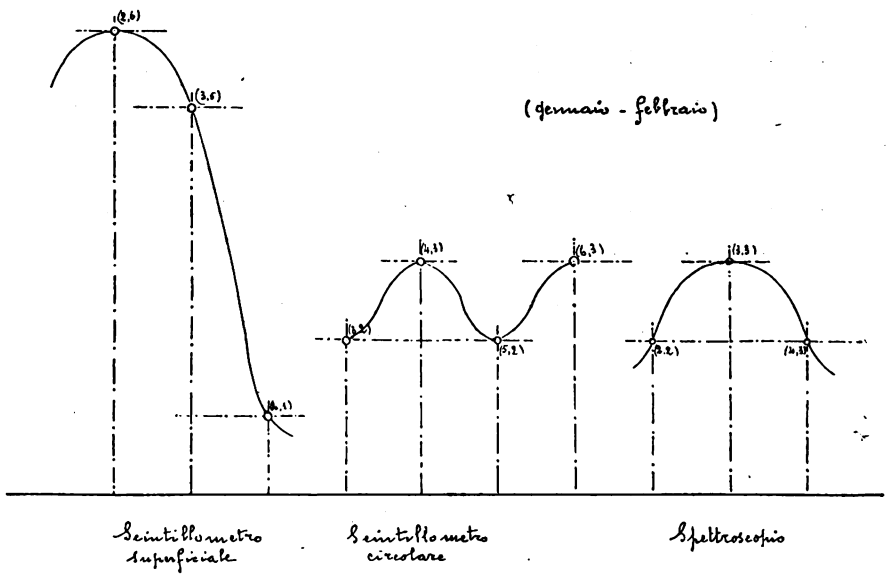
Data	Scintillazione media dallo scintillometro		temperatura	pressione	Data	Scintillazione media dallo scintillometro		temperatura	pressione
	lineare	superficiale				lineare	superficiale		
22 gennaio	4.4	1.6	7.0	771.39	2 giugno	6.7	2.9	25.7	754.80
23 »	3.1	2.0	5.7	769.56	3 »	7.6	3.2	26.5	756 84
24 »	5.4	2.9	7.2	767.46	5 »	7.3	2.6	22.8	756.6
31 »	3.8	1.6	8.3	763.90	6 »	5.3	2.1	23.2	756.14
2 febbraio	6.3	2.8	9.2	757.79	10 »	7.2	2.7	25.1	756.12
3 »	6.6	3.5	7.0	761.94	12 »	7.7	2.6	23.5	758.75
4 »	3.9	2.1	10.1	762.63	13 »	8.6	2.3	24.5	756.77
6 maggio	6.4	2.6	17.4	754.44	15 »	7.5	2.5	24.9	752.91
15 »	6.2	3.0	21.2	750.23	16 »	6.8	2.6	26.5	755.93
20 »	11.4	5.0	18.0	750.78	18 »	7.6	2.6	25.3	753.84
22 »	6 8	2.6	19.2	756.42					

Digitized by Google

TABELLA II (Spettroscintillometro)

Data	Scintillazione media spettroscopio	temperatura	pressione
19 giugno	2.3	25.5	751.39
20 »	3.0	25.7	754.36
23 »	4.1	24.4	753.59
25 »	2.8	21.3	749.46
26 »	2.8	22.4	749.8

Con tali tabelle ho potuto costruire le seguenti curve, che mostrano graficamente il comportamento del fenomeno, secondo le mie osservazioni.



Le curve ottenute presentano una qualche somiglianza con la curva della frequenza degli errori di Gauss; specialmente quelle ricavate dalle osservazioni eseguite con lo scintillometro superficiale e con lo spettroscopio.

Ciò dimostra che il fenomeno della scintillazione oscilla intorno a uno stato medio, con legge analoga a quelle che regolano i cosidetti fenomeni casuali, e la cui determinazione richiede una lunga e attenta serie di osservazioni.

Digitized by Google

Geodesia. — *Determinazione di azimut assoluto, eseguita ad Andrate nell'agosto 1926.* Nota di U. BARBIERI, presentata dal Corrisp. G. LORIA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul teorema delle somme di Thomas e Reiche.* Nota di A. CARRELLI, presentata [1] dal Socio M. CANTONE.

Sono stati interpretati in tempi relativamente recenti i fenomeni della dispersione della luce mediante i concetti quantistici, e si è principalmente cercato di collegare le quantità che compaiono nella formula di dispersione con grandezze definite nella teoria quantistica. La formula dell'indice per un gas o vapore, nel caso che si sia abbastanza lontani da una zona di assorbimento, secondo la teoria elettromagnetica è la seguente

$$(1) \qquad n^2 = 1 + \sum_i \frac{4\pi \mathfrak{N}_i e^2}{m_i (\nu_i^2 - \nu^2)}$$

dove $\mathfrak{N}_i$ rappresenta il numero di vibratori armonici classici della specie i, e cioè la cui frequenza di assorbimento caratteristica è ν_i, per unità di volume. Ora combinando la condizione di far comparire nella (1) quantità che siano caratteristiche di ogni frequenza ν_i definite secondo i concetti della teoria quantistica con quella richiesta dal principio di corrispondenza e cioè della necessità dell'accordo fra la teoria classica e quantistica al limite per frequenze estremamente basse è stata ottenuta dal Ladenburg [2] e dal Kramers e Heisenberg [3] la seguente relazione

$$(2) \qquad n^2 = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{N}{3} \left\{ \sum_a \frac{\frac{g_a}{g} a_a \tau}{\nu_a^2 - \nu^2} - \sum_c \frac{a_c \tau}{\nu_c^2 - \nu^2} \right\}.$$

In questa le a_a e a_c sono le probabilità spontanee di passaggio da uno stato stazionario ad un altro (Uebergangwahrscheinlichkeit di Einstein) e cioè $ah\nu$ dà la quantità d'energia emessa da un atomo nell'unità di tempo relativamente alla frequenza ν. Più particolarmente nella (2) i termini positivi secondo la teoria di Kramers e Kramers-Heisenberg sono relativi a

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.
(2) LADENBURG, «Zeitschr. f. Phys.», 4, 451.
(3) KRAMERS e HEISENBERG, «Zeitschr. f. Phys.», 31, 621.

Digitized by Google

frequenze di assorbimento quelli negativi a frequenze di emissione. Evidentemente se gli atomi in numero di N per unità di volume si trovano tutti nello stato più stabile non possono emettere energia e quindi scompare nella (2) la $\sum_e$ relativa ai termini di emissione. Le quantità g_a e g rappresentano i pesi statistici degli stati fra i quali avviene il passaggio e τ rappresenta lo smorzamento che secondo la teoria classica dovrebbe avere un esultatore di frequenza ν_a o ν_e, smorzamento dato dalla relazione

$$\tau = \frac{3\,c^3\,m}{8\,\pi^2\,e^2\,\nu^2}\,.$$

Ora il Thomas e il Reiche [1], preceduti dal Kuhn [2], hanno dimostrato che se s è il grado di periodicità del sistema atomico che ha come indice di rifrazione l'espressione (2) sussiste la relazione seguente fra i vari numeratori che compaiono nella (2),

$$(3) \qquad \sum_a \frac{g_a}{g}\,\frac{a_a\,\tau}{3} - \sum_e \frac{a_e\,\tau}{3} = \frac{s}{3}\,.$$

Scopo di questa Nota è di cercare il significato fisico di questo teorema.

Prima d'ogni altro è opportuno rilevare che una differenza importante fra la teoria classica e la teoria quantistica consiste nel fatto che una frequenza dell'atomo è individuata nella prima da un unico indice mentre nella seconda, dipendentemente dal fatto che l'assorbimento o l'emissione è prodotto dal cambiamento del moto elettronico fra due stati stazionari, è individuato da due indici; questo è adunque uno degli elementi da introdurre nella (1) e che manca ancora nella (2). Inoltre è necessario fissare alcuni punti per procedere nel ragionamento con grandezze perfettamente definite. Incominciamo quindi col fissare più precisamente le espressioni dei coefficienti di emissione spontanea: se si considera come stato stazionario uno qualunque di essi, per esempio k, le ν_a diventano ν_{ik} poichè ν_a rappresenta una frequenza di assorbimento prodotta dal passaggio dell'atomo dallo stato k allo stato i quindi è da individuare col simbolo ν_{ik}, e analogamente le a_e diventano a_{kj} indicando con j un qualunque stato stazionario dell'atomo a cui questo arriva dopo aver lasciato lo stato k ed emessa una quantità d'energia $h\nu_{kj}$. Risulta quindi che nelle (2) e (3) le $\sum$ devono essere estese rispettivamente alle i e alle j. Per quanto riguarda N ripetendo il ragionamento di Ladenburg si vede facilmente che esso rappresenta il numero di atomi per unità di volume che si trovano nello stato k quindi a N

(1) Thomas e Reiche, « Zeitschr. f. Phys. », 34, 510.
(2) Kuhn, « Zeitschr. f. Phys. », 33, 408.

Digitized by Google

è da sostituire N_k. L'indice di rifrazione che dipende dalla presenza di questi atomi diventa, fatte le sostituzioni,

$$(2') \qquad n^2 = 1 + \frac{4\pi e^2 N_k}{m\,3} \left\{ \sum_i \frac{g_i}{g_k} a_{ik}\tau - \sum_j a_{kj}\tau \right\}$$

e conseguentemente

$$(3') \qquad N_k \left(\sum_i \frac{g_i}{g_k} a_{ik}\tau - \sum_j a_{kj}\tau \right) = s\,.$$

Posto ciò, per fissare il valore delle somme (3') bisogna stabilire il valore di s, grado di periodicità del sistema atomico. Noi supporremo in un primo tempo che il sistema elettronico dell'atomo sia costituito da una carcassa (Rumpf) intorno a cui ruota un solo elettrone, considerando la carcassa tale che non subisca influenza da parte delle azioni perturbatrici esterne. Bisogna fissare quindi la periodicità di tale sistema; caso del metallo alcalino. Abbiamo da fare con un sistema con tre gradi di periodicità, in assenza di campo elettrico o magnetico esterno, in relazione alle tre frequenze del moto dell'elettrone. Se noi consideriamo in questo sistema degenerato la quantità d'energia emessa nell'unità di tempo per il passaggio da uno stato k ad uno stato j come data da

$$S = N_i \bar{a}_{ik} h \nu_{ik}$$

considerando cioè $\bar{a}_{ki}$ come probabilità di passaggio da k a j nel caso che i due livelli sono degenerati si vede subito rifacendo il ragionamento di Thomas e Reiche che s risulta uguale a 3, e quindi nel caso del metallo alcalino la formula (3') diventa

$$N_k \left(\sum_i \bar{a}_{ik}\tau - \sum_j \bar{a}_{kj}\tau \right) = 3\,.$$

L'indice di rifrazione nel caso che il livello k sia il più stabile dell'atomo assume la forma seguente

$$(4) \qquad n^2 = 1 + \frac{N_k\, 4\pi e^2}{m} \sum_i \frac{fi}{\nu_{ki}^2 - \nu^2}$$

e il teorema delle somme diventa

$$\sum_i f_i = 1 \qquad \text{con} \qquad f_i = \bar{a}_{ik}\tau\,.$$

Ricerchiamo allora il significato fisico delle somme scritte. Nell'involucro si trovano atomi in ragione di N_k per unità di volume, di questi, alcuni sotto l'influenza della radiazione presente nell'involucro assorbono la frequenza ν_1 altri la frequenza ν_2, ecc. Qual'è ora il numero di atomi che

Digitized by Google

assorbe una qualunque di queste frequenze? Evidentemente tale numero in base alle (1) è $\mathfrak{N}_i$ che è dato anche da $N_k f_i$ e quindi f_i rappresenta la frazione di atomi presenti che assorbe le frequenze ν_i. Si considerano in totale N_k atomi nell'unità di volume che acquistano un momento elettrico sotto l'azione dell'irraggiamento. L'indice di rifrazione connesso con questa polarizzazione è dato dalla (4) quindi

$$\sum_i \mathfrak{N}_i = N_k$$

ma $\sum_i \mathfrak{N}_i = N_k \sum_i f_i$ quindi risulta

$$\sum_i f_i = 1 \ .$$

Dal tipo di ragionamento svolto è evidente che le somme si devono immaginare estese a tutte le frequenze di assorbimento e quindi non soltanto alle righe della serie principale $1S - mP$ ma anche al di là del limite della serie e cioè anche nella zona di assorbimento continuo che confina con la testata $1S$. In tal modo in base ad un ragionamento di carattere fisico si è ottenuto nel caso considerato il risultato di Thomas e Reiche. Passiamo ora al caso in cui lo stato k non sia quello fondamentale dell'atomo ($1S$). Vediamo allora che cosa rappresenta l'espressione $N_k \sum_i f_i$: precedentemente si aveva che tale numero risultava uguale a quello degli atomi che si trovavano nello stato fondamentale k o $1S$, ora la somma scritta non ha più lo stesso significato di prima poichè si trovano nello stato k non soltanto gli atomi che sono in tale stato per equilibrio termico ma anche quelli vi sono pervenuti partendo da uno qualunque j d'energia minore per azione di un irraggiamento. Per avere allora il numero di atomi che si trovano spontaneamente nello stato k bisogna sottrarre dalla somma scritta il numero di atomi che da uno stato stazionario j sono passati nello stato k per azione dell'irraggiamento; questo numero è dato evidentemente dal numero di atomi che assorbono una qualunque frequenza ν_{kj} esso è cioè $N_k \sum_j f_j$ e quindi

$$\sum_i N_k f_i - \sum_j N_k f_j = N_k$$

da cui

$$\sum_i f_i - \sum_j f_j = 1 \ .$$

In tal modo resulta dimostrato nel caso generale per un metallo alcalino il teorema delle somme.

In quanto precede, si è considerato l'atomo costituito da una carcassa che non risente l'azione perturbatrice della radiazione e dell'elettrone ottico. Passiamo ora al caso in cui la frequenza della radiazione sia così grande

Digitized by Google

da poter influenzare tutti gli elettroni dell'atomo, e cioè passiamo al caso dei raggi X. Ciò significa considerare tutto l'insieme degli elettroni ruotanti come capaci di risentire dell'azione perturbatrice il che si traduce nel considerare il grado di periodicità non più 3 ma 3 moltiplicato per il numero p di elettroni dell'atomo. Cioè dati N_k atomi nell'unità di volume l'assorbimento di una qualunque frequenza sufficientemente grande è dipendente da $N_k p$ vibratori, quindi, rifacendo il ragionamento precedente, si vede subito che per i raggi X il valore delle somme resulta uguale a p.

Abbiamo così trattato i casi estremi e cioè quando un solo elettrone interviene nella legge di dispersione e quando intervengono tutti. Nei casi intermedî, quando cioè vi sono due o più elettroni ottici il valore delle somme dipende dal modo secondo il quale agiscono fra di loro questi elettroni.

Chimica-Fisica. — *Numero d'ordine, peso eccedente e struttura atomica.* Nota [1] di G. PICCARDI, presentata [2] dal Corrispondente L. ROLLA.

I.

Secondo il modello atomico Rutherford–Bohr, l'atomo di un elemento di numero atomico N è costituito, com'è noto, da un nucleo centrale formato da $2 \cdot N$ elettroni positivi (nuclei di idrogeno, di massa $1.649 \cdot 10^{-24}$ gr. e di carica $+e$, pari a $4.774 \cdot 10^{-10}$ U·E·S·) saldamente collegati fra loro, in virtù di forze elettrostatiche, da N elettroni negativi (di massa $0.899 \cdot 10^{-27}$ gr. e di carica $-e$), attorno al quale ruotano N elettroni negativi distribuiti, a distanze grandissime per rapporto alle dimensioni del nucleo, in tante serie di orbite regolate da leggi precise.

La carica nucleare è evidentemente $+ N \cdot e$.

Essendo la massa di un elettrone negativo trascurabile rispetto a quella di un elettrone positivo, il peso atomico di un elemento di numero atomico N, dovrebb'esser senz'altro $2 \cdot N$.

Questa relazione è ben lungi dall'esser verificata dalla maggior parte degli elementi e specialmente da quelli a peso atomico elevato, dato che il peso atomico P è in generale superiore e spesso notevolmente superiore (fino del 35 % a $2 \cdot N$).

Fu pensato allora che gli elettroni positivi eccedenti, che sono evidentemente in numero di $P - 2 \cdot N$, dovessero trovar posto nell'interno del

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale ed inorganica della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 16 gennaio 1927.

Digitized by Google

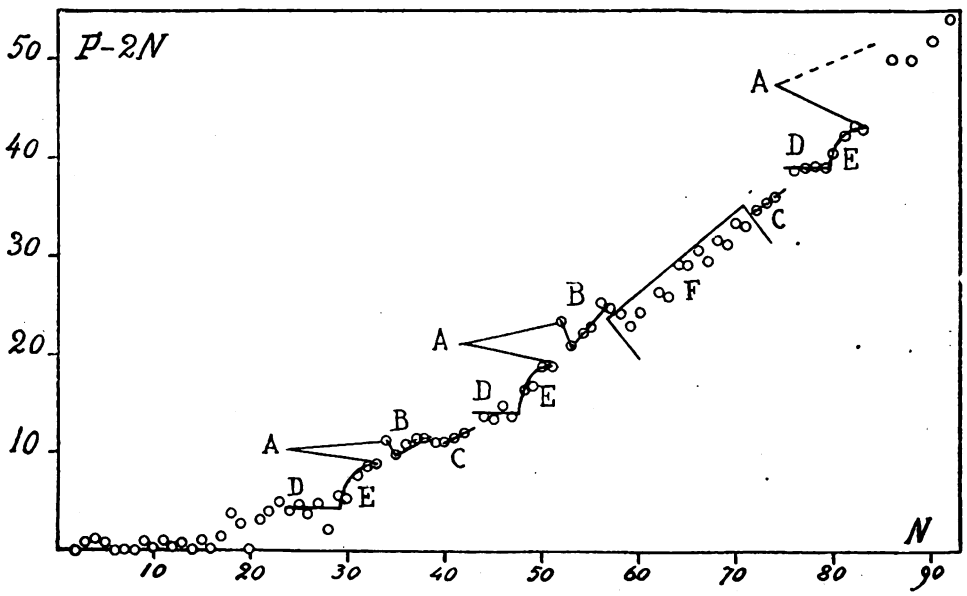
nucleo atomico insieme ad altrettanti $P - 2 \cdot N$ elettroni negativi, dato che la carica nucleare doveva restare sempre eguale a $+ N \cdot e$.

Le seguenti considerazioni di natura chimico–fisica, sulle relazioni passanti fra numero atomico e peso atomico, unite a considerazioni di natura astrofisica, su dati di osservazione del tutto generali, contrastano con questa ipotesi e portano, invece, ad ammettere una diversa sistemazione degli elettroni positivi e negativi eccedenti e cioè:

I $P - 2 \cdot N$ *elettroni positivi ed i* $P - 2 \cdot N$ *elettroni negativi eccedenti sono distribuiti fuori del nucleo atomico; il loro numero è funzione della struttura atomica extranucleare.*

II.

P è il *peso atomico reale*. Noi chiameremo $2 \cdot N$, *peso atomico teorico*; $P - 2 \cdot N$, *peso eccedente* [1]. Costruiamo il diagramma $(P - 2 \cdot N)$, (N) e studiamo come varia il peso eccedente in funzione del numero atomico.



Se il peso eccedente risentirà, anche solo in modo parziale, della periodicità del sistema degli elementi, sarà da escludere l'ipotesi che esso sia tutto contenuto nell'interno del nucleo atomico e sarà invece da prendere in considerazione l'ipotesi che esso sia distribuito esternamente al nucleo stesso.

(1) La grandezza $P - 2 \cdot N$ era già stata usata, per altre considerazioni atomiche, da Harkins, sotto il nome di *numero isotopo*. (« J. Am. Chem. Soc. », *39*, 1917; *43*, 1921; « Phys. Rew. », *15*, 1920; *19*, 1922).

Digitized by Google

Poichè i pesi eccedenti dipenderanno sia dalla struttura periferica, che dalla struttura interna, le oscillazioni possibili del diagramma si ridurranno a delle dentellature non troppo profonde.

Le dentellature di egual tipo, dovranno apparire in corrispondenza dei vari gruppi di elementi omologhi.

Il diagramma qui unito mostra come queste previsioni siano verificate.

Interpolando largamente il diagramma si trova che i punti rappresentativi stanno approssimativamente sopra una iperbole equilatera; esaminandolo invece particolarmente, si osservano alcuni aspetti che si ripetono nei varî gruppi di elementi omologhi.

Assolutamente caratteristici, nei riguardi della periodicità, sono i salti (A), di valore sempre crescente, che si notano fra gli elementi As — Se, Sb — — Te, (Bi — Po); i tratti (D), orizzontali, contenenti le triadi; i tratti (E), rapidamente crescenti, ed infine, per la singolarità del suo aspetto, il gruppo (F) delle terre rare.

È notevole il fatto che tutti gli aspetti ricorrenti, si osservino solo nei tre grandi periodi.

Tratti ricorrenti	GRANDI PERIODI		
	I	II	III
A	As Se	Sb Te	Bi (Po)
B	Se Br Kr Rb Sr Y .	Te J X Cs Ba La .	(Po 85 Em 87 Ra Ac)
C	Zr Nb Mo	Hf Ta W	(Th 91 U)
D	Mn Fe Co Ni Cu . .	43 Ru Rh Pd Ag . .	75 Os Ir Pt Au
E	Zn Ga Ge As . . .	Cd In Sn Sb . . .	Hg Tl Pb Bi
F	. . . . .	. . . . .	TERRE RARE

III.

Secondo la nostra ipotesi, il peso eccedente di un atomo si trova distribuito nella zona extranucleare; ora, se questo edificio extranucleare, in seguito ad una serie di ionizzazioni successive viene intaccato abbastanza profondamente, una parte dei pesi eccedenti dovrà staccarsi dall'atomo, insieme agli elettroni negativi liberati dal processo di ionizzazione.

Si avrà dunque, contemporaneamente alla ionizzazione di un atomo, una produzione di elettroni positivi, i quali, se le condizioni esterne lo permetteranno, unendosi, o restando uniti, a degli elettroni negativi, formeranno dei comuni atomi di idrogeno. Quindi:

L'ionizzazione profonda di un atomo può essere accompagnata da una emissione di idrogeno. (Non è escluso che per determinate condizioni, sia

Digitized by Google

intra-atomiche che esterne, si possa avere emissione di elio od anche di qualche piccolo agglomerato di elettroni positivi e negativi, che non abbia carattere di atomo o di residuo atomico).

Questa deduzione può esser posta in relazione con dei fatti sperimentali ben noti, quali la disintegrazione degli atomi di alcuni elementi leggeri, per opera delle particelle α del radio C [1].

È noto, che se il numero atomico dell'elemento bombardato non è troppo alto, ossia se la carica nucleare non è tanto grande da esercitare una eccessiva repulsione sulle particelle α, si nota, in certi casi, l'emissione di raggi rapidi di idrogeno. Questi raggi vengono emessi dal boro, dal fluoro, dal sodio, dall'alluminio, dal fosforo e dall'azoto; non vengono emessi dal carbonio, dall'ossigeno, dallo zolfo e dal calcio. Effettivamente, boro, fluoro, sodio, alluminio, fosforo (ma non l'azoto), sono elementi il cui peso eccedente è in pratica circa l'unità, che possiedono perciò una carica pesante unitaria (nucleo di idrogeno) esterna al nucleo atomico, la quale può essere facilmente liberata, nello sgretolamento della zona extranucleare prodotto dall'urto della particella α; carbonio, ossigeno, zolfo e calcio, invece, sono elementi a peso eccedente praticamente nullo, che non possiedono alcuna carica pesante esterna al nucleo atomico. L'azoto, che ha peso eccedente nullo e che emette idrogeno, va considerato *pel momento* come una eccezione; tutti gli altri elementi hanno un comportamento perfettamente rispondente a quello previsto dalle nostre ipotesi.

Un altro fatto che certamente può esser posto in relazione con la nostra ipotesi è la presenza costante dell'idrogeno nei tubi di scarica, notata da F. W. Aston, durante i suoi studi sui raggi positivi.

« Its invariable presence in rays generated by the ordinary discharge-tube metod, no matter what gas is being employed, is itself a very striking phenomenon, ... » [2].

In questo caso non è evidentemente possibile pensare ad una disintegrazione di nuclei atomici, ma solo ad una disgregazione di zone extranucleari.

D'altra parte, le ulteriori esperienze di Rutherford e Chadwich [3], sul bombardamento di atomi di elementi pesanti (A*u* ed A) con particelle α, contrastano con l'ipotesi del nucleo unico, contenente tutto il peso dell'atomo, e tendono invece a fare ammettere l'esistenza di « satelliti » (secondo Rutherford e Chadwich, attorno al nucleo centrale di data carica positiva esisterebbe uno strato di cariche negative circondato a sua volta da uno strato di cariche positive).

(1) Rutherford e Chadwich, « Phil. Mag. », *42*, 809, 1921.
(2) F. W. Aston, *Isotopes*, p. 67, London, 1922.
(3) Rutherford e Chadwich, « Phil. Mag. », *50*, 889-913, 1925.

Digitized by Google

IV.

Una conferma indiretta della nostra ipotesi, sempre in base all'ionizzazione profonda degli atomi, può esser fornita da considerazioni astrofisiche, poichè nessun campo di studio dei fenomeni di ionizzazione è più grandioso di quello che ci viene offerto dalle atmosfere stellari.

In quelle atmosfere, per effetto delle altissime temperature e delle piccolissime concentrazioni, vengono ionizzati successivamente più volte atomi di molte specie; la moderna spettroscopia è in grado di svelare, in alcuni casi, la progressiva demolizione della periferia atomica.

Secondo la nostra ipotesi, la quantità di idrogeno (e forse anche di elio) presente nelle atmosfere stellari, dovrebbe esser grandissima, e tanto più grande quanto più è alta la temperatura delle stelle, ossia quanto più progredita è l'ionizzazione.

Effettivamente l'intensità e larghezza con la quale si presentano le righe spettrali di assorbimento della serie di Balmer e la persistenza di queste stesse righe in ogni tipo di stelle, hanno sempre fatto considerare l'idrogeno come un elemento eccezionale ed eccezionalmente abbondante.

Le modernissime teorie statistiche, dovute a Fowler e Milne [1], seguite alla teoria di Saha [2], che permettono di calcolare, partendo dall'ipotesi dell'uniformità della composizione stellare, la relativa abbondanza degli elementi nelle atmosfere dei corpi celesti, conducono, nel caso dell'idrogeno (ed anche in quello dell'elio) a dei valori assolutamente enormi.

Inoltre, considerando l'intensità delle righe della serie di Balmer, in relazione alla classe spettrale (ossia alla temperatura) ed in relazione alla intensità delle righe di altri elementi, sembra non impossibile confermare che la quantità di idrogeno presente nelle atmosfere stellari aumenti all'aumentare della temperatura. Veramente significativo a questo riguardo, è il confronto della serie di Balmer con la riga 4481 λ del magnesio ionizzato.

L'ipotesi che questo idrogeno provenga dai nuclei atomici, disintegrati per effetto dell'altissima temperatura, è senz'altro da scartare. Nelle atmosfere delle stelle di classe O, che sono le più calde, la cui temperatura sembra giungere fino ai 35,000° C. sono osservabili [3] le righe spettrali dovute a H, He, He^+, O^+, Ca^+, N^{++}, C^{++}, Si^{++}, Si^{+++}; ora, la tensione di ionizzazione di tutti questi atomi e residui atomici, non supera un massimo di 55 volta; siamo dunque infinitamente lontani dalle enormi tensioni che si suppongono necessarie per disgregare un nucleo atomico.

(1) R. H. Fowler e E. A. Milne, «Monthly Notices Roy. Astr. Soc.», *83*, 403, 1923; *84*, 499, 1924.

(2) Meg Nad Saha, «Phil. Mag.», *40*, 472, 809, 1920; *41*, 267, 1921.

(3) C. H. Payne, «Harvard College Obs. Circ.», 256 e 263, 1924.

Digitized by Google

Aggiungiamo inoltre, che l'assenza delle righe spettrali di altri elementi è dovuta, com'è noto, all'assenza degli elementi stessi, ma allo spostamento dei loro spettri nell'ultra violetto inosservabile con mezzi astrofisici, in seguito alla perdita di elettroni periferici.

La nostra ipotesi sembra essere dunque in piena armonia con i resultati dell'osservazione astrofisica.

Ponendo fine a questa breve Nota preliminare, accenniamo ancora che non è impossibile, secondo le idee sopra esposte, formulare una teoria completa degli isotopi, in base alla capacità di assorbimento, delle cariche pesanti, posseduta da certe configurazioni atomiche.

Ci proponiamo di trattare particolarmente tutti i problemi, ora brevemente accennati, in successivi lavori.

Chimica. — *Sulla peptizzazione dell'ossido di torio «meta»*. Nota di G. R. Levi e A. Reina [1], presentata dal Socio G. Bruni [2].

In un precedente lavoro sulle diverse varietà di ossido di torio uno di noi [3] ha avuto occasione di dimostrare che dai röentgenogrammi della varietà meta si deduce, anche ad occhio, che questo prodotto deve avere dei grani cristallini assai più fini dell'ossido di torio ordinario ottenuto per forte calcinazione.

Non furono però allora fatte misure in proposito.

In altri lavori sullo studio dei metalli finemente divisi del gruppo del platino si è data un'estensione del metodo di Scherrer [4] pei colloidi, alle sostanze solide finemente divise [5].

In tutto questo complesso di ricerche si è avuto occasione di concludere che il metodo come oggi noi lo applichiamo, ci dà piuttosto dei valori relativi delle dimensioni dei granuli anzichè dei valori assoluti.

Ci occuperemo in un successivo lavoro di questa questione: dobbiamo però accennarlo fin d'ora perchè si tenga presente che la relatività dei valori ci permetterà di trarre delle importanti conclusionid agli incrementi positivi e negativi che i preparati in esame ci presentano nei diversi trattamenti, mentre non potremo trarre per ora conclusioni numeriche in senso assoluto.

Queste osservazioni sulla relatività del metodo ci sono state suggerite dalla discordanza dei valori numerici che il metodo presenta qnando invece

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1927.

(3) *Le varietà di ossido di torio, ecc.* «Rendiconti Lincei», vol. II (6), p. 419 (1925).

(4) *Bestimmung der inneren Struktur und der Grösse von Kolloidteilchen mittels Röntgenstrahlen.* Appendice al *Kolloidchemie* von R. Zsigmondy, IV ediz., 1922.

(5) G. R. Levi, R. Haardt, «Rendiconti dei Lincei». vol. III (6), p. 91 e p. 215 (1926) e «Gazzetta Chimica», *56*, p. 424 (1926).

Digitized by Google

di essere usato nella forma originale venga applicato con dispositivi diversi come quello di Hull [1] o di Brentano [2].

Ed è appunto, con un confronto di questi diversi dispositivi, adoperando gli stessi preparati, che intendiamo in un secondo tempo di studiare questa questione.

Scopo preciso del presente lavoro è portare un contributo mediante l'esame röntgenografico al processo di peptizzazione.

L'ossido di torio è stato scelto per questo studio perchè si presta particolarmente bene ad un delicato esame coi raggi X in relazione alla elevata massa atomica del metallo e alla sua semplice struttura cristallina essendo cristallizzato nel sistema monometrico, con gli atomi di torio disposti in un reticolo a facce centrate.

Non si è creduto di poter scegliere gli ossidi stannici corrispondenti che pur avendo tanta maggior importanza pratica non si debbono ritenere ben studiati dal punto di vista röntgenografico.

Così in un recente lavoro di Posnjak [3] sulla natura degli ossidi stannici, questo autore considererebbe gli ossidi stannici idrati nelle varietà alfa e beta-stannico come ossido stannico più o meno finemente diviso. Da nostre ricerche ancora in corso la debolezza delle riflessioni che tali preparati producono sarebbe da attribuire piuttosto a piccole quantità di ossido stannico disperso in una grande massa di prodotto amorfo anzichè ad un forte grado di suddivisione della massa tutta cristallina come ritiene questo autore.

L'ossido di torio non presenta nessuna di queste anomalie e del suo passaggio dalla forma amorfa alla cristallina si è occupato uno di noi, Levi, nel lavoro sopracitato.

Rimandiamo per il metodo e per i calcoli ai precedenti lavori.

Per brevità omettiamo i grafici delle rette e i passaggi di calcolo dando semplicemente i valori sperimentali e i risultati che se ne deducono.

Le registrazioni microfotometriche sono state tutte confrontate nella stessa maniera utilizzando solo le linee corrispondenti a valori angolari superiori al massimo di chiarezza della film e riferendo le larghezze direttamente alla linea di base, determinata dai minimi di registrazione.

Per stabilire l'incremento di suddivisione dei granuli, che si ha passando dall'ossido di torio compatto alla varietà meta, i calcoli sono stati condotti:

I. con ossido di torio compatto fotografato con anticatodo di rame.

II. con ossido di torio meta ottenuto per calcinazione e non peptizzato.

III. con ossido di torio meta peptizzato.

(1) « Physical Review », *10*, 661, 1917, *17*, 571 (1921).
(2) « Proc. Physical Soc. », *37*, p. 184 (1925).
(3) « Journal of Physical Chemistry », *30*, p. 1073 (1926).

Digitized by Google

I. *Ossido di torio compatto* anticatodo di rame:

Nella seguente tabella e nelle successive è riportato nella prima linea il simbolo delle facce cristallografiche, nella seconda la metà degli angoli osservati nel fotogramma, nella terza il reciproco del coseno di questi angoli e nell'ultima la metà della larghezza della linea quale risulta dalle registrazioni al microfotometro.

$h_1 h_2 h_3$	224	115	440	135	260	353	262
$\theta/2$	42.8	46.0	51.5	54.9	60.7	64.8	66.0
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.352	1.428	1.589	1.712	2.022	2.306	2.430
B in $^m/_m$	0.732	0.742	0.762	0.781	0.840	0.879	0.899

da cui si calcola $\Lambda = 265.6$ Å.

Pur ritenendo che le particelle siano notevolmente più grandi di quanto ci dà l'esperienza riportiamo la superfice che si calcola per 0.100 grammi di questo preparato che risulta di 22.880 cm², dato che questo numero ci servirà nei calcoli successivi.

II. *Ossido di torio meta.*

Questo prodotto è stato preparato per riscaldamento a 650° dell'ossalato di torio nel vuoto.

Per le proprietà di questo prodotto rispetto ai processi di peptizzazione e per la letteratura sull'argomento rimandiamo all'accurato lavoro di Kohlschütter e Frey (1).

Ossido di torio meta anticatodo di rame.

$h_1 h_2 h_3$	224	115	410	135	006	260	353	262
$\theta/2$	42.81	46.01	51.58	54.94	55.79	60.78	64.81	66.01
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.352	1.428	1.589	1.712	1.769	2.022	2.306	2.430
B in $^m/_m$	0.957	0.986	1.094	1.152	1.201	1.318	1.484	1.562

Da cui si calcola per Λ il valore 74.9 Å e quindi la superfice per 0.100 grammi di 81.188 cm².

(1) « Zeit. f. Elekt. », 22, p 145 (1916).

Digitized by Google

Ossido di torio meta anticadoto di ferro.

$h_1 h_2 h_3$	113	400	133	204	224	115
$\theta/2$	33.78	44.18	49.20	51.37	58.37	64 42
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.220	1.382	1.518	1.570	1.870	2.257
B in $^m/_m$	1.006	1.094	1.172	1.191	1.270	1.582

Da cui si calcola per Λ 98.9 Å e quindi la superfice per 0.100 grammi di cm^2 61.444.

Ossido di torio meta anticadoto di cromo.

$h_1 h_2 h_3$	202	113	400	133	204
$\theta/2$	36.25	43.53	55.29	63.42	66.45
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.223	1.350	1.730	2.188	2.438
B in $^m/_m$	1.211	1.289	1.494	1.758	1.905

Da cui si calcola per Λ 106.4 Å e quindi la superfice per 0.100 gr. di cm^2 57.126.

Il confronto di questi 3 valori è già sufficente a mostrarci la relatività del metodo in funzione delle condizioni di esperienza.

Come incremento di superfice prendiamo allora il primo per riferirci allo stesso anticatodo e calcoliamo allora che l'incremento di superfice per il passaggio da ossido di torio normale a meta è di 58.308 cm^2.

III. *Ossido di torio meta peptizzato.*

La peptizzazione del preparato ci ha pienamente confermato le condizioni date da Kohlschütter (loc. cit.) e cioè la necessità di operare su di un prodotto di recente preparazione.

Inoltre la condizione indicata da questi autori per cui 3 cmc. di HCl n/50 possono in 2-3 ore a bagnomaria completamente peptizzare 0.100 gr. di ossido di torio meta dando per evaporazione una gelatina perfettamente trasparente, risultano confermate.

La gelatina ottenuta per evaporazione a bagnomaria, sottoposta all'esame röntgenografico in modo del tutto parallelo al preparato non peptizzato, diede i seguenti risultati.

Digitized by Google

Ossido di torio meta peptizzato anticatodo di rame.

$h_1 h_2 h_3$	224	115	440	135	006	260	353	262
$\theta/2$	42.82	46.00	51.58	54.94	55.80	60.78	64.81	66.00
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.352	1.428	1.589	1.712	1.769	2.022	2.306	2.430
B in $^m/_m$	0.977	1.016	1.113	1.172	1.220	1.357	1.524	1.592

Da cui si calcola per Λ il valore 71.0 Å e quindi una superfice per 0.100 gr. di 85.596 cm².

Ossido di torio meta peptizzato anticatodo di ferro.

$h_1 h_2 h_3$	113	400	133	204	224	115
$\theta/2$	33.75	44.10	49.15	51.30	58.35	64.40
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.220	1.382	1.518	1.570	1.870	2.257
B in $^m/_m$	1.192	1.289	1.367	1.386	1.562	1.758

Da cui si calcola per Λ il valore 94.6 Å e quindi la superfice per 0.100 grammi di 67.004 cm².

Ossido di torio meta peptizzato; anticatodo di cromo.

$h_1 h_2 h_3$	202	113	400	133	204
$\theta/2$	36.25	43.50	55.30	63.41	66.42
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.223	1.350	1.730	2.188	2.438
B in $^m/_m$	1.074	1.142	1.337	1.602	1.737

Da cui si calcola per Λ il valore 111.4 Å e quindi la superfice di 0.100 gr. di 54.549 cm².

Riassumendo i precedenti valori abbiamo:

	Cu anticatodo	Fe anticatodo	Cr anticatodo
Ossido di torio meta: . . . cm²	81188	61444	57126
» » » peptizzato meta: cm²	85596	67504	54549

Se noi confrontiamo questi preparati con quelli non peptizzati rispetto ad uno stesso anticatodo notiamo subito la quasi uguaglianza dei valori numerici; anzi se teniamo conto delle oscillazioni dei valori, quali si calcolano

Digitized by Google

coi diversi anticatodi, possiamo dire che i risultati coincidono e cioè *nessun incremento di superfice si ha nel processo di peptizzazione.*

Assumendo come valore medio quello calcolato per il ferro, valore più attendibile, per il maggior numero di punti usati per tracciare la retta e nel tempo stesso sufficientemente distanziati, deduciamo per un valore di 96.6 Å una superfice per 0.100 gr. di 63.407 cm^2.

Le valenze libere superficiali sono per gli atomi al centro delle facce 2, per quelli ai vertici 2, per quelli agli spigoli 3 e quelli sul triedro 28/8, deduciamo per 0.100 gr. un numero di valenze di circa $8.4 \cdot 10^{19}$. Questo valore è calcolato per una maglia di 17 celle elementari, e cioè per $\Lambda = 95.2$ Å. Il numero di cloro ioni contenuti in 3 cc. HCl n/50 è invece di $0.36 \cdot 10^{19}$.

Dal confronto di questi valori si deduce che essi sono circa dello stesso ordine di grandezza pur essendo il cloro ione necessario alla peptizzazione circa 23 volte minore delle valenze libere.

È interessante anche un confronto numerico fra i valori di $\theta/2$ osservati col preparato peptizzato e non peptizzato coi diversi anticatodi.

Le letture riportate direttamente dalla registrazione fotometrica rispondono a grande esattezza dato che 1 m/m della film è uguale a 5.12 m/m sulla registrazione:

$h_1 h_2 h_3$	VALORI DI $\theta/_2$					
	Anticadoto di rame		Anticatodo di ferro		Anticatodo di cromo	
	peptizzato	non peptizzato	peptizzato	non peptizzato	peptizzato	non peptizzato
202	23.52	23.52	29.97	29.97	36.25	36.25
113	27.67	27.68	33.75	33.78	43.50	43.53
400	33.62	33.61	44.10	44.18	55.30	55.29
133	37.30	37.29	49.15	49.20	63.41	63.42
204	38.33	38.33	51.30	51.37	66.42	66.45
224	42.82	42.81	58.35	58.37	—	—
115	46.00	46.01	64.40	64.42	—	—
440	51.58	51.58	—	—	—	—
135	54.94	54.94	—	—	—	-
006	55.80	55.79	—	—	—	—
260	60.78	60.78	—	—	—	—
353	64.81	64.81	—	—	—	—
262	66.00	66.01	—	—	—	—

Digitized by Google

Dal confronto dei valori si deduce in modo assai preciso che nessun allargamento subisce il reticolo cristallino nel fenomeno di peptizzazione.

Riassumendo: lo studio del processo di peptizzazione dell'ossido di torio mediante l'esame röntgenografico ha dimostrato:

a) che la varietà meta ha effettivamente un grado di suddivisione assai più spinto del prodotto ordinario;

b) che il processo di peptizzazione non implica nessuna ulteriore suddivisione dei singoli granuli cristallini e nessun allargamento delle distanze interatomiche.

In relazione a questi fatti l'aspetto caratteristico della gelatina secca è da attribuirsi, a nostro avviso, unicamente ad una adesione superficiale assai intima, la capacità di dare soluzioni colloidali stabili è essenzialmente da attribuirsi agli ioni dell'elettrolita aggiunto capaci di aderire ai granuli stessi.

Chimica fisica. — *Sul calcolo dell'affinità chimica in base alle entropie.* Nota I [1] di G. Bozza e G. Devoto presentata [2] dal Corrisp. L. Cambi.

Le relazioni

$$F = U - TS \tag{1}$$

$$F = U + T\frac{dF}{dT} \tag{2}$$

racchiudono nella maggior generalità possibile il primo e il secondo principio della termodinamica. In esse T è la temperatura assoluta, S l'entropia, U è legata all'energia interna E dalla relazione U = E + PV (P pressione, V volume), F è la quantità « energia libera » (G. N. Lewis) o « potenziale termodinamico a pressione costante » (Duhem), che differisce dalla « variazione di energia libera » di Helmholtz e dal « lavoro massimo » A di Nernst della quantità PV: cioè F = A + PV.

Le equazioni (1) e (2) si devono cioè intendere scritte a pressione costante anzichè, come le analoghe di Nernst, a volume costante.

Una di esse e le ipotesi di Nernst costituenti il cosidetto terzo principio della termodinamica

$$\lim \frac{dF}{dT} = 0 \quad (\text{per } T = 0) \quad ; \quad \lim \frac{dU}{dT} = 0 \quad (\text{per } T = 0)$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 2 gennaio 1927.

Digitized by Google

permettono di risolvere senza indeterminazione il problema dell'equilibrio chimico nel senso più generale.

Tutti gli autori, a cominciare da Nernst, partono dalla (2) [1]: per essa si ottiene esattamente l'integrazione nel caso dei sistemi condensati. Nella applicazione ai sistemi non condensati gli autori si servono delle formule di tensione di vapore delle varie sostanze, derivate dall'integrazione dell'isocora di Van't Hoff o dell'equazione di Clapeyron-Clausius, e introducono corrispondentemente delle costanti.

Il calcolo di queste costanti chimiche, sotto le varie forme adoperate, conduce a risultati in genere non molto concordanti [2]; il loro impiego ha anzi attirato critiche severe [3].

Noi, contrariamente a quello che fanno gli altri autori, impiegheremo sempre la relazione fondamentale sotto la forma entropica (1).

È noto che

$$(3) \qquad \left(\frac{dU}{dT}\right)_p = c_p \quad ; \quad \left(\frac{dS}{dT}\right)_p = \frac{c_p}{T}$$

in un punto di esistenza della sostanza considerata compreso fra due punti di cambiamento di stato o di trasformazione e non coincidente con essi. In ciascuno di questi ultimi poi si ha una variazione finita di U, ΔU, e una variazione di entropia $\Delta S = \frac{\Delta U}{T}$, essendo T la temperatura del punto. L'ipotesi di Nernst conduce, è noto, a $\lim c_p = 0$ (per $T = 0$); se poi si deriva a pressione costante la (1), si ottiene anche $\lim S = 0$ (per $T = 0$). Accettiamo perciò per ora l'espressione di Planck [4] dell'ipotesi di Nernst, $\lim S = 0$ (per $T = 0$). Per l'ipotesi stessa bisogna poi ammettere anche

$$\lim (S_1 - S_2) = \lim \frac{d\Delta F}{dT} = 0 \qquad (\text{per } T = 0)$$

se S_1 e S_2 sono le entropie di due stati supposti coesistenti allo zero asso-

(1) Vedi ad es. NERNST, « Theoretische Chemie »; NERNST, « Grundlagen des neuen Wärmesatzes »; POLLITZER, « Die Berechnung chemischer Affinitäten nach dem Nernstschen Wärmetheorem »; EUCKEN, « Gundriss der phisikalische Chemie », 1924; LEWIS e RANDALL, « Thermodynamis », 1923; SIMON in « Handbuch der Physik », Bd. X, Berlin 1926, p. 360 e sgg.

(2) SIMON, « Handbuch d. Phys. », p. 384 e sgg.; EUCKEN e FRIED, « Z. f. Phys. », 29, 36 (1924); SIMON, « Z. f. Phys. », 31, 224 (1925); EUCKEN e FRIED, « Z. f. Phys. », 32, 150 (1925); SIMON, « Z. f. Phys. », 33, 946 (1925).

(3) In « Thermodynamics », cit., G. N. LEWIS e M. RANDALL così si esprimono: ... and the various efforts which have been made to square the calculations based on these constants with the results of equilibrium measurements constitute a regrettable episode in the history of chemistry (p. 454).

(4) « Thermodynamik », 1911, p. 279; NERNST in « Theoretische Chemie », non accetta tale interpretazione.

Digitized by Google

luto; perciò, in qualunque forma sia una sostanza allo zero assoluto, la sua entropia è nulla[1]: $S_o = 0$.

Con tale conseguenza diretta dell'ipotesi di Nernst l'entropia risulta completamente definita termodinamicamente a tutte le temperature

$$(4) \qquad S = \int_o^T \frac{c_p}{T} dT + \sum \frac{\Delta U}{T}$$

a differenza della quantità F e U, per le quali si sa solo dall'ipotesi che $F_o = U_o$.

Si consideri una sostanza la quale presenti nei punti caratteristici alle temperature $T_1, T_2, \cdots, T_n$ (trasformazioni allo stato solido), T_{n+1} (fusione), T_{n+2} (ebollizione), gli assorbimenti di calore $\Delta U_1, \Delta U_2, \cdots, \Delta U_n$, $\Delta U_{n+1}, \Delta U_{n+2}$. Sostituendo nella (1) e tenendo conto delle (3), (4), si ha

$$(5) \qquad F_T = U_o + \sum_1^{n+2} \Delta U_r + \sum_o^{n+2} \int_{T_r}^{T_{r+1}} c_p dT - T\left[\sum_1^{n+2} \frac{\Delta U_r}{T_r} + \sum_o^{n+2} \int_{T_r}^{T_{r+1}} \frac{c_p}{T} dT\right]$$

nella quale si deve intendere che T_{n+3} corrisponde a T e T_o a 0° K.

Questa equazione dà perciò il valore del potenziale termodinamico a pressione costante alla temperatura T, quando siano conosciuti i valori di U_o, dei ΔU_r, e i calori specifici c_p negli intervalli $T_r \div T_{r+1}$.

Se poi si conoscono a una certa temperatura T_o, compresa fra T_m e T_{m+1}, i valori di U_{T_o} e di S_{T_o}, si può scrivere

$$(6) \qquad F_T = U_{T_o} + \sum_{m+1}^{n+2} \Delta U_r + \int_{T_o}^{T_{m+1}} c_p dT + \sum_{m+1}^{n+2} \int_{T_r}^{T_{r+1}} c_p dT -$$

$$- T\left[S_{T_o} + \sum_{m+1}^{n+2} \frac{\Delta U_r}{T_r} + \int_{T_o}^{T_{m+1}} \frac{c_p}{T} dT + \sum_{m+1}^{n+2} \int_{T_r}^{T_{n+1}} \frac{c_p}{T} dT\right].$$

La temperatura cui ci si riconduce per T_o è quasi esclusivamente 25° C, pari a 298° K, poichè ad essa sono in generale determinati sperimentalmente i valori calorimetrici che useremo in seguito.

In particolare, se la sostanza è già allo stato gassoso a T = 298°, o se si conoscono U e S per il suo vapore a 298°, la (6) si riduce a

$$(7) \qquad F_T = U_{298\,(gas)} + \int_{298}^{T} c_{p\,(gas)} dT - T\left[S_{298\,(gas)} + \int_{298}^{T} \frac{c_{p\,(gas)}}{T} dT\right].$$

Si abbia allora un equilibrio chimico

$$(8) \qquad \nu_A A + \nu_B B + \cdots = \nu_{A'} A' + \nu_{B'} B' + \cdots$$

(1) Cfr. a questo proposito e sulla dibattuta questione: LEWIS e RANDALL, cit., p. 440 e sgg.; in «Handbuch d. Phys.», SIMON, p. 396; SIMON e LANGE, «Z. f. Phys.», 38, 227 (1926). Sono escluse le soluzioni: PLANCK, «Thermodynamik», 1911, 278; «Wärmestrahlung», 1921, 219.

Digitized by Google

e delle sostanze A, B, ···, A′, B′, ···, siano note U e S a una temperatura T; si può scrivere

$$\Delta F = \Delta U - T \cdot \Delta S,$$

essendo

$$\Delta F = \sum \nu F \quad ; \quad \Delta U = \sum \nu U \quad ; \quad \Delta S = \sum \nu S,$$

e intendendo nelle somme positivi i termini corrispondenti al secondo membro della (8), negativi quelli corrispondenti al primo; ΔU rappresenta la tonalità termica della reazione a T; conosciuta che sia, non occorre perciò la conoscenza individuale delle U.

Questa, per una reazione gassosa, supposte note ΔU_{298}, nonchè le S_{298} per i gas reagenti, si semplifica in

$$(9) \quad \Delta F = \Delta U_{298} + \sum \nu \int_{298}^{T} c_p \, dT - T \sum \nu \left(S_{298} + \int_{298}^{T} \frac{c_p}{T} \, dT \right).$$

Qualora si voglia tener conto di una variazione di pressione a temperatura costante, se si ammette che in prima approssimazione c_p non vari sensibilmente e che valga la legge dei gas, bisogna considerare le

$$\left(\frac{dU}{dP}\right)_T = 0 \quad ; \quad \left(\frac{dS}{dP}\right)_T = -\frac{R}{P}$$

ossia

$$S_{TP} = S_{TP_0} - R \ln \frac{P}{P_0},$$

$$(10) \qquad S_{TP} = S_T - R \ln P$$

prendendo come pressione fondamentale la pressione atmosferica, $P_0 = 1$.

Ora è

$$\frac{\Delta F}{RT} = -\ln K_p = -\sum (\nu \ln p) + \sum \nu \cdot \ln P$$

dove p sono le pressioni all'equilibrio per i vari componenti, e $P = \sum p$ la pressione totale; combinando questa con le (9), (10), risulta

$$(11) \quad -RT \sum (\nu \ln p) = \Delta U_{298} + \sum \nu \int_{298}^{T} c_p \, dT - T \sum \nu \left(S_{298} + \int_{298}^{T} \frac{c_p}{T} \, dT \right).$$

Se si vuol tener conto, approssimativamente, delle deviazioni dalla legge dei gas, si possono sostituire alle *pressioni* p le *fugacità* f corrispondenti, nelle condizioni dell'equilibrio [1].

Consideriamo l'applicazione delle formule che precedono.

(1) Lewis e Randall, « Thermodynamics », p. 190 e sgg.

Digitized by Google

In generale i calori specifici a temperature intorno alla ordinaria e superiori ad essa sono espressi empiricamente da sviluppi a potenze crescenti della temperatura assoluta

$$(12) \qquad c_p = b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + \cdots = \sum_0^n{}_b \, b_b T^b$$

comunemente limitati al termine in T^2.

Allora

$$(13) \qquad \int_{T_0}^{T} c_p dT = \sum_0^n{}_b \frac{b_b}{b+1} (T^{b+1} - T_0^{b+1})$$

$$(14) \qquad \int_{T_0}^{T} \frac{c_p}{T} dT = b_0 \ln \frac{T}{T_0} + \sum_1^n \frac{b_b}{b} (T^b - T_0^b)$$

valori che si possono sostituire, con gli opportuni coefficienti per il solido, il liquido, il vapore, nelle precedenti.

Ma quando si tratti di reazioni in cui alcuni dei componenti siano gas e che a 298° siano o liquidi o solidi, per evitare nel calcolo le entropie di cambiamento di stato e due o tre serie di calori specifici, conviene introdurre i valori di S_{298} allo stato gassoso; il modo più semplice è quello di scrivere, trattandosi ad es. di sostanze liquide a 298°, delle quali siano noti i calori specifici del liquido e del vapore c_{pl}, c_{pg},

$$(15) \qquad S_{298\,g} = S_{298\,l} + \frac{\Delta U_e}{T_e} + \int_{298}^{T_e} \frac{c_{pl} - c_{pg}}{T} dT$$

dove ΔU_e è il calore di evaporazione alla temperatura di ebollizione T_e. Analogamente se la sostanza è solida. Se si conosce invece la tensione di vapore in mm. di Hg a 298°, p_{298}, e il calore di evaporazione pure a 298°, che è già ΔU_{298}, si può risalire approssimativamente a $S_{298\,g}$ attraverso la

$$(16) \qquad S_{298\,g} = S_{298\,l} + \frac{\Delta U_{298}}{298} - R \ln \frac{760}{p_{298}}.$$

Sotto questa forma è ammesso che valga per il vapore la legge dei gas.

Naturalmente, se la formula dei calori specifici del gas non ha validità reale che in un campo di temperature elevate, campo però in cui può avvenire la reazione considerata, l'applicazione di essa alla ricerca di S_{298} conduce a valori fittizi di questa quantità, perfettamente validi però quando si impieghi nei calcoli successivi la stessa formula di calore specifico.

Supporremo perciò che delle sostanze che intervengono nella reazione sotto forma di vapore si conosca $S_{298\,g}$.

Allora, quando *non si abbiano cambiamenti di stato nel campo di temperatura considerato*, e se le S_{298} rappresentano le entropie a 298° *allo stato in cui le sostanze intervengono alla reazione*, si può scrivere la (9) anche

Digitized by Google

per equilibri non omogenei; introducendo i calori specifici, supposti tutti della stessa forma (12), e chiamando

$$\Delta b_b = \sum \nu b_b \quad , \quad \Delta S_{298} = \sum \nu S_{298}$$

risulta

$$(17) \qquad \Delta F_T = \Delta U_{298} + \sum_0^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b+1}(T^{b+1} - 298^{b+1}) -$$

$$- T\left(\Delta S_{298} + \Delta b_0 \ln \frac{T}{298} + \sum_1^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b}(T^b - 298^b)\right).$$

Sviluppando e ordinando

$$(18) \qquad \Delta F_T = \Delta U_{298} - \sum_0^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b+1} 298^{b+1} - \Delta b_0 T \ln T -$$

$$- \sum_1^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b(b+1)} T^{b+1} + T\left[(1 + \ln 298)\Delta b_0 + \sum_1^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b} 298^b - \Delta S_{298}\right]$$

o anche

$$(19) \qquad \sum(\nu \log p) = \frac{-\Delta U_0}{4.571\,T} + \frac{\Delta b_0 \log T}{1.985} + \frac{\sum_1^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b(b+1)} T^b}{4.571} - \Delta B_0$$

se si pone

$$(20) \qquad \Delta U_0 = \Delta U_{298} - \sum_0^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b+1} 298^b$$

$$(21) \qquad \Delta B_0 = \frac{(1 + \ln 298)\Delta b_0 + \sum_1^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b} 298^b - \Delta S_{298}}{4.571}.$$

In modo completamente analogo, se è λ_e il calore di evaporazione alla temperatura di ebollizione T_e, ΔS_e la variazione di entropia durante l'evaporazione $\left(\Delta S_e = \frac{\lambda_e}{T_e}\right)$, e se chiamiamo

$$\Delta c_p = \Delta b_0 + \Delta b_1 T + \Delta b_2 T^2 + \cdots$$

la differenza fra i calori specifici del vapore e del liquido ($\Delta c_p = c_{pg} - c_{pl}$), si ricava una formula di evaporazione

$$(22) \quad RT \ln f = -\lambda_e + \sum_0^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b+1} T_e^{b+1} + \Delta b_0 T \ln T + \sum_1^n{}_b \frac{\Delta b_b T^{b+1}}{b(b+1)} -$$

$$- T\left((1 + \ln T_e)\Delta b_0 + \sum_1^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b} T_e^b - \Delta S_e\right).$$

Digitized by Google

Ponendo anche qui

$$\lambda_o = \lambda_c - \sum_o^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b+1} T_c^{b+1} \tag{23}$$

$$\Delta C_o = \frac{(1 + \ln T_c)\,\Delta b_o + \sum_1^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b} T_c^b - \frac{\lambda_c}{T_c}}{4.571} \tag{24}$$

si può scrivere

$$\log f = \frac{-\lambda_o}{4.571\,T} + \frac{\Delta b_o \log T}{1.985} + \frac{\sum_1^n{}_b \frac{\Delta b_b}{b(b+1)} T^b}{4.571} - \Delta C_o \tag{25}$$

dove f è la fugacità della sostanza considerata.

Naturalmente le espressioni hanno la forma di quelle solite riportate: ma in esse non si ha alcuna costante da determinare empiricamente; e le quantità contenutevi hanno un significato ben definito. Così U_o non è il calore di reazione allo zero assoluto, ma quello che sarebbe se le formule dei calori specifici impiegate avessero validità fino a tale temperatura; e in modo analogo λ_o.

ΔB_o, ΔC_o, hanno il significato espresso dalle formule che le definiscono: risultano da una differenza di entropie, tenendo conto delle differenze dei calori specifici.

Terremo però, nell'uso delle precedenti, la forma esplicita (17) o (18), e (22), anzichè quella delle (19), (25).

Abbiamo verificato le espressioni dedotte in numerosi casi di equilibri chimici, e i buoni risultati ottenuti ci hanno indotti a esporre quanto sopra. In una Nota successiva verrà appunto mostrata l'applicazione di esse nei diversi casi pratici.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati della Piridina.* Nota di A. Pieroni, presentata dal Socio A. Angeli.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulla dispersione rotatoria di alcuni eteri aspartici.* Nota di Mazza F. e Dello Jojo G. presentata dal Socio A. Piutti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Vulcanologia. — *Sulla temperatura delle colate laviche dell'Etna*[1]. Nota di G. PONTE, presentata[2] dal Socio F. MILLOSEVICH.

Varie prove sono state fatte per determinare la temperatura massima della lava di diversi vulcani, ma le difficoltà di operare sotto l'enorme calore che irradia dalle colate, non ha ancora permesso di ottenere dei risultati sicuri.

I primi tentativi rimontano a circa un secolo addietro e furono fatti dal Davy [3] durante l'eruzione vesuviana del 1819 con dei fili di rame e d'argento, che, fissati ad un'asta di ferro ed introdotti nella lava, scomparvero rapidamente. Nel 1855 il Deville [4] provò ad immergere un filo di ferro nella lava e, avendolo visto scomparire, credette che anche questo metallo si fosse fuso. Invero i fili metallici immersi liberamente nella lava si rompono per stiramento appena rammolliscono, e ciò avviene anche col ferro quando raggiunge la temperatura del rosso vivo. Anche il Silvestri ripetè la prova dei fili metallici [5] nella lava etnea del 1879 ed i suoi risultati sarebbero stati meno incerti se i fili metallici fossero stati avvolti a spira attorno ad un'asta resistente.

Il Bartoli [6] determinò la temperatura della lava etnea nel 1892 con il metodo calorimetrico. Egli si servì di un'asta di ferro la quale reggeva un tubo foggiato a punta dentro cui veniva chiuso un cilindretto di platino di gr. 60. Il tubo introdotto nella lava alla profondità di circa un metro vi restava immerso circa otto minuti; « dopo questo tempo, l'apparecchio veniva estratto rapidamente e disposta la canna di ferro sopra un calorimetro, si faceva cadere il cilindro di platino nell'acqua e si procedeva immediatamente alla misura calorimetrica ».

La prima serie delle determinazioni fatte dal Bartoli fu eseguita nell'agosto del 1892 a 200 metri dai crateri, avanti ad una galleria di scolamento lavico ove la colata aveva una velocità di 80 metri all'ora. La temperatura più elevata all'ora riscontrata fu di 1060°; ma l'eruzione etnea di quell'anno essendo durata circa sei mesi, dal 9 luglio al 30 dicembre, il Bartoli ebbe occasione di rifare nel mese di settembre una seconda serie di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Vulcanologico Etneo. Catania.

(2) Nella seduta del 16 gennaio 1927.

(3) G. MERCALLI, *I vulcani attivi della terra*. Milano, 1907, p. 169.

(4) S. C. DEVILLE, *Observations etc. du Vesuve*. 1er mai, 1855, p. 17.

(5) O. SILVESTRI, « Com. Geol. It. », vol. X, Roma, 1879.

(6) A. BARTOLI, *Sull'Eruzione dell'Etna, scoppiata il 9 luglio 1892*. « Boll. di Soc. Met. Ital. », ser. II, vol. XII, n. 11; ID., « Boll. mens. Soc. Met. Ital. » (2) XII, 1892.

Digitized by Google

misure nella stessa colata in condizioni più favorevoli della prima e questa volta la temperatura massima della lava risultò di 1086° [1].

Dopo le esperienze del Bartoli non è stata fatta alcun' altra determinazione col metodo calorimetrico.

Il prof. Platania Giovanni durante l'eruzione del 1911, determinò la temperatura della parte superficiale di una piccola colata in movimento con il pirometro a radiazione di Féry che dovette piazzare a breve distanza dalla lava [2]. Con questo strumento, che non è più preciso del maneggevole fotometro spettrale di Wanner, il Platania ricavò la temperatura della crosta della colata in movimento, la quale aveva variabile intensità luminosa. Difatti i risultati delle determinazioni del Platania sono molto oscillanti e la massima temperatura ricavata (940°), si riferisce alla luce più intensa emessa da un enorme blocco nuotante sulla lava sul quale egli puntò lo strumento, mentre il resto della colata risultò di 825°.

Al geologo non interessa conoscere soltanto il grado massimo di calore che può avere la lava di una data eruzione; più utili allo studio sarebbero le variazioni di temperatura che avvengono nella colata con il variare dell'efflusso lavico. Se fosse possibile piazzare un pirometro termoelettrico, provvisto di registratore, alla bocca eruttiva, tenendolo immerso sempre alla stessa profondità nella lava, si avrebbe un utilissimo diagramma di tutte le variazioni di temperatura del magma durante l'eruzione; ma chi ha avuto occasione di trovarsi vicino ad una colata di lava, anche di piccola portata, si è potuto rendere conto delle difficoltà e dei pericoli che bisogna affrontare per poter portare a compimento un esperimento anche dei più semplici e sbrigativi.

Io ho la convinzione che per ora soltanto gli indicatori metallici a punto di fusione esattamente controllato possano permettere la misurazione della temperatura massima delle lave. Così ad esempio le sferoline metalliche (di gr. 1 a 1,5) a punto di fusione noto, già da tempo adoperate nell'industria, potrebbero dare degli ottimi risultati e vi sono delle ditte che le forniscono, però è facile prepararseli in laboratorio con le indicazioni che si trovano in tutti i trattati di tecnologia e controllandoli col punto di fusione già noto di altre sostanze [3] o di certi minerali [4]. Questi indicatori dovrebbero collocarsi dentro un tubo di ferro fissato ad una asta resistente onde poterli immergere nella lava ed ivi trattenerli alcuni minuti.

Per ricerche in cui la conoscenza del grado di temperatura ha un valore relativo e si vuole solo conoscere se una serie di esperienze è stata

(1) A. Bartoli, «Rend. R. Ist. Lombardo di Sc. e Lett.» (2) XXIX, 1896.

(2) G. Platania, *Misure della temperatura della lava fluente dell'Etna*, «Rend. Acc. dei Lincei», vol. XXI, ser. V, 1912, pp. 499-502.

(3) J. Joly, *On the determination of the melting points of minerals*, «Procedings of the. Royal Irish Ac.», ann. 1891, p. 63.

(4) C. Doelter, «Hand. d. Mineralchemie», 1912, I, pp. 656-664.

Digitized by Google

condotta a temperatura approssimativamente costante, possono giovare gli indicatori di Seger, che sono delle miscele di quarzo, allumina ed ossidi di ferro, di piombo e di altri metalli. Occorre però modificarne la forma e le dimensioni riducendoli in piccoli dischi od in sferoline e disponendoli in fila intermezzati con esili lamelle di platino. Questo metodo non è esatto per la determinazione della temperatura massima della lava; le piramidi di Seger servono bene per conoscere il punto di cottura delle ceramiche, la cui temperatura di fusione varia con la stessa velocità di quella degli indicatori, ma non darebbero risultati sicuri nella determinazione della temperatura della lava. Difatti è noto, dalle sperienze di Rothe, di Hoffmann e di Meissener [1], che il punto di fusione delle piramidi di Seger varia con la velocità con cui si innalza la temperatura.

Come gli indicatori di Seger, così anche l'argilla naturale richiede un certo tempo per fondere, anche quando trovasi a contatto immediato con una lava ad alta temperatura. Difatti nella lava etnea del 693 av. Cr., in contrada Acquicella presso Catania, si rinviene dell'argilla cotta, ma non fusa, mentre nella colata del 1910 si sono trovati nell'antica casa del Bosco alcuni tegoli, completamente fusi. In una cava recentemente aperta sul fianco sinistro della colata etnea del 1923, la dove lo stradale Linguaglossa-Randazzo si dirama per Castiglione, si sono rinvenuti, sul letto della lava, dei tronchi di nocciuolo non del tutto carbonizzati. Evidentemente il calore trasmesso dalla lava in quel punto non fu così elevato da carbonizzare completamente quei tronchi. La tecnica della carbonizzazione del legno [2] ci insegna che a circa 400° ed in meno di 24 ore si ottiene del carbone nero completamente distillato, mentre tra i 280° ed i 320° la carbonizzazione resta incompleta e si ottiene un carbone rosso simile a quello che, appunto, si riscontra sotto la colata del 1923.

Questa osservazione ci permette di stabilire che il calore trasmesso dalla lava al letto della colata, daddove si sono rinvenuti i tronchi semicarbonizzati, non arrivò ad elevarsi sopra i 300°, per quanto lo ammasso lavico superasse i quattro metri di potenza. Però in altre colate etnee si osserva che il letto è stato riscaldato fino alla cottura dell'argilla e si sono rinvenuti legni del tutto carbonizzati nella lava del 1669.

La lava è un forte coibente ed una volta che uno strato di petrisco, staccandosi dal fronte della colata, va a depositarsi sul letto di essa, difficilmente lascia penetrare il calore nella parte sottostante, se non vi è un continuo rinnovamento di lava rovente. Così si spiega che durante l'eruzione del maggio 1923 potemmo vedere delle piccole colate distese sui nevai che mantennero per più settimane il ghiaccio sottostante. Ma nei posti ove la colata è in movimento si ha un continuo trasporto di calore che

(1) « Zeitschrift f. Ind. », 27. pp. 187-188, 1907.
(2) M. Klar, *Technologie der Holzverkolung*. Berlin, 1903, p. 31.

Digitized by Google

riscalda sempre più il letto; ecco perchè il legno in alcuni punti sotto la colata etnea del 1923 non arrivò a carbonizzare, mentre sotto la colata del 693 av. Cr. si rinvengono delle argille cotte ed in quella del 1910 si son trovati dei tegoli fusi.

Evidentemente la dove la colata è in movimento e la massa si rinnova ivi il calore irradiato è maggiore. Io ritengo che la temperatura delle lave non possa paragonarsi a quella di altri liquidi e tanto meno a quella dei metalli fusi, i quali presentano lievi differenze di viscosità tra la parte interna e l'esterna. Bisogna tener presente che le lave basaltiche dell'Etna hanno una grande viscosità e sono ancora pastose alla temperatura del rosso nascente. Durante l'eruzione del 1923 (1) fu riscontrato che alcuni blocchi di lava rotolati dai fianchi della colata erano ancora plastici a 670°.

Dal complesso delle indagini da me fatte emerge che la temperatura nel letto delle colate si trasmette lentamente e può elevarsi molto nella parte centrale ove è maggiore il movimento, cioè ove avviene un continuo trasporto di nuova massa calda di lava; e che il raffreddamento della parte superficiale delle colate dipende dalla massa della lava che sgorga dalle bocche eruttive, dalla larghezza che assume il torrente lavico e dalla sua velocità, come pure dalle correnti d'aria fredda che lambiscono la lava. Durante l'eruzione del 1923 fu constatato in modo evidente che sotto l'azione del vento la lava raffreddava rapidamente alla sua superficie; difatti le fotografie fatte alle due cateratte di lava che alimentavano la colata principale mostrano che il rivolo confluente di destra era meno luminoso dell'altro il quale, essendo un poco più vicino alla sorgente, si manteneva più caldo.

Concludendo sostengo che nella determinazione della temperatura di una colata occorre tener maggior conto di tutte le condizioni che possono farla variare anzichè dei metodi più o meno esatti per determinarla.

(1) G. Ponte, *L'eruzione dell'Etna*. « Boll. d. Soc. Geol. It. », vol. XLII, 1923, fasc. 2, p. 180.

Digitized by Google

Geologia. — *I terreni miocenici tra la valle del Lamone e quella del Bidente.* Nota del prof. P. PRINCIPI, presentata [1] dal Corrisp. G. ROVERETO.

Nello studio del Terziario del gruppo del M. Falterona e del bacino del Mugello [2] osservai, che mentre nella parte più bassa del Langhiano predominano le arenarie, superiormente ad esse appariscono assai sviluppati dei marnoscisti o dei calcari marnosi a frattura scagliosa con intercalazioni di arenaria grigia o azzurrognola più o meno compatta, la quale alla sua volta riprende grande sviluppo presso Portico, cioè nella parte più alta del Miocene inferiore. Essa risulta costituita da una alternanza di grossi strati arenacei grigi, intercalati a sottili strati di marne scistose e si estende notevolmente dal M. Faggiola verso Marradi, Rocca S. Casciano, Galeata, per ricongiungersi con quella, che affiora nella media valle del Savio.

In questa formazione i fossili non sono infrequenti [3, 4]. A SE di Palazzuolo presso Mondera, entro gli strati marnoso-arenacei, appariscono delle lenti di calcare grigio con *Lucina Doderleini* Di Stef. e *Morio* (*Galeodea*) *echinophora* L. sp.; nelle arenarie dei dintorni di Marradi lo Scarabelli [5] raccolse alcuni denti di *Carcharodon angustidens* Agass. e di *Lamna* (*Odontaspis*) *contortidens* Agass. e nei letti marnosi intercalati ai banchi arenacei di queste due località appariscono impronte di *Ostrea langhiana* Tr. e resti di Pteropodi, alcuni dei quali mostrano varie analogie colla *Vaginella Calandrelli* Micht. e colla *Cavolinia bisulcata* Kittl. Presso Tredozio lungo le pendici SE del M. Vespignano le arenarie contengono altre lenti calcaree con *Lucina De Stefanii* Rov.; nel Monte della Serra e nel Monte Freddo, a breve distanza da Portico, prendono notevolmente sviluppo dei banchi marnosi con *Ostrea langhiana* e Pteropodi (*Vaginella* cfr. *Calandrelli*, *Balantium* cfr. *pedemontanum*) e, procedendo ancora verso SE, lenti calcaree con *Lucina De Stefanii* Rov. e *Lucina Doderleini* Di Stef. ricompaiono nel M. Prignolaia a SO di Galeata, nel Poggio Buffano ad ovest di S. Sofia e presso Raggio a SE di Mortano. In quest'ultima località ho potuto racco-

(1) Nella seduta del 16 gennaio 1927.

(2) PRINCIPI P., *Il terziario del gruppo del M. Falterona e della media valle della Sieve*, « Mem. R. Accad. Lincei », 1927.

PRINCIPI P., *Geologia e morfologia del bacino del Mugello*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », 1926, vol. XLV.

(3) TOLDO G., *Note preliminari sulle condizioni geologiche dei contrafforti appenninici fra il Sillaro ed il Lamone*, « Boll. Soc. Geol. ital. », 1905, vol. XXIV.

(4) SACCO F., *L'Appennino della Romagna*, « Boll. Soc. Geol. ital. », 1899; e *L'Appennino settentrionale e centrale*. Studio geologico, 1904.

(5) SCARABELLI G., *Descrizione della carta geologica del versante settentrionale dell'Appennino fra il Montone e la Foglia*. Forlì, 1880.

Digitized by Google

gliere da un banco marnoso compatto un frammento di *Aturia Aturi* Bast. ed alcuni resti di *Teredo* cfr. *norvegica* Spengl.

Se varie delle specie suddette si presentano diffuse in tutti i piani del Miocene, tuttavia alcune, come l'*Aturia Aturi* e l'*Ostrea langhiana*, attestano che i sedimenti della zona considerata sono riferibili sempre al Langhiano o Burdigaliano.

*
* *

Non è possibile stabilire in modo preciso il limite superiore del Langhiano, giacchè anche gli strati del Miocene medio presentano una costituzione litologica analoga a quella offerta dal Miocene inferiore; tuttavia possiamo ritenere che il confine approssimativo tra le due formazioni è rappresentabile da una linea, che dal Monte Faggiola si diriga verso Rocca San Michele, San Martino di Gattara, Tredozio, Rocca San Casciano, Civitella di Romagna, Monte della Faggia, Monte di Rullato e Sarsina.

Percorrendo la valle del Lamone si scorgono dapprima degli strati di arenaria, con alternanze di letti marnosi, disposti in un'anticlinale assai aperta, la cui cerniera, diretta da NO a SE, si può seguire attraverso Poggio Cavalmagra, M. di Villanova, M. di Giamogna, M. Bruno e M. di Vallura. Parallelamente a questa piega succede verso est un'altra anticlinale coi fianchi lievemente inclinati, salvo qualche arricciatura e contorsione locale, e coll'asse diretto da Marradi a Premilcuore. Ivi predominano dei banchi di arenaria micacea cenerognola a grana fina, la quale fa frequente passaggio a marne arenacee giallastre con intercalazioni di scisti arenacei e di calcari marnosi grigi cerulei a frattura scagliosa. Ciò si può facilmente osservare lungo la strada, che da Marradi si dirige verso Badia al Borgo, a poca distanza dalla quale gli strati marnoso–arenacei appariscono interessati da numerose faglie parallele ed assai ravvicinate. La stessa formazione arenaceo-marnosa si presenta notevolmente sviluppata tra Valdrè, Vonibbio e Valvitello; in quest'ultima località le arenarie alquanto scistose mostrano sulla superficie varie impronte di *Palaeodictyon* e frequenti residui carboniosi.

Oltrepassato il paese di Marradi alle arenarie succedono dei banchi di marne grigie con Pteropodi, intercalati a scisti arenacei grigio-giallastri: esse costituiscono una sinclinale, il cui fondo, rappresentato da strati orizzontali, trovasi in corrispondenza di Popolano ed il cui fianco orientale, inclinato in media di 15°, si rialza notevolmente subito dopo San Martino di Gattara per raggiungere una pendenza di circa 48° all'altezza del Ponte di Marignano. Ad est di S. Martino di Gattara ritornano nuovamente a prevalere le arenarie in strati spessi e compatti, intramezzati con scisti marnosi talora fortemente contorti ed arricciati. Con queste arenarie si inizia la serie del Miocene medio, la quale, se contiene alcuni fossili identici a

Digitized by Google

quelli riscontrati nel Miocene inferiore, si è dimostrata costantemente priva di quelle specie, che vengono a caratterizzare i sedimenti langhiani.

Gli strati del Miocene medio danno origine ad un'anticlinale lievemente inclinata verso NO e compresa tra S. Martino di Gattara e S. Cassiano. Nei dintorni di quest'ultima località affiorano degli strati di arenaria marnosa grigia intercalati a sciști arenacei giallastri ed a C. dell'Oste presso il Ponte sul Lamone l'arenaria è in banchi compatti di colore ceruleo intramezzati con sciști e marne arenacee. Lungo le pendici occidentali del M. del Tesoro gli strati presentano a brevi distanze inclinazioni ed immersioni le più svariate in conseguenza di accentuate ripiegature, accompagnate spesso da faglie a piccolo rigetto. Dopo il Monte del Tesoro gli strati inclinano verso NE e mantengono tale orientamento fino a che non vengono ricoperti dalla zona gessosa del Sarmarziano.

Anche lungo la valle del Montone si osserva la stessa successione di strati, che abbiamo rilevato per la valle precedente. Le arenarie langhiane, intercalate a letti marnosi con Pteropodi, si estendono da S. Benedetto in Alpe fin presso Rocca S. Casciano; in generale sono di colore grigio-cinereo, ricche di mica e tendono ad acquistare una spiccata scistosità verso la parte più alta della serie. Da Tredozio al M. Sacco gli strati della formazione arenaceo-marnosa del Miocene inferiore appariscono costantemente inclinati verso NE; quindi, tra S. Clemente ed il Belvedere, presentano delle lievi ondulazioni, ben visibili sulle sezioni determinate dalla riva destra del Montone, le quali corrispondono al fondo della sinclinale esistente ad est di Marradi. Subito dopo il paese di Rocca S. Casciano alle rocce ricordate succedono altre arenarie cenerognole accompagnate da sciști marnoso-arenacei giallastri e con frequenti frustoli carboniosi: esse per la loro posizione stratigrafica sono riferibili al Miocene medio e fanno parte dell'anticlinale, che abbiamo visto esistere lungo la valle del Lamone tra S. Martino di Gattara e S. Cassiano. Questa si continua verso NO, costituendo Monte Cece ed i rilievi sopra Baffadi entro la valle del Senio; mentre a SE la sua cerniera si può seguire ininterrottamente per M. Grosso, M. S. Piero, Poggio Appennino, M. Sambucheto e M. della Faggia a nord del Savio. Ivi l'anticlinale si biforca in due rami, che si ricongiungono alla Rocchetta a nord del M. Fumaiolo (1).

Da S. Ruffillo, scendendo sempre la valle del Montone, gli strati del Miocene medio mostrano di solito una inclinazione a NE, con ondulazioni locali talora accentuatissime; così a Pezzolo essi appariscono fortemente pieghettati e sopra il Ponte di Roncovecchio sono addirittura verticali. Presso Melatello a SE di S. Ruffillo nella formazione arenaceo-marnosa si riscontra una lente di calcare con *Lucina Doderleini* Di Stef.

(1) Principi P., *Osservazioni sulla geologia dell'alta e media valle del Savio.* «Rendiconti R. Accademia dei Lincei», 1925.

Digitized by Google

*
* *

Il passaggio dal Miocene medio al Miocene superiore può studiarsi assai agevolmente tra la valle del Lamone e quella del torrente Sintria.

Agli strati del Miocene medio costituiti da marne arenacee e scisti marnosi succede lungo la linea, che va dalla Chiesa di Rontana, a Collina, Vespignano, M. Mauro un calcare compatto biancastro (1), talora ricco di impregnazioni silicee ed a stratificazione indistinta. Esso presso Collina contiene numerosi individui di *Lucina De Stefanii* Rov. ed alcuni esemplari di *Euthria Hoernesi* Bell. (*Chrysodomus*) (2). Quest'ultima specie, comune negli strati di Tortona e di Stazzano, dimostra in modo indubbio l'età miocenica del calcare suddetto; inoltre, avendo io riscontrato in alcuni straterelli di argille sabbiose, che presso C. Angognano appariscono come intercalati ai banchi del calcare a Lucine, alcuni resti di conchiglie riferibili in parte al *Cerithium rubiginosum* Eichw., esso sta verosimilmente a rappresentare la parte più alta del Tortoniano.

Sopra questi calcari fossiliferi si adagia una serie di sabbie gialle micacee, intercalate a straterelli di marne argillose grigio–azzurrastre, le quali presso Rontana contengono frammenti di *Pecten* indeterminabili e tra Col Mora e Vespignano resti di *Hyalaea* (*Cavolinia*) *gypsorum* e di *Lebias crassicauda*: siamo, quindi, in presenza del Sarmaziano, il quale superiormente è costituito dalla caratteristica formazione gessosa. Quest'ultima è notevolmente sviluppata nei dintorni di Brisighella, costituendo i rilievi, su cui sorge la Torre, la Rocca e la Chiesa di Monticino; va, poi, a formare il M. di Rontana, Col Mora, raggiungendo l'altitudine di 515 metri nel Monte Mauro, il cui versante meridionale mostra distintamente i banchi gessosi inclinati a NNE di quasi 60°. Il complesso dei banchi gessosi fra il Sintria ed il Lamone ha appena la potenza di un centinaio di metri; mentre a nord del Sintria, come ad esempio si verifica nel M. Mauro, oltrepassa i 150 metri di spessore.

Nelle vicinanze immediate di Brisighella il gesso si presenta in banchi irregolari, inclinati di circa 45° verso NNE, di colore grigio giallastro a struttura cristallina, con cristalli lamellari di svariate dimensioni, aggregati insieme in una massa feltrosa e con frequenti geminati a ferro di lancia. Fra la Chiesa di Monticino e la Rocca si scorgono interstratificate nei gessi delle marne argillose in sottili straterelli con impronte di *Lebias crassicauda* e di resti vegetali, alcuni dei quali sono riferibili al *Taxodium distichum*

(1) Manzoni A., *Della posizione stratigrafica del calcare a Lucina pomum.* « Bollettino R. Comitato Geologico », 1876.

(2) Di Stefano G., *Il calcare con grandi Lucine nei dintorni di Centuripe in provincia di Catania.* « Atti Accad. Gioenia di Sc. Nat. », Ser. IV, vol. XVI, 1903.

Digitized by Google

miocenicum Heer, *Glyptostrobus europaeus* Heer, *Arundinites Goepperti* Princ., *Quercus proteifolia* Paol., *Cinnamomum polymorphum* Heer, *Planera Ungeri* (Kov.); mentre nel Monte di Rontana nella parte superiore della formazione gessosa appariscono delle piccole lenti e vene di calcedonio grigio, il quale, includendo talora dei cristalli di gesso, acquista un aspetto cavernoso per la scomparsa di questi ultimi. Nel M. di Rontana, inoltre, sempre nella parte più alta della serie dei gessi, appariscono dei nuclei di un calcare biancastro spugnoso concrezionato, i cui vacui risultano tappezzati da efflorescenze saline; tale calcare, contenente sporadicamente dei cristalli di gesso, si ritrova anche verso Col Mora e lungo le pendici SE del M. Mauro.

A nord della strada che dalla Rocca si dirige verso C. Trebbio e Saletto, la formazione gessosa sarmaziana è ricoperta da straterelli di esiguo spessore di una marna argillosa compatta azzurra e bruna, includenti anche delle brecciole a minuti elementi. In queste si osservano numerosi frammenti di *Pecten* e di altre conchiglie indeterminabili, mentre nelle marne presso la Cavulla si rinviene qualche raro individuo di *Melanopsis Bonellii* Sism., di *Congeria simplex* Barb. e di *Cardium edentulum* Desh., specie che dimostrano l'età pontica degli strati in questione.

Ma se la distinzione fra il Tortoniano ed il Miocene superiore riesce piuttosto agevole fra le valli del Sintria e del Lamone, dove la serie dei gessi costituisce una zona continua e nettamente individuabile anche dal lato morfologico (*muro o vena del gesso*), essa diventa molto più difficile se non addirittura impossibile a SE del Lamone. Infatti da Brisighella procedendo verso la valle del Montone, la formazione gessosa appare discontinua e ridotta a lenti di esigue dimensioni, comprese entro banchi arenacei più o meno sciolti e potenti, intercalati a strati marnosi bluastri e di arenarie scistose. Siccome anche la parte superiore del Miocene medio presenta quasi le stesse caratteristiche litologiche, così non può indicarsi con precisione il limite tra il Tortoniano e il Sarmaziano.

Presso il Cimitero di Brisighella sulla destra del Lamone affiorano dei banchi sabbiosi ricchi di mica e di colore grigio giallàstro inclinati di 30° a NNE, i quali passano talora a scisti arenacei grigio-chiari od a marne argillose cerulee. Nella parte più alta di questo complesso di strati compariscono delle marne arenacee, includenti banchi di ciottoli schiacciati od ovoidali, costituiti per lo più da arenarie compatte o da calcari marnosi. Questi banchi ciottolosi presso Ritortolo riposano con marcata discordanza sulle marne arenacee sottostanti e stanno forse a rappresentare il Pontico, corrispondendo, quindi cronologicamente ai conglomerati di Pietrafagnana e di Pietrarubbia a SE del M. Carpegna.

Gli strati marnoso-sabbiosi, che nel M. Pilato si presentano lievemente inclinati, acquistano, procedendo verso est, una pendenza sempre più accentuata, tantochè nel M. Bicocca appariscono quasi verticali. A C. Soglia troviamo una piccola lente gessosa inclusa fra gli strati marnoso-arenacei.

Digitized by Google

In tale località si scorgono filoncelli di gesso a struttura saccaroide e lamellare, che seguono i piani di stratificazione delle marne sabbiose o delle fratture irregolari. Questa particolare giacitura è dovuta indubbiamente a fenomeni di diapirismo, determinati dal fatto che le pressioni orogeniche, agendo sopra strati di differente natura litologica, produssero delle accentuate deformazioni sulla massa del gesso, il quale per la sua plasticità o per la sua solubilità [1], che gli permette facilmente di ricementarsi alla superficie, potè penetrare in tutte le direzioni entro le discontinuità, che si originarono nel complesso stratigrafico. Fenomeni analoghi si riscontrano pure nel M. di Rontana, nei pressi di Modigliana, dove appariscono altre lenti di gesso massiccio con struttura lamellare, a nord di Predappio, dove il gesso di colore bianco opaco e leggermente venato assume una spiccata struttura saccaroide ed a Sapigno [2], dove il gesso è unito a piccole quantità di solfo.

Lungo la zona, che si estende dal M. Bicocca a Predappio ed al M. Bruchelle, nelle marne sabbiose, che costituiscono la base od includono lenti gessose, si adagiano delle marne cenerognole accompagnate da strati ciottolosi più o meno cementati. Il paese di Predappio giace appunto sopra un banco di conglomerato ad elementi prevalentemente calcarei fortemente cementati e rimasto perciò nettamente emergente dalle circostanti rocce più facilmente disgregabili [3]. Altri banchi ciottolosi si riscontrano a NO di Rivoschio tra Ricò e Cusercoli e presso Voltre, sempre sullo stesso allineamento sopra ricordato e corrispondente al bordo occidentale di una sinclinale, il cui margine orientale dà origine ai rilievi, che da Polenta si estende fino a Sogliano.

La presenza di questa sinclinale spiega la notevole estensione, che il Miocene superiore assume tra il Bidente ed il Savio, mentre nel tratto compreso fra Tossignano e Predappio gli strati sarmaziani e pontici, inclinati costantemente a NNE vengono immediamente ricoperti dalle formazioni plioceniche.

*
* *

Sull'insieme degli strati appartenenti al Miocene superiore si appoggiano con una inclinazione alquanto meno accentuata delle marne argillose azzurrognole, la quali per i numerosi fossili, che sono stati raccolti in varie località, devono essere riferite al Piacenziano. Queste argille ad est della valle del Lamone racchiudono, a non grande distanza dalla zona gessosa,

(1) Lincio G., *Sui gessi di Cinquecerri nel Reggiano e sui cristalli di quarzo nero da essi inclusi.* Modena, 1925.

(2) Principi P., *Osservazioni sulla geologia dell'alta e media valle del Savio.*

(3) Sacco F., *L'Appennino della Romagna.*

Digitized by Google

alcuni banchi arenacei e calcarei con *Ostrea*, *Pecten*, Briozoi, che per la loro maggiore resistenza agli agenti atmosferici formano una specie di cresta, che si può seguire da C. Sassetto alla Torre di Ceparano fino al di là della Rocca delle Caminate [1].

Alle argille piacenziane, caratteristiche per i numerosi calanchi, che vi incidono le acque superficiali, succedono altri strati di sabbie gialle e di conglomerati dell'Astiano, i quali tendono ad acquistare una pendenza sempre più dolce, fino a che risultano inclinati di appena 3° o 4° o addirittura orizzontali.

I sedimenti pliocenici vengono a sostituire una specie di flessura o piega monoclinale, analoga a quelle, che già l'Anelli [2] ha riscontrato nel Parmense e della quale il fianco superiore per il suo esiguo spessore è stato completamente asportato.

Nel Miocene superiore si ebbe un' intensa fase di emersione, in conseguenza della quale si originarono delle zone salmastre, non continue ma limitate a particolari depressioni formatesi in seguito al più intenso corrugamento subito da alcuni strati, ed il mare pontico durante il suo movimento regressivo lasciò abbondanti depositi di spiaggia, rappresentati dai conglomerati di Predappio, di Cusercole, di Voltre ecc. Ma all'inizio del Pliocene la regione tornò nuovamente ad abbassarsi, come lo attestano i sedimenti di mare piuttosto profondo del Piacenziano, trasgressivi sul Miocene superiore, con oscillazioni parziali ma accentuate del fondo marino, che permisero la deposizione dei calcari arenacei con fauna littorale. Nel Pliocene superiore la profondità del mare andò gradatamente diminuendo, fintantochè al principio del Quaternario un nuovo sollevamento di carattere epirogenico determinò la emersione completa dei sedimenti pliocenici, la cui porzione più interna, corrispondente al fianco superiore della flessura e ad una parte del fianco mediano di raccordo, risultò notevolmente più sollevata di quella marginale, costituente il fianco inferiore della flessura medesima.

(1) Sacco F., *L'Appennino della Romagna.*

(2) Anelli, *Cenni geologici sui dintorni di Traversetolo e di Lesignano Bagni (Provincia di Parma)*. « Boll. Soc. Geol. ital. », vol. XXXIV, 1915.

Digitized by Google

Zoologia. — *Una possibile variante dell'ologenesi.* Nota del prof. D. Rosa, presentata [1] dal Corrisp. F. Raffaele.

Nella mia teoria dell'Ologenesi [2] l'evoluzione filogenetica avviene, come nelle teorie di Kölliker e di Naegeli, per cosidette « cause interne » cioè per un processo analogo a quello che si osserva nell'evoluzione ontogenetica. Però secondo l'Ologenesi l'evoluzione filogenetica procede lungo vie dicotomicamente ramificate, per modo che ogni specie, dopo un periodo di evoluzione, si sdoppia, sempre per cause interne, in due nuove specie (la cui costituzione ereditaria è predeterminata nella specie precedente); ciascuna di queste specie-figlie, dopo un altro periodo, si scinde in due altre e così via.

Ora nel mio volume sulla suddetta teoria io ho inoltre ammesso che fra uno sdoppiamento della specie in due specie e lo sdoppiamento successivo l'evoluzione sia rettilinea. In tale ipotesi due specie sorelle sarebbero il prodotto diretto di una sola dicotomia. Non sarebbe tuttavia contraria ai concetti fondamentali dell'Ologenesi l'ipotesi che anche fra uno sdoppiamento della specie in due specie e lo sdoppiamento successivo l'evoluzione possa essere ramificata, nel quale caso ciascuna delle due specie sorelle sarebbe il prodotto complessivo di una serie di dicotomie. Qui sta appunto la « possibile variante dell'Ologenesi ».

La qui unita figura faciliterà il confronto fra i due concetti.

Nel primo concetto questa figura rappresenterebbe una serie di dicotomie dalle quali si producono direttamente 2, 4, 8, 16 ed infine 32 specie, le quali ultime noi potremmo raggruppare in più generi, per es. in quattro: A, B, C. D. Nel secondo concetto i gruppi A, B, C. D potrebbero, anzichè generi, rappresentare semplicemente quattro specie. Da ciascuna dicotomia si produrrebbero dunque forme le quali raggiungerebbero il valore di specie (cioè di forme fra loro somaticamente e germinalmente disgiunte), non per mezzo di una semplice evoluzione rettilinea ma bensì attraverso ad una serie di sdoppiamenti ulteriori.

È evidente che in questo secondo modo ogni specie risulterebbe costituita da un gruppo di diverse forme o stirpi (affini fra loro in vario grado) che si sarebbero evolute collateralmente le une alle altre partendo da una specie-stipite comune (che essa stessa poteva già essere in simile modo complessa), dimodochè già nelle specie noi troveremmo quel polifiletismo (solo apparente) che ormai è già stato constatato, soprattutto dai paleontologi, in tanti generi e gruppi maggiori.

(1) Nella seduta del 19 dicembre 1926.

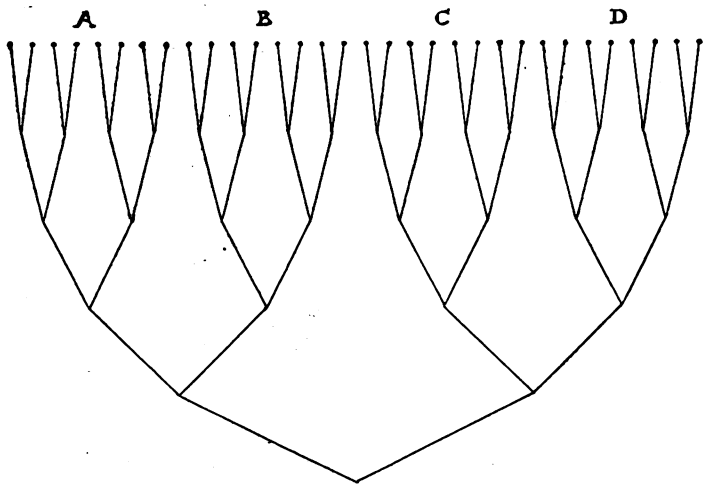
(2) Rosa D., *Ologenesi; nuova teoria dell'evoluzione e della distribuzione geografica delle specie*. Firenze, edit. Bemporad, 1918.

Digitized by Google

Mi era parso dapprima di non poter accettare tale concetto soprattutto per la considerazione che per esso le specie (e intendevo *tutte* le specie) diventerebbero dei complessi intrinsecamente eterogenei, tanto come i generi e le altre categorie del sistema, oltrechè i limiti fra di esse diventerebbero altrettanto arbitrarii come i limiti fra tali gruppi.

Più tardi queste considerazioni non mi sono più sembrate altrettanto valide.

È vero, da un lato, che moltissime specie ci appaiono notevolmente omogenee (s'intende quando non si tenga conto dei semplici polimorfismi). Ma allora potrebbe trattarsi di specie delle quali una sola stirpe si sia conservata. Il caso sarebbe analogo a quello di quei tanti generi che sono di-



venuti « monotipici » (costituiti da una sola specie) in seguito all'estinzione delle altre loro specie.

Ci sono però anche moltissime specie che per se stesse, pel loro patrimonio ereditario, sono notevolmente eterogenee. Certo l' Ologenesi può spiegare tale etesogeneità anche in altro modo che colla nuova variante, anzi di queste spiegazioni ho discusso a lungo nel volume stesso (Capit. VI, Appendice). Ma non è da escludere che a quelle varie spiegazioni si debba aggiungere questa nuova secondo la quale l'eterogeneità di tali specie sarebbe anche dovuta al fatto di essere esse *ab origine* « specie collettive » o « politipiche ».

Certo la nuova spiegazione renderebbe anche meglio conto di quelle differenze, pure ereditarie, che distinguono fra loro anche piccoli gruppi di individui, per es. singole famiglie di una stessa razza. Infatti se la formazione delle specie avviene secondo la nostra nuova variante, la complessità della specie (la molteplicità, se non l' importanza, delle differenze fra gli elementi

Digitized by Google

di essa) tende, nel corso dalla filogenesi, ad accrescersi in progressione geometrica.

Quanto all'arbitrarietà dei limiti fra le specie (parlo, per ora, solo delle specie unite fra loro da affinità collaterale) ci sono varie considerazioni da fare.

Anzitutto ho già fatto osservare (Olog., Cap. V, pagg. 137, 138) che, per chi accetti la nostra evoluzione dicotomica per cosidette cause interne, i limiti stessi fra i gruppi superiori alla specie (generi famiglie, ecc.) non sono in tutto arbitrarii. Supposto, per es., che nella fig. precedente i 32 punti in alto corrispondano a 32 specie, è chiaro che noi potremmo raggruppare queste specie, per es, in quattro generi: A, B. C, D o solo in due: (A, B), (C, D); ma noi non potremmo mai, per es., fare un genere del gruppo A, B, C, ed un altro del gruppo D.

Queste previsioni sono in armonia coi fatti osservati: noi possiamo essere in dubbio se due gruppi affini si debbano considerare come due famiglie di uno stesso ordine o come due ordini di una stessa classe, ma, in qualunque modo, i limiti fra i due gruppi sono già dati in natura e noi non troviamo mai forme che si possano attribuire indifferentemente all'uno od all'altro di essi. Vere « forme connettenti » non ci sono note nè fra le viventi nè fra le estinte.

Rimarrebbe dunque solo arbitrario lo stabilire quale grado di affinità noi dobbiamo richiedere fra le forme d'un gruppo per dare a questo il valore di genere o di famiglia, ecc. Ora nel caso della delimitazione di una specie dalle sue collaterali anche quest'arbitrarietà verrebbe a mancare, perchè qui ci soccorre il criterio dell'*eugenesia*, cioè della possibilità della fecondazione con validi e durevoli risultati. So bene che, in pratica, codesto criterio non l'abbiamo potuto soventi utilizzare e che anch'esso può, entro a certi limiti, offrire qualche incertezza, ma, ad ogni modo, esso, almeno teoricamente, rimane e fa sì che la delimitazione della specie sia veramente molto meno arbitraria che quella delle altre categorie del sistema.

Si può dunque perfettamente intendere come la specie ci appaia un'entità più reale senza tuttavia dare ad essa una posizione privilegiata; essa rimarrebbe, come già da molti si ammette, una categoria come le altre, solo distinta da esse per un determinato e riconoscibile grado di affinità che intercede fra i suoi componenti.

Veramente in favore dell' ipotesi che il tratto d'evoluzione intercedente fra due successivi sdoppiamenti della specie in dne nuove specie fosse semplicemente rettilineo sembrava parlare il fatto che parecchie specie ci appaiono come il prodotto di serie filetiche che si possono risalire paleontologicamente per epoche lunghissime, durante le quali esse ci si mostrano sempre rettilinee. È però da ricordare che nell'Ologenesi è compenetrata la legge della « riduzione progressiva della variabilità filogenetica », secondo la quale l'evoluzione deve condurre a « specie terminali » la cui evoluzione ulteriore (che tende a far

Digitized by Google

capo ad una completa fissità) si mantiene rettilinea o tutt'al più dà origine a ramuscoli destinati a non raggiungere mai il valore di nuove specie.

Ho parlato dianzi della delimitazione fra specie collateralmente affini. Per ciò che riguarda invece i limiti fra specie che si susseguano cronologicamente in una linea filetica (cioè fra una specie-madre e ciascuna delle sue specie-figlie) si sarà notato che colla nostra variante non si può più dire, nemmeno teoricamente, dove sia l'inizio e la fine di una specie, mentre nel nostro primo concetto una specie incominciava (teoricamente) al punto in cui una linea filetica si biforcava e, dopo una lunga evoluzione rettilinea, terminava alla prossima biforcazione. Di fatto, poichè nella nostra nuova variante una specie comprende il prodotto globale di più ordini successivi di dicotomie, è chiaro che essa specie si può far incominciare da qualsiasi biforcazione, precisamente a quel modo che un decennio si può far incominciare da qualunque annata.

Questa maggiore « relatività della specie » costituisce certo una complicazione (per vero unicamente teorica). Non se ne può tuttavia ricavare una obbiezione, poichè si tratta, in fondo, di quella medesima relatività davanti alla quale si trovano i paleontologi quando vogliono stabilire i limiti fra le forme (« mutazioni » di Waagen) che si susseguono cronologicamente in una stessa serie filetica.

Per ciò poi che riguarda puramente la questione di principio, ho già detto che la nuova variante non contraddice alle tesi fondamentali dell'Ologenesi; aggiungo ora che essa non è nemmeno in disaccordo colle proposizioni (A, B, C; capit. VII, p. 215 dell'Olog.) che sole io ho tenute per « abbastanza sicure » circa il possibile meccanismo intimo delle scissioni filogenetiche. Anzi si è appunto trattando delle possibili modalità secondarie di tale meccanismo che avevo rilevato come una di esse avrebbe condotto necessariamente alla nuova variante (Olog., capit. VII, p. 221, nota 5ª).

Tutto ciò considerato, io ritengo ora che la modalità secondaria dell'Ologenesi della quale ci si siamo qui occupati sia almeno tanto degna di considerazione quanto quella da me ammessa nel mio volume. Se si accetta questa nuova modalità, allora quella prima si può considerare come rappresentante una descrizione più schematica del fenomeno.

Notiamo che questa variante potrebbe benissimo non escludere interamente la prima. Potrebbero p. es., essere state il prodotto diretto di una sola dicotomia le specie più antiche, radicali, quelle che furono capostipiti di grandi gruppi e i cui idioplasmi dovevano essere fin dall'inizio più differenti; potrebbero invece comprendere più ordini di dicotomie le specie successive (ciò almeno sino ad un certo punto oltre il quale le possibili dicotomie si riducono e la specie si avvia alla fissità). Ma su tutto ciò per ora non è il caso di insistere.

Digitized by Google

*
* *

Quali modificazioni porterebbe nell'Ologenesi l' introduzione di questa variante? Nessuna, all' infuori di quel diverso modo di considerare la specie, modo che ci permetterebbe di comprenderne meglio l' intima complessità. Tutto il resto rimane invariato e le spiegazioni ologenetiche dei tanti altri fatti (riguardanti la tassonomia, la paleontologia, la biogeografia, ecc.) rimangono le stesse. La spiegazione ologenetica degli adattamenti rimarrebbe pure immutata; anzi, per ciò che riguarda l'adattamento all'ambiente, acquisterebbe anche maggiore efficacia, perchè così, entro i limiti d'una specie, si avrebbero normalmente svariate forme infraspecifiche delle quali qualcuna può possedere caratteri (ereditari) più squisitamente adatti all'ambiente stesso.

Ognuno potrà vedere da sè quali sono le espressioni contenute nel mio volume sull'Ologenesi le quali, coll' introduzione della nuova variante, dovrebbero essere modificate.

Nel capit. IV la variante porterebbe a modificare alquanto la definizione di « specie filetica [1] o « filomero » (pp. 115-117). Colà è detto che la specie filetica « viene per noi ad essere costituita da tutto l' internodio che sta fra due successivi sdoppiamenti della specie o, ad ogni modo, da tutto il tratto rettilineo d'evoluzione che si è prodotto dopo l'ultimo sdoppiamento ». Tutto ciò sta sempre, salvo l'aggettivo « rettilineo » [2] e l'espressione « l' internodio » la quale diventa impropria e va sostituita con « tutto il tratto di evoluzione ». Sarà meglio chiamare più precisamente *filomero specifico* il filomero (o segmento di phylum) così inteso nel senso di *specie filetica*, comprendente tutto il tratto di evoluzione fra uno sdoppiamento della specie in due specie e lo sdoppiamento successivo (il quale ultimo nelle specie terminali viene naturalmente a mancare). E qui non è da dimenticare quanto è stato detto più sopra circa la relatività della specie filetica per quanto riguarda il suo inizio e la sua fine.

Nel capit. VI (Appendice, pp. 182-189) bisogna aggiungere ai diversi modi in cui si possono originare le « forme infraspecifiche » quello che risulta, come si è detto, dalla nuova variante.

Infine nel capit. VII le modificazioni interessano soprattutto (a pp. 221-222) la nota 5ª. *Se le scissioni dei determinanti in nuovi determinanti fra loro complementari possano, anzichè sincrone, essere successive.* Di questa nota biso-

(1) Questa « specie filetica » non coincide in principio colla « specie sistematica » perchè quest'ultima incomincia solo al punto in cui due specie sorelle sono divenute distinguibili l'una dall'altra.

(2) Del resto il filomero specifico può anche (figuratamente) chiamarsi rettilineo poichè comprende tutto quel complesso di forme (contemporanee o successive) che sono ancora tanto affini tra loro da costituire una medesima specie.

Digitized by Google

gnerà mutare la conclusione nel senso che si possa anche accettare l'ipotesi che nella nota stessa è presa in esame. (Nella spiegazione degli schemi A e B, a pp. 209 e 214, è seguita l'ipotesi che le suddette scissioni siano sincrone)

Dichiaro ancora qui (come ho già fatto nell'Ologenesi, p. 222) che anche per me queste discussioni su modalità secondarie sono premature. Ho voluto tuttavia illustrare qui la modalità secondaria espressa nella nuova variante perchè chi non avesse trovata soddisfacente quella che è stata invece ammessa nel mio volume non ne traesse argomento per respingere tutta quanta la teoria.

Biologia. — *Nuove esperienze sul comportamento ereditario delle capacità di sviluppo dell'uovo. La partenogenesi in incroci tra razze uni e bivoltine di Bombyx mori.* Nota del prof. DARWIN WEN, presentata [1] dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Il risultato fondamentale ottenuto dal Jucci nelle esperienze sul bivoltinismo, fu il diverso comportamento, alla prima generazione, di tre incroci, allevati contemporaneamente e nelle stesse condizioni ambientali, d'una medesima razza bivoltina giapponese con tre razze annuali diverse. Dettero le seguenti percentuali di bivoltinismo: ♀ Fossombrone ♂ Nippon, 0 %, ♀ Oro ♂ Nippon 17 %, ♀ Treotti ♂ Nippon 40 % (di ovature che, invece di arrestarsi in diapausa invernale, proseguirono lo sviluppo embrionale e schiusero dando una seconda generazione nell'anno). Considerò questa differenza di comportamento dei tre incroci come dovuta alla diversità della razza materna, come espressione del diverso grado di tendenza al bivoltinismo presentato dalle tre razze univoltine, che oppongono dunque, diremo così, una diversa resistenza al bivoltinismo portato dal maschio; e pose questo risultato a base dei suoi concetti sulla natura e sul comportamento ereditario del bivoltinismo, considerato come uno dei tanti gradi possibili di voltinismo, di quella capacità di sviluppo dell'uovo che varia indice sensibile della costituzione fisiologica individuale e di razza [2].

Ma fece subito a sè stesso una obiezione di natura fondamentale, capace di compromettere tutto il valore del risultato sperimentale. Per la capacità di voltinismo, come più o meno per tutti i caratteri morfologici e fisiologici, esiste, anche in seno ad una data razza, una larga variabilità individuale. È verosimile, anzi probabile, che non tutte le femmine di razza

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) C. JUCCI, *Le capacità di sviluppo, dell'uovo vergine o fecondato, nei bachi da seta (Bombyx mori)* « Boll. Ist. Zool. R. Univ. Roma », v. III, 1925.

Digitized by Google

Fossombrone, o di Oro, o di Treotti, abbiano la identica capacità di voltinismo: e appunto per questo allevò nella F_1, per ciascuno incrocio, non le uova deposte da una sola femmina incrociata, ma da più femmine: affinchè il seme mescolato rappresentasse più fedelmente il carattere dell'incrocio.

Per la razza bivoltina questo concetto della variabilità individuale in seno alla razza, non è soltanto verosimile e logico, ma anche nettamente verificabile in tutti i casi. Quasi sempre da ogni lotto di bozzoli di razza bivoltina si ottiene una certa proporzione di farfalle (negli ultimi giorni dello sfarfallamento) che si comportano come univoltine.

Non essendovi ragione sufficiente per credere che tra i maschi di razza bivoltina non vi sia una variabilità di tendenza al bivoltinismo analoga, e con tutta probabilità corrispondente, a quella evidente tra le femmine; si può supporre che la diversità di comportamento manifestata dai tre incroci a maschio bivoltino dipenda non solamente, e magari non essenzialmente, dalla varietà della razza materna, ma benanche, e magari specialmente, da una differente tendenza dei maschi della stessa razza impiegati nell'incrocio.

Per troncare nel modo più netto la possibilità di una obiezione così formidabile, che minacciava di compromettere tutto il valore del risultato sperimentale, Jucci immaginò una esperienza decisiva: *impiegare, nei diversi incroci a femmina univoltina da confrontare tra loro, non maschi della stessa razza bivoltina, ma addirittura gli stessi maschi bivoltini,* sicchè le differenze che si riscontrassero nella discendenza degli incroci a padre comune e madre diversa non potessero attribuirsi che alla madre.

Ma anche in questo caso l'esame della discendenza di una sola coppia per ciascuno incrocio non basta, se la variabilità della capacità di voltinismo in una data razza è, come sembra probabile, abbastanza ampia per sovrapporsi parzialmente alla variabilità dell'altra razza. Evidentemente bisogna seguire e comparare le discendenze di parecchie coppie per ogni incrocio (affinchè le variazioni individuali si compensino reciprocamente) studiandone le capacità di sviluppo dell'uovo.

Dico le capacità di sviluppo, perchè passando per associazione logica di idee dallo studio del bivoltinismo a quello della partenogenesi, Jucci vide che tra queste due espressioni della capacità di sviluppo dell'uovo c'è una correlazione intima e indissolubile; e che la partenogenesi come il bivoltinismo, e meglio di esso, può esser considerato indice rivelatore della costituzione fisiologica individuale e di razza. Pensò allora di utilizzare le sue esperienze non solo a risolvere il problema particolare del bivoltinismo, – verificando, contro ogni obiezione, il diverso grado di tendenza delle diverse razze univoltine al bivoltinismo, – ma anche a fornire una nuova e brillante dimostrazione ai suoi concetti sulla correlazione tra bivoltinismo e partenogenesi e sulla diversa tendenza delle razze alla partenogenesi.

Decidemmo dapprima di esaminare la discendenza di ciascuna ovatura – cioè il carattere delle uova deposte dalle femmine di ciascuna famiglia –

Digitized by Google

metà col metodo del bivoltinismo, metà col metodo della partenogenesi. Una metà, dunque, delle femmine di ciascuna famiglia avrebbe dovuto essere accoppiata al maschio, per esaminare poi se le uova deposte fossero uni o bivoltine; l'altra metà si sarebbe dovuta mantenere vergine, per esaminare il grado di tendenza alla partenogenesi nelle uova deposte.

Data l'intima correlazione tra bivoltinismo e partenogenesi, la graduazione delle capacità di sviluppo secondo la tendenza alla partenogenesi, avrebbe dovuto, per le varie razze, coincidere colla graduazione secondo la tendenza al bivoltinismo. Ma, anzitutto, il grado di tendenza al bivoltinismo, come alla partenogenesi, essendo variabile negli individui - in rapporto evidente colla precocità di sviluppo (più grande nei più precoci) - si sarebbero dovute concedere all'accoppiamento e serbare vergini, rispettivamente, per ciascuna giornata di sfarfallamento e per ciascuna deposizione, la metà delle femmine. Ma questo avrebbe portato un notevole sovraccarico di complicazioni e difficoltà, e, del resto, il numero delle femmine per ciascuna giornata di sfarfallamento era troppo piccolo perchè il metodo, teoricamente ingegnoso, potesse riuscire praticamente utile.

D'altra parte, l'esame della tendenza al bivoltinismo non ammette che due gradi: l'univoltinismo (*diapausepidosi*) e il bivoltinismo (*sinechepidosi*), giacchè le deposizioni miste che presentano capacità intermedie di sviluppo sono rare, e poco frequenti le deposizioni nelle quali il grado di colorazione, più leggero o più tardivo, indica gradazioni nelle capacità di bivoltinismo dell'uovo.

L'esame, invece, della tendenza delle uova d'una deposizione alla partenogenesi, permette una graduazione molto meno grossolana, espressa per es. dalla percentuale di uova, di ciascuna ovatura, che presentano un principio di sviluppo partenogenetico spinto sino ad un grado più o meno avanzato.

Sicchè l'esame della tendenza alla partenogenesi si presenta più adatto che quello del bivoltinismo a valutare le capacità di sviluppo dell'uovo. E del resto, l'esame della tendenza alla partenogenesi ricomprende in sè quello della tendenza al bivoltinismo, giacchè le uova manifestano, anche nel loro sviluppo partenogenetico, il loro carattere sinechepidòsico o diapausepidòsico. Le uova vergini di razza univoltina si pigmentano nella sierosa, se cominciano a svilupparsi, e in tutti i casi non sorpassano lo stadio nel quale sarebbero arrivate in diapausa invernale, se fossero state fecondate. Le uova vergini di razza bivoltina cominciano e continuano a svilupparsi senza colorarsi affatto, o presentano una leggera colorazione facile a riconoscersi; e spesso arrivano sino allo stadio di embrioni più o meno maturi. Dunque, anche esaminando le uova col solo metodo della partenogenesi, si può riconoscere il loro grado di tendenza al voltinismo [1].

(1) C. Jucci, *La partenogenesi naturale nei bachi da seta*, « Rivista di Biologia », v. VIII, fasc. I, 1926.

Digitized by Google

Nel Giugno 1924, sfarfallando i lotti delle razze pure, allevate per studiarne con metodo statistico la capacità di partenogenesi, Jucci scelse per i suoi incroci, come razza bivoltina la Nippon giapponese, e come univoltine la Gialla indigena e la Bianca chinese, tutte due univoltine ma a tipo metabolico notevolmente diverso, cui doveva corrispondere, secondo lui, diversa capacità di voltinismo.

Scelti 25 maschi bivoltini Nippon li accoppiò, successivamente, prima con una femmina Bianca chinese e poi con una femmina Gialla indigena (o viceversa) sì da formare 50 coppie aventi a due a due il maschio comune. Raccolse in tante celle isolate le ovature corrispondenti. Eliminate le malate di pebrina, restarono 14 coppie corrispondenti nelle due serie.

Essendo io, nell'autunno 1924, passato dalla Stazione Bacologica di Padova all'Istituto Superiore Agrario di Portici, e avendo cominciato a lavorare col Jucci, nell'Istituto Bacologico, sulle capacità di sviluppo dell'uovo, imparando e applicando i suoi metodi di ricerca (1), Jucci affettuosamente mi affidò, per l'anno successivo 1925, la continuazione dei suoi esperimenti, lo studio degli incroci da lui preparati nel Giugno 1924.

Le due serie di ovature furono incubate (Aprile 1925) nelle identiche condizioni (precauzione di somma importanza, essendo le capacità di sviluppo dell'uovo - bivoltinismo e partenogenesi - sensibilissime alle condizioni estrinseche) e furono allevati nelle identiche condizioni, a ovature isolate, i bachi.

Cominciando per ciascuna famiglia lo sfarfallamento, nel Giugno, ogni mattina gettavo i maschi e separavo le femmine sotto altrettanti coni di zinco, prendendo le cure più scrupolose per garantirne coll'isolamento la verginità.

L'esame delle ovature venne da me fatto per le famiglie del ♀ Bianco chinese ♂ bivoltino, una prima volta 20 giorni dopo la deposizione, una seconda volta 45 giorni dopo; per le famiglie del ♀ Giallo indigeno ♂ bivoltino l'esame fu da me compiuto un mese dopo la deposizione; per alcune di esse un secondo esame, 40 giorni dopo, dette risultati poco diversi.

In parecchie ovature, già al momento della deposizione, le uova si presentavano diverse da quelle delle altre ovature: più grosse, d'un giallo più intenso, e più turgide. In queste ovature, tra la maggior parte delle uova restate gialle, alcune mostrarono, pochi giorni dopo la deposizione, un abbrunimento, più spesso parziale, qualche volta totale, sì da rassomigliare alle uova fecondate di razza bivoltina, in diapausa. Evidentemente queste uova avevano perduto la capacità di bivoltinismo e manifestavano, anche nello sviluppo partenogenetico, il loro carattere diapausepidòsico. È assai interessante notare che queste deposizioni apparivano in più gran numero nelle famiglie di ♀ Giallo indigeno ♂ bivoltino che tra quelle di ♀ Bianco chinese ♂ bivoltino.

(1) WEN DARWIN, *Precocità di sviluppo e tendenza alla partenogenesi nei bachi da seta di razza gialla indigena*, «Boll. Soc. Natural.», Napoli, sett. 1925.

Digitized by Google

Le altre ovature, invece - poco numerose nelle famiglie di ♀ Giallo indigeno ♂ bivoltino, ma costituenti la maggioranza nelle famiglie di ♀ Bianco chinese ♂ bivoltino – presentavano un tipo di sviluppo partenogenetico nettamente bivoltino. Nessun uovo tra esse mostrava abbrunimento della sierosa: quelle che presentavano una pigmentazione apparivano solo lievissimamente o lievemente colorate in rosa. Raramente il colore dell'uovo era rosso o vivacemente rosso.

Un certo tempo dopo la deposizione comparirono uova oscure, ma non per abbrunimento della sierosa, sibbene per trasparenza di un contenuto nero, dato da un embrione più o meno maturo, qualche volta allo stato di bacolino perfetto rannicchiato entro l'uovo.

Stabilite varie categorie - uova leggerissimamente rosate, uova leggermente rosate, uova rosse, uova vivamente rosse, uova ad embrione imperfetto, uova a bacolino perfetto, e, tra le uova a tipo univoltino, uova parzialmente annerite e uova completamente annerite – ho determinato per ogni ovatura il numero di uova più o meno colorate secondo le varie categorie.

Veramente il grado di colorazione non è un indice sicuro del grado di sviluppo partenogenetico. Così non è niente affatto sicuro che le uova rosate presentino un grado di sviluppo partenogenetico superiore a quello delle uova restate incolore: un embrione maturo può comparire e compare, difatti, più spesso in queste che in quelle.

Si può tuttavia cercar di assegnare un *valore numerico* al grado di sviluppo dell'uovo, secondo il suo colore: 1 per le uova annerite, 2 per le rosate, 3 per le rosse, 4 per quelle ad embrione imperfetto, 5 per quelle a bacolino maturo. Moltiplicando il numero delle uova di ciascuna categoria per il coefficiente rispettivo che esprime il grado di sviluppo, sommando, e dividendo per il numero delle deposizioni, si avrà il *grado medio di capacità di partenogenesi* della famiglia.

Ora, per le 12 famiglie, il grado medio di partenogenesi è superiore nell'incrocio a femmina Bianco chinese, cioè i valori dei lotti corrispondenti dell'incrocio a femmina Gialla indigena si presentano sempre spiccatamente inferiori. Il rapporto tra i gradi medi di partenogenesi di due famiglie corrispondenti, che hanno in comune il padre e diversa la madre, è sempre superiore ad 1: oscilla tra 1 e $\frac{1}{2}$ e 10 e $\frac{1}{2}$. Dunque le due razze univoltine, incrociate con una stessa razza bivoltina, hanno dato una discendenza diversa, quanto alla tendenza alla partenogenesi; e questa differenza, che non può attribuirsi al maschio che è comune - non solamente della stessa razza ma proprio lo stesso individuo - deve evidentemente dipendere dalla diversità delle femmine impiegate nell'incrocio.

È vero che il grado di partenogenesi cambia molto da famiglia a famiglia, nel medesimo incrocio: in quello a femmina Bianco chinese come in quello a femmina Giallo indigena (sicchè qualche famiglia dell'incrocio a Bianco chinese presenta un grado di partenogenesi inferiore a quello di

Digitized by Google

certe famiglie - quelle a grado più elevato – dell'incrocio a femmina Giallo indigena). Ma questa variazione è il prodotto di due fattori: la differenza di tendenza alla partenogenesi presentata dalle diverse femmine Bianco chinesi e Giallo indigene, rispettivamente, e la varietà dei diversi maschi bivoltini.

Il fatto che *di due famiglie corrispondenti, a maschio comune, quella a femmina Bianco chinese presenta sempre un più elevato valore di grado di partenogenesi*, mostra che la variabilità delle femmine d'una medesima razza univoltina, come la Bianca chinese, è relativamente piccola, tale, insomma, da non interferire colla variabilità delle femmine dell'altra razza, Giallo indigena. Questo risultato prova che realmente le varie razze univoltine non sono identiche per rapporto alla capacità di sviluppo dell'uovo, ma posseggono un diverso grado di tendenza al voltinismo e alla partenogenesi, grado più elevato, nel nostro caso, per la razza Bianco chinese.

Alla stessa conclusione porta l'esame del grado di tendenza all'univoltinismo, calcolato dal numero di uova univoltine presenti nelle ovature delle famiglie a femmina Bianco chinese (591 in 751 ovature) rispetto al numero di uova univoltine presenti nelle ovature delle famiglie a femmina Giallo indigena (1828 in 862 ovature); o calcolato dal numero di ovature univoltine (67 nelle 751 delle famiglie a femmina Bianco chinese; 219 nelle 862 delle famiglie a femmina Giallo indigena).

Facendo la media tra i due calcoli, il rapporto tra i gradi di tendenza all'univoltinismo

$$\frac{\text{Gr. U. } ♀ \text{ Gialla indigena } ♂ \text{ bivoltino}}{\text{Gr. U. } ♀ \text{ Bianca chinese } ♂ \text{ bivoltino}}$$

risulta 2.7: pressochè identico al rapporto tra i gradi di sviluppo partenogenetico:

$$\frac{\text{Gr. P. Bianco chinese bivoltino}}{\text{Gr. P. Giallo indigeno bivoltino}} = 2.6$$

Essendo, evidentemente, il valore che esprime il grado di tendenza al bivoltinismo l'inverso del valore che esprime il grado di tendenza all'univoltinismo:

$$\frac{\text{Gr. B. } ♀ \text{ B. ch. } ♂ \text{ b.}}{\text{Gr. B. } ♀ \text{ G. I. } ♂ \text{ b.}} = \frac{\text{Gr. P. } ♀ \text{ B. ch. } ♂ \text{ b.}}{\text{Gr. P. } ♀ \text{ G. I. } ♂ \text{ b.}} = 2.65.$$

L'esame del grado di tendenza all'univoltinismo, dunque, non solo conferma che le varie razze univoltine presentano gradi diversi di capacità di sviluppo dell'uovo (ed esclude così che si tratti, nel caso del voltinismo, di carattere unitari mendeliani) ma dà di queste capacità una graduazione identica a quella che possiamo ricavare dall'esame del grado di capacità di partenogenesi: nuova, brillante conferma della correlazione intima ed indissolubile fra capacità di partenogenesi e capacità di voltinismo, capacità di sviluppo dell'uovo vergine e dell'uovo fecondato.

Digitized by Google

Zoologia. — *Sulla sistematica biologica dei Petromizonti.* Nota[1] di G. COTRONEI, presentata[2] dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Lo studio morfologico ed ecologico da me compiuto sui Petromizonti, i cui risultati ho esposto in una serie di Note riassuntive pubblicate in questo periodico[3] e in Memorie pubblicate altrove, mi consente oramai di esprimere più nettamente alcune opinioni sulla sistematica dei Petromizonti, opinioni che il lettore già trova abbozzate nel testo dei miei precedenti lavori.

Dichiaro subito che la sistematica cui intendo riferirmi è una sistematica biologica. Anzi, i Petromizonti sembrano fatti appositamente per dimostrare la vana fatica cui possono incorrere i sistematici quando essi catalogano gli organismi per qualche carattere morfologico descrittivo, a prescindere dalla completa conoscenza del ciclo biologico. Gli stessi caratteri, ben più importanti, della struttura istologica e dell'organizzazione interna, possono essere correlati a fenomeni etologici e al ciclo vitale, e anche essi, quindi, possono aver valore solo quando la stabilità del carattere risulti indipendente da quelle variazioni inerenti al ciclo biologico.

L'opinione prevalente dei sistematici è (o era) che i Petromizonti, almeno dei nostri paesi, costituiscono tre specie distinte: *Petromyzon marinus, P. fluviatilis, P. Planeri.*

Ci sono stati dei sistematici che hanno moltiplicato i generi (Berg) basandosi sui caratteri della placca mascellare superiore; ma il Borri[4] ha già dimostrato che questo carattere non si presta per una netta differenza sistematica, e d'altra parte bisogna tener conto del fenomeno della muta dei denti cornei e delle modificazioni inerenti all'accrescimento delle varie forme; e ciò anche per i denticoli labiali[5].

Un altro carattere sistematico è stato considerato nelle lamprede ed è l'avvicinamento o fusione delle pinne dorsali che si verifica nel *Petromyzon Planeri* e non era ammesso, fin agli ultimi tempi, nelle altre forme.

(1) Dall'Istituto Zoologico della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 19 dicembre 1926.

(3) Rend. R. Accademia dei Lincei, anni 1922, 1924, 1926.

(4) BORRI C., *Considerazioni critiche sulla scissione del genere Petromyzon.* « Atti della Società Toscana di Scienze naturali. Memorie », vol. XXXIII, 1920.

(5) Anche questi caratteri io penso vadano riveduti, sia tenendo conto dei processi di accrescimento, sia delle modificazioni inerenti all'abito di nozze (mute, ecc.).

(6) GAGE S. E., *The Lake and brook lampreys of New York, especially those of Cayuga and Seneca lakes.* « The Wilder Quarter-Century Book », Ithaca N. Y., 1893.

Digitized by Google

Ma qui torna opportuno ricordare un vecchio lavoro del Gage[6], passato completamente inosservato, anche se viene citato in letteratura.

Il Gage ha studiato le lamprede del lago Cayuga e del lago Seneca e crede, inoltre, che le medesime lamprede vivano nel lago Ontario.

Gage ammette l'entità specifica della lampreda di lago: *Petromyzon dorsatus*; ma si tratterebbe della forma, originariamente marina, inclusa nei laghi predetti quando questi, per vicende geologiche, perdettero ogni comunicazione col mare; l'ambiente poi avrebbe indotto delle variazioni.

La lampreda di lago è considerevolmente più corta della lampreda marina: all'epoca della maturità sessuale il rialzo dorsale è nel maschio più rilevante in quella di lago; così pure in questo si ha più spiccata *la fusione delle pinne dorsali.*

È anche interessante, per stabilire la identità della forma studiata dal Gage, riferire alcune misure e medie che si trovano nel suo lavoro. Queste medie sono ricavate da un numero esiguo di esemplari, non più di dieci o di nove. Per le lamprede di lago, prese non all'epoca della maturità sessuale, si ha per i maschi una media di lunghezza totale di 346 mm., per le femmine di 321 mm. È notevole la grande variazione individuale, che si riscontra anche nelle altre misure. Nei maschi si va da un minimo di 250 mm. a un massimo di 405 mm.; nelle femmine da un minimo di 250 mm. a un massimo di 420 mm. I massimi di queste dimensioni sono notevolmente superiori alle misure da me date per il *Petromyzon fluviatilis* pescato nel Tevere, ma i minimi rientrano nelle dimensioni della forma da me studiata; i massimi, a loro volta, si avvicinano a quelli dati dal Lönnberg per i *Petromyzon fluviatilis* del bacino del Mar Baltico.

Per le lamprede di lago misurate in abito di nozze, e prese in tale stagione, Gage dà per i maschi una media di 322 mm. e per le femmine una media di 319 mm. Va subito rilevato che gli esemplari misurati in abito di nozze non erano gli stessi avanti riferiti, quindi il Gage non ha dedotto, nè lo poteva, il fenomeno dell'accorciamento, che io ho verificato sperimentalmente. Il Gage stesso nota che, data la grande variabilità individuale e il numero esiguo delle misure, nessuna conclusione può trarsi; ma rileva, tuttavia, che mentre nella lampreda di lago le femmine sembrano più corte dei maschi, ciò non avviene nella lampreda di mare e in quella di ruscello, dove le cifre (su pochi esemplari) dànno per le femmine una lunghezza maggiore, e inoltre osserva che l'esame proporzionale delle varie parti del corpo non lascia scorgere un valore apprezzabile per la determinazione specifica delle varie forme.

Queste ricerche del Gage ho voluto ricordare perchè io son d'avviso che la lampreda di lago studiata dal Gage possa corrispondere al nostro *Petromyzon fluviatilis*, magari con qualche carattere di variazione locale. Argomentocontrario potrebbe essere, secondo alcuni, l'asserzione del Gage che la lampreda di lago è una forma divenuta esclusivamente di acqua dolce. Il *Petromyzon dorsatus*,

Digitized by Google

cioè, non sarebbe soggetto a migrazioni anadromiche, come è ormai sicuro per il *P. fluviatilis*; e la sua biologia sarebbe quindi più affine al *P. Planeri*.

Qui torna opportuno rilevare che se ciò fosse veramente dimostrato, si avrebbe, secondo me, una prova dell'ampiezza della norma di reazione dei Petromizonti. La specie unica, come entità sistematica, darebbe luogo a varie razze biologiche, in rapporto ad adattamenti ambientali, e queste razze potrebbero poi tornare, in condizioni opportune (ad esempio quelle ritenute dal Gage), alle condizioni biologiche della forma originaria, il *Petromyzon Planeri*, secondo quanto io penso. Questa prova, però, non la possiamo ritenere raggiunta nel caso in esame. Perchè mentre lo stesso Gage nel testo del lavoro dice, pag. 478: « The final and definite proof that the lake lampreys remain permanently in the lakes and do not go to the ocean at any time, has been abundantly obtained during the past 18 years by the capture of examples of the adult form of all sizes in the waters of the lake during every month of the year... », a pie' di pagina aggiunge, in nota, che l'anguilla si trova abbondantemente nei laghi da lui considerati e quindi, dati i risultati già raggiunti nella biologia dell'anguilla, bisogna pensare che il passaggio ai mari non è impossibile.

I risultati raggiunti dal Gage sul *Petromyzon dorsatus*: atrofia dell'intestino nell'individuo in abito di nozze e non correlativa alla così detta metamorfosi, mostrano, anche per questo lato, una corrispondenza perfetta con quanto io ho dimostrato nel *Petromyzon fluviatilis*; la medesima condizione ho io ritrovato nel ciclo biologico del *Petromyzon marinus*. Il passaggio al mare è dunque da ritenere una condizione necessaria perchè i Petromizonti possano, in una determinata fase del ciclo vitale, proseguire nel loro accrescimento. Si ha pertanto una netta e precisa delimitazione ecologica tra il *Petromyzon Planeri* da una parte e il *Petromyzon fluviatilis* e *marinus* dall'altra. Il *P. Planeri* è soltanto una forma di acqua dolce: tutto il ciclo biologico si compie nel medesimo ambiente, alla metamorfosi (adopero questa parola perchè usata da molti autori) succede immediatamente la maturità sessuale con i processi di atrofia che conducono alla morte l'animale, senza che dalla fase di metamorfosi abbia potuto riprendere nutrimento: fatto questo che non si verifica nelle due forme anadromiche che smettono di nutrirsi quando risalgono i fiumi per andare in maturità sessuale: la biologia dell'abito di nozze è perfettamente uguale nel *Petromyzon fluviatilis* e nel *Petromyzon marinus*.

Si potrebbe ora pensare, come del resto fu pensato, che il *P. marinus* e il *P. fluviatilis* siano dei *P. Planeri* che siano riusciti ad andare al mare. Purtroppo qui entriamo in quel campo da cui io ho sempre cercato di rifuggire: l'indagine sull'origine di processi che non riusciamo a ricondurre entro modalità su cui possiamo sperimentare o direttammente osservare.

Tuttavia voglio mettere in evidenza alcuni fatti concreti che io rilevo per il primo.

Digitized by Google

Il *Petromyzon Planeri*, larva e adulto, si mostra, a quanto ha osservato il Tagliani [1], per il materiale proveniente dal fiume Sarno, costantemente infetto da un nematode [2]: il *Dacnitis sthelmioides* e il Tagliani ne deduce giustamente che l'infezione avviene precocemente; sappiamo pure che tale infezione non è di carattere locale. Da tutte le osservazioni da me compiute sul *Petromyzon fluviatilis* (Fiumicino e corso del Tevere) ho rilevato che nessun esemplare era affetto da *Dacnitis sthelmioides*: una sola volta trovai un esemplare affetto da un nematode, ma escludo che sia il parassita comune nel *P. Planeri*. Non può sfuggire l'importanza di tale constatazione. È palese che nel *P. Planeri* e nel *P. fluviatilis* si mette in evidenza così una netta differenza di carattere biologico. Se gli ammoceti (limitiamoci a questo) erano gli stessi per le due forme, e se questi nel *P. Planeri* sono costantemente infetti, come mai quegli ammoceti dànno poi origine a dei *P. fluviatilis* non infetti? Si può magari pensare che l'infezione sparisca in seguito, in questa forma, con il cambiamento di ambiente; ma bisogna riconoscere che una tale supposizione, fin quando non sia avvalorata, non elimina i nostri dubbi.

Anche nei *Petromyzon marinus* io non ho riscontrato l'infezione del *Dacnitis sthelmioides*; le mie osservazioni personali sono in tal caso assai limitate; ma non mi consta sia stata riscontrata da altri.

Un altro carattere differenziale, da me rilevato e che metto in rapporto con la differente ampiezza del ciclo vitale, si desume dallo studio dell'organo insulare (considerato un tempo come un pancreas completo). Nel *Petromyzon fluviatilis* e nel *P. marinus* io ho riscontrato, nella forma adulta, la tipica struttura dei cordoni insulari di Langerhans. Nel *P. Planeri* si ha questo carattere differenziale: da principio nella larva esistono ugualmente dei cordoni cellulari pieni, che ora posso omologare ai cordoni delle altre due forme, per quanto, data la differente mole, assai meno sviluppati; ma già nella larva si riscontra un processo di citolisi che produce una vacuolizzazione dei cordoni, processo che si va sempre più accentuando a misura che l'animale si avvicina al termine del suo ciclo vitale, assai più breve che nel *P. fluviatilis* e nel *P. marinus*. Anche in queste due forme io riscontro dei processi che possono oggi considerarsi della stessa natura; ma questi intervengono assai più tardi e in una forma, tenuto conto dello sviluppo complessivo dell'organo, assai limitata. Ne risulta, nell'esame strutturale, una profonda differenza tra la forma di acqua dolce e le due forme anadromiche.

Anche per questa differenza possiamo estendere la considerazione precedente. Gli ammoceti destinati a divenir *Petromyzon Planeri* portano im-

(1) Tagliani G., *Sulla riduzione dell'intestino durante l'evoluzione di Ammocoetes branchialis in Petromyzon planeri Bloch.* «Bollettino della Società Eustachiana di Camerino», anno XIII, 1915, p. 3.

(2) Le mie osservazioni sul *P. Planeri* confermano queste del Tagliani.

Digitized by Google

pressi fin da principio dello sviluppo il loro destino; fin da fasi precoci dello sviluppo larvale si manifestano quelle condizioni peculiari di un più breve ciclo vitale; e ciò si rispecchia, in seguito, anche nelle condizioni dell'apparato digerente: tubo digerente e fegato sono in condizione di funzionare, dopo la metamorfosi, nel *P. fluviatilis* e *marinus*, non lo sono più nel *P. Planeri*.

Se questi dati, da me accertati, sono definitivamente acquisiti, rimane d'altra parte la completa caduta degli antichi caratteri sistematici. Abbiamo veduto che già Gage aveva visto molti anni or sono che la fusione delle pinne dorsali è un carattere inerente alla maturità sessuale, è quindi un carattere sessuale secondario. Nella prima Nota (1924) sul *Petromyzon fluviatilis*, quando parlai dei processi di atrofia inerenti all'abito di nozze, dissi pure che si formavano i caratteri sessuali secondari: volevo appunto riferirmi anche a questo, comune nel *P. Planeri* e già osservato dal Gage nel *P. dorsatus* ed in alcuni casi nel *P. marinus* (p. 428), ma non lo descrissi in maniera esplicita, trattandosi di Nota riassuntiva.

Il Weissenberg (1), che non sembra conoscesse nè le ricerche del Gage nè le mie, ha descritto nel *P. fluviatilis* i caratteri inerenti all'abito di nozze, impostando le ricerche così come le avevo impostate io: il Weissenberg vede così sparire i caratteri sistematici tra *Petromyzon Planeri* e *Petromyzon fluviatilis*.

Il lavoro del Weissenberg è soprattutto notevole, perchè come risultato obbiettivo è la parte veramente originale, in quanto al Weissenberg è riuscito di dimostrare, con mezzo artificiale, la fecondabilità tra *Petromyzon fluviatilis* e *Petromyzon Planeri*. La fecondabilità tra due forme è certamente un carattere di somma importanza per dimostrare l'unità specifica; ma bisognerebbe tuttavia, per avere un valore più sicuro, che questa fecondabilità perdurasse nelle generazioni successive. In condizioni naturali, per quanto sia stato trovato che il *P. fluviatilis* e il *P. Planeri* possano all'epoca della deposizione recarsi negli stessi posti (il Gage per le sue forme ammette una differenza di tempo), tuttavia per le condizioni delle dimensioni del corpo siamo indotti ad escludere che ci possa essere un naturale accoppiamento tra le tre forme considerate in questa Nota.

Così che, mentre i risultati analitici ci dicono che i caratteri sistematici già ammessi non hanno valore differenziale e le ricerche di Weissenberg ci dimostrano la possibilità in via artificiale della fecondazione incrociata, lo studio sperimentale ecologico, avvalorato dall'approfondito esame istologico di alcuni organi, di cui mi sia concesso di rivendicare a me il modesto merito, ci dimostra che esiste una profonda differenza ecologica tra il *P. Planeri*, da una parte, e il *P. fluviatilis* e *P. marinus* dall'altra. A questa

(1) WEISSENBERG R., *Fluss und Bachneunage (Lampetra fluviatilis L. und Lampetra planeri Bloch) ein morphologisch. biologischer Vergleich* « Zoolog. Anzeiger », LXIII Bd., s. 293, 1925.

Digitized by Google

differenza ecologica io ho collegato i caratteri differenziali dell'organizzazione strutturale e dell'ampiezza del ciclo vitale.

Questi sono i risultati obbiettivi. E le conclusioni? Le conclusioni, ne converrà il lettore, sono assai difficili a trarsi: bisognerebbe in linea sperimentale verificare l'ampiezza della norma di reazione dei Petromizonti. È possibile indirizzare embrioni e larve di *P. Planeri*, in condizioni opportune, verso tutt'altro ciclo vitale? E queste condizioni si potranno mai realizzare? Qui ci troviamo ancora una volta innanzi alle più profonde difficoltà che s'incontrano in tali questioni. Come definire e delimitare la specie? Io sospetto che il *P. Planeri* sia la forma originaria e che il *P. fluviatilis* e *marinus* appartengano alla stessa specie morfologica, ma costituenti un'altra razza biologica (che si potrebbe distinguere in due sotto–razze); ma anche rivolgendomi verso tale concetto, io ho tenuto in questa Nota ad esporre i risultati sicuri raggiunti sulla biologia dei Petromizonti e che in ogni modo, quale che sia il valore sistematico, fanno risaltare le differenze di due *costituzioni*: 1° la forma d'acqua dolce, il *P. Planeri*; 2° le due forme anadromiche, il *P. fluviatilis* e il *P. marinus*.

Biologia. — *L'accrescimento dell'alosa del Tevere.* Nota preliminare di U. D'Ancona [1] presentata [2] dal Socio F. Silvestri.

Nelle mie ricerche sulla biologia dell'alosa del Tevere [3] ho rivolto particolare attenzione alla determinazione dell'età e allo studio dell'accrescimento, quale problema fondamentale per uno studio del genere, giacchè l'accrescimento è l'espressione più evidente del metabolismo, di cui ne risente molto sensibilmente tutte le variazioni. L'analisi dell'accrescimento e delle sue variazioni può essere perciò un prezioso metodo per indagare le condizioni che lo regolano e in tal modo valutare i diversi elementi della biologia della specie in esame.

Per la determinazione dell'età, mi sono servito delle squame, unico metodo usabile per delle ricerche su un numero notevole di esemplari, giacchè l'impiego di parti scheletriche o degli otoliti sarebbe stato eccessivamente dispendioso trattandosi di specie di valore commerciale non indifferente. Il mio esame si è basato su quasi mille esemplari appartenenti a tutte le grandezze e presi nelle varie stagioni.

(1) Dall'Istituto di Anatomia e Fisiologia Comparate della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 16 gennaio 1926.

(3) D'Ancona U., *Ricerche sull'accrescimento e sulla maturità sessuale dell'* « *Alosa finta* » (*Cuv.*). « Rend. R. Accad. Lincei », ser. VI, vol. I, p. 43, 1925; Idem, *Ricerche sulla riproduzione dell'* « *Alosa finta* » (*Cuv.*). — Ibid. vol. IV, p. 333, 1926.

Digitized by Google

In tali condizioni, confrontando le squame degli individui progressivamente più grandi e tenendo distinti i due sessi, credo d'essere potuto giungere a risultati complessivamente esatti. Però devo subito dichiarare che dal solo esame di singoli individui non è possibile precisarne l'età.

Ritengo che l'esame delle squame possa dare un ottimo mezzo per la determinazione dell'età soltanto quando si disponga di una serie press'a poco continua di individui. Nel caso delle alose del Tevere il còmpito è facilitato dal fatto che si tratta di una popolazione omogenea e che l'alosa ha un periodo annuale ben definito di riproduzione.

A controllo e conferma dell'esame delle squame mi sono servito della seriazione degli individui. Seriando gli individui giovani secondo la loro lunghezza e tenendoli distinti per i vari mesi ho potuto già in tal modo precisare il loro accrescimento fino all'epoca della maturità sessuale.

Successivamente, dalla frequenza degli individui dei due sessi che ho preso durante la montata nel Tevere, ho potuto riconoscere il numero delle classi di età degli esemplari montanti. Tale confronto statistico mi ha dato un sicuro elemento di controllo all'esame delle squame.

Mi è stato così possibile determinare l'età degli individui esaminati e di precisare la media delle lunghezze raggiunte nelle varie epoche della vita. Non è stata mia intenzione di precisare l'età dei singoli individui, ma le medie, ottenute mediante questo doppio controllo, credo siano fondamentalmente esatte.

I risultati ricavati dall'esame di questo migliaio di individui rettificano i dati preliminari della mia nota del 1925 basati sull'osservazione di 174 esemplari. I dati rettificati permettono di costruire una curva di accrescimento che nell'insieme, qualora si astragga dalle oscillazioni mensili, si presenta a andamento regolare.

Perciò per un primo esame mi è stato necessario tracciare la curva di accrescimento riferendola a un solo periodo dell'anno. Anzichè usare le medie annuali sottoposte a forti variazioni, a causa delle notevoli oscillazioni stagionali, mi sono servito delle medie del mese di aprile, che sono basate su un numero più abbondante di individui, venendo le alose pescate in quel mese, durante la montata, con maggior abbondanza.

Nella unita tabella sono riportate le misure medie di lunghezza e peso, distinte per i due sessi, per i mesi di aprile dei diversi anni di età. Sono tenute unite le medie dei due sessi fino all'aprile del IV anno poichè fino a quell'epoca l'accrescimento dei due sessi differisce di poco.

Dalle curve ottenute mediante questi dati si riconosce che gli accrescimenti in peso e in lunghezza non sono punto simili e che l'accrescimento in peso non è neppure simile a quello in volume, considerato questo proporzionale al cubo della lunghezza.

Mentre si riconosce facilmente che la curva dell'accrescimento in lunghezza assomiglia a una parabola, quella dell'accrescimento in peso asso-

Digitized by Google

miglia alla curva delle reazioni autocatalitiche secondo l'equazione di Robertson

$$\log \frac{x}{A - x} = K(t - t_1)$$ (1).

I valori teorici, ottenuti rispettivamente secondo l'equazione di Robertson e secondo quella della parabola (2), sono riportati sulla tabella accanto ai valori empirici, da cui si vede che differiscono poco (3).

Vediamo dunque che l'accrescimento in lunghezza segue un andamento diverso da quello dell'accrescimento ponderale, per cui se assumiamo la equazione

$$P = kL^3$$ (4)

in cui P indica il peso e L la lunghezza, come quella che indica la relazione tra peso e lunghezza, risulta che il k non è un valore costante ma che varia col progredire dell'età come Thompson aveva rilevato che variava col progredire della grandezza.

Dall'esame dei dati della tabella appare che tanto per la lunghezza che per il peso l'accrescimento per i due sessi è diverso, che i maschi raggiungono prima il loro massimo accrescimento che è minore che nelle femmine. Tra gli esemplari da me esaminati si rileva pure che si trovano femmine di età più avanzata che i maschi. Possiamo dire che questi compiono prima il loro ciclo vitale che le femmine.

Se passiamo poi a vedere come si comporta l'accrescimento nei vari mesi dell'anno, troviamo che tanto l'accrescimento in lunghezza che quello in peso subiscono dei rallentamenti periodici. I rallentamenti dell'accrescimento in lunghezza corrispondono regolarmente ai mesi autunnali. I dati da me esaminati non consentono di precisare se esiste più di un periodo annuale di rallentamento, sembra però che ce ne sia uno anche in giugno in corrispondenza al periodo riproduttivo. Nel complesso le oscillazioni dell'accrescimento in lunghezza possono grossolanamente rappresentarsi con una sinusoide che si sovrappone alla parabola dell'accrescimento annuale come può osservarsi nelle due curve riportate sull'unito diagramma (5).

(1) Vedi ROBERTSON T. B., *On the normal rate of growth of an individual and its biochemical significance*, « Arch. Entwmech. », Bd. XXV, p. 581, 1908.

(2) Per la perequazione delle curve brute in una parabola vedi NICEFORO A., *Il metodo statistico*, Messina, 1923.

(3) Una certa differenza si ha soltanto per i primi tratti delle parabole dell'accrescimento in lunghezza, specialmente per quella delle femmine.

(4) Vedi THOMPSON D'ARCY W., *On growth and form.*, Cambridge 1917.

(5) Naturalmente le leggere diminuzioni di lunghezza che si osservano nel tratto superiore delle due curve non avvengono in realtà.

Digitized by Google

Se poi passiamo a vedere le oscillazioni periodiche dell'accrescimento ponderale, vediamo che esse seguono pure un periodo annuale e che la loro ampiezza è piccola prima della maturità sessuale, diventa invece più grande dopo, per cui possiamo ammettere che le oscillazioni dell'accrescimento nei primi anni siano dovute alle differenze del metabolismo in rapporto alla temperatura e alla nutrizione, quelle invece che si osservano negli anni successivi sono evidentemente dipendenti per la maggior parte dalla maturazione e deposizione degli elementi germinativi. In questa seconda parte della vita le oscillazioni della prima natura dovranno naturalmente continuare. Per cui possiamo ammettere che nel periodo giovanile si abbiano soltanto oscillazioni dovute alle differenze stagionali nel metabolismo, nel periodo adulto invece a queste oscillazioni si sovrappongono quelle dipendenti dalla vita sessuale.

Io ho calcolato queste oscillazioni periodiche per il valore di k e ho sovrapposto le oscillazioni trasformate in curve periodiche regolari alla curva teorica ottenuta calcolando l'andamenlo del k mediante i dati della parabola dell'accrescimento lineare e quelli della curva autocatalittica dell'accrescimento ponderale secondo l'equazione

$$k = \frac{P}{L^3}.$$

Ho supposto che le oscillazioni dipendenti dal metabolismo potessero essere grossolanamente sostituite con una sinusoide, quelle dipendenti dalla vita sessuale con un'altra curva periodica. Ho sommato queste oscillazioni ai dati della curva del k e ho ottenuto in tal modo una curva teorica che si sovrappone molto bene alla curva bruta ricavata congiungendo i dati del k ottenuti dai valori empirici del peso e della lunghezza [1]. Moltiplicando questi valori teorici del k coi cubi delle lunghezze teoriche secondo i valori avuti mediante la sovrapposizione della sinusoide alla parabola, ho ottenuto dei valori teorici per il peso, che, distinti per i due sessi, sono rappresentati dalle due curve inferiori del diagramma. Queste curve teoriche si sovrappongono molto bene a quelle empiriche, per cui posso ritenere che tanto le curve dell'accrescimento lineare, che quelle dell'accrescimento ponderale, da me in tal modo calcolate e rappresentate sul diagramma, corrispondano all'accrescimento reale delle alose del Tevere. Tale corrispondenza appare evidente dal confronto dei dati teorici con quelli empirici, che saranno pubblicati nel lavoro in esteso.

Le fortissime oscillazioni ponderali del periodo della maturità sessuale sono determinate sia dalla maturazione e deposizione degli elementi germi-

(1) Uno scostamento tra la curva sperimentale e quella teorica si ha soltanto nei primi tempi, evidentemente a causa della differenza dei dati della parabola dalle lunghezze misurate.

Digitized by Google

nativi che dal digiuno che accompagna tutta la montata. Perciò gli individui subito dopo la riproduzione sono enormemente dimagrati. Presso Orvieto mi è stato possibile osservare, per esempio, un maschio di 36 cm. pesante soli 260 gr., mentre altri individui della stessa lunghezza prima della frega pesavano in media 567 gr. Una femmina di 39 cm. dopo deposte le uova pesava 350 gr.; altre della stessa lunghezza, piene di uova, avevano invece ben 880 gr.

Riservo per il lavoro in esteso la discussione di questi risultati. Per la letteratura sull'accrescimento rimando ai numerosi recenti lavori sull'argomento, fra cui a quello di Levi [1]. Le ricerche sperimentali sull'accrescimento sono numerosissime, però quasi sempre basate su allevamenti artificiali (per esempio sui pesci quelle di Ostroumoff, Audigé, ecc.), invece soltanto scarsi sono i dati per l'accrescimento degli organismi in natura, mentre è ovvio che l'accrescimento in condizioni naturali è diverso da quello in condizioni sperimentali.

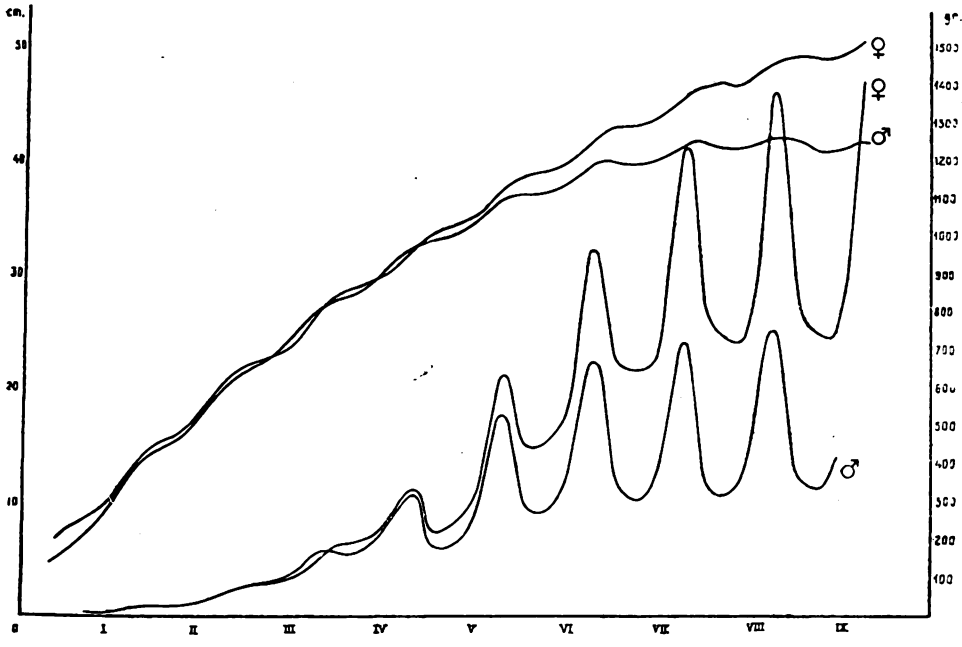
È poi interessante poter disporre di dati sull'accrescimento in natura di pesci dei nostri climi onde poter vedere mediante il confronto con quelli di altre regioni, l'azione dei vari fattori influenti sull'accrescimento, ma anche per questo punto rimando al mio prossimo lavoro in esteso.

TABELLA delle lunghezze (in cm.) e dei pesi (in gr.) sperimentali e teorici raggiunti nel mese di aprile dei diversi anni di età.

Età	Lunghezza				Peso			
	Maschi		Femmine		Maschi		Femmine	
	sperimentale	teorica	sperimentale	teorica	sperimentale	teorico	sperimentale	teorico
I	12.72	12.44	12.72	12.97	18	20	18	20
II	19.00	20.22	19.00	19.93	58	50	58	55
III	28.50	26.82	28 50	26.27	190	140	190	130
IV	31.53	32.24	31.53	31.99	313	305	313	295
V	36.32	36.48	37.33	37.09	523	510	621	575
VI	39.59	39.54	40.64	41.57	642	645	949	885
VII	41.50	41.42	44.72	45.74	700	700	1203	1125
VIII	—	42.12	49.50	48.67	—	720	1307	1250
IX	—	—	—	50.55	—	—	—	1300

(1) LEVI G., *Wachstum und Körpergrösse*, «Ergebnisse der Anat. u. Entwgesch.», Bd. XXVI, p. 87, 1925.

Digitized by Google



Accrescimento teorico in lunghezza (curve superiori) e in peso (curve inferiori) dell'alosa del Tevere.

Lunghezze in cm.; pesi in gr.; sulle ascisse gli inizi dei diversi anni di età.

Digitized by Google

Digitized by Google

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio DAINELLI legge una commossa commemorazione del compianto Socio Olinto Marinelli, che verrà pubblicata nei Rendiconti accademici.

Il PRESIDENTE ringrazia a nome dell'Accademia il Socio DAINELLI per la bella commemorazione fatta dell'insigne Socio scomparso.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio LEVI-CIVITA offre in omaggio un suo volume intitolato: *The absolute differential calculus*. Esso contiene la traduzione inglese delle *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* raccolte dal prof. PERSICO (Roma, Stock, 1925), e inoltre due capitoli addizionali, redatti anch'essi dal prof. PERSICO, e destinati a fornire, quale applicazione specifica del calcolo assoluto, i fondamenti della relatività generale dell'EINSTEIN (incluso, ben si intende, il caso limite della così detta relatività ristretta). In questa esposizione della nuova meccanica si è evitato di enunciare i postulati in forma tensoriale astratta il cui contenuto fisico è così compendioso da riuscire (senza ampio commento e acconcia esemplificazione) pressochè inaccessibile all'intuizione ordinaria. È stato invece seguito il criterio costante di prendere le mosse dallo schema classico, cercando induttivamente quali modificazioni (lievissime in condizioni ordinarie) siano da introdurvi per rispecchiare le idee dell'EINSTEIN: in primo luogo, naturalmente, il suo principio di relatività cioè il comportamento invariante delle leggi fisiche di fronte a tutte le trasformazioni di spazio e di tempo, subordinatamente ad un certo ds^2 quadrimensionale.

Nello svolgimento della teoria è fatto debito posto alla statistica einsteiniana, rilevandone sia le conseguenze rigorose, sia le approssimazioni da essa derivanti anche per taluni problemi, che pur involgono campi variabili col tempo.

Il Socio PALAZZO presenta un opuscolo dell'Unione Geodetica e Geofisica internazionale e coglie l'occasione per annunciare che in quest'anno si terrà a Praga un'Assemblea generale dell'Unione, alla quale egli farà una comunicazione su « Le proprietà delle rocce magnetiche studiate in sito e in laboratorio ». Offre inoltre in dono all'Accademia un suo opuscolo: « Variazioni magnetiche secolari a Tunisi, Cartagine e Malta ».

Il Socio SEVERI presenta il primo volume dei suoi « Elementi di geometria » ad uso delle scuole medie ed espone i principî che ne informano la trattazione. Egli ha voluto dare maggiore importanza nell'insegnamento della geometria al metodo intuitivo in antitesi al prevalente metodo razionale che riesce così difficile alla comprensione delle menti giovanili. Spe-

Digitized by Google

cialmente nel concetto di uguaglianza, che egli riporta al concetto del movimento, e in quello delle parallele che egli definisce rette equidistanti, egli si distacca dagli ultimi trattati di geometria elementare.

L'Accademico Segretario prof. CASTELNUOVO presenta le opere pervenute in dono all'Accademia segnalando: il volume di W. SCHEWIAKOFF, « Acantharia » 37ª monografia della « Fauna e Flora del golfo di Napoli »; l'opera dei proff. FRANCESCO VERCELLI e MARIO PICOTTI, « Il Regime fisico-chimico delle acque nello stretto di Messina, parte II »; « Le dighe di ritenuta in Italia » pubblicata dalla Commissione per la verifica delle dighe di ritenuta, presso il Ministero dei Lavori pubblici; il volume di « Ricerche eseguite negli anni 1924 e 1925 » nell'Istituto C. GOLGI, inviate in omaggio dal Socio PERRONCITO; il « Corso di Elettrotecnica, vol. I del Socio G. GRASSI la Relazione dell' « Ecclisse solare totale del 14 gennaio 1926 osservata dalla Missione Astronomica Italiana nell'Oltre Giuba » di G. HORN-D'ARTURO; il vol. n. 5 della collezione « Per la Storia e la filosofia delle matematiche » diretta dal Socio ENRIQUES, contenente la traduzione con note di C. ZARISKI della opera classica di R. DEDEKIND, « Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali », e molti altri volumi e opuscoli.

PRESENTAZIONE DI MEMORIE; RELAZIONI

Il Presidente sen. PATERNÒ annuncia che è stata presentata, per l'inserzione nelle Memorie accademiche, dal Socio PELLIZZARI, una Memoria del sig. M. PASSERINI: « Ricerche sopra gli isonitrili » e l'Assemblea dà mandato al Consiglio di Presidenza di nominare i relatori.

Il Socio FRANCHI presenta, per la inserzione nelle Memorie accademiche, una sua Memoria « Ancora sull'età degli scisti argillosi ofiolitiferi della Riviera occidentale » in risposta a uno scritto del Socio SACCO.

L'Accademico Segretario aggiunto prof. PARRAVANO legge la Relazione del Socio ZAMBONINI, relatore, e del Socio BRUGNATELLI che propone l'inserzione nelle Memorie accademiche, della Memoria del Dott. A. CAVINATO su « Nuove osservazioni sulle Zeoliti del gruppo della Natrolite ».

La relazione viene approvata.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

L'Accademico Segretario prof. CASTELNUOVO presenta tre plichi suggellati, uno del prof. TALLARICO GIUSEPPE e due del prof. DE CRISTOFORO FERNANDO, da conservarsi nell'Archivio dell'Accademia.

Digitized by Google

CONCORSI A PREMI

L'Accademico Segretario prof. CASTELNUOVO legge gli elenchi dei concorrenti ai varî Premi in corso per l'anno 1927. Al Premio Reale per l'Astronomia, concorrono: ABETTI GIORGIO, NOBILE VITTORIO. Al Premio Reale per la Mineralogia e Geologia, concorrono: ALOISI PIERO, DE GREGORIO ANTONIO, FABIANI RAMIRO, ROVERETO GAETANO.

Al Premio dell'Associazione Nazionale dei professori universitari per le Scienze biologiche concorrono CAPPELLI CLAUDIO, PELLEGRINI GIUSEPPE, TRONCONI VITTORIO. Il Concorso al Premio dell'Associazione Nazionale dei professori universitari per le Scienze matematiche, fisiche e naturali è andato deserto, come è andato deserto il concorso per il premio a un'opera che costituisca un contributo notevole alla « Battaglia del grano ».

Il Presidente sen. PATERNÒ propone che i due concorsi siano rinnovati e sia rinnovato anche, a norma dell'art. 5 del Bando, il concorso per un' « Opera d'igiene sociale », andato anche esso deserto.

L'Assemblea approva.

COMUNICAZIONI

L'Accademico Segretario prof. CASTELNUOVO presentando un manuale di Fisica del prof. ing. E. MANCINI, destinato alla divulgazione e scritto con quel garbo che l'autore ha dimostrato nelle sue altre numerose pubblicazioni, coglie l'occasione per annunciare all'Assemblea che nel dicembre 1926 il Mancini chiese al Consiglio di Presidenza di essere collocato a riposo per l'età e ragioni di salute. Il Consiglio dovette dolorosamente accogliere la domanda del Mancini le cui benemerenze verso l'Accademia sono grandissime. Per più di 40 anni egli disimpegnò l'importante carica, prima di Segretario e poi di Cancelliere dell'Accademia, dimostrando un tatto, una intelligenza, e un amore all'Istituto superiori ad ogni elogio. Egli veramente è il depositario delle tradizioni della nostra Accademia. Sicuro d'interpretare i sentimenti di tutti, il prof. CASTELNUOVO invia al Mancini il voto che ancora per lunghi anni egli possa essere conservato all'Accademia in qualità di Cancelliere onorario.

L'Assemblea esprime vive approvazioni.

Il prof. CASTELNUOVO annuncia anche che il Consiglio di Presidenza ha nominato al posto dell'ing. Mancini il prof. RAFFAELLO MORGHEN col titolo di Direttore di Segreteria, per un anno di prova, dovendo essere poi confermato dall'Accademia, secondo le norme regolamentari.

Digitized by Google

Digitized by Google

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 febbraio 1927

BARDUZZI D. — Cenno commemorativo di Lazzaro Spallanzani sul primo centenario dalla morte. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia dei Fisiocritici ». Serie IV, vol. XI). Siena, 1899. 8°, pp. 1-7.

BARDUZZI D. — Del metodo Galileiano nelle scienze mediche (Estr. dagli « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze ». VII Riunione - Siena 1913). Roma, 1914. 8°, pp. 1-11.

BARDUZZI D. — Discorso inaugurale per la I riunione annuale tenuta a Faenza nell'ottobre 1908. (Estr. dagli « Atti della Società Italiana di Storia critica delle Scienze mediche e naturali »). Faenza, 1909. 8°, pp. 1-8.

BARDUZZI D. — Discorso inaugurale per la II riunione annuale tenuta a Venezia nel 1909. Venezia, 1909. 8°, pp. 1-8.

BARDUZZI D. — Importanza delle scienze storiche ed in particolare della storia della medicina. (Estr. dalla « Rivista di Storia critica delle Scienze mediche e naturali ». Anno VII, n. 6). Grottaferrata, 1916. 8°, pp. 1-16.

BARDUZZI D. — La medicina dell'antica Roma nei poeti satirici latini. (Estr. dalla « Rivista di Storia critica delle Scienze mediche e naturali ». Anno X, nn. 3, 4). Siena, 1919. 8°, pp. 1-15.

BARDUZZI D. — La storia delle scienze mediche e naturali nella cultura universitaria. (Estr. dalla « Rivista di Storia critica delle Scienze mediche e naturali ». Anno V). Grottaferrata, 1914. 8°, pp. 1-19.

BARDUZZI D. — Onoranze al Grande Uff. Prof. Dott. Domenico Barduzzi. Bagni di S. Giuliano, 1923. 8°, pp. 1-44.

BARDUZZI D. — Per il IV centenario della nascita di Pietro Andrea Mattioli medico e botanico senese. Discorso letto alla R. Accademia dei Fisiocritici in Siena. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia dei Fisiocritici ». Serie IV, vol. XIII). Siena, 1901. 8°, pp. 1-13.

BARDUZZI D. — Per la ricorrenza trentennale della direzione sanitaria delle Regie Terme Pisane a S. Giuliano (1885-1915). Siena, 1920. 8°, pp. 1-214.

BARDUZZI D. — Prelezione al corso libero di storia critica delle scienze mediche nella R. Università di Siena 1912-13. (Estr. dalla « Rivista di Storia critica delle Scienze mediche e naturali ». Anno IV). Grottaferrata, 1913. 8°, pp. 1-14.

BARDUZZI D. — Provvedimenti per le stazioni termali senesi nei secoli XIII e XIV pubblicati dalla Onorevole Giunta Municipale. Siena, 1899. 8°, pp. 1-24.

BARDUZZI D. — Su gli innesti del vaiuolo eseguiti in Siena dal 1758 al 1760, e sui danni evitabili della vaccinazione. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia dei Fisiocritici in Siena ». N 12, 1912). Siena, 1912. 8°, pp. 1-8.

BARDUZZI D. — Una questione importante di sifiloterapia arsenobenzolica. (Estr. dalla « Riforma Medica ». Anno LX). Napoli, 1924. 8°, pp. 1-4.

BARTSCH P. — Additional New Mollusks from Santa Elena Bay, Ecuador. (From the « Proceedings of the United States

Digitized by Google

National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1-20.

BARTSCH P. — New Urocoptid Land Shells from Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1926. 8°, pp. 1-13.

BATTAGLIA M. — Sialoadenite acuta e cronica nelle tripanasomiasi sperimentali. (Estr. da « Pathologica » N. 421). Genova, 1926. 4°, pp. 1-3.

BERLESE A. — Uso razionale dei mezzi insetticidi. (Estr. dal « Redia ». Vol. XVI, pp. 127-137). Firenze, 1927, 8°.

D'ANCONA U. — Ricerche sull'accrescimento e sulla maturità sessuale dell' « Alosa finta » (Cuv.). (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei ». Vol. I, pp. 43-46). Roma, 1925. 8°.

DEDEKIND R. — Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali. Traduzione e note di O. Zariski. Roma, 1926. 8°, pp. 1-306.

DWIGHT MARSH C. — On a Collection of Copepoda from Florida with a Description of Diaptomus Floridanus, new Species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 70). Washington. 1926, 8°.

FISHER W. K. — A New Sea Star of the Genus Evasterias. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1-5.

GRASSI G. — Corso di elettrotecnica. Vol. I. Torino, 1927. 8°, pp. I-VIII, 1-448.

GUERRIERI E. — Medio valore angolare del passo della vite del micrometro di declinazione del Bamberg di Capodimonte ottenuto con l'osservazione di coppie stellari zenitali. (Estr. dal « Rendiconto della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli ». Vol. XXXIII). Napoli, 1926. 8°. pp. 1-13.

HORN D'ARTURO G. — L'eclisse solare totale del 14 gennaio 1926 osservata dalla Missione astronomica italiana nell'Oltregiuba. - La corrente orientale perpetua nell'altissima atmosfera equatoriale (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. III, pp. 211-270). Roma, 1926. 8°.

JAEGER W. — Grundlinien als Aufriss zu einer Weltanschauung. Altenburg, 1926. 8°, pp. 1-180.

LEVI CIVITA T. — The absolute differential Calculus. (Calculus of Tensors). London, 1927. 8°, pp. I-XVI, 1-450.

MAGARINOS TORRES F. E. — Justificação das normaes de chuva da rêde pluviometrica Brasileira. Rio de Janeiro, 1926. 8°, pp. 1-14.

MAGGINI M. — Misure interferenziali sul disco del III satellite di Giove. (Estr. dai « Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei ». Vol. XXXI, pp. 88-92). Roma, 1922. 8°.

MAGGINI M. — Sul pallore anormale delle macchie di Marte nella presente opposizione. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei ». Vol. XXXI, pp. 25-27). Roma, 1922. 8°.

MANCINI E. — La fisica e le sue applicazioni. (Il libro d'oro del sapere. Vol. II, parte I). Milano, 1926. 8°, pp. 179-440,

PALAZZO L. — Variazioni magnetiche secolari a Tunisi, Cartagine e Malta. (Estr. dalle « Memorie della Pont. Accademia delle Scienze Nuovi Lincei ». Vol. VIII, pp. 101-122). Roma, 1925. 4°.

PEROTTI R. e VERONA O. — Prime note batteriologiche sui terreni della Maremma. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa »). Pisa, 1926. 8°, pp. 1-20.

PEROTTI R. e BONAVENTURA G. — Ricerche ed osservazioni sulla biologia ed in ispecie sul parassitismo della *Tubercularia vulgaris*, Tode. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto superiore Agrario di Pisa »). Pisa, 1926. 8°, pp. 1-18.

PORTER B. A. — American Wasps of the Genus Sceliphrom Klug. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1926. 8°, pp. 1-22.

Digitized by Google

Procès Verbaux de la Conférence de la Commission Internationale de la Radiation Solaire. Stockholm, 1926. 8°, pp. 1-22.

Sanchez y Roig M. — Breve reseña historica de la Paleontologia Cubana. Habana, 1926. 8°, pp. 1-15.

Sanchez y Roig M. — Contribución a la Paleontologia Cubana « Los Equinodermos fosiles de Cuba ». (Extr. del « Boletin de Minas ». Num. X). Habana, 1926. 8°, pp. 1-179.

Sano S. — Scientific Papers. Tôkiô, 1926. 8°, pp. I-IX, 1-340.

Severi F. — Elementi di Geometria. Volume I. Firenze, 1926. 8°, pp. I-XIV, 1-187.

Shannon R. C. — Review of the American Xylotine Syrphid-Flies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1-52.

Shannon R. C. — The Chrysatoxine Syrphid-Flies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1925. 8°, pagine 1-20.

Silva G. — In memoria di Antonio Maria Antoniazzi nell'anniversario della morte. Padova, 1926. 8°, pp. 1-16

Söderstrom A. — Zur Kenntnis der Zellarchitektonik I. Uppsala, 1926. 4°, pp. 1-72.

Usai G. — Ancora su equazioni riguardanti la matematica finanziaria. (Estr. dal « Bollettino dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania ». Fascicolo 57). Catania, 1926. 8°, pp. 1-6.

Usai G. — Sovra alcune equazioni della teoria delle rendite. (Estr. dal « Bollettino dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania ». Fascicolo 56). Catania, 1926. 8°.

Vercelli F. e Pirotti M. — Il regime fisico-chimico delle acque nello stretto di Messina. Venezia, 1926. 4°, pp. 1-161.

Walker J. J. — The Natural History of the Oxford District. London, 1926. pp. 1-336, I-XXXIX.

Zahlbrukner A. — Spiegazione delle tavole lichenologiche inedite di Abramo Massalongo (Estr. dal volume giubilare « Abramo Massalongo ». 1826-1926. Verona, 1926. 8°.

G. C.

Digitized by Google

Digitized by Google

Bozza G. e Devoto G. – Sul calcolo dell'affinità chimica in base alle entropie (pres. dal Corrisp. *L. Cambi*) . . . . . Pag. 180
Pieroni A. - Sopra alcuni derivati della Piridina (pres. dal Socio *A. Angeli*). . . 186
Mazza F. e Dello Jojo G. - Sulla dispersione rotatoria di alcuni eteri aspartici (pres. dal Socio *A. Piutti*) . . . . . »
Ponte G. – Sulla temperatura delle colate laviche dell'Etna (pres. dal Socio *F. Millosevich*) 187
Principi P. - I terreni miocenici tra la Valle del Lamone e quella del Bidente (pres. dal Corrisp. *G. Rovereto*) 191
Rosa D. - Una possibile variante dell'ologenesi (pres. dal Corrisp. *F. Raffaele*) . . 198
Wen Darwin. – Nuove esperienze sul comportamento ereditario delle capacità di sviluppo dell'uovo. La partenogenesi in incroci tra razze uni e bivoltine di Bombyx mori (pres. *Id.*) 203
Cotronei G. – Sulla sistematica biologica dei Petromizonti (pres. *Id.*) 209
D'Ancona U. - L'accrescimento dell'alosa del Tevere (pres. dal Socio *F. Silvestri*) . 214

PERSONALE ACCADEMICO

Dainelli G. – Commemora il compianto Socio O. Marinelli. 221
Paternò E. (Presidente) – Ringrazia il Socio Dainelli per la bella commemorazione fatta . . . . . »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Levi-Civita T. - Presenta in omaggio il volume « The absolute differential calculus » e ne discorre . . . . . »
Palazzo L. - Fa omaggio di un opuscolo dell'Unione Geodetica e Geofisica internazionale e di un suo opuscolo « Variazioni magnetiche secolari a Tunisi, Cartagine e Malta » . . . . . »
Severi F. – Presenta il primo volume dei suoi « Elementi di Geometria » ad uso delle scuole medie . . . . . »
Castelnuovo G. (Segretario). - Presenta le opere giunte in dono all'Accademia segnalando quelle dello Schewiakoff, di Vercelli e Picotti, del Socio Grassi, di G. Horn-D'Arturo ed altre 222

PRESENTAZIONE DI MEMORIE E RELAZIONI

Paternò E. (Presidente). - Annuncia la presentazione da parte del Socio Pellizzari della Memoria del sig. M. Passerini « Ricerche sopra gli isonitrili » . . . . »
Franchi S. – Presenta una sua Memoria « Ancora sull'età degli scisti argillosi ofioliferi della Riviera occidentale » . . . . . »
Parravano N. (Segretario aggiunto) - Legge la Relazione del Socio Zambonini e del Socio Brugnatelli sulla Memoria del dott. Cavinato « Nuove osservazioni sulle Zeoliti del gruppo della Natrolite » . . . . . »

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Castelnuovo G. (Segretario). - Presenta tre plichi suggellati, uno del prof. Tallarico e due del prof. de Cristoforo . . . . . »

CONCORSI A PREMI

Castelnuovo G. (Segretario). - Legge gli elenchi dei concorrenti al Premio Reale per l'Astronomia, al Premio Reale per la Mineralogia e Geologia, e al Premio dell'Associazione Nazionale dei professori Universitari per la Scienze biologiche . 223
Paternò E. (Presidente). - Propone che si rinnovino alcuni concorsi andati deserti »

COMUNICAZIONI

Castelnuovo G. (Segretario). - Annuncia il collocamento a riposo del Cancelliere prof. E. Mancini e la nomina a Direttore di Segreteria del prof. Raffaello Morghen . . . . . »

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 febbraio 1927 225

Digitized by Google

RENDICONTI - Febbraio 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 febbraio 1927

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

ARMELLINI G. - Il diametro orizzontale del sole nel 1925 e nel 1926 . . . Pag. 133
CORBINO O. M. – L'elettrolisi senza elettrodi 135
VINASSA P. – I costituenti degli involucri terrestri e il numero molecolare . . . . »
HERRERA A. L. - Nuova imitazione delle amebe in movimento 136
RUSSO A. - Il potere germinativo delle cellule somatiche dei metazoi e dei metafiti e la ripresa del potere sessuale nei Gametogeni impuri in « Cryptochilum echini », in rapporto al comportamento dei nuclei durante il ciclo di sviluppo . . . . »
BAGLIONI S. e GALAMINI A. - Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Azione nell'accrescimento, nell'alimentazione insufficiente, nel digiuno e nella rialimentazione del ratto albino . . . . . »
PETRI L. – Sulla presenza nelle piante di una sostanza che diventa luminescente alla luce ultravioletta . . . . . »

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

PICONE M. - Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellittico–paraboliche alle derivate parziali del second'ordine (pres. dal Corrisp. *G. Scorza*) 138
BOMPIANI E. - Sulla geometria dell'equazione di Laplace (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 143
ANDREOLI G. – Sulla curvatura e sul parallelismo su una superficie (pres. dal Socio *R. Marcolongo*) 149
SPAMPINATO N. – Nuovi contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann (pres. dal Corrisp. *G. Scorza*) . . . . . »
CACCIOPPOLI R. – Sui funzionali multilineari (pres. dal Corrisp. *L. Tonelli*) . . . »
ONICESCU O. – Il comportamento asintotico e gli zeri di una classe di funzioni intere (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) . . . . . »
PASCAL M. - Sulle curve che compaiono nello studio della corrente circuito-traslatoria (pres. dal Socio *R. Marcolongo*) . . . . . »
CECCONI A. – Un teorema sul lavoro di deformazione elastica (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 150
WEINSTEIN A. – Sur un problème mixte pour les functions harmoniques (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 152
VRANCEANU G. – Stabilità geodetica. Applicazione ai sistemi conservativi della Meccanica (pres. *Id.*) . . . . . »
CALDONAZZO B. – Una osservazione a proposito di moti viscosi simmetrici rispetto ad un'asse (pres. dal Corrisp. *U. Cisotti*) . . . . . »
WEINSTEIN A. – Sur le théorème d'existence des jets liquides (pres. dal Socio *T. Levi Civita* 157
ROSSI G. - Osservazioni sulla scintillazione delle stelle eseguite nel R. Osservatorio del Campidoglio (pres. dal Corrisp. *G. Armellini*) 161
BARBIERI U. – Determinazione di azimut assoluto, eseguita ad Andrate nell'agosto 1926 (pres. dal Corrisp. *G. Loria*) 165
CARRELLI A. – Sul teorema delle somme di Thomas e Reiche (pres. dal Socio *M. Cantone*) . . . . . »
PICCARDI G. - Numero d'ordine, peso eccedente e struttura atomica (pres. dal Corrispondente *L. Rolla*) 169
LEVI G. R. e REINA A. - Sulla peptizzazione dell'ossido di torio « meta » (pres. dal Socio *G. Bruni*) 174

(*Segue in terza pagina*).

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 febbraio 1927 (anno V).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie.* Nota del Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geochimica. — *I costituenti degli involucri terrestri ed il «numero molecolare».* Nota [1] del Corrisp. P. VINASSA.

La spinta ad occuparmi di questo argomento mi venne da una breve postilla ad una interessante Nota del prof. G. Oddo [2] la cui importanza nel campo geochimico non venne subito considerata col suo adeguato valore.

Al termine della sua Nota l'Oddo fa ditatti la constatazione che degli otto elementi, la cui diffusione sulla crosta terrestre rappresenta, secondo le più recenti ricerche, circa il 97,5 %, e cioè, in ordine di importanza: O, Si, Al, Fe, Ca, Na, K e Mg, quasi tutti hanno pesi atomici divisibili, con sufficiente approssimazione, per 4. Con che l'Oddo accennava alla possibilità che anche nei corpi non radioattivi si potesse ammettere una tendenza a polimerizzazioni di He.

I corpi che maggiormente deviavano da questa « legge » erano tre: Al, Na e K. Se invece dei pesi atomici adoperiamo, come ha fatto il

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) ODDO G., *Struttura molecolare degli atomi radioattivi*, « Gazz. chimica ital. », XLIV, 1, p. 233.

Digitized by Google

Harkins [1], i numeri atomici si può rilevare che degli otto elementi suddetti cinque hanno numero atomico pari, mentre i tre Al (13), Na (11) e K (19) li hanno dispari. Fu il Vernadsky [2] che diede importanza a questa constatazione dell'Oddo e ne apprezzò il giusto valore.

È dunque, intanto, un dato di fatto che la litosfera, l'idrosfera e l'atmosfera sono costituite per l'85 % da elementi con numero atomico pari e cioè:

O	numero	atomico	8	percentuale	49,20 %
Si	»	»	14	»	25,67 %
Fe	»	»	26	»	4,71 %
Ca	»	»	20	»	3,39 %
Mg	»	»	12	»	1,93 %
					84,90 %

Ma il fatto che tre corpi così diffusi ed importanti come Al, Na e K, i quali da soli rappresentano quasi il 13 % dei costituenti la corteccia terrestre, non obbedissero a questa « legge », toglieva ad essa molto interesse.

Mi son quindi posto alla ricerca di altri dati, che potessero servire a confermare, a ripudiare oppure a modificare la « legge » di Oddo. E per prima cosa ho ritenuto che, trattandosi di corpi costituenti la crosta terrestre, non era il caso di considerare l'atomo, che non esiste libero, ma piuttosto i composti, cioè le molecole. Lo studio dei pesi molecolari non mi portava a notevoli risultati. Ho pertanto ricorso ad un numero che chiamo « numero molecolare » del quale, che io mi sappia, non era sinora stato fatto uso.

Il « numero molecolare » è *la somma dei numeri atomici di una molecola* e rappresenta quindi le cariche positive in essa contenute.

Ma questo numero molecolare ha altresì un altro significato. Esso infatti indica pure il numero degli elettroni periferici che si trovano nella molecola normale.

Prendiamo ad esempio il Cu di numero atomico 29. Nel Cu′ si avranno 29-1 elettroni, nel Cu″ si avranno 29-2 elettroni. Consideriamo i due cloruri: CuCl e $CuCl_2$. Il Cl′ ha numero atomico 17, ma ha 17 + 1 elettroni, essendo monovalente negativo.

Onde:

Cu′ Cl′ num. molec. 46; num. degli elettroni (29-1) + (17 + 1) = 46

e

$Cu''Cl'_2$ » » 63; » » » (29-2) + 2 (17 + 1) = 63

(1) HARKINS, « Journ. Amer. Chem. Soc. », vol. 39, 41, e *Philosophical Mag.*, 42, p. 386.

(2) VERNADSKI, *La géochimie*. Paris, Alcan, 1924, p. 18.

Digitized by Google

Può darsi pertanto che il numero molecolare possa avere anche altre applicazioni. Ma non è qui il caso di parlarne.

Adottato questo numero molecolare, per quanto riguarda i tre elementi Al, Na e K di numero atomico dispari, ho potuto rilevare che tutti quanti i minerali di questi elementi *hanno numero molecolare pari.*

Poichè la composizione chimica dei minerali spesso è tutt'altro che sicura, ho voluto portare il mio studio sui composti chimici più usuali dei nostri laboratori, sulle cui formule non sono leciti dubbi, ed ho scelto quei corpi che sono elencati nell'ultima edizione del « Chemiker Kalender » [1]. Orbene la constatazione, facile ad essere controllata, è questa. I 18 composti dell'Al hanno tutti numero molecolare pari. Lo stesso accade pei 48 composti del Na. E similmente dei 54 composti del K nessuno ha numero dispari [2].

Questo risultato, di un certo interesse, mi ha spinto allo studio di tutti i principali composti inorganici noti e dei minerali di composizione più sicura, applicando ad essi il numero molecolare. Orbene degli 809 composti inorganici, elencati al solito nel « Chemiker Kalender », solamente 77 hanno numero molecolare dispari. E di circa un migliaio di minerali studiati, appena un centinaio hanno pure numero molecolare dispari.

La spiegazione del fatto, che potrebbe a prima vista fare un certo effetto, è invero assai semplice, e dipende solo dalla maggior possibilità di ottenere numeri pari, date le valenze dei corpi.

Infatti gli elementi possono distinguersi in due gruppi: elementi a valenza praticamente fissa ed elementi a valenza variabile. In quelli a valenza praticamente fissa, è notorio che gli elementi a numero atomico dispari hanno pure valenza dispari, e quelli a numero atomico pari la hanno pari. In entrambi i casi dunque i loro composti dovranno avere numeri molecolari pari.

Dei rimanenti, a valenza variabile, la regola è facile e intuitiva. Gli elementi a numero atomico pari daranno composti a numero molecolare pari in caso di valenza pari, altrimenti li daranno dispari; e viceversa per gli elementi a numero atomico dispari.

Tra quelli a valenza variabile il solo terzetto Ge (32), Sn (50) e Pb (82), avendo normalmente valenza 2 e 4, dà pur sempre numero molecolare pari. Quindi il fatto della enorme preponderanza dei composti a numero molecolare pari, che a prima vista potrebbe suscitare meraviglia, è facilmente esplicabile. Se mai resta ancora da spiegare la ragione per cui siano sempre ed appunto i corpi a numero atomico dispari che hanno valenza dispari e viceversa. Ma questo è argomento che esorbita dal compito prefissomi.

(1) « Chemiker Kalender », 1927, Bnd. II, III. Berlin, Springer, 1927.

(2) Fa eccezione soltanto K_2MnO_4 (numero molecolare 95); ma questo numero dipende dal Mn; cosicchè lo considero come un composto del Mn.

Digitized by Google

*
* *

E veniamo adesso ai corpi naturali disposti alla superficie terrestre.

Se la percentuale degli elementi a numero atomico pari è assai alta, essa è però assai inferiore alla percentuale dei composti a numero molecolare pari, la quale raggiunge *almeno il 99 %*.

Mi servo per questo asserto delle recentissime indicazioni del Clarke (1) circa la percentuale dei costituenti le rocce, ed accetto senz'altro le formule da lui date.

Risulta che, ad esempio, per le rocce eruttive che si presentano in enorme maggioranza nella litosfera, si hanno le percentuali seguenti: Felspati 59,5 %; Pirosseni e Anfiboli 16,8 %; Silice 12 %; Miche 3,8 %; composti del Tjtanio 1,5 %; composti del Fosforo 0,6 %. Totale per le rocce eruttive: 94,2 %.

Prendiamo in esame questi costituenti nei loro minerali principali. E cominciamo dai *Felspati* che formano da soli il 59,5 %.

Ortose: $KAlSi_3O_8$	num.	mol.	138
Albite: $NaAlSi_3O_8$	»	»	130
Anortite: $CaAl_2Si_2O_6$	»	»	122
Pirosseni ed anfiboli: 16,8 %			
Enstatite: $MgSiO_3$	»	»	50
Iperstene: $FeSiO_3$	»	»	64
Wollastonite: $CaSiO_3$	»	»	58
Diopside: $CaMgSiO_6$	»	»	70
Hedenbergite: $CaFeSiO_6$	»	»	122
Giadeite: $NaAlSi_2O_6$	»	»	100
Spodumene: $LiAlSi_2O_6$	»	»	92
Augite: $Ca(Mg...)Si_2O_{16} + (Fe...)\ Al_2SiO_{16}$	»	»	380
Antofillite: $(Mg,Fe)SiO_3$	»	»	50 / 64
Tremolite: $CaMg_3SiO_3$	»	»	208
Orneblenda: $Ca(Mg...)3(SiO_3)4\ (Al...)2\ Si_3O_{12}$	»	»	372
Egirina: $NaFeSi_2O_6$	»	»	113
Silice: 12 %			
Quarzo e sue varietà, Silice ecc.: SiO_2	»	»	30
Miche: 3,8 %			
Muscovite: $Al_3KH_2Si_3O_{12}$	»	»	198
Paragonite: $Al_3NaH_2Si_3O_{12}$	»	»	190

(1) *Data of Geochemistry*, V ed. «U. S. Geol. Survwey Bull.», 770, Washington, 1924.

Digitized by Google

Lepidolite: $AlF_2(Li,K)Si_3O_8$	num.	mol.	140 156
Biotite: $Al_2Mg_2KHSi_3O_{12}$	»	»	208
Flogopite: $AlMg_2KH_2Si_3O_{12}$	»	»	208
Cloritoide: $Al_2FeH_2SiO_7$	»	»	124
Composti del Titanio: 1,5 %			
Ilmenite: $FeTiO_3$	»	»	72
Pseudobrookite: $Fe_4(TiO_4)_3$	»	«	266
Perowskite: $CaTiO_3$	»	»	66
Titanite: $CaTiSiO_5$	»	»	96
Rutilo: TiO_2	»	»	38
Composti del Fosforo: 0,6 %			
Apatite: $(F,Cl,OH)Ca_5(PO_4)$	»	»	280 288 284
Xenotimo: YPO_4	»	»	86

L'Egirina è pertanto il solo minerale, di ben limitata importanza, che abbia numero molecolare dispari. E si ha dunque un totale del 94,2 % dei costituenti delle rocce eruttive che ha numero molecolare pari.

Ma una scorsa anche agli altri minerali delle rocce eruttive ci porta allo stesso risultato. Sarebbe un fuor d'opera riportare qui il numero molecolare di tutti gli altri minerali meno diffusi, cosa che, del resto, ciascuno può facilmente fare da sè. Dirò solamente che di tutti i minerali citati del Clarke hanno numero molecolare dispari la mal nota *Dafnite* H_{56} F_{27} Al_{29} Si_{18} O_{121} con numero ben discutibile di 2355! Dei granati la sola *Spessartite* Mn_3 Al_2 Si_8 O_{12} (numero molecolare 239), granato questo di ben limitata diffusione. Onde si può dire che, praticamente, tutti i minerali costituenti le rocce eruttive hanno numero molecolare pari.

*
* *

Passiamo adesso a considerare le assai meno diffuse rocce sedimentarie e i giacimenti di alcuni minerali più comuni che si possono considerare come rocce semplici. Basterà dare l'elenco delle più comuni rocce e dei giacimenti più interessanti per convincersi che anche qui tutti i componenti, salvo la Polianite, hanno numero molecolare pari.

Fluorite: CaF_2	num.	mol.	38
Salgemma: NaCl	»	»	28
Selenite: $CaSO_4$ + acq.	»	»	68 + acq.
Barite: $BaSO_4$	»	»	104
Siderite: $FeCO_3$	»	»	56

Digitized by Google

Calcite: $CaCO_3$	num.	mol.	50
Dolomite: $CaMgC_2O_6$	»	»	92
Sassolino: $B(OH)_3$	»	»	32
Corindone: Al_2O_3	»	»	50
Magnetite: $Fe(FeO_2)2$	»	»	110
Ematite: Fe_2O_3	»	»	76
Polianite: MnO_2	»	»	41

Dove invece si trova qualche numero molecolare dispari è nei composti metallici: ad esempio: la *Calaverite*, i solfuri di Cu, meno la *Calcocite*; poi le rarissime: *Terlinguaite*, *Calcofanite* e *Hodgowsonite*; si hanno poi il *Realgar*, le rarissime: *Niccolite* e *Gersdorffite*; e finalmente la grande maggioranza dei composti del Co, meno la *Skutterudite* e la comune *Cobaltina*: CoAs S (numero molecolare 66).

*
* *

Se ora esaminiamo l'idrosfera, essa risulta nella sua stragrande maggioranza di H_2O (numero molecolare 10) e tra i sali in essa disciolti ha solo relativa importanza il NaCl (numero molecolare 28).

Nell'atmosfera solamente troviamo preponderante l'N (7), praticamente inerte; ma del resto la percentuale di tutta l'atmosfera rispetto all'idrosfera e alla litosfera è infinitamente piccola.

Cosicchè possiamo asserire che oltre il 99 % dei corpi esaminati ha numero molecolare pari.

Finalmente, se ci volgiamo ai composti organici, risulta che anche in essi predominano in modo assoluto i composti a numero molecolare pari. Quindi anche la biosfera segue la stessa legge dell'aria, dell'acqua e delle rocce.

La cosa mi sembra assumere un interesse geochimico non indifferente ed allo stato dei fatti ritengo che possa esprimersi questa « regola »: *Negli involucri terrestri la quasi totalità dei composti ha numero molecolare pari.*

Digitized by Google

Biologia. — *Il potere germinativo delle cellule somatiche dei Metazoi e dei Metafiti e la ripresa del potere sessuale dei Gametogeni impuri in « Cryptochilum echini » Maupas, in relazione al comportamento dei nuclei, durante il ciclo di sviluppo.* Nota [1] del Corrispondente A. Russo.

Com'è noto, nei *Matazoi* e nei *Metafiti*, le cellule somatiche, messe in particolari condizioni d'ambiente o per peculiari condizioni dell'organismo vivente, possono riprodurre un nuovo individuo con i suoi elementi sessuali, i quali sono capaci di produrre nuovi individui sessuati. La causa di tale fenomeno, abbastanza diffuso in natura, specialmente nel regno vegetale, dove costituisce uno dei processi più comuni di riproduzione, è stato oggetto di particolari studii, sui quali furono fondate non poche ipotesi. Queste, nel periodo della Biologia più vicino a noi, prendono le mosse da osservazioni fatte su le cellule sessuali, nelle quali, sia allo stato di cellule germinali primordiali, sia di cellule sessuali mature o fecondate, la cromatina nucleare o particolari corpi cromatici estranucleari presentano uno speciale comportamento, che sarebbe in relazione al differenziamento delle due sorta di cellule, che compongono l'embrione, le *cellule somatiche* e le *cellule germinali* (Boveri, Rückert, Büchner, Amma, Silvestri, Debaisieux, Gunthert, Montgomery ed altri).

Tali osservazioni, che assegnano alla cromatina nucleare un ufficio importante nella differenziazione delle due sorta di cellule, ben poco son valse ad interpretare il fenomeno, che ci occupa, non essendosi constatato, con fatti probatorii, che esista una netta separazione di due qualità di cromatina, che andrebbero a formare i nuclei delle cellule, che compongono la *linea somatica* e quella *germinale*, ovvero che vi sia mescolanza delle due cromatine, ciò che potrebbe eventualmente spiegare la ripresa del potere germinativo, da parte delle cellule somatiche. Nè, a mio parere, una migliore spiegazione del fenomeno potrebbe aversi dal comportamento dei materiali protoplasmici, che, sotto forma di granuli (*mitocondri* di Benda e Meves), provengono alla 1ª cellula embrionale dall'ovo e dallo spermio e che, successivamente, si ripartiscono nelle due categorie di cellule, che compongono l'organismo.

Le considerazioni avanti cennate, ed il fatto che, nei *Ciliati*, i due nuclei, che compongono l'apparato nucleare, hanno funzione diversa, germinativa l'uno, nutritiva l'altro, mi hanno spinto a mettere in rilievo il loro particolare comportamento in *Cryptochilum*, dove, con una minuta analisi, si sono potuti seguire tutti gli stadii del ciclo di sviluppo.

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1927.

Digitized by Google

Da tale analisi, come fu esposto in una Nota precedente [1], è risultato che il nucleo, al quale è devoluto il potere germinativo, *è uno soltanto, il micronucleo con forma globulare* di uno dei Gameti puri, e che esso, con le sue successive divisioni, si trasmette sia nell'apparato nucleare degli individui, che rappresentano la linea germinale, sia in quello degli individui, che rappresentano la linea somatica.

Per meglio seguire i fatti, messi in valore, per dimostrare che gl'individui della linea somatica, per la sola presenza del micronucleo suddetto, possono riprendere il potere sessuale, è opportuno tenere presente che *Cryptochilum*, durante il suo ciclo, si comporta diversamente dagli altri *Ciliati* finora studiati. Dalle ricerche compite risulta, difatti, che gl'individui, che iniziano il ciclo, per peculiari caratteri [2], corrispondono ai primi stadii di sviluppo di un Metazoo, essendo l'*ovo* e lo *spermio* e la *1ª cellula embrionale* analoghi rispettivamente ai *Gameti puri* ed agl'*Individui misti*. I *Gameti puri*, come le cellule sessuali dei Metazoi, sono fra loro sessualmente diversi, non solo per la forma diversa dei micronuclei, globuliforme in uno, virgoliforme nell'altro, ma quanto per la diversa quantità di sostanza nucleare, che in uno è la metà dell'altro. Gl'*Individui misti* invece, formatisi dopo la coniugazione, sono caratterizzati dal fatto che in essi sono riuniti i nuclei di entrambi i Gameti, come, nella 1ª cellula embrionale, sono riuniti i nuclei dell'ovo e dello spermio.

In tutto il ciclo di *Cryptochilum*, il punto saliente si è che il *micronucleo globuliforme fornisce tutti i micronuclei*, non solo nelle due categorie d'individui, che caratterizzano il ciclo stesso [3], ma quanto nelle *forme pure* e nelle *forme impure* di ogni categoria, mentre il *micronucleo virgoliforme fornisce soltanto alcuni macronuclei*, che hanno un'esistenza effimera e transitoria.

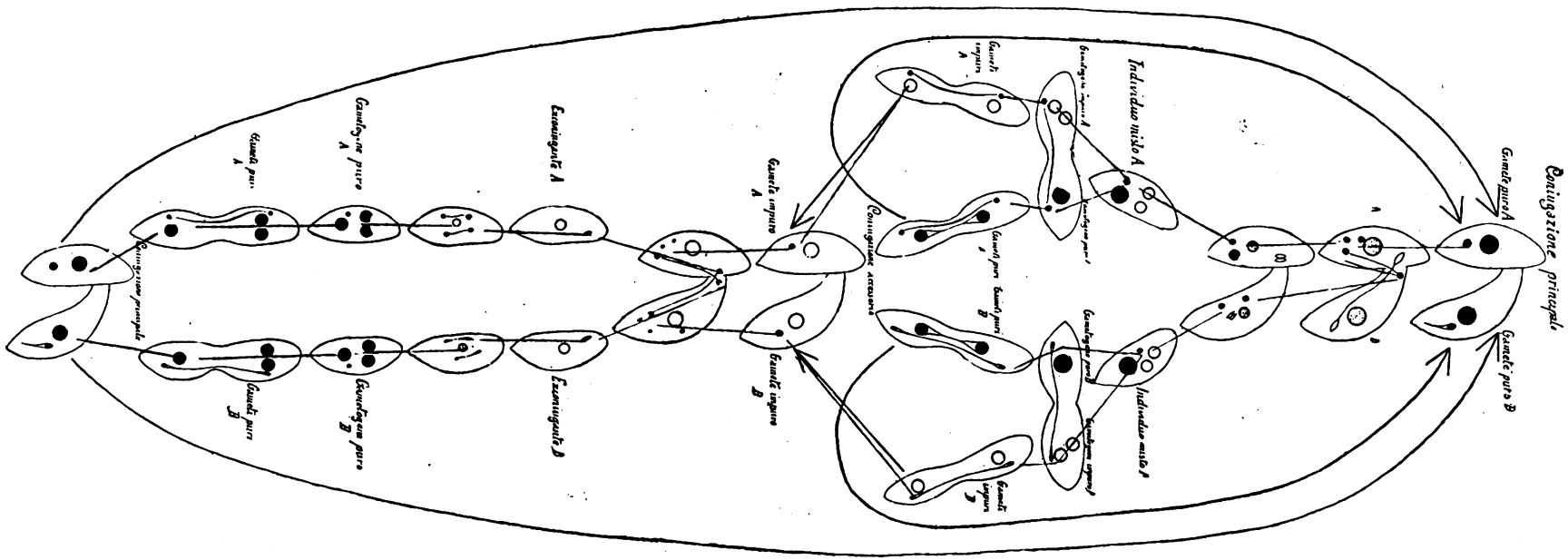
Come può anche rilevarsi dalla figura qui annessa, quando i Gameti si sono coniugati, il micronucleo globuliforme di uno di essi compie due divisioni e forma quattro nuclei, di cui uno è riassorbito, due permangono nello stesso Gamete, ed uno emigra nel Gamete vicino. Dei due *nuclei stazionarii*, uno formerà il micronucleo, l'altro un macronucleo dell'*Individuo misto*, che ne deriva, e perciò essi sono rispettivamente $^1/_4$ del micronucleo globuliforme originario; invece, il *nucleo migrato* compie dentro il Gamete, in cui è penetrato, una terza divisione, formando così due nuovi nuclei, di cui uno forma anche il micronucleo, l'altro un macronucleo dell'*Individuo*

(1) Russo A., *Sulla diversa costituzione dei due Gameti puri in « Cryptochilum echini » Maupas, risultante dall'analisi delle successioni nucleari, e sulla prevalenza del micronucleo globuliforme*, « Rend. R. Accad. Naz. Lincei », vol. XXXIII, ser. 5ª, 2° sem., 1924.

(2) Russo A., « *Individui misti* » e « *Gametogeni* » (1914 Russo), « *Individui neutri* » e « *Preconiuganti* » (1925 Bogiel) *nel ciclo biologico dei Ciliati, in rapporto a quello dei Metazoi.* Ibid. (1925), vol. III, ser. 6ª, 1° sem., 1926.

(3) Russo A. Cfr. nota 1.

Digitized by Google



Rappresentazione del ciclo di sviluppo di *Cryptochilum echini*, con le due categorie d'individui A e B, che formano un *ciclo principale* ed un *ciclo accessorio*. Il ciclo principale, segnato dalla freccia interna, si compie con la coniugazione principale, che origina *Individui misti*, i quali formano *Gameti puri*, che rinnovano il ciclo. Il ciclo accessorio è formato dai *Gameti impuri*, che compiono la coniugazione accessoria, mediante la quale si ricostituiscono nuovi *Gameti puri*, che rinnovano il ciclo principale, come è indicato dalla freccia esterna.

La linea in rosso segna la successione degli stadii di divisione del micronucleo globuliforme del *Gamete puro* A, che è la sorgente di tutti i micronuclei degli Individui puri ed impuri delle due categorie A e B.

Digitized by Google

misto dell'altra categoria. Tali nuclei sono evidentemente $^1/_8$ del micronucleo globuliforme originario, cioè la metà di quelli della prima categoria.

Per completare l'apparato nucleare dei due *Individui misti*, si aggiungono due altri macronuclei, che sono forniti dal micronucleo virgoliforme, il quale si divide alla sua volta e metà di esso emigra nel Gamete vicino. I due due nuovi nuclei così formati, di cui uno è *migrante*, l'altro *permanente*, si dividono per proprio conto una seconda volta, formando ciascuno due nuclei, che daranno origine a due macronuclei. I due *Individui misti*, come si è detto, avranno quindi quattro nuclei, di cui due derivano da un Gamete e due dall'altro Gamete.

Qui occorre notare che, come la *1ª cellula embrionale*, nel dividersi, forma, più o meno precocemente, due sorta di cellule, le *somatiche* e le *germinali*, ciascun *Individuo misto* forma anche, dividendosi, due individui diversi, che ho denominato l'uno *Gametogene puro*, perchè il micronucleo ed il macronucleo, che formano l'apparato nucleare, derivano entrambi dal micronucleo globuliforme, l'altro *Gametogene impuro*, perchè i nuclei dell'apparato nucleare hanno origine diversa, il micronucleo dal micronucleo globuliforme di un Gamete, i due macronuclei dal micronucleo virgoliforme dell'altro Gamete.

I *Gametogeni puri* sono analoghi alle cellule germinali, perchè, come queste, producono, per successiva divisione, Gameti puri, i quali, accoppiandosi, rinnovano il ciclo sessuato; i *Gametogeni impuri* ho ritenuto invece analoghi alle cellule somatiche, perchè non producono Gameti, simili ai precedenti, che possano, cioè, rinnovare il ciclo sessuato. La differenza tra il Gametogene impuro e la cellula somatica di un Metazoo sta nel fatto che, mentre questa produce cellule simili, moltiplicandosi per agamia, e non ha attitudine al processo sessuale, fino a che non intervengano particolari condizioni organiche o d'ambiente, che finora ci sono ignote, il primo produce invece subito, per due successive divisioni, particolari individui, atti a copulare, che sono i *Gameti impuri*. Questi però, non compiono la *vera coniugazione*, simile a quella del ciclo sessuato, ma una particolare coniugazione, che ho chiamato *accessoria*, la quale si distingue per il fatto che i micronuclei dei Gameti, invece di raggrupparsi nei due coniuganti per formare gl'*Individui misti*, si scambiano soltanto per formare successivamente *Gametogeni puri* e quindi nuovi *Gameti puri*. Con tali processi, il Gametogene impuro riprende il potere sessuale ed i Gameti puri, che da esso derivano, possono ricostituire un nuovo ciclo sessuale, compiendo la *vera coniugazione*. Come fu esposto in una precedente pubblicazione [1], durante la coniugazione accessoria, i micronuclei, con due successive disivioni, formano quattro nuclei, di cui tre sono riassorbiti. Il nucleo superstite di ciascun Gamete, portandosi nel punto in cui essi sono a contatto, compie una 3ª divisione, e dei due nuclei derivati uno passa nel Gamete opposto, mentre l'altro si atrofizza.

Digitized by Google

Il risultato di tale particolare coniugazione consiste nello scambio dei nuclei migratori, i quali sono fra loro diversi per la diversa quantità di sostanza nucleare, che contengono; poichè, se entrambi derivano dal *micronucleo globuliforme* del Gamete puro originario, uno è la metà dell'altro, come fu illustrato in una Nota precedente [1].

Quale sia il significato di tale scambio di nuclei, perchè soltanto dopo che ciò è avvenuto, gli exconiuganti possono ricostituire nuovi *Gametogeni puri* e quindi nuovi *Gameti puri* [2], che rinnovano il ciclo sessuato, non è facile potersi dire. Tenendo presente i fatti sopra riassunti, può ritenersi però, che la ripresa del potere sessuale, da parte dei Gametogeni impuri, che hanno carattere di cellule somatiche, derivi dal *fatto notevolissimo* che il *micronucleo globuliforme*, a cui è riservato tale potere, con le sue successive divisioni, forma i *micronuclei di tutti gl'individui, sia puri, sia impuri* delle due categorie, nelle quali essi furono distinti, e che compongono il ciclo biologico di *Cryptochilum*. Si ha così una prova in più per ritenere che, in tale micronucleo, debba risiedere la sostanza germinativa ereditaria. D'altro canto, sembra lecito ritenere, considerando ammissibile il confronto fatto con le cellule somatiche dei Metazoi, che l'ipotesi, secondo cui queste avrebbero sempre una parte di sostanza germinativa, che materialmente non si era mai potuto svelare, riceva, nell'analogia col *Cryptochilum*, un insperato appoggio di fatti, obbiettivamente constatati.

Fisiologia. — *Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Azione nell'accrescimento, nell'alimentazione insufficiente, nel digiuno e nella rialimentazione del ratto albino.* Nota III [3] del Corrisp. S. Baglioni e del dr. A. Galamini [4].

I. – Le ricerche *sull'accrescimento* furono fatte su ratti nati dallo stesso parto: due di essi, nn. X e VIII, furono alimentati colla seguente miscela (A): acqua potabile cc. 60; riso gr. 11; amido di mais gr. 7; farina di mais gr. 6; pane di frumento gr. 4; zucchero gr. 1.40; cloruro di sodio gr. 0.20; burro gr. 0.20; lievito di birra gr. 0.2; succo di limone cc. 0.5: pari a proteine gr. 3.583, grassi gr. 0.959, idrati di carbonio gr. 45.303. Gli altri

(1) Russo A., *La 1ª Coniugazione accessoria tra Gameti impuri in « Cryptochilum echini » Maupas.* « Rend. R. Accad. Naz. Lincei », Roma, vol. II, ser. 6ª, 1925.

(2) Russo A., *Gli exconiugati, derivati dalla 1ª Coniugazione accessoria fra Gameti impuri in « Cryptochilum echini » producono Gametogeni puri e Gameti puri, che rinnovano il ciclo principale.* Ibid., vol. III, ser. 6ª, 1926.

(3) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1927.

(4) Nella esecuzione delle ricerche fummo aiutati dai laureandi sigg. Cleto Rossi e Vito Ricotti, che ne utilizzarono i risultati per la loro tesi di laurea in medicina e chirurgia.

Digitized by Google

due furono alimentati colla miscela (B): Fegato di vitello gr. 3; uovo, bianco e tuorlo a parti uguali, gr. 5; formaggio gr. 0.25; burro gr. 1.2; pane gr. 10; amido di mais gr. 7; carta bibula gr. 0.25; lievito di birra gr. 0.2; cloruro di sodio gr. 0.2; succo di limone cc. 0.5; acqua potabile cc. 0.5: pari a proteine gr. 2.63, grassi gr. 1.22, idrati di carbonio gr. 10.077. Le miscele si ammannivano a mò di pappa semisolida, cuocendo i principali ingredienti in acqua e condendo, a freddo, in maniera omogenea, col burro, succo di limone e lievito di birra. I ratti se ne cibavano volentieri a sazietà, senza altre limitazioni.

L'alcool etilico era dato con una pipetta di vetro per bocca: i ratti lo assumevano, dopo i primi giorni, senza ripugnanza.

I risultati, sommariamente descritti, furono:

A) *Ratto X*: ♂, di 135 giorni, del peso di gr. 127: nei primi 20 giorni di esperimento non prese alcool; crebbe gr. 14.5, pari a gr. 0.0053 per giorno e per gr. di peso iniziale. Nei 24 giorni seguenti prese 40 gocce al giorno di alcool a 95 °/₀ in 4 volte, pari a gr. 3.2 per kg. di peso. Nei primi nove giorni non aumentò di peso, negli altri 15 crebbe gr. 17.1, pari a gr. 0.0076 per giorno e per grammo di peso iniziale. Complessivamente nel secondo periodo di esperimento crebbe gr. 17,1, pari a gr. 0.0051 per giorno e per gr. di peso iniziale. In un terzo periodo di 12 giorni il ratto non ebbe più alcool: crebbe di gr. 4.1, pari a gr. 0.002 al giorno e per gr. di peso iniziale.

Ratto n. VIII: ♂ di 100 giorni di vita, del peso di gr. 87.5. Nei primi 20 giorni di esperimento ebbe 10 gocce di alcool al giorno, pari a gr. 1.3 per kg. di peso: crebbe gr. 10.5, pari a gr. 0.0055 per giorno e per gr. di peso iniziale. Osservando i dati dell'accrescimento del ratto si nota che da prima, prendendo 10 gocce di alcool, il ratto crebbe poco, di gr. 0.0021 per giorno e per gr. di peso iniziale; dopo raggiunse la quota di accrescimento di gr. 0.007 per gr. di peso iniziale e per giorno, maggiore di quando non prese alcool.

In un secondo periodo di tempo, per 8 giorni ebbe 20 gocce di alcool a 95 °/₀, pari a gr. 2.3 per kg. di peso; diminuì di gr. 0.5, pari a gr. 0.0006 per gr. di peso iniziale e per giorno. Nei successivi 14 giorni il ratto ebbe 40 gocce di alcool al giorno, pari a gr. 4.6 per kg. di peso. Crebbe di gr. 4.5, pari a gr. 0.003 per gr. di peso iniziale e per giorno. In complesso, nei primi 42 giorni di esperimento il ratto crebbe gr. 14.5, pari a gr. 0.0038 per giorno e per gr. di peso iniziale. Dal 42° al 65° giorno di esperimento il ratto non prese alcool e crebbe di gr. 15.4, pari a gr. 0.0064 per gr. di peso iniziale e per giorno.

Negli ultimi 12 giorni si somministrarono di nuovo gocce 40 di alcool a 95 °/₀₀ in 4 volte, pari a gr. 3.9 per kg. di peso; l'animale crebbe gr. 55, cioè gr. 0.004 per gr. di peso iniziale e per giorno.

B) *Ratto n. XIII*: ♂ di 40 giorni, di gr. 80.2. Nei primi 21 giorni di esperimento prese 10 gocce di alcool a 95 °/₀ al giorno pari a gr. 1.4,

Digitized by Google

per kg. di peso; crebbe gr. 29.1, pari a gr. 0.014 per gr. di peso e per giorno. Nei nove giorni successivi ebbe 20 gocce di alcool a 95 °/₀ al giorno, pari a gr. 2.1 per kg. di peso; crebbe gr. 13.7, cioè gr. 0.0136 per gr. di peso iniziale e per giorno. In seguito, per altri 11 giorni il ratto ebbe gocce 40 di alcool a 95 °/₀ per giorno in 4 volte, pari a gr. 3.7 per kg. di peso; crebbe di gr. 13, pari a gr. 0.014 per gr. di peso iniziale e per giorno. In complesso, nei primi 41 giorni di esperimento il ratto crebbe gr. 56, pari a gr. 0.0123 per giorno e per gr. di peso iniziale.

Dal 41° al 75° giorno di esperimento il ratto non prese più alcool; crebbe gr. 4, pari a gr. 0.0008 per giorno e per gr. di peso iniziale.

Negli ultimi 12 giorni di esperimento il ratto ebbe di nuovo 40 gocce di alcool al giorno, pari a gr. 3.2 per kg. di peso, in 4 volte. Crebbe di gr. 27, cioè di gr. 0.014 per giorno e per gr. di peso iniziale.

Ratto n. XIV: ♀ di 40 giorni, del peso di gr. 77.9. Nei primi 42 giorni di esperimento non ebbe alcool. Crebbe di gr. 26.1, pari a gr. 0.0098 per giorno e per gr. di peso iniziale. Bisogna osservare che in questo primo periodo di esperimento l'accrescimento medio fu da prima, per 22 giorni di gr. 0.013, poi per 20 giorni di gr. 0.0052 per giorno e per gr. di peso iniziale.

Dal 42° al 75° giorno di esperimento il ratto ebbe 40 gocce di alcool a 95 °/₀ al giorno, pari a cc. 4.4 per kg. di peso, in 4 volte. Nei primi 3 giorni l'animale non crebbe; in seguito ebbe una quota di accrescimento per giorno e gr. di peso iniziale di gr. 0.01, cioè pressochè uguale a quella di gr. 0.013, raggiunta nei primi giorni di esperimento. In seguito l'accrescimento medio giornaliero per gr. di peso iniziale scese a gr. 0.003. In complesso, quando il ratto prese l'alcool, crebbe gr. 29, pari a gr. 0.0052 per gr. di peso iniziale e per giorno.

Negli ultimi dodici giorni di esperimento il ratto non ebbe alcool; crebbe di 10 gr., cioè di gr. 0.0051 per gr. di peso iniziale e per giorno.

I dati XIII e X parlano per un'azione lievemente favorevole sull'accrescimento. Non sono altrettanto convincenti i dati VIII e XIV. Quelli di quest'ultimo escludono un'azione dannosa perchè, durante la somministrazione dell'alcool, il ratto ebbe un periodo nel quale la quota di accrescimento fu elevata, di 0.01 per giorno e per grammo di peso iniziale, e perchè la quota media di accrescimento non variò, quando si sospese la somministrazione della sostanza. Nel considerare i dati del n. VIII si può tener conto del fatto che l'alcool produce, secondo le osservazioni di precedenti autori, in un primo tempo, in animali non abituati, maggiore consumo di proteine. Questo fatto può spiegare perchè la quota di accrescimento decrebbe quando si passò dalla somministrazione giornaliera di 10 gocce di alcool a 95 °/₀ a quella di 20 e da quella di 20 a quella di 40 e quando, dopo la sospensione di 23 giorni, se ne somministrarono di nuovo 40 gocce.

Digitized by Google

Poichè, però, lo stesso fatto non si è osservato nel ratto n. XIII, pel quale si fecero le stesse variazioni nella somministrazione dell'alcool, ricordando che la dieta del ratto n. XIII era più ricca in grassi e proteine, in confronto con quella del ratto n. VIII, e conteneva proteine animali, si può supporre che l'azione dell'alcool possa variare in rapporto con l'alimentazione dell'animale in esperimento.

Si può concludere, in ogni caso, che l'alcool non ha svolto un'evidente azione dannosa sull'accrescimento dei ratti albini.

II. - A) *Ratti adulti alimentati con dieta insufficente subproteinica, sublipinica, ipercarboidrosica.*

Ai ratti nn. XVIII e XVI si somministrò la seguente miscela: Amido di mais gr. 25; burro gr. 0.2; lievito di birra gr. 0.2; limone gocce 9. All'amido cotto con 60 cc. di acqua potabile e con aggiunta di gr. 0.2 di cloruro di sodio, si aggiungevano il burro, il limone e il lievito di birra.

I dati ottenuti furono i seguenti:

Ratto n. XVIII: ♂ adulto, del peso di gr. 165. Perdette gradatamente di peso e morì al 50° giorno di sperimento. Era diminuito allora di gr. 63.2, pari al 28 % del peso iniziale.

Ratto n. XVI: ♂ adulto, del peso di gr. 192.9. Ebbe la stessa miscela del ratto precedente, con l'aggiunta, in un primo tempo, di 40 gocce di alcool a 95 per giorno, pari a gr. 238 per kg. di peso; in un secondo tempo di 30 gocce, pari a gr. 1.8 per kg. di peso, negli ultimi 40 giorni di esperimento. Nel 1° periodo la somministrazione fu fatta in quattro volte al giorno; nel 2° in tre.

Nei primi 20 giorni di esperimento il ratto crebbe di 11 gr.; dopo, in 14 giorni, perdette 25 gr. di peso. Nei 14 giorni seguenti il peso del ratto si mantenne stazionario; crebbe poi di 10 gr. in 19 giorni e non subì in seguito modificazioni sensibili. In complesso, in 97 giorni di esperimento, il ratto con la dieta su descritta, con l'aggiunta del lievito di birra, contenente ca. gr. 0.0086 di proteine, potè mantenere il suo peso e vivere in salute, senza mostrare disturbi di nessun genere. Al termine delle ricerche era vivace, reagiva prontamente agli stimoli; aveva pannicolo adiposo sottocutaneo bene sviluppato, le mucose visibili bene colorate.

b) *Ratti adulti alimentati con dieta insufficente subproteinica, subcarboidrosica, iperlipinica.*

I nn. XV e XVII furono alimentati con lardo, o strutto, o burro, con aggiunta di gr. 0.2 di cloruro di sodio, di gr. 0.2 di lievito di birra, di cc. 0.5 di succo di limone. I dati ottenuti furono i seguenti:

Ratto n. XVII: ♂ del peso di gr. 209.5. Non ebbe alcool. Nei primi 14 giorni di sperimento fu alimentato con lardo: diminuì di gr. 28.5, cioè del 10.3 % del peso iniziale, pari a gr. 0.0076 per giorno e per grammo di peso. In un secondo periodo per 21 giorni fu alimentato con strutto: diminuì del 12.9 % del peso, pari a gr. 0.00617 per giorno e per grammo

Digitized by Google

di peso. In un terzo periodo il ratto fu alimentato con burro. Da prima per 13 giorni diminuì di gr. 29.85, cioè di gr. 0.014 per giorno e per grammo di peso: nei 21 giorni seguenti crebbe di 10 gr. cioè di gr. 0.004 per gr. di peso e per giorno: infine perdette altri 19 gr. di peso, negli ultimi 10 giorni di esperimento, e cioè gr. 0.014 per gr. di peso e per giorno e poi morì.

La perdita complessiva del peso dell'animale fu di gr. 90.51, cioè del 43 %.

Ratto n. XV: ♀ del peso di gr. 204, fu alimentato come il ratto n. XVII con aggiunta di 20-40 gocce di alcool a 95 %, pari a gr. 1.11–2.25 per kg. di peso.

Nei primi 14 giorni prese lardo e diminuì di 29 gr., pari a gr. 0.0083 per gr. di peso e per giorno e pari al 14.6 %. Nei 12 giorni successivi il ratto ebbe strutto con 40 gocce di alcool a 95. Diminuì di gr. 11.8 di peso pari a gr. 0.033 per giorno e per gr. di peso. La perdita complessiva del peso era del 20 %. Poichè il ratto si mostrava molto irrequieto fu rialimentato colla seguente miscela: fegato di vitello cotto gr. 10, tuorlo di uovo gr. 6.2, bianco d'uovo gr, 13.1, formaggio pecorino gr. 2.75, burro gr. 0.2, lievito di birra gr. 0.2, limone gocce 9; contenente proteine gr. 5.67, grassi gr. 3.26, idrati di carbonio gr. 30. In otto giorni il ratto guadagnò gr. 43 di peso, pari a gr. 0.032 per giorno e per grammo di peso. Fu di nuovo sottoposto alla dieta iperlipinica con 50 gocce d'alcool a 95 % pari a gr. 3.06 per kg. di peso, in 5 volte. L'animale diminuì in 9 giorni di 11 gr. di peso pari al 5 % e a gr. 0.06 per giorno e per grammo.

In un ultimo periodo di sperimento si somministrarono all'animale burro, invece di strutto, e 30 gocce di alcool a 95 %, invece di 50, pari a gr. 1.8 per kg. di peso. La perdita di peso fu continua fino alla morte. In 42 giorni discese a gr. 82.3, pari a gr. 0.01 per grammo e per giorno.

La perdita totale del peso fu del 46 %.

I due ratti alimentati con dieta iperlipinica si mostrarono, ad esperimento avanzato, talvolta irrequieti, talvolta invece immobili per gran parte del giorno: sempre assetati: spesso si è notata ipertonia, specie degli arti posteriori: si è notato altresì un edema voluminoso caratteristico al torace, tra gli arti anteriori, di breve durata: desquamazione a larghe zone della cute con caduta dei peli.

Confrontando i dati dei ratti XVIII e XVI a dieta insufficiente ipercarboidrosica, colpisce il fatto che mentre l'uno, senza alcool, diminuì gradatamente di peso fino alla morte, l'altro, dopo 97 giorni di sperimento si mostrava sempre in buone condizioni di vita.

Bisogna pensare che l'alcool abbia aumentato la resistenza dell'animale, o agendo come alimento di risparmio o favorendo i processi digestivi, riducendo al minimo il consumo dell'azoto sì da rendere sufficente alla vita, o almeno di poco insufficente, la piccola quantità di esso ingerito con il lievito di birra, con il succo di limone, col burro, o come impurità dell'amido di mais.

Digitized by Google

Un'azione opposta ha svolto l'alcool negli animali a dieta insufficente iperlipinica. Il n. XVII, che non prese alcool, ebbe una curva del digiuno che ricorda quella del digiuno totale. Ad una rapida diminuzione di peso seguì un periodo stazionario: poi il peso diminuì di nuovo rapidamente sino alla morte dell'animale.

Nel ratto XV la perdita del peso fu progressiva e raggiunse il valore letale dopo 50 giorni, anzichè dopo 82 come nel ratto XVII.

III. - *Azione sul digiuno totale e sulla rialimentazione.*

Le ricerche furono fatte su un ratto maschio di 158 giorni del peso di gr. 195.8, abituato alla descritta dieta (A), contenente proteine vegetali.

Posto a digiuno completo riceveva 40 gocce di alcool al giorno, pari a gr. 2.3 per kg. di peso. In 6 giorni perdette il 32.4 % del proprio peso. Fu rialimentato colla dieta (B) contenente proteine animali con aggiunta di 40 gocce di alcool. In 12 giorni crebbe da gr. 131.4 a 216, cioè di gr. 0.053 per gr. e per giorno. Nei 22 giorni successivi fu alimentato con la dieta A. Crebbe da gr. 216 a 235.5, pari a gr. 0.0041 per grammo e per giorno. Fu poi sottoposto a digiuno senz'alcool. In 8 giorni perdette il 28 % del proprio peso. Rialimentato con la miscela B senz'alcool in 10 giorni crebbe da gr. 167.5 a gr. 246.4, pari a gr. 78.9, cioè a gr. 0.047 per giorno e per grammo. Dopo 4 giorni di dieta A fu sottoposto ad un nuovo digiuno con la somministrazione di 40 gocce di alcool al giorno: in 11 giorni perdette il 33.4 % del proprio peso.

Le variazioni percentuali del peso in più durante le rialimentazioni e in meno, durante i digiuni, sono riunite nella seguente tabella:

Giorni	1° digiuno con alcool	2° digiuno senza alcool	3° digiuno con alcool	1° rialimentazione con alcool	2ª rialimentazione senza alcool
1°	8.8 %	6.2 %	2.8 %	19. %	10. %
2°	13.4 %	9.2 %	4.4 %	21.7 %	5. %
3°	18.9 %	13.8 %	7.9 %	32.4 %	8. %
4°	20.4 %	17.7 %	11.7 %	36. %	12. %
5°	24.8 %	21.2 %	14.3 %	39. %	16.5 %
6°	32.8 %	25.0 %	16.3 %	42.3 %	23.5 %
7°	—	28.5 %	18.0 %	49.6 %	28, %
8°	—	28.7 %	21.1 %	—	42. %
9°	—	—	22.7 %	—	—
10°	—	—	27.3 %	—	—
11°	—	—	29.8 %	—	—
12°	—	—	33.4 %	—	—

Digitized by Google

Esaminando i dati su esposti si osserva che nel 2° digiuno la perdita del peso dell'animale fu meno rapida che nel 1°; nel 3° meno che nel 2°.

La differenza non sembra si possa ascrivere all'azione dell'alcool, che nel 2° digiuno non fu somministrato, quanto piuttosto al fatto che il 2° e 3° digiuno furono iniziati partendo da un peso rispettivamente maggiore che nel 1° e nel 2°.

Può forse avere avuto anche la sua importanza il fatto che il 1° digiuno fu compiuto dopochè l'animale si era nutrito per un più lungo tempo con la dieta contenente proteine vegetali. In ogni modo, se non ha spiegato azione favorevole, durante il digiuno, l'alcool non ne ha spiegata nemmeno una dannosa.

Per una lieve azione favorevole dell'alcool parlano i dati delle rialimentazioni; sebbene, quando non si dette alcool, si sia ottenuto un aumento del peso meno rapido di quello che, anche senz'alcool, normalmente si osserva nei ratti, alimentati, dopo un digiuno completo, spinto fino al perdita del 30 % del proprio peso. con miscele sufficienti, contenenti proteine animali.

Conclusioni.

1° L'alcool etilico somministrato per bocca nella quantità di gr. 1.3-4.6 per kg. di peso del corpo *pro die*, non ha esercitato una chiara azione, nè dannosa nè favorevole, sull'accrescimento dei ratti albini.

2° Ha notevolmente aumentata la resistenza del ratto albino ad una dieta insufficiente subproteinica sublipinica e ipercarboidrosica: l' ha invece diminuita per una dieta insufficente subproteinica subcarboidrosica, iperlipinica.

3° Non ha esplicato alcuna netta azione sulla resistenza al digiuno completo.

4° Ha sembrato favorire l'aumento del peso durante la rialimentazione, seguente un digiuno completo, spinto fino alla perdita del 30 % del peso.

Biologia. — *Nuova imitazione delle amebe in movimento.* Nota [1] del Socio Straniero A. Luigi Herrera [2].

Modificando leggermente la formula che ho comunicato nelle mie Note precedenti, si giunge a produrre amebe macroscopiche in movimento che emettono pseudopodi in tutte le direzioni, come le naturali e rappresentano la migliore imitazione ottenuta sino ad oggi.

Tecnica. – In gr. 1000 di gasolina si sciolgono gr. 200 di olio puro di olive, e gr. 5 di acido oleico. Si versa questa soluzione in un piccolo

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto degli Alti Studi Biologici di Messico.

Digitized by Google

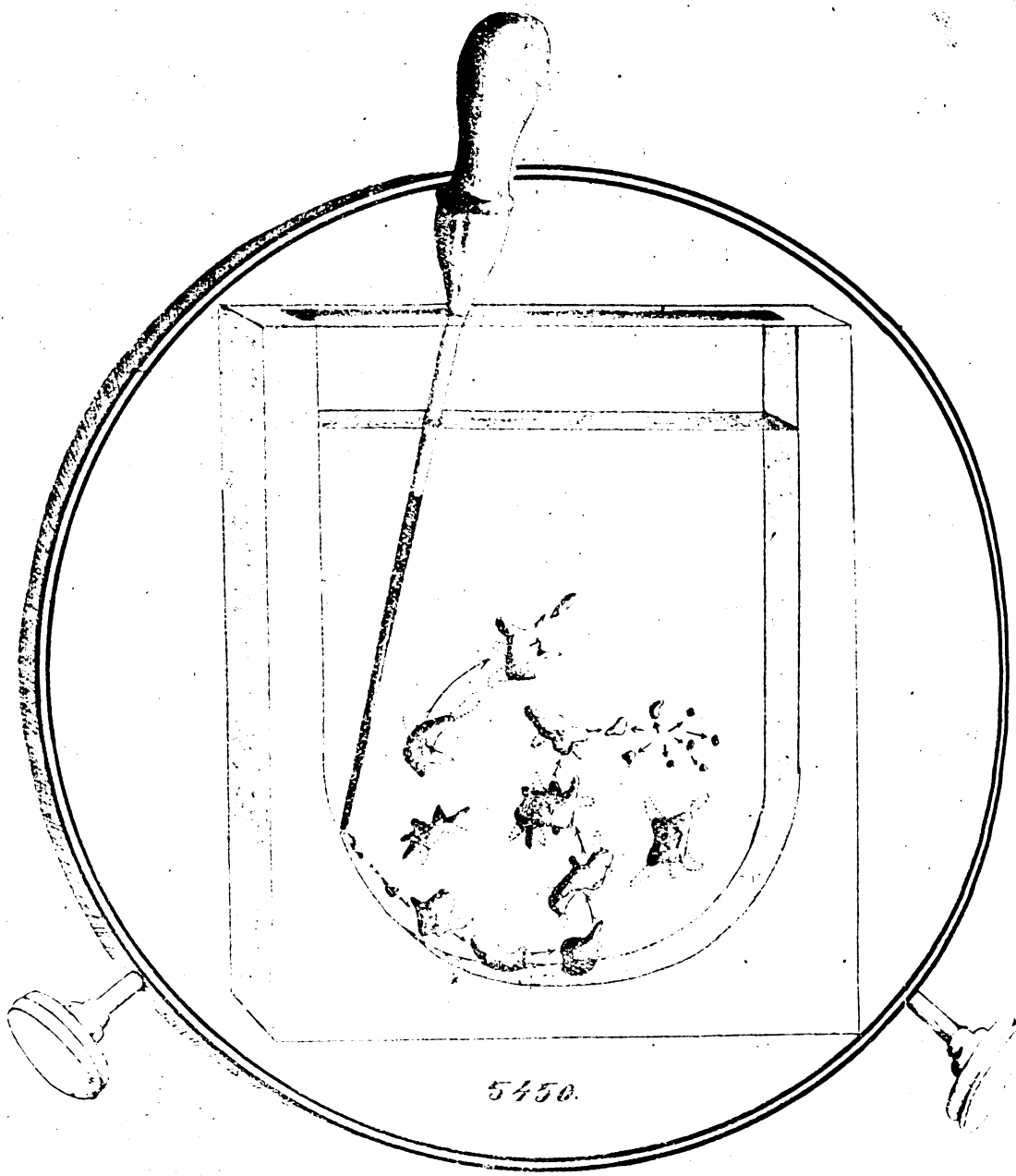


fig. 1.

Digitized by Google

recipiente a pareti parallele fissato convenientemente al piatto di un microscopio in posizione orizzontale. Si aggiungono quindi, con una pipetta contagocce, delle gocce di una soluzione di gr. 14 di soda caustica in 100 cm³ di acqua e 1 gr. di nero per sapone. Ogni goccia si divide in molte altre, che si avvolgono di una membrana di sapone in formazione, costituendo delle cellule osmotiche, attraverso le pareti delle quali passa rapidamente l'olio disciolto nella gasolina; si producono così delle correnti interne di diffusione che modificano la tensione superficiale spingendo fuori la parete e formando gli pseudopodi. In una scatola di Petri il fenomeno può essere

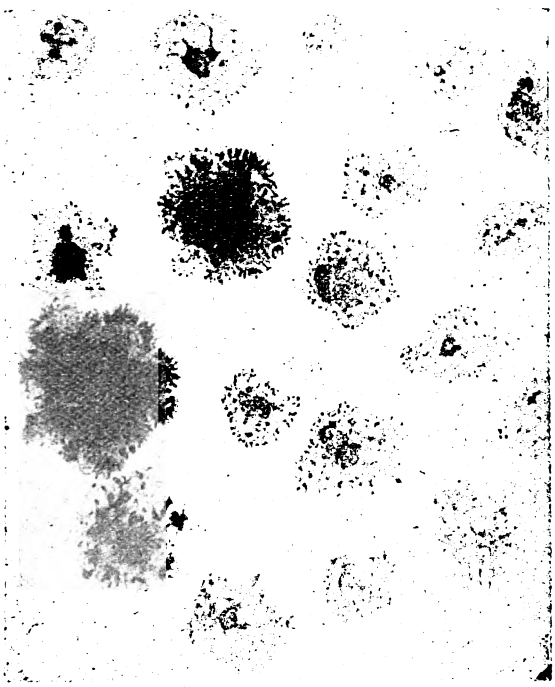


fig. 2.

osservato assai bene senza microscopio. Ogni ameba si contorce in tutti i sensi. Alcune strisciano e descrivono dei semicerchi. Presto si paralizzano col termine della reazione fra la soda e l'olio, oppure rimangono impigliate nel precipitato gelatinoso di oleato di sodio (fig. 1).

Aggiungendo alla soluzione di soda grandi quantità di zucchero di latte ed aggiungendo delle gocce di questa soluzione alla stessa soluzione di gasolina si formano delle amebe con delicati pseudopodi disposti radialmente alla periferia. Lo zucchero di latte ritarda la diffusione collo spessirsi del liquido (fig. 2).

Data la ricchezza e la varietà dei fenomeni che si ottengono con queste soluzioni, è mia intenzione di continuarne lo studio.

Digitized by Google

Biologia. — *Accrescimento e moltiplicazione di amebe artificiali.* Nota del Socio straniero A. L. HERRERA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su lo scostamento geodetico elementare: procedimento di estensione della equazione di Jacobi ad una qualsiasi varietà riemanniana.* Nota di U. CRUDELI, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella preparazione del corso di lezioni introduttive alla teoria della relatività einsteiniana che sto svolgendo all'Università di Messina, ebbi ad accorgermi come si possa estendere, ad una qualsiasi varietà riemanniana (nel senso tradizionale) l'equazione di Jacobi relativa allo scostamento geodetico. Senza omettere la doverosa citazione di un recentissimo lavoro del sig. Vranceanu, lavoro ch'io prima d'ora ignoravo [2], mi permetto di esporre il cennato mio procedimento, mediante il quale la predetta estensione può ottenersi quasi immediatamente partendo dalle note equazioni del Levi-Civita inerenti allo scostamento geodetico.

*
* *

Sia B (*geodetica base*) l'assegnato arco di geodetica, del quale denoteremo con P il generico punto. Con M indicheremo l'omologo di P sopra un arco di geodetica (*diciamolo*, questo arco, *geodetica g*) situato nelle immediate vicinanze della B. Ne segue che $PM = \xi$ rappresenta il nostro scostamento geodetico; nei riguardi del quale verrà poi supposto che la corrispondenza fra i punti della B e quelli della *g* sia tale ch'esso formi con B angolo costante.

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1927.

(2) Dal chiarissimo prof. Levi-Civita vengo a sapere che il sig. Vranceanu, in una sua prima Nota (presentata soltanto da qualche settimana all'Accademia dei Lincei) riguardante lo studio generale della stabilità geodetica in vicinanza di una base assegnata, Nota che viene a figurare nel fasc. II (16 gennaio 1927) di questi «Rendiconti», ha formato (mediante considerazioni alquanto diverse dalle mie) l'equazione analoga alla suddetta di Jacobi.

Digitized by Google

Intanto avremo le seguenti equazioni, di recente stabilite dal Levi-Civita [1],

$$(1) \qquad (D^2\xi)^r - \frac{d\lambda}{d\sigma} b^r = -\sum_{ihk}^{n} \{ir, hk\} b^i b^h \xi^k \qquad (r = 1, 2, \cdots, n),$$

nelle quali $D^2\xi$ rappresenta il secondo derivato (rispetto all'arco σ della geodetica B) del vettore ξ, mentre le b con apice sono le derivate (prese naturalmente rispetto a σ) delle coordinate di P; inoltre $\{ir, hk\}$ designa il generico simbolo di Riemann di seconda specie (lungo la B) e λ il coefficiente di dilatazione nella corrispondenza fra B e g.

Moltiplicando la (1) per ξ_r, e poi sommando, si ottiene

$$\sum_{r}^{n} \xi_r (D^2\xi)^r - \frac{d\lambda}{d\sigma} \sum_{r}^{n} \xi_r b^r = -\sum_{ijhk}^{n} (ij, hk) b^i \xi^j b^h \xi^k,$$

poichè $\xi_r = \sum_{j}^{n} a_{jr} \xi^j$ e, d'altra parte, $\sum_{r}^{n} a_{jr} \{ir, hk\} = (ij, hk)$, dove le a_{jr} denotano i coefficienti della prima forma fondamentale della V_n ed (ij, hk) il generico simbolo di Riemann di prima specie. Pertanto, se chiamiamo y la grandezza e $\boldsymbol{v}$ il versore di ξ, potremo scrivere

$$\sum_{r}^{n} v_r (D^2\xi)^r - \frac{d\lambda}{d\sigma} \cos\alpha = -y \sum_{ijhk}^{n} (ij, hk) b^i v^j b^h v^k,$$

con manifesto significato dei simboli, fra i quali α rappresenta l'angolo compreso fra B e $\boldsymbol{v}$. Quindi

$$\sum_{r}^{n} v_r (D^2\xi)^r - \frac{d\lambda}{d\sigma} \cos\alpha = -Ky \operatorname{sen}^2\alpha,$$

dove K designa la curvatura riemanniana della V_n, lungo la B, in corrispondenza alla giacitura individuata nel generico punto P dalla B e da $\boldsymbol{v}$.

Ciò premesso, si supponga di avere coordinate localmente cartesiane lungo la B; allora

$$(D^2\xi)^r = \frac{d^2\xi^r}{d\sigma^2} = v^r \frac{d^2y}{d\sigma^2} + 2\frac{dy}{d\sigma}\frac{dv^r}{d\sigma} + y\frac{d^2v^r}{d\sigma^2}$$

(notando, per incidenza, come v^r coincide ora con v_r, stante la predetta scelta di coordinate). Poi si tenga presente che, per cose note sui derivati di vettori aventi grandezza costante, si ha $\sum_{r}^{n} v_r \frac{dv^r}{d\sigma} = 0$; per cui

$$\sum_{r}^{n} v_r (D^2\xi)^r = \frac{d^2y}{d\sigma^2} + y \sum_{r}^{n} v_r \frac{d^2v^r}{d\sigma^2}.$$

(1) « Mathematische Annalen »; Band 97, 1926, p. 315. Come pure *The Absolute differential calculus*, by T. Levi-Civita (1927).

Digitized by Google

D'altra parte

$$\sum_1^n{}_r\, v_r \frac{d^2 v^r}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma}\sum_1^n{}_r \left(v_r \frac{dv^r}{d\sigma}\right) - \sum_1^n{}_r \frac{dv_r}{d\sigma}\frac{dv^r}{d\sigma} = -\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\sigma}\right)^2,$$

intendendo che $\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\sigma}\right)^2$ rappresenti il prodotto scalare del vettore $\frac{d\boldsymbol{v}}{d\sigma}$ per il vettore stesso.

Pertanto

$$\frac{d^2 y}{d\sigma^2} - \frac{d\lambda}{d\sigma}\cos\alpha + \mathrm{K}y\,\mathrm{sen}^2\alpha = y\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\sigma}\right)^2.$$

Ma, com'è noto [1], $\lambda = \frac{d}{d\sigma}\sum_1^n{}_r\, \xi^r b_r$; per cui, nell'ipotesi che *l'angolo* α *sia costante*, si ha inoltre

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{d^2 y}{d\sigma^2}\cos\alpha;$$

dunque

$$\left(\frac{d^2 y}{d\sigma^2} + \mathrm{K}y\right)\mathrm{sen}^2\alpha = y\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{d\sigma}\right)^2. \tag{2}$$

Nel caso di una V_2 si vede subito che il nostro $\frac{d\boldsymbol{v}}{d\sigma}$ è nullo. Invero, il versore $\boldsymbol{v}$ formante (per ipotesi) angolo costante con la B, ha allora senz'altro direzione univoca; per cui, essendo B geodetica, esso viene a subire lungo la B il trasporto per parallelismo (nel senso generale di Levi-Civita); ne segue appunto che $\frac{d\boldsymbol{v}}{d\sigma}$ è nullo.

Nel caso generico di una V_n, si consideri, in corrispondenza ad ogni coppia di punti omologhi P ed M, la geodetica unente cotesti due punti. Avremo, come luogo di tali geodetiche, una V_2, della quale la B e la g saranno pure naturalmente geodetiche. Intanto il vettore unitario $\boldsymbol{v}$ può riguardarsi come subente il trasporto per parallelismo superficiale, lungo la B, nella V_2 in discorso. Quindi, pensando alla costruzione di questa V_2, si vede subito [mediante un ragionamento del tipo di quello che interviene nella dimostrazione del noto teorema di Severi sul parallelismo [2]] come $\boldsymbol{v}$ viene a subire necessariamente un trasporto per parallelismo anche nella V_n.

(1) Cfr. la citata Memoria del Levi-Civita.

(2) F. Severi, *Sulla curvatura delle superficie e varietà*, «Rend. del Circolo matematico di Palermo», to. XLII, 1917.

Vedasi anche T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, p. 195.

Digitized by Google

Il vettore $\frac{dv}{d\sigma}$ che figura nella (2) è pertanto nullo in ogni caso. Con che si ottiene la equazione

$$\frac{d^2 y}{d\sigma^2} + Ky = 0$$

per una qualsiasi varietà riemanniana, col veduto significato di K.

Matematica. — *Nuovi contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann.* Nota di N. SPAMPINATO, presentata [1] dal Corrisp. G. SCORZA.

Lo studio sistematico delle matrici di Riemann, a cui è legata la teoria delle funzioni abeliane e quindi le varie teorie geometriche che a questa si riconnettono, è stato iniziato dallo Scorza in una Memoria ormai classica [2] nella quale introduce la nozione di matrice di Riemann e dà i primi fondamentali teoremi intorno al *genere p* della matrice, al suo *indice di singolarità k*, di cui ebbero ad occuparsi, sotto altra forma, Humbert [3], Bagnera, De Franchis [4] e Rosati [5] e al suo *indice di moltiplicabilità h* con cui s'imbattè Hurwitz [6] introducendo il *numero base* delle corrispondenze.

Nella stessa Memoria lo Scorza introduce la nozione di *pseudoasse* di una matrice di Riemann; nozione assai importante, perchè è nella teoria dei pseudoassi che si ha un valido aiuto per la classificazione delle matrici riemanniane singolari.

Altri fondamentali contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann sono stati apportati dallo Scorza in una seconda Memoria [7] con la felice applicazione, allo studio del gruppo di moltipiicabilità della matrice

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) G. SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ». T. XLI (1916).

(3) G. HUMBERT, *Sur les fonctions abéliennes singulières*, « Journal de Mathematiques pures et appliquées », 5me série, t. V (1899) e t. VI (1900).

(4) G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS, *Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XXX (1910).

(5) G. ROSATI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie 5ª, vol. XXIV (1915). « Annali di Matematica pura ed applicata », serie 3ª, vol. XXV.

(6) A. HURWITZ, *Uber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*, « Matematische Annalen », Bd. XXVIII (1886).

(7) G. SCORZA, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XLV (1921).

Digitized by Google

riemanniana ω, della teoria delle algebre a più unità, facendo corrispondere a quel gruppo un'algebra razionale $[\omega]$ ad $h + 1$ unità, ed avendo modo, così, d'introdurre un nuovo carattere per la matrice riemanniana ω: il *rango*, che è poi il rango di $[\omega]$.

Qua c'interessa osservare che in tale Memoria lo Scorza dà, fra l'altro, la classificazione e la costruzione delle matrici di Riemann (pure) non singolari ($k = 0$).

Ora, volendo procedere alla classificazione sistematica delle matrici riemanniane pure singolari ($k > 0$), e quindi dotate di pseudoassi, il primo problema che si presenta è questo:

[1] *Classificare le matrici di Riemann pure singolari dotate di un solo gruppo fondamentale di pseudoassi puri.*

Si osservi subito che a tale vastissima classe di matrici riemanniane appartengono tutte le matrici di Riemann pure col genere p primo dispari e tutte le matrici di Riemann a rango massimo [1].

In una Memoria (già inviata per la pubblicazione) io risolvo il problema [1]; qui mi permetto di esporre i risultati a cui son pervenuto e le linee generali delle dimostrazioni.

*
* *

La prima osservazione che attirò la mia attenzione fu questa: le matrici di Riemann pure singolari dotate di un sol gruppo fondamentale di pseudoassi puri che erano note, erano sempre legate ad algebre potenziali. Allora mi domandai se tale proprietà non fosse, per caso, caratteristica per quelle matrici.

La risposta è affermativa; infatti nell'accennata Memoria dimostro che:

A) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice di Riemann pura singolare sia dotata di un sol gruppo fondamentale di pseudoassi puri è che l'algebra legata alla matrice sia potenziale.*

Per dimostrare la sufficienza di quella condizione, dimostro in primo luogo che in corrispondenza ad un fissato gruppo fondamentale di pseudoassi puri $S^{(1)}, \cdots, S^{(\nu)}$, esistono sempre omografie di ω aventi per spazi fondamentali gli spazi $S^{(1)}, \cdots, S^{(\nu)}$, e che quindi gli spazi fondamentali dell'omografia che con le sue potenze determina il gruppo di moltiplicabilità di ω, appartengono ad $S^{(1)}, \cdots, S^{(\nu)}$. Ne segue facilmente che ω non può ammettere alcun altro pseudoasse puro.

Per dimostrare che la condizione è necessaria, premetto alcuni teoremi che mi permettono nello stesso tempo di calcolare i caratteri k, h e ρ. In corrispondenza al gruppo fondamentale di pseudoassi puri costruisco un sistema lineare ∞^{2p-1} di reciprocità di ω che gode della seguente proprietà:

(1) Loc. cit. Parte II, nn. 55, 58.

Digitized by Google

detto $\alpha(\beta)$ il massimo numero di polarità (sistemi nulli) indipendenti contenuti in $[\rho^*]$ è sempre $\alpha + \beta = \rho$; inoltre se è $\alpha > 0$ dev'essere ρ pari e si ha $\alpha = \beta = \frac{\rho}{2}$. Si presentano quindi due casi:

1° caso $\quad \alpha = 0 \quad , \quad \beta = \rho$

2° caso $\quad \alpha > 0 \quad , \quad \alpha = \beta = \frac{\rho}{2}$

Tenendo conto allora di un lemma intorno alla dimensione minima di un asse di un sistema nullo degenere di ω dimostro, che dev'essere

$$\rho = \nu \qquad \text{o} \qquad \rho = 2\nu$$

secondo che si verifica il 1° o il 2° caso.

Ne segue che il sistema $[\rho^*]$ è il sistema di tutte le reciprocità di ω e che quindi è $h + 1 = 5 \quad k + 1 = \beta$; cioè $[\omega]$ è potenziale ed è $k = h = \nu - 1$, o $k = \nu - 1$, $h = 2\nu - 1$ secondo che si verifica il I o il II caso.

I caratteri k, h e ρ sono quindi calcolati in funzione del numero ν dei pseudoassi di un gruppo fondamentale di pseudoassi puri, cioè di quello che ho chiamato *numero fondamentale* della matrice singolare.

Si perviene pertanto al seguente teorema:

B) *Le matrici di Riemann pure singolari dotate di un sol gruppo fondamentale di pseudoassi puri si distinguono in due tipi. I loro caratteri k, h e ρ sono dati da:*

$$k = \nu - 1 \qquad h = \nu - 1 \qquad \rho = \nu \qquad (1^\circ \text{ tipo})$$

$$k = \nu - 1 \qquad h = 2\nu - 1 \qquad \rho = 2\nu \qquad (2^\circ \text{ tipo})$$

Le omografie di una matrice del 1° tipo sono tutte e sole le omografie ammettenti come spazi di punti uniti i ν pseudoassi del gruppo fondamentale di pseudoassi puri.

Le omografie di una matrice del 2° tipo sono tutte e sole le omografie ammettenti come spazi di punti uniti i 2ν spazi secondo cui i ν pseudoassi puri s'appoggiano alle immagini della matrice.

Si osservi che, dalla classificazione delle matrici riemanniane pure singolari dotate di un sol gruppo fondamentale di pseudoassi puri, per le funzioni abeliane segue il seguente teorema:

Esistono due soli tipi di corpi puri di funzioni abeliane singolari legati ad algebre potenziali. L'indice di singolarità k, l'indice di moltiplicabilità h e il rango ρ del corpo sono dati da

$$k = \nu - 1 \qquad h = \nu - 1 \qquad \rho = \nu \qquad (1^\circ \text{ tipo})$$

$$k = \nu - 1 \qquad h = 2\nu - 1 \qquad \rho = 2\nu \qquad (2^\circ \text{ tipo})$$

dove con ν si indica il numero fondamentale del corpo.

Digitized by Google

Matematica. — *Sui funzionali multilineari.* Nota[1] del dottore R. Caccioppoli, presentata dal Corrisp. L. Tonelli.

Il teorema di F. Riesz, che assegna l'espressione analitica competente al più generale funzionale che dipenda linearmente da una funzione di una variabile è suscettibile di varie estensioni, che conducono tutte ad integrali di Stieltjes a più dimensioni; p. es. si possono considerare funzioni di più variabili, o pure funzionali dipendenti linearmente da più funzioni, o ancora funzionali di ordine superiore.

Dei funzionali dipendenti linearmente da due funzioni di una variabile si è occupato Fréchet[2]; i procedimenti di cui quest'Autore fa uso potrebbero applicarsi a casi più generali, ma l'estensione non sarebbe agevole, ed i calcoli relativi non andrebbero esenti da complicazioni, sia pure di carattere formale. Ho trovato perciò opportuno seguire, nello studio dei funzionali multilineari, che costituisce l'oggetto della presente Nota, una via del tutto diversa, riducendo tale studio a quello di un funzionale lineare definito in un insieme di funzioni. Con ciò si viene ad evitare qualsiasi calcolo, e di più a porre completamente in luce la natura speciale della rappresentazione analitica dei funzionali multilineari.

1. Un funzionale lineare $A[[f]]$, definito per tutte le funzioni $f(x_1 x_2 \cdots x_n)$ continue in un insieme chiuso e limitato I di S_n ha una espressione analitica del tipo

$$\int\int \cdots \int f(x_1 x_2 \cdots x_n)\, d_{x_1} d_{x_2} \cdots d_{x_n} u(x_1 x_2 \cdots x_n),$$

ove u è una funzione a variazione limitata, e l'integrale di Stieltjes è esteso all'insieme I.

In una Nota precedente[3] ho studiato il procedimento che conduce a questa rappresentazione. Ricordiamo brevemente come si definisce la funzione u, limitandoci anche qui, per semplicità, al caso delle funzioni di due variabili. Supposto l'insieme I interno al dominio rettangolare R del piano xy, di lati $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = b$ $(a > 0$, $b > 0)$ consideriamo un qualsiasi dominio rettangolare $R(P', P'')$, di estremi $P'(x', y')$ e $P''(x'', y'')$ appartenenti ad R. Diciamo $F_{R(P', P'')}$ la funzione il cui valore è 1 in $I \cdot R(P', P'')$, eccezion fatta per i lati $x = x''$, $y = y''$ quando questi *non* appartengano alle rette $x = a$, $y = b$, e zero nei rimanenti punti

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) « Transactions of the Am. Math. Society », 1915.

(3) « Rendiconti della R. Accademia di Scienze Fis. e Mat. di Napoli », marzo, 1926.

Digitized by Google

di I. Per tale funzione può sempre definirsi un ben determinato valore del funzionale A. La funzione u resta allora definita, a meno dei valori che assume sugli assi, dalla formola

$$\underset{R(P',P'')}{\Delta\Delta} u = u(x'', y'') - u(x', y'') - u(x'', y') + u(x', y') = A|[F_{R(P',P'')}]|.$$

Ciò si riconosce subito osservando che il valore di A per una qualsiasi funzione continua in I può approssimarsi mediante somme del tipo

$$\sum_{i,j} f_{ij}\, \Delta_i\, \Delta_j\, u.$$

L'essenza del procedimento che abbiamo qui riassunto consiste nell'ampliare il campo di definizione di A, aggregandovi le funzioni discontinue $F_{R(P',P'')}$, e le loro combinazioni lineari, in modo che A conservi nel campo ampliato le sue proprietà fondamentali. Tale procedimento può agevolmente estendersi nel modo seguente:

Supponiamo dato un funzionale $A|[f]|$, definito soltanto in un certo insieme Ω di funzioni continue in I, continuo in tale insieme, e tale inoltre che sia

$$A|[c_1 f_1 + c_2 f_2]| = c_1\, A|[f_1]| + c_2\, A|[f_2]|,$$

sempre che le funzioni f_1, f_2 e $c_1 f_1 + c_2 f_2$ (c_1 e c_2 costanti) appartengano ad Ω. Un simile funzionale si dirà *lineare* nell'insieme Ω.

Dippiù, supponiamo che si possa definire A, con un procedimento qualunque, in un insieme Ω', costituito dalle $F_{R(P',P'')}$ e da *certe* loro combinazioni lineari, in modo che A si conservi distributivo e continuo in $\Omega + \Omega'$; e che mediante funzioni di Ω' si possa approssimare uniformemente qualunque funzione di Ω.

Allora, per qualunque funzione f di Ω, il valore di A si potrà approssimare quanto si voglia mediante somme del tipo

$$\sum_{i,j} f_{ij}\, \Delta_i\, \Delta_j\, u,$$

ove la funzione u è definita come poc'anzi. E conseguentemente si potrà scrivere

$$A|[f]| = \iint_I f(x, y)\, dx\, dy\, u(x, y),$$

ove però questa volta l'integrale di Stieltjes ha un significato speciale, rappresentando il limite di quelle somme soltanto, per cui la funzione che assume il valore f_{ij} nei punti di I interni a R_{ij}, appartiene ad Ω'.

La u non è quindi necessariamente una funzione a variazione limitata.

2. Un'applicazione del principio precedente si ha nella rappresentazione di un funzionale A, lineare nell'insieme Ω delle funzioni della forma $\varphi(x)\,\psi(y)$. La definizione di A nell'insieme Ω' può ottenersi come segue:

Digitized by Google

Fissato $\psi(y)$, A si riduce ad un funzionale lineare in $\varphi(x)$, al cui campo di definizione si possono aggregare, col procedimento di Riesz, le funzioni discontinue il cui valore è 1 in un intervallo aperto superiormente, e zero altrove. Riapplicando questo procedimento si ottiene la definizione di A per qualsiasi funzione $\varphi(x)\psi(y)$, ove φ e ψ sono funzioni discontinue del tipo suddetto, cioè per tutte le funzioni $F_{R(P',P'')}$; e di qui per tutte le funzioni $\varphi(x)\,\psi(y)$, ove φ e ψ sono funzioni costanti a tratti, che risultano combinazioni lineari (però di tipo speciale) delle $F_{R(P',P'')}$.

Mediante tali funzioni si può approssimare uniformemente qualsiasi funzione di Ω.

Dunque le funzioni di Ω' sono tutte quelle prodotto di due funzioni costanti a tratti, di sola x e di sola y rispettivamente. Di qui segue che il funzionale $A\,|[\varphi(x)\,\psi(y)]|$ ammette la rappresentazione

$$\iint_{I} \varphi(x)\,\psi(y)\,d_x\,d_y\,u(x,y),$$

ove I è l'insieme dei punti la cui coordinata x appartiene all'insieme di definizione della φ, e la y all'insieme di definizione della ψ_j e la funzione u è definita in un dominio rettangolare racchiudente l'insieme I.

L'integrale doppio di Stieltjes rappresenta in questo caso il limite della somma

$$\sum_{i,j} \varphi_i\,\psi_j\,\Delta_i\,\Delta_j\,u,$$

ove φ_i e ψ_j sono valori intermedi fra gli estremi di φ e di ψ negli intervalli (x_i, x_{i+1}), (y_j, y_{j+1}) rispettivamente.

E la funzione u è tale che sia limitato l'insieme numerico

$$\sum_{i,j} \alpha_i\,\beta_j\,\Delta_i\,\Delta_j\,u,$$

se si mantengono limitate le quantità α e β.

3. Per dimostrare ora che ogni funzionale A, bilineare in $\varphi(x)$ e $\psi(y)$, può rappresentarsi mediante un integrale di Stieltjes del tipo suddetto, basterà far vedere che esso può riguardarsi come un funzionale lineare del prodotto $\varphi(x)\,\psi(y)$.

Si riconosce innanzi tutto immediatamente che se

$$(a) \qquad \varphi(x)\,\psi(y) = \varphi_1(x)\,\psi_1(y) + \varphi_2(x)\,\psi_2(y),$$

si ha

$$(b) \qquad A\,|[\varphi,\psi]| = A\,|[\varphi_1,\psi_1]| + A\,|[\varphi_2,\psi_2]|;$$

difatti la (a) non può sussistere a meno che non si abbia

$$c\,\varphi(x) = c_1\,\varphi_1(x) \quad , \quad c'\,\varphi(x) = c_2\,\varphi_2(x)$$

Digitized by Google

o pure

$$c\psi(y) = c_1 \psi_1(y) \quad , \quad c'\psi(y) = c_2 \psi_2(y),$$

ove le c sono costanti, e di qui segue subito la (b), per la distributività di A rispetto a φ e ψ separatamente.

Resta allora soltanto da dimostrare la continuità di A rispetto al prodotto $\varphi\psi$, cioè rispetto al complesso degli argomenti φ e ψ.

Cominciamo col far vedere che A è *limitato* rispetto al complesso dei suoi due argomenti, che cioè esiste un numero positivo K tale che si abbia sempre

$$(c) \qquad |A|[\varphi, \psi]| \leq K \max|\varphi| \max|\psi|.$$

Infatti, ove ciò non fosse, potremmo determinare una successione di coppie di funzioni

$$\varphi_1, \psi_1 \quad ; \quad \varphi_2, \psi_2 ; \cdots \varphi_n, \psi_n \cdots$$

tali che

$$|A|[\varphi_n, \psi_n]|| > 2^{2n} \max|\varphi_n| \max|\psi_n|;$$

posto allora

$$\varphi'_n = \frac{\varphi_n}{2^n \max|\varphi_n|} \quad , \quad \psi'_n = \frac{\psi^n}{2^n \max|\varphi_n|},$$

sarebbe

$$|A|[\varphi'_n, \psi'_n]|| > 1,$$

ed inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \max|\varphi'_n| = \lim_{n\to\infty} \max|\psi'_n| = 0.$$

Fissiamo una quantità $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccola; potremo trovare un indice n_1 tale che sia

$$|A|[\varphi'_1, \psi'_{n_1}]|| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |A|[\varphi'_{n_1}, \psi'_1]|| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e poi un indice n_2 tale che sussistano, oltre le diseguaglianze precedenti, le altre

$$|A|[\varphi'_{n_1}, \psi'_{n_2}]|| < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad |A|[\varphi'_{n_2}, \psi'_{n_1}]|| < \frac{\varepsilon}{4},$$

e così via. Otterremo due successioni di funzioni

$$\varphi'_1, \varphi'_{n_1}, \varphi'_{n_2} \cdots \quad ; \quad \psi'_1, \psi'_{n_1}, \psi'_{n_2} \cdots,$$

tali che

$$|A|[\varphi'_{n_i}, \psi'_{n_i}]|| > 1 \; , \quad |A|[\varphi'_{n_i}, \psi'_{n_j}]|| < \frac{\varepsilon}{2^i} \quad , \quad |A|[\varphi'_{n_j}, \psi'_{n_i}]|| < \frac{\varepsilon}{2^i} \; (i > j).$$

Digitized by Google

Posto allora $\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_{n_1} + \varphi'_{n_2} + \cdots$, poichè la serie è uniformemente convergente, sarà $A|[\varphi', \psi]| = A|[\varphi'_1, \psi]| + A|[\varphi'_{n_1}, \psi]| + \cdots$ E di qui, per ogni valore dell'indice i:

$$|A|[\varphi', \psi_{n_i}]|| > 1 - \varepsilon.$$

Ma ciò non è possibile poichè, convergendo uniformemente ψ_n a zero, deve essere

$$\lim_{n \to \infty} A|[\varphi', \psi_n]| = 0.$$

Dalla diseguaglianza (*c*) segue

$$|A|[\varphi_1, \psi_1]| - A|[\varphi_2, \psi_2]|| \leq |A|[\varphi_1, \psi_1]| - A|[\varphi_1, \psi_2]|| + |A|[\varphi_1, \psi_2]| - A|[\varphi_2, \psi_2]||$$
$$\leq K(\max|\varphi_1| \max|\psi_1 - \psi_2| + \max|\psi_2| \max|\varphi_2 - \varphi_1|),$$

donde la continuità di A rispetto al complesso degli argomenti.

4. Il procedimento svolto si estende senz'altro a funzionali che dipendono linearmente da più funzioni di più variabili, giungendo così al seguente enunciato generale:

Sia A *un funzionale dipendente linearmente dalle funzioni*

$$\varphi(x_1 x_2 \cdots x_m) \quad , \quad \psi(y_1 y_2 \cdots y_n), \cdots$$

definite rispettivamente negli insiemi $I_1, I_2, \cdots$ Sarà

$$A|[\varphi_1 \psi_1 \cdots]| = \iint_1 \cdots \int \varphi(x_1 \cdots x_m)\, \psi(y_1 \cdots y_n) \cdots d_{x_1} \cdots d_{x_m}\, d_{y_1} \cdots$$
$$\cdots d_{y_n} \cdots u(x_1 \cdots x_m, y_1 \cdots y_n \cdots)$$

ove I *è l'insieme dei punti di coordinate* $x, y \cdots$ *le cui coordinate* x *appartengono a punti di* I_1, *le* y *a punti di* I_2, *ecc., la funzione* u *è definita in un dominio rettangolare racchiudente* I, *e l'integrale di Stieltjes a secondo membro è limite delle somme*

$$\sum \Delta_{i_1} \cdots \Delta_{i_m}\, \Delta_{j_1} \cdots \Delta_{j_n} \cdots u \cdot \varphi_{i_1 \cdots i_m} \psi_{j_1 \cdots j_n} \cdots$$

La funzione u *è tale che sia limitato l'insieme numerico*

$$\sum \alpha\beta \cdots \Delta_{i_1} \cdots \Delta_{i_m}\, \Delta_{j_1} \cdots \Delta_{j_n} \cdots u$$

se si mantengono limitate le quantità $\alpha, \beta, \cdots$

Digitized by Google

Matematica. — *Sur un problème mixte pour les fonctions harmoniques.* Nota di A. WEINSTEIN, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Le mouvement ondulatoire irrotationel dans un canal à profondeur finie peut se présenter, ainsi que le démontre l'expérience, sous deux formes de caractère qualitatif essentiellement différent, qui sont désignées par les noms de l'onde périodique et de l'onde solitaire.

Les problèmes analytiques correspondants se réduisent, par ex., par la méthode de M. Levi-Civita, en première approximation au même *problème linéaire mixte aux limites* pour une fonction harmonique, les conditions qualitatives imposées aux solutions étant toutefois, bien-entendu, différentes dans les deux cas.

Dans le cas de l'onde périodique le problème linéaire correspondant admet des solutions non nulles, sinusoïdales [2], dont nous allons avoir à nous servir bientôt (voir l'équation (1)).

Par contre les différentes tentatives d'aborder le problème de l'onde solitaire soit par la méthode de Rayleigh et Boussinesq [3], soit par la méthode de M. Levi-Civita [4] donnent l'impression que le problème linéaire en question n'admet pas, dans le cas qualitatif de l'onde solitaire, de solution différente de zéro.

Nous nous proposons, d'étudier ce problème et de confirmer en particulier la prévision de l'inexistence de solutions différentes de zéro dans le cas de l'onde solitaire.

Problème. - Déterminer les fonctions harmoniques et régulières $U(x, y)$ dans une bande indéfinie S comprise entre les droites $y = 0$ et $y = 1$ du plan (x, y), qui satisfont aux limites aux conditions suivantes:

I. $\quad U = 0 \qquad$ sur la droite $y = 0$;

II. $\quad \dfrac{dU}{dn} = pU \qquad$ sur la droite $y = 1$:

$\dfrac{dU}{dn}$ est la derivée suivant la normale extérieure et coincide donc (pour $y = 1$) avec $\dfrac{\partial U(x, y)}{\partial y}$; p est une constante de valeur arbitraire [5].

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) Voir D. J. STRUIK, « Rend. Acc. Linc. », vol. I, serie 6ª, 1° sem. (1925), pp. 373-377.

(3) Voir par ex., LAMB, *Hydrodynamics*, (Cambridge, 1924), § 252.

(4) A. WEINSTEIN, « Rend. Acc. Linc. », vol. III, serie 6ª, 1° sem. (1926), pp. 463-468.

(5) Il est à remarquer qu'un problème du même genre se présente dans la théorie des mouvements discontinus. Voir A. WEINSTEIN, *Ein hydrodynamischer Unitätssatz*, « Mathematische Zeitschrift », vol. 19 (1924), pp. 265-275.

Digitized by Google

(Dans le cas du problème hydrodynamique cette constante doit être *positive*, tandis que dans la Théorie de la Chaleur on étudie des problèmes analogues avec un p essentiellement négatif).

Il est nécessaire d'ajouter aux conditions I et II des *conditions supplémentaires* qui jouent un rôle fondamental pour la détermination de U.

1. *La solution* U *s'annule à l'infini.* - (Problème correspondant en première approximation à *l'onde solitaire*).

U signifie dans ce cas l'angle ϑ entre la direction du vecteur vitesse au point considéré et celle de la vitesse à l'infini. Nous admettons que cet angle, ainsi que la courbure des lignes de courant tendent à l'infini de S vers zéro, c'est-à-dire nous faisons l'hypothèse supplémentaire

III. $U(x, y)$ et $\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}$ tendent vers zéro pour $x = \pm \infty$ et $0 \leq y \leq 1$.

En admettant en outre, que la ligne libre l, qui limite supérieurement l'onde solitaire, possède une crête unique, ou, plus généralement, un nombre fini d'élévations, on est conduit d'une manière naturelle encore à l'hypothèse suivante

IV. $U(x)$ [1] est une fonction à un nombre fini de maximums et tend à partir d'un $|x|$ suffisament grand d'une manière monotone vers 0.

Nous allons maintenant prouver que $U(x, y) \equiv 0$ est l'unique solution de notre problème, satisfaisant aux conditions I jusqu'a IV (et confirmer donc la nécessité d'aborder dès le début le problème de l'onde solitaire par une approximation non linéaire).

A cet effet considérons la fonction harmonique auxiliaire, *bornée* dans S ainsi que ses derivées

$$V = (e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}) \cos \alpha (x - \xi) \tag{1}$$

où $\alpha \neq 0$ et ξ sont des constantes arbitraires.

La fonction V satisfait aux conditions aux limites suivantes :

$$V = 0 \qquad \text{pour } y = 0 \tag{2}$$

$$\frac{dV}{dn} = qV \qquad \text{pour } y = 1. \tag{3}$$

La constante q est liée à α par la relation

$$q = q(\alpha) = \alpha \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} \quad ; \quad q(-\alpha) = q(\alpha) \tag{4}$$

(1) Nous allons toujours écrire pour abréger $U(x)$ au lieu de $U(x, 1)$ etc.

Digitized by Google

qui montre que q est situé dans l'intervalle $1 < q < +\infty$.

La formule de Green

$$\int \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) ds .$$

appliquée à un rectangle infiniment long de la bande S se réduit à la limite vues les propriétés des fonctions U et V, à l'équation

$$(p - q) \int_{-\infty}^{+\infty} U(x)\, V(x)\, dx = 0 ,$$

où $V(x) = V(x, 1)$ est égale à

$$(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \cos \alpha (x - \xi) .$$

On aura donc pour toute valeur de $\alpha \neq 0$, sauf peut-être pour les valeurs exceptionnelles de cette constante pour lesquelles $q = q(\alpha)$ devient égal à p, l'équation

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \cos \alpha (x - \xi)\, dx = 0 .$$

Or, par continuité, il est permis d'affirmer que l'intégrale (5) est zéro pour toute valeur de α ($\neq 0$) sans exception aucune (et pour une valeur quelconque de ξ).

En intégrant (5) par rapport à α, on aura par *la formule de Fourier* (qui est applicable en vertue de l'hypothèse IV) :

$$(6) \qquad U(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) \cos \alpha (x - \xi)\, dx = 0 .$$

pour toute valeur de ξ. U est donc 0 sur la droite $y = 1$ et par conséquent en tout point de S.

En limitant p à l'intervalle

$$(7) \qquad -\infty < p < 1$$

on peut donner une *seconde démonstration* du fait que U est $= 0$. Cette démonstration ne se sert plus de l'hypothèse IV, mais la remplace par la condition

V. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} U^2(x)\, dx$ est convergente.

En effet la formule de Green

$$D(U) = \iint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = \int U \frac{dU}{dn}\, ds$$

Digitized by Google

appliquée toujours à notre rectangle se réduit alors à la limite à l'équation

$$D(U) = p \int_{-\infty}^{+\infty} U^2(x)\, dx . \tag{6}$$

Considérons d'abord le cas classique $p = 0$. L'égalité (6) montre immédiatement que $U(x)$ est $= 0$.

Pour $0 < p < 1$ nous allons nous servir de l'inégalité de Schwarz.

On a (par la condition I)

$$U(x, 1) - U(x, 0) = U(x, 1) = U(x) = \int_0^1 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}\, dy,$$

donc

$$U^2(x) \leq \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 dy,$$

ou bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U^2(x)\, dx \leq D(U) . \tag{7}$$

En comparant cette formule avec (6) on voit que même, pour $0 < p < 1$, U doit être identiquement zéro [1].

2. *Solutions bornées.* - La formule (1) nous donne des exemples de solutions bornées (et périodiques) de notre problème linéaire (défini par I et II). (Ces solutions correspondent d'ailleurs, ainsi que nous l'avons déjà mentionné, à la première approximation des ondes périodiques dans un canal).

Nous allons par contre démontrer, en nous servant d'un procédé de M. Hamel [2], qu'il n'existe pas de solutions non nulles, bornées avec leurs derivées pour les valeurs de p de l'intervalle

$$-1 < p < 1 \text{ [3]}. \tag{8}$$

Nous allons nous servir d'une fonction de Green K dans la bande S qui est 0 pour $y = 0$ tandis que $\frac{dK}{dn}$ est $= 0$ pour $y = 1$.

(1) Il est évident, que la démonstration s'applique également au cas où la quantité p, au lieu d'être constante, est nne fonction donnée de x, satisfaisant à la condition $p(x) < 1$, et d'ailleurs absolument quelconque.

(2) G. HAMEL, *Ueber einen hydrodynamischen Unitätssatz des Herrn Weinstein*, « Comptes Rendus du 2me Congrès International de Mécanique appliquée », Zurich, 1926.

(3) Cette démonstration s'applique aussi pour un p variable mais satisfaisant à l'inégalité $-1 < p(x) < 1$.

Digitized by Google

On obtient d'abord une expression explicite pour K, considérée comme fonction du point variable P dans le premier quadrant Q d'un plan auxiliaire F, que l'on fait correspondre à S de manière que les droites $y = 0$ et $y = 1$ correspondent aux moitiés positives de l'axe réel et de l'axe imaginaire du plan F.

Cette correspondance est donnée par la formule

$$F = e^{\frac{\pi}{2}\zeta}, \quad (\zeta = x + iy).$$

En désignant par P_1 le pol de K (dans le premier quadrant) et par P_2, P_3, P_4 ses images dans les trois autres, on obtient, d'après M. Hamel, pour K l'expression

$$K_{P_1}(P) = \frac{1}{2} \log \frac{\overline{PP_3}^2 \cdot \overline{PP_4}^2}{\overline{PP_2}^2 \cdot \overline{PP_1}^2}.$$

La formule de Green

$$U = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{dU}{dn} K - U \frac{dK}{dn} \right) ds$$

appliquée toujours à notre rectangle nous montre (par un passage à la limite, qui est permis, vu que K et ses dérivées s'annulent aux infinis de S), que toute fonction harmonique U bornée avec ses dérivées dans S et satisfaisant aux conditions I et II satisfait sur la droite $y = 1$ à l'équation intégrale homogène (et singulière)

$$U(x) = \frac{p}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \xi)\, U(\xi)\, d\xi \tag{9}$$

avec le noyau

$$K(x, \xi) = \lg \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}x} + e^{\frac{\pi}{2}\xi}}{e^{\frac{\pi}{2}x} - e^{\frac{\pi}{2}\xi}} \right)^2 \geqq 0. \tag{10}$$

On en déduit, en désignant par $|U|_{Max}$ le maximum de la fonction bornée $U(x)$, l'inégalité

$$|U|_{Max} \leqq |p| \cdot |U|_{Max} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \xi)\, d\xi.$$

Or on sait déjà depuis longtemps que l'intégrale au second membre est identiquement égale à 2π [1]. On en déduit immédiatement que, pour $|p| < 1$, $|U|_{Max}$ et par conséquence toute solution bornée U doit être identiquement égale à zéro.

(1) Voir T. Levi-Civita, *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini*, « Rend. Acc. Linc. », vol. XX, serie 5ª, 1° sem. (1911), p. 295.

Digitized by Google

3. *Solutions non bornées.* – Il existe par contre des solutions non bornées de notre problème pour une valeur arbitraire de p entre $-\infty$ et $+\infty$.

On peut obtenir de telles solutions par la formule

$$(11) \qquad W(xy) = (e^{\alpha x} \pm e^{-\alpha x}) \sin(\alpha y)$$

qui satisfont à la condition

$$\frac{dW}{dn} = pW \qquad \text{pour} \qquad y = 1$$

avec

$$p = \alpha \operatorname{ctg} \alpha .$$

Remarque. Nous avons vu que, pour déterminer toutes les solutions bornées de notre problème aux limites, il suffirait de résoudre complétement l'équation singulière (9).

On peut l'écrire, en développant K, sous la forme suivante

$$(P) \qquad U(x) = \frac{2p}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\frac{\pi}{2}|x-\xi|}}{2n-1} U(\xi)\, d\xi .$$

On obtient immédiatement des solutions particulières en posant $U = e^{\gamma x}$, où la partie réelle de γ doit être (pour assurer la convergence de l'intégrale) plus petite que $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. γ est liée à p par l'*équation caractéristique transcendente*

$$1 - 2p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2 - \gamma^2} = 0$$

c'est à dire: $\gamma \operatorname{ctg} \gamma = p$. (On retrouve en particulier pour $\gamma = i\alpha$ notre équation (4)).

L'équation (P) peut être considérée comme une généralisation remarquable de l'équation singulière, aujourd'hui classique, de M. Picard que nous écrirons sous la forme

$$(P_1) \qquad U(x) = \frac{2p}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}|x-\xi|} U(\xi)\, d\xi .$$

Or on sait [1] que cette équation, ainsi que les équations plus générales

$$(P_N) \qquad U(x) = \frac{2p}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-(2n-1)\frac{\pi}{2}|x-\xi}}{2n-1} U(\xi)\, d\xi ,$$

(1) G. Andreoli, *Sovra una particolare classe di equazioni integrali singolari*, «Rend. Acc. Lincei», vol. XXVI, ser. 5ª, 1° sem. (1917), pp. 531-538.

Digitized by Google

qui sont du type considéré par M. Andreoli, n'admettent pas d'autres solutions que celles qui sont données par des combinaisons de fonctions $e^{\gamma x}$, γ étant, d'ailleurs, liée à p par l'*équation caracteristique algébrique*

$$1 - 2p \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2 - \gamma^2} = 0.$$

Il est donc probable qu'il en soit de même pour les solutions de (P). Je me propose de revenir sur ce point, ainsi que de démontrer prochainement (par une autre méthode) que toutes les solutions régulières de notre problème, satisfaisant uniquement aux conditions I et II, sont des combinaisons linéaires des fonctions (I) et (II), auxquelles il faut ajouter la fonction $U = y$, qui est une solution du problème dans le cas $p = 1$.

Matematica. — *Sur les congruences des courbes.* Nota di J. Dubourdieu, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Je me propose dans cette Note d'étudier l'extension au cas d'un espace à n dimensions des résultats exposés par le professeur Levi-Civita dans une Note parue en 1899 dans ces « Comptes rendus », sur les congruences de courbes de l'espace ordinaire. Les résultats relatifs aux congruences normales se généralisent sans difficulté. Il n'en est plus de même en ce qui concerne l'interprétation géométrique du système canonique et la notion de congruence isotrope.

J'aurai alors recours à une étude dont l'idée m'a été suggérée par le professeur Levi-Civita et qui fera l'objet de la seconde partie de cette Note.

I. Soit dans un espace euclidien à n dimensions une congruence [C] de courbes, P un point arbitraire, c la courbe de la congruence passant par P, t_P la tangente en P à c, et π_P l'hyperplan (à $n-1$ dimensions) normal en P à c. Les tangentes t aux courbes c menées par les différents points de π_P constituent une congruence de droites [T_P] dont la nature dépend essentiellement de celle de [C]. En particulier, les éléments obtenus en généralisant ceux de la théorie de Kummer (foyers, points limites, plans principaux) s'expriment aisément au moyen des cosinus directeurs de [c] et de leurs dérivées premières. Les résultats que nous obtiendrons pourraient d'ailleurs s'interpréter encore dans le cas d'une congruence [C] tracée dans un espace de Riemann quelconque, à condition d'imaginer la congruence T_P tracée dans l'espace euclidien osculateur en P.

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1927.

Digitized by Google

Associons à [C] $n-1$ autres congruences $[C_i]$ $(i = 12 \cdots n-1)$ formant avec elle un « ennuple orthogonal ». Nous désignerons les paramètres directeurs de [C] par $\lambda_n^{(i)}$ et ceux de $[C_k]$ par $\lambda_k^{(i)}$, suivant l'usage. Soit alors Q un point de π_P voisin de P. x^i étant les coordonnées de P dans un système curviligne quelconque, nous désignerons celles de Q par $(x^i + \xi^i)$ en posant $\xi^i = \sum_{h=1}^{n-1} \zeta_h \lambda_h^{(i)}$.

$\lambda_n^{(i)}$ étant les paramètres de t_P, nous désignerons par $\lambda_n^{(i)} + \mu^{(i)}$ les paramètres de la tangente t_Q à la courbe de la congruence [C] passant par Q. (Plus exactement, dans le cas d'un espace de Riemann quelconque, μ^i seraient les composantes contravariantes de la différence géométrique entre t_Q et le vecteur obtenu en déplaçant par parallélisme t_P de P en Q).

Les composantes covariantes du vecteur μ sont définies par

$$\mu_r = \sum_{q=1}^{n} \lambda_{n|rq} \xi^q = \sum_{\substack{h=12\cdots n-1 \\ q=12\cdots n}} \lambda_{n|rq} \lambda_h^{(q)} \zeta_h = \sum_{i,h=1}^{n-1} \gamma_{nih} \lambda_{ir} \zeta_h .$$

On a ainsi :

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu_r = \sum_{i,h=1}^{n-1} \gamma_{nih} \lambda_{ir} \zeta_h , \\ \mu^r = \sum_{i,h=1}^{n-1} \gamma_{nih} \lambda_i^r \zeta_h . \end{cases}$$

L'angle θ de t_P avec t_φ est fourni par

$$\theta^2 = \sum \mu_r \mu^r = \sum_{h,k=1}^{n-1} \zeta_h \zeta_k \times \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{nih} \gamma_{nik} .$$

1. — Soit r l'abscisse d'un point M sur t_P comptée à partir de P, et t l'abscisse d'un point N de t_Q comptée à partir de Q. Si on calcule la distance MN et si on exprime que ses dérivées par rapport à r et t sont nulles, on obtient aisément les valeurs de r et t correspondant à la plus courte distance entre t_P et t_Q. On trouve ainsi :

$$(2) \qquad r = -\frac{1}{\theta^2} \cdot \sum_{h,k=1}^{n-1} \gamma_{nkh} \zeta_k \zeta_h .$$

Pour étudier les variations de r nous ferons un changement de variables. Les cosinus des angles que le vecteur μ fait avec les lignes

$$[C_1] \; [C_2] \cdots [C_{n-1}]$$

sont donnés pour les formules

$$(3) \qquad \theta_k = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ki} \mu^i = \sum_{h=1}^{n-1} \gamma_{nkh} \frac{\zeta_h}{\theta} , \qquad [k = 12 \cdots n-1]$$

Digitized by Google

Γ_{nkb} désignant le terme complémentaire de γ_{nkb} dans le déterminant (γ_{nkb}) on tire des équations (3)

$$\frac{\tilde{\gamma}_b}{\theta} = \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma_{nkb}\,\theta_k ,$$

et en portant ces valeurs dans (2) il vient:

$$(2') \qquad r = -\sum_{i,j=1}^{n-1} \Gamma_{nij}\,\theta_i\,\theta_j = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n-1} (\Gamma_{nij} + \Gamma_{nji})\,\theta_i\,\theta_j \quad , \quad \text{avec} \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_i)^2 = 1 .$$

C'est un résultat connu que les maxima et minima de r s'obtiennent pour des valeurs de θ solutions du système d'équations

$$(4) \qquad -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} (\Gamma_{nij} + \Gamma_{nji})\,\theta_j + r\,\theta_i = 0 , \quad (i = 1\,2 \cdots n-1)$$

r étant solution de « l'équation séculaire »

$$(5) \qquad \left| \frac{1}{2}(\Gamma_{nij} + \Gamma_{nji}) + \delta_i^j r \right| = 0 .$$

L'équation (5) est de degré $n-1$ et ses racines r sont les abscisses de $n-1$ points (distincts ou confondus) qu'on appelle *points-limites* de t_P. Les directions correspondantes fournies par les équations (4) sont dites *directions principales*. Si l'équation (5) a $n-1$ racines distinctes, on a ainsi un système bien déterminé de $n-1$ directions principales 2 à 2 orthogonales.

Dans le cas de $n = 3$, l'équation (5) se réduit à l'équation caractéristique de la congruence [C] et les directions principales sont les directions des tangentes aux congruences du système canonique. On retrouve ainsi l'interprétation géométrique de M.r Levi-Civita, mais elle ne s'étend pas au cas de n quelconque.

2. - La recherche des foyers de T_P relatifs au rayon t_P est classique [1] et conduit à l'équation

$$(6) \qquad |\rho\,\gamma_{nkb} + \delta_{kb}| = 0 ,$$

ρ étant l'abscisse d'un foyer sur t_P.

Il est aisé de voir que la somme des racines de l'équation (5) est égale à la somme des racines de l'équation (6), car on a:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_{nii} .$$

D'où le théorème:

(1) Cfr. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, p. 303.

Digitized by Google

Le point moyen des foyers est le même que celui des points limites.

Les conditions pour que la congruence [C] soit normale en P ($\gamma_{nkh} = -\gamma_{nhk}$) expriment que la congruence T_P est elle-même normale en P et que ses plans focaux sont rectangulaires. Dans ce cas les déterminants $|\gamma_{nij}|$ et $|\Gamma_{nij}|$ sont symétriques et les 2 équations (5) et (6) admettent les mêmes racines. Elles ont en effet leurs coefficients proportionnels comme on le constate aisément en utilisant le théorème suivant:

Un mineur M d'ordre m contenu dans le déterminant R adjoint au déterminant D est égal au mineur de D homologue du complément algébrique P de M dans R, multiplié par la puissance $(m-1)$ième du déterminant D.

D'où le théorème: *Si une congruence de droites est normale ses foyers et ses points limites sont confondus.*

II. - 1) Dans cette seconde partie nous supposerons la congruence [C] tracée dans un espace de Riemann quelconque. Considérons 2 points voisins P et P′ sur une courbe c, et soient π_P et $\pi_{P'}$ les hyperplans normaux à c en ces deux points. Les courbes de [C] voisines de c établissent entre π_P et $\pi_{P'}$ une correspondance H que nous allons étudier. Soit Q un point de π_P voisin de P, et Q′ le point qui lui correspond dans $\pi_{P'}$ (càd. où la courbe de [C] passant par Q rencontre $\pi_{P'}$). Posons: $PP' = ds_n$, $QQ' = ds'_n$. En écrivant que le quadrilatère PP′QQ′ est fermé, il vient:

$$\sum_{h=1}^{n-1} dz_h \lambda_h^{(i)} = ds'_n \left(\lambda_n^i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda_n^i}{dx^j} \xi^j\right) - ds_n \lambda_n^{(i)} - ds_n \sum_{h=1}^{n} z_h \frac{d\lambda_h^{(i)}}{ds_n} .$$

En égalant les infiniment petits du premier ordre on a:

$$ds_n = ds'_n$$

On trouve ensuite aisément

$$\sum_{h=1}^{n-1} \frac{dz_h}{ds_n} \lambda_h^{(i)} = \sum_{h=1}^{n-1} z_h \left(\frac{d\lambda_n^{(i)}}{ds_h} - \frac{d\lambda_h^{(i)}}{ds_n}\right) .$$

Or,

$$\frac{d\lambda_n^i}{ds_h} - \frac{d\lambda_h^i}{ds_n} = \frac{d}{ds_h} \cdot \frac{dx^i}{ds_n} - \frac{d}{ds_n} \cdot \frac{dx^i}{ds_h} = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l^i (\gamma_{lhn} - \gamma_{lnh}) ,$$

d'où:

$$(1) \qquad \frac{dz_k}{ds_n} = - \sum_{h=1}^{n} (\gamma_{knh} - \gamma_{khn}) z_h .$$

Digitized by Google

On peut envisager la correspondance H comme une déformation de l'élément π_P, dans la quelle l'élément linéaire $PQ = l$ subit une dilatation linéaire $\delta = \frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{ds}$ qu'on calcule aisément grâce aux formules (1). On trouve ainsi :

$$(2) \qquad \delta = \frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{ds} = \frac{1}{2} \sum_{b,k=1}^{n-1} (\gamma_{nkb} + \gamma_{nbk}) \eta_b \eta_k ,$$

η_k étant le cosinus de l'angle que fait PQ avec la courbe

$$[C_k] \quad (k = 12 \cdots n - 1)$$

Les maxima et minima de δ correspondent à des valeurs des η solutions du système

$$(3) \qquad \frac{1}{2} \sum_b (\gamma_{nkb} + \gamma_{nbk}) \eta_b - \rho \eta_k = 0 \quad , \quad (k = 12 \cdots n - 1),$$

ρ étant solution de « l'équation caractéristique » de [C]

$$(4) \qquad \left| \frac{1}{2} (\gamma_{nkb} + \gamma_{nbk}) - \delta_b^k \rho \right| = 0 .$$

Les équations (3) donnent les directions des tangentes au système canonique.

Les directions canoniques (tangentes au système canonique) *sont donc les directions de* π_P *pour lesquelles la dilatation linéaire est stationnaire.*

Si l'on désigne par τ le volume d'un petit élément à $n - 1$ dimensions de π_P pris autour de P, ce volume subit par la déformation H une variation $d\tau$ et on vérifie aisément que

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{d\tau}{ds} = \operatorname{div} \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i_{ni} = \sum_{b=1}^{n-1} \gamma_{nbb} , \quad (1)$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire tangent à C. Or $\sum_{b=1}^{n-1} \gamma_{nbb}$ est la somme des racines de l'équation caractéristique, et elle reçoit ainsi une interprétation géométrique simple.

Soient η et η' deux directions de π_P orthogonales entre elles

$$(\Sigma \eta_b \eta'_b = 0) .$$

(1) Cfr. U. Cisotti, *Moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni*, in « Rend. della R. Acc. dei Lincei », ser. V, vol. XIX (1910), pp. 373-376. Mr. Cisotti y considère sous le nom de *congruences solénoidales* les congruences de droites pour lesquelles $\operatorname{div} \vec{u} = 0$.

Digitized by Google

Quand on passe de π_P à π_P, par la correspondance H l'angle de ces deux directions subit une variation $d\theta$, et on a :

$$(5) \qquad \frac{d\theta}{ds} = -\sum_{h,k=1}^{n-1} (\gamma_{nhk} + \gamma_{nkh})\,\eta_h\,\eta_k' .$$

On en conclut immédiatement que *les directions canoniques sont encore caractérisées par la propriété d'être les directions orthogonales entre elles qui restent orthogonales dans la déformation* H.

2) Des considérations précédentes résulte une démonstration géométrique du théorème suivant enoncé par Ricci:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $n-1$ *familles d'hypersurfaces de la congruence* [C] 2 *à* 2 *orthogonales* (ce qu'on appelle un système fondamental orthogonal) *est que parmi les systèmes canoniques orthogonaux relatifs à* [C] *il y en ait un qui soit constitué de congruences normales.*

La condition est évidemment suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire il suffit d'observer que les normales aux $n-1$ hypersurfaces d'un système fondamental passant par une même courbe c, se correspondent le long de cette courbe par la transformation H. Comme ces normales restent orthogonales entre elles, elles constituent un système de directions canoniques, ce qui prouve qu'il existe bien un système canonique formé de congruences normales.

3) Nous avons laissé de côté le cas où l'on aurait:

$$\begin{cases} \gamma_{nkh} + \gamma_{nhk} = 0 & , \quad \text{pour } h \neq k , \\ \gamma_{nhh} = C & , \quad C \text{ étant une constante.} \end{cases}$$

Dans ce cas les formules (2) et (5) montrent que les dilatations linéaires sont constantes et que deux directions orthogonales quelconques restent orthogonales. L'équation caractéristique a toutes ses racines égales et tout système de $n-1$ congruences orthogonales entre elles et à [C] constitue un système canonique relatif à [C].

De plus deux surfaces de la congruence (intégrales de l'équation $Xf - \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^{(i)} \frac{df}{dx^i}\Big)$ passant par une même courbe c de cette congruence et orthogonales en un point de cette courbe restent orthogonales tout le long de c. Cette dernière remarque donne pour $n = 3$ une démonstration immédiate du théorème suivant énoncé par Ricci:

Si l'équation caractéristique a toutes ses racines égales, à toute intégrale de l'équation $Xf = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n^i \frac{df}{dx^i}$ correspondent $n-2$ autres intégrales qui lui sont orthogonales.

Digitized by Google

On pourrait étendre à ces congruences le nom de congruences isotropes qu'on leur donne dans le cas de $n = 3$, et trouver une justification à cette dénomination dans la remarque suivante.

Etant donnée une congruence [C] quelconque, si on considère un segment PQ de π_P comme précédemment, ce segment n'est pas, en général, normal à la courbe de la congruence passant par Q. Les directions jouissant de cette propriété sont définies par l'équation

$$\sum_{h,k=1}^{n-1} \gamma_{nhk}\, \eta_h \eta_k = 0 .$$

(Il suffit de se reporter à la formule (2) du § I et de remarquer qu'on doit avoir $r = 0$).

Dans le cas d'une congruence isotrope, l'ensemble de ces directions se réduit à l'ensemble ($\Sigma \eta_h \eta_h = 0$) des directions isotropes de π_P.

Si l'on suppose en particulier que la congruence isotrope [C] soit tracée dans un espace euclidien, une droite isotrope issue de P et située dans π_P reste orthogonale en tous ses points aux courbes de la congruence qui la rencontrent. Dans le cas de $n = 3$ on en déduit immédiatement le théorème énoncé par M.r Levi-Civita à savoir que *toute congruence isotrope de l'espace ordinaire est orthogonale à 2 autres congruences conjuguées formées de droites isotropes.*

Matematica. — *Il comportamento assintotico e gli zeri di una classe di funzioni intiere.* Nota di O. Onicescu, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

1. Consideriamo una funzione intiera

$$F(z) = \int_0^M h(s) \sin(zs)\, ds \tag{1}$$

dove la funzione di variabile reale $h(s)$ è regolare e positiva in tutto l'intervallo O M, e tale che l'integrale esiste per qualunque M positiva ed anche per $M = \infty$.

Dimostreremo che per *qualunque funzione di questa classe, i punti critici della funzione inversa sono reali, e che i soli valori assintotici di una* $F(z)$ *sono* $\pm \infty$.

Poniamo

$$Z = F(z) = X + iY \qquad \text{e} \qquad z = x + iy .$$

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

Digitized by Google

Si avrà

$$(2) \qquad Y = \int_0^M h(s) \cos xs \operatorname{sh} ys \, ds$$

oppure, per la formola della media ($h(s) \operatorname{sh} ys$ non ha variazioni di segno nell'intervallo O M),

$$(2') \qquad Y = \cos \theta(x, y) \int_0^M h(s) \operatorname{sh} ys \, ds$$

con che

$$\cos \theta(x, y) = \frac{\int_0^M h(s) \cos(xs) \operatorname{sh}(ys) \, ds}{\int_0^M h(s) \operatorname{sh}(ys) \, ds} .$$

Quando $y \rightarrowtail \pm \infty$

$$\cos \theta(x, y) \rightarrowtail \cos Mx ;$$

dunque

$$\theta(x, y) \rightarrowtail Mx$$

precisando con questo il ramo della θ da cui partiremo.

Una curva (γ) di equazione

$$\theta(x, y) = C$$

è assintotica alla retta

$$Mx = C ,$$

in ambo i sensi $(y \rightarrowtail \pm \infty)$, è composta di un solo ramo di curva senza punti doppi, traversa l'asse reale, e non ha punti comuni con un'altra (γ).

Supponiamo, per esempio, che γ sia composta di due rami γ_1 e γ_2 (che debbono essere tutti e due assintotici a $Mx = C$ in ambo i sensi). Possiamo immaginare che γ_1 e γ_2 abbiano uno, due o più punti comuni, oppure nessun punto comune a distanza finita.

In ciascuno dei casi prendiamo $C' = C + \varepsilon$; scegliendo opportunamente ε, abbastanza piccolo, positivo o negativo, troviamo che uno dei rami di (γ') dovrà essere o limitato in un senso, o una curva chiusa, oppure, ciò che avviene in tutti i casi, che un tal ramo riscontri una delle curve γ_1 o γ_2, fenomeni tutti contrari a ciò che si sa già sopra le curve γ.

L'analisi precedente vale anche per il caso dei punti doppi.

Consideriamo adesso le curve del piano di z che corrispondono all'asse reale del piano di Z. L'equazione globale di queste curve sarà

$$\int_0^M h(s) \cos(xs) \operatorname{sh}(ys) \, ds = 0$$

Digitized by Google

che in virtù della (2′) diventa

$$\cos\theta(x,y)\int_0^M h(s)\,\mathrm{sh}\,(ys)\,ds = 0\,,$$

forma che serve a separare le equazioni dei singoli rami, che saranno da un lato l'asse reale

$$y = 0$$

e le curve semplici (γ_n)

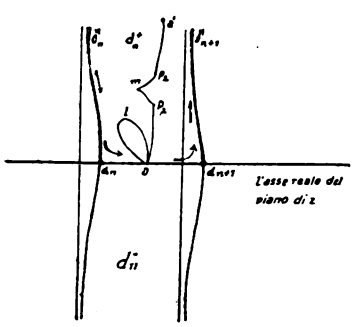
$$\theta(x,y) = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad (n = 0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\cdots)$$

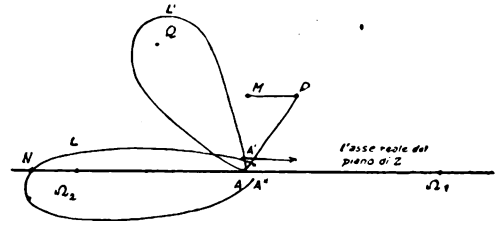
rispettivamente assintotiche alle rette

$$\mathrm{M}x = \frac{\pi}{2} + n\pi\,.$$

Un'analisi semplice mostra che le curve (γ_n), che non hanno fra di loro punti comuni, e che traversano l'asse reale, non hanno con questo che un punto comune.

Le curve (γ_n) e l'asse reale scompongono il piano di ζ in una infinità di domini semplici d_n^+ e d_n^-





Consideriamo un punto, a, dell'intervallo $\alpha_n\ \alpha_{n+1}$, e sia A il valore corrispondente di Z. Se Z parte da A verso A_{n+1} il punto corrispondente al ramo di ζ che è uguale ad a per $Z = A$, si avvia verso α_{n+1}. Quando Z oltrepassa A_{n+1} e continua verso la destra sull'asse reale, ζ continua sulla parte positiva di γ_{n+1} verso l'infinito. (Non è da escludere, *a priori*, il caso in cui, ζ tende verso l'infinito su γ_{n+1} e Z tende verso un valore Ω_1 finito).

Le stesse circostanze si presentano a sinistra di A. (Dobbiamo forse osservare anche che quando Z continua nello stesso senso, ζ non può tornare indietro, a causa dell'uniformità della funzione). La regione d_n^+, deli-

Digitized by Google

mitata dalla parte positiva di γ_n, e di γ_{n+1} e dal tratto $\alpha_n\,\alpha_{n+1}$, non contiene nessun punto che corrisponda a l'asse reale di Z ed il suo contorno corrisponde univocamente ad un tratto come $\Omega_2\,\Omega_1$.

Supponiamo adesso che in d_n^+ si trovi uno zero della derivata di $F(z)$, dunque un punto critico di $z(Z)$. Sia m questo zero ed M il valore corrispondente di Z. Consideriamo una linea MP, a cui corrispondono in d_n^+ due linee diverse mp_1 e mp_2. Consideriamo un cammino PA che non incontri nessun punto assintotico e nessun punto corrispondente ad un eventuale punto critico in d_n. (Con questo supponiamo implicitamente che A non sia valore assintotico. Se lo fosse si può sempre trovare in una vicinanza piccola a piacere un punto A′ che non sia assintotico. I valori assintotici non formano mai alcuna specie di continuo; dunque un cammino come quello che ho sopra considerato esiste sempre). Quando Z descrive PA, una delle determinazioni di z, per esempio quella che in P prende il valore p_1, tende verso a; l'altra deve tendere verso un altro punto, a distanza finita, che non può essere nè identico con a (che non è punto critico), nè altrove sul contorno, nè all'interno di d_n^+, dunque non può esistere. La supposizione dell'esistenza di m è assurda. *I soli punti critici di* z *sono i punti* α_n, *dell'asse reale.* I soli zeri di $F'(z)$ sono gli zeri reali.

I punti Ω_1 e Ω_2 coincidono rispettivamente con $+\infty$ e $-\infty$. Supponiamo per esempio che Ω_2 sia a distanza finita. A un cammino come A′LNA″ che evita i valori assintotici dovrebbe corrispondere una linea l tutta interna a d_n^+, ciò che è assurdo. Siccome questo fatto si verifica per qualunque ramo di z, nessun valore reale e finito è assintotico.

Supponiamo che Q sia un valore assintotico del ramo rappresentato in d_n^+. A un cammino AL′A che evita gli altri valori assintotici dovrebbe corrispondere una linea $al'a$ chiusa, interna a d_n^+. Quando Z tende verso Q, il ramo corrispondente in d_n^+ resta interno alla linea $al'a$, dunque Q non può essere valore assintotico pel nostro ramo, dunque per nessuno.

I soli valori assintotici della funzione $F(z) = \int_0^M h(s) \sin(zs)\,ds$ *sono i due infiniti reali* $\pm\infty$.

Matematica. — *Sulla curvatura e sul parallelismo su una superficie.* Nota di G. ANDREOLI, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Meccanica. — *Stabilità geodetica. Applicazione ai sistemi conservativi della Meccanica.* Nota di G. VRANCEANU, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Vogliamo far vedere in questa Nota, come la stabilità [2] (in prima approssimazione) di una geodetica di una varietà anolonoma V_n^m (e in particolare di una varietà riemanniana V_n $(m = n)$), dipende dal segno (lungo la geodetica) di $m - 1$ curvature gaussiane, dette curvature principali associate alla geodetica.

Per questo è necessario estendere l'interpretazione geometrica dei coefficienti di Ricci a quattro indici [3], anche al caso di una V_n^m $(m < n)$.

1. Riprendiamo le equazioni delle geodetiche di una V_n^m [4]

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds} = \sum_1^m{}_h \lambda_h^i u_h, & (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \dfrac{du_h}{ds} = \sum_1^m{}_{kl} \gamma_{hkl} u_k u_l, & (h = 1, 2, \cdots, m) \end{cases}$$

e consideriamo una geodetica qualunque soluzione di questo sistema

$$(B)\qquad x_i = \varphi_i(\sigma), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

dove σ indica l'arco della geodetica.

Possiamo supporre per semplicità, che abbiamo scelto le congruenze fondamentali λ in modo che nei punti della nostra geodetica (B), essa risulti come la m^{esima} congruenza fondamentale.

Consideriamo adesso in un punto P di (B) la superficie geodetica di polo P, tangente alle direzioni delle congruenze fondamentali (k) ed (m).

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) Cfr. la Nota precedente, *Sopra la stabilità geodetica*, questi « Rendiconti », seduta del 19 dicembre 1926.

(3) Cfr. RICCI, *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, « Atti del R. Istituto Veneto » (1903-1904), t. 63, p. II.

(4) Vedi la mia Nota, *Sur les espaces non holonomes*, « Comptes Rendus », t. 183 (1926), pp. 852-854.

Digitized by Google

La curvatura gaussiana nel punto P di tale superficie geodetica, è rappresentata proprio dal valore del coefficiente di Ricci a quattro indici $\gamma_{mk,mk}$ nello stesso punto.

Questo risulta dal fatto che il teorema di Severi si estende anche ad una V_n^m, e cioè: il parallelismo sopra la superficie geodetica, coincide col parallelismo ambientale (1). Consideriamo adesso la superficie geodetica S formata dalle geodetiche che escono dai diversi punti della base (B), secondo la congruenza (k).

La curvatura gaussiana di tale superficie geodetica, nei diversi punti della (B) è data dal valore in quei punti dello stesso coefficiente di Ricci $\gamma_{mk,mk}$.

Una geodetica g di V_n^m vicina alla (B) situata sulla superficie S è nello stesso tempo geodetica anche per S.

Secondo un risultato noto per le superficie (dalla formula di Jacobi), purchè qualunque sia la geodetica g sopra la superficie S, inizialmente vicina alla geodetica base (B), rimanga sempre vicina (almeno nella prima approssimazione), è necessario e sufficiente che la curvatura gaussiana $\gamma_{mk,mk}$ sia positiva lungo la base (B).

Ma data una geodetica qualunque g inizialmente vicina alla geodetica base (B), si può sempre trovare una superficie S che la contenga. Ne risulta che se tutte le possibili superficie S che passano per la base (B) sono a curvatura gaussiana positiva lungo (B), la geodetica (B) è stabile.

Abbiamo visto (2) che data una congruenza ortogonale alla (B), che forma colle congruenze fondamentali nei punti di (B) i coseni

$$x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, 0,$$

la superficie geodetica tangente a questa congruenza e alla (B) ha per curvatura gaussiana nei punti di (B) l'espressione

$$K = \sum_{1}^{m-1}{}_{\alpha\beta} \gamma_{m\alpha,m\beta} x_\alpha x_\beta . \tag{2}$$

In questa formula tanto i coefficienti $\gamma_{m\alpha,m\beta}$ di Ricci, quanto i coseni x_α sono a considerarsi funzioni dell'arco σ della base (B).

Risulta che per la stabilità della (B) è necessario e sufficiente che il secondo membro di (2) sia una forma quadratica definita positiva.

La formula (2) può servire per introdurre la nozione di curvatura positiva della varietà V_n^m lungo una sua geodetica, ed anzi lungo una curva qualunque.

(1) La dimostrazione si trova in una Memoria che sarà pubblicata negli «Annali di Matematica», avente il titolo: *Studio geometrico-meccanico dei sistemi anolonomi.*

(2) Nota già citata *Sopra la stabilità geodetica.*

Digitized by Google

3. *Direzioni e curvature principali associate alla* (B). Dalla formula (2) si vede che la curvatura gaussiana K varia con la direzione associata alla B, ossia colle x le quali sono legate dalla sola relazione

$$\sum_{1}^{m-1}{}_{\alpha} x_\alpha^2 = 1 . \tag{3}$$

Vogliamo vedere quali sono le direzioni per le quali K passa per un estremo. In questo caso le x devono soddisfare alle equazioni che si ottengono scrivendo che le derivate parziali della funzione

$$\sum_{1}^{m-1}{}_{\alpha\beta} \gamma_{m\alpha,\,m\beta}\, x_\alpha\, x_\beta - \lambda \left(\sum_{1}^{m-1}{}_{\alpha} x_\alpha^2 - 1 \right), \tag{4}$$

sono nulle. Con ciò, l'incognita ausiliaria λ deve soddisfare alla equazione

$$\left| \gamma_{m\alpha,\,m\beta} - \lambda \delta_\alpha^\beta \right| = 0 \qquad \left[\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 , & \alpha = \beta \\ 0 , & \alpha \neq \beta \end{cases} \right]. \tag{5}$$

Possiamo ritenere senz'altro, che in qualunque punto di (B), esistono in generale solo $m-1$ direzioni ortogonali tra loro e alla (B), per le quali K passa per un estremo. Diremo che esse sono le direzioni principali associate alla (B). Queste direzioni sono in generale diverse dalle direzioni principali introdotte da Ricci.

Prese le congruenze fondamentali in modo che le loro tangenti siano le direzioni principali associate alla (B), si ha il risultato notevole

$$\gamma_{m\alpha,\,m\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{5'}$$

lungo la geodetica (B). In questo caso la formula (2) diviene

$$K = \sum_{1}^{m-1}{}_{h} \gamma_{mh,\,mh}\, x_h^2 , \tag{6}$$

e il criterio di stabilità prende la forma semplice ed intuitiva: *Una data geodetica è stabile (in prima approssimazione), se le curvature principali associate ad essa sono positive.*

Le curvature principali associate sono proprio le $m-1$ radici in λ dell'equazione (5).

Si deve osservare, che se le direzioni principali associate, variano lungo (B) secondo la legge del parallelismo, (caso che non si verifica in generale), le equazioni alle variazioni si possono separare in $m-1$ equazioni del Jacobi

$$\frac{d^2 \varepsilon_h}{d\sigma^2} + \gamma_{mh,\,mh}\, \varepsilon_h = 0 , \quad (h = 1, 2, \cdots, m-1) \tag{7}$$

[prendendo le congruenze principali associate, anche cartesiane lungo (B)].

Digitized by Google

Hanno questa proprietà [1] per tutte le loro geodetiche (oltre le varietà a curvatura costante), le varietà riemanniane a tre dimensioni, che ammettono una rappresentazione geodetica (non conforme) sopra un'altra varietà.

4. *Applicazione ai sistemi conservativi.* Le traiettorie dei moti dei sistemi conservativi della Meccanica (tanto olonomi, che anolonomi) si possono considerare come le geodetiche di una opportuna V_n^m. Infatti nel caso dei moti spontanei la metrica di V_n^m si definisce in base alla formula [2]

$$ds^2 = 2\,T\,dt^2 = \sum_{ij}^{n} a_{ij}\,dx_i\,dx_j, \tag{8}$$

dove T è la forza viva del sistema [3].

Nel caso dei sistemi conservativi di potenziale U la varietà $\bar{V}_n^m$ ha il suo $\bar{ds}^2$ definito dalla formula

$$\bar{ds}^2 = (2\,U + 2\,h)\,ds^2, \tag{9}$$

dove h è la costante dell'integrale delle forze vive, risultato già noto per i sistemi olonomi [4].

Dalla formula (6) si vede che le varietà V_n^m e $\bar{V}_n^m$ si possono rappresentare conformemente l'una su l'altra.

Sia una geodetica di V_n^m (ossia una traiettoria del sistema meccanico sottoposto alla sollecitazione conservativa di potenziale U), presa come m^{esima} congruenza. Si ha lungo questa traiettoria

$$\bar{\gamma}_{mk,\,mk} = \frac{\gamma_{mk,\,mk}}{2\,U + 2\,h} - \frac{\dfrac{d^2U}{ds_m^2} + \dfrac{d^2U}{ds_k^2}}{(2\,U + 2\,h)^2} + 3\,\frac{\left(\dfrac{dU}{ds_m}\right)^2 + \left(\dfrac{dU}{ds_k}\right)^2}{(2\,U + 2\,h)^3} \tag{10}$$

dove $\bar{\gamma}$ sono i coefficienti di Ricci di $\bar{V}_n^m$ e γ quelli di V_n^m. Siccome la varietà V_n^m include le proprietà spaziali del sistema meccanico (in assenza di forze), la formula (10) fa vedere, tanto il contributo spaziale ($\gamma_{mk,\,mk}$), quanto il contributo delle forze (a traverso il potenziale U), per la stabilità della traiettoria.

(1) Vedi Elie Cartan, *Sur les courbes de torsion nulle*, « Comptes Rendus », T. 184 (1927), p. 140.

(2) Cfr. T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica razionale*, (Bologna, Zanichelli), vol. II, parte II, cap. XI, n. 15.

(3) Vedi la mia Nota, *Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo*, questi « Rendiconti », seduta del 21 nov. 1926 (II semestre) pp. 508-511.

(4) Cfr. T. Levi-Civita e U. Amaldi, loc. cit., n. 17; ovvero P. Appell, *Traité de Mécanique rationelle*, t. II, ed. III, pp. 452-453.

Digitized by Google

Idromeccanica. — *Sur quelques recherches de Helmholtz et de Wien relatives à la forme des ondes se propageant à la surface de séparation de deux liquides.* Nota di J. M. BURGERS (Delft), presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Areomeccanica. — *Sulle curve che compaiono nello studio della corrente circuito-traslatoria.* Nota di M. PASCAL, presentata [1] dal Socio R. MARCOLONGO.

Nello studio della corrente circuito-traslatoria intorno ad un profilo alare, ottenuto al solito mediante rappresentazione conforme di un cerchio, si presentano, come ha fatto notare per primo il Mises [2] e poi il Müller [3], rette e curve che, pur essendo intimamente connesse col profilo, possono disegnarsi indipendentemente dalla conoscenza della forma geometrica di esso e che servono egregiamente alla determinazione delle sue caratteristiche areodinamiche. Così il Mises ha fatto vedere fra l'altro, che tutte le possibili linee d'azione della forza sostentatrice inviluppano, al variare dell'angolo di attacco, una parabola che ha chiamata, perciò, *parabola delle spinte* e che è utilissima alla determinazione, per esempio, del più conveniente angolo di attacco.

Scopo di questo lavoro è quello di estendere tali ricerche trovando, senza conoscere la forma geometrica del profilo, altre curve connesse con esso e che caratterizzino il modo di variare, con l'angolo di attacco, degli altri elementi meccanici e precisamente della grandezza della forza sostentatrice, del suo braccio e del suo momento.

1. Introduciamo prima di tutto gli elementi geometrici già trovati dal Mises e, particolarmente, la parabola delle spinte [4].

La funzione

$$\zeta = n\left(z + \frac{t_1}{z} + \frac{t_2}{z^2} + \cdots\right)$$

sia quella che compie la rappresentazione conforme del profilo dato (con un solo punto angoloso) sul cerchio di centro M (origine) e di raggio R.

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) v. MISES, *Zur Theorie des Tragflächenauftriebs*, «Zeitschr. f. Flugtech. u. Motorluftschr.», 1917, 1920.

(3) W. MÜLLER, *Ueber ebene Profilströmung mit Zirkulation*, «Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.», Bd. 3, 1923.

(4) Cfr. MARIO PASCAL, *La teoria piana delle superficie portanti*, «Boll. Unione Mat. It.», a. IV, 1925.

Digitized by Google

Considerati i due piani ζ e ζ sovrapposti, congiungiamo il centro M (*centro del profilo*) col punto della circonferenza che corrisponde al punto angoloso: la retta così ottenuta (*primo asse del profilo*) faccia con l'asse x l'angolo φ.

Il coefficiente t_1, in generale complesso, abbia come modulo d^2: se da M conduciamo ora un segmento di lunghezza $f = n\frac{d^2}{R}$, inclinato dell'angolo $-\varphi$ sull'asse x, giungeremo ad un punto F (*fuoco del profilo*) tale che il momento della forza sostentatrice rispetto ad esso risulta indipendente dall'angolo di attacco; esso è anche fuoco della parabola delle spinte la quale risulta aver il primo asse come direttrice.

Detto β l'angolo di attacco e V_∞ la grandezza della velocità limite della corrente, la velocità, sotto forma complessa, è espressa da:

$$(1) \qquad w = -V_\infty e^{i\beta} - \frac{ic}{\zeta} + \frac{\frac{1}{n} V_\infty R^2 e^{-i\beta} - V_\infty d^2 e^{i\beta}}{\zeta^2} + \cdots$$

Il valore della forza di spinta è

$$(2) \qquad P = 4\pi\rho \frac{R}{n} V_\infty^2 \operatorname{sen}(\varphi + \beta) = K R \operatorname{sen}(\varphi + \beta)$$

e quello del momento rispetto all'origine:

$$(3) \qquad M_0 = 2\pi\rho V_\infty^2 d^2 \operatorname{sen} 2\beta .$$

Si trova subito che l'equazione della linea d'azione della spinta è:

$$(4) \qquad x\cos\beta - y\operatorname{sen}\beta = \frac{f \operatorname{sen} 2\beta}{2\operatorname{sen}(\varphi + \beta)}$$

da cui immediatamente si ha l'equazione dell'inviluppo al variare di β:

$$(5) \qquad (x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi)^2 - 2f(x\cos\varphi - y\operatorname{sen}\varphi) + f^2 = 0$$

che è la *parabola delle spinte*. Il suo parametro è:

$$(6) \qquad 2h_0 = f \operatorname{sen} 2\varphi .$$

Una qualunque tangente a tale parabola rappresenta una possibile linea d'azione della spinta per i profili cui competono i valori (che si suppongono noti) dei parametri f, φ. L'angolo β (di attacco) si ottiene subito conducendo dall'origine la perpendicolare alla linea di spinta.

2. È facile ora trovare *il luogo dei punti tali che il segmento che li congiunge con l'origine abbia la direzione della linea di spinta e dia con la sua grandezza il valore della spinta per ogni* β.

Se sulla parallela condotta dall'origine alla direzione della spinta per

Digitized by Google

un β arbitrario (tangente alla parabola delle spinte) riportiamo un segmento uguale al valore di P per quel β, otterremo un punto le cui coordinate sono:

$$(7) \qquad \begin{cases} x = K R \operatorname{sen}(\varphi + \beta) \operatorname{sen} \beta \\ y = K R \operatorname{sen}(\varphi + \beta) \cos \beta \end{cases}$$

eliminando l'angolo β fra queste si ottiene il luogo cercato

$$x^3 + x y^2 - x y K R \operatorname{sen} \varphi - x^2 K R \cos \varphi = 0$$

cioè

$$x = 0$$

$$(8) \qquad x^2 + y^2 - x K R \cos \varphi - y K R \operatorname{sen} \varphi = 0$$

che è un cerchio passante per l'origine, di centro

$$x_0 = \frac{K R \cos \varphi}{2} \quad , \quad y_0 = \frac{K R \operatorname{sen} \varphi}{2}$$

e di raggio $\frac{1}{2} K R$.

Il valore della spinta varia dunque come la lunghezza delle corde di un cerchio. Per $\beta = 90° - \varphi$ la direzione della spinta è quella della tangente al vertice della parabola e la sua grandezza è la massima $= K R$.

3. Il cerchio (8), immediatamente costruibile quando sian noti R e φ, dà per ogni angolo β, in direzione e grandezza, la forza di spinta su quei profili che hanno quei valori di R e di φ; per avere tale forza anche in posizione bisognerebbe trasportare il segmento che la rappresenta su quella delle tangenti alla parabola delle spinte, che corrisponde all'angolo β che si vuol considerare. Tale tangente, parallela alla corda del cerchio delle spinte, che fa con l'asse delle x l'angolo $(90° - \beta)$, ha da questa una distanza eguale al braccio della spinta rispetto all'origine, cioè

$$(9) \qquad h = \frac{M_0}{P} = \frac{f \operatorname{sen} 2\beta}{2 \operatorname{sen}(\varphi + \beta)} .$$

Le coordinate del piede della perpendicolare condotta dall'origine alla linea di spinta sono dunque:

$$(10) \qquad x = \frac{f \operatorname{sen} \beta \cos^2 \beta}{\operatorname{sen}(\varphi + \beta)} \quad , \quad y = -\frac{f \operatorname{sen}^2 \beta \cos \beta}{\operatorname{sen}(\varphi + \beta)} .$$

Il luogo di questi punti al variare di β è

$$(11) \qquad (x^2 + y^2)(x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi) = f x y$$

che è una *strofoide obliqua* (podaria della parabola delle spinte rispetto ad un punto del 1° asse).

Digitized by Google

La distanza dunque di un punto della strofoide (11) *dall'origine, rappresenta il braccio della forza di spinta corrispondente a quella direzione.*

Disegnato che sia il cerchio delle spinte e la strofoide dei bracci (oppure il cerchio e la parabola delle spinte) si può avere in posizione e grandezza la forza sostentatrice agente su un dato profilo per un dato angolo di attacco.

4. Si può determinare una curva *luogo dei punti le cui distanze dall'origine rappresentino la grandezza del momento della spinta rispetto all'origine per ogni angolo* β.

Supponiamo disegnato il cerchio delle spinte e la strofoide dei bracci; e siano rispettivamente A e B i punti del cerchio e della strofoide che corrispondono ad una data arbitraria direzione β; congiungiamo con B il punto C preso sulla MA alla distanza uno dall'origine e da A conduciamo la parallela alla CB fino ad incontrare in D la MB: il punto D si trova ad una distanza dall'origine che misura il momento della forza di spinta rispetto all'origine. Le coordinate del punto D si trovano senza difficoltà e sono:

$$(12) \qquad x = KRf \operatorname{sen}\beta \cos^2\beta \quad ; \quad y = -KRf \operatorname{sen}^2\beta \cos\beta$$

eliminando β tra queste si ottiene

$$(13) \qquad (x^2 + y^2)^3 = K^2R^2f^2x^2y^2$$

come equazione del luogo cercato. La (13) è l'equazione di una *rosacea a quattro foglie o quadrifoglio* il cui parametro è $\frac{1}{2}KRf$.

5. Si può notare che la parabola delle spinte (5) e la strofoide dei bracci (11) dipendono soltanto dai parametri f e φ e non da R; mentre il cerchio delle spinte (8) dipende da R e φ e il quadrifoglio dei momenti (13) da R ed f.

La parabola e la strofoide dunque sono le stesse per tutti quei profili che hanno uguali f e φ, per la classe cioè dei profili (R) che differiscono tra loro soltanto per il valore del parametro R.

Il cerchio delle spinte invece è comune a tutti i profili della classe (f) e il quadrifoglio dei momenti a quelli della classe (φ).

Le proprietà areodinamiche perciò che si possono trovare con l'ausilio di tali curve, non son proprie di un solo profilo, ma di intere classi di profili.

Aeromeccanica. — *Curve per la spinta massima (o minima).* Nota di M. PASCAL, presentata dal Socio R. MARCOLONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Geodesia. — *Determinazione di azimut assoluto, eseguita ad Andrate, nell'agosto 1926.* Nota di U. BARBIERI, presentata [1] dal Corrisp. G. LORIA.

Alle osservazioni di latitudine compiute nella stazione da me eseguita nel villaggio di Andrate, nell'estate del 1926 [2], ne seguirono altre di azimut, di cui è oggetto la Nota presente.

Avrei desiderato, per il mio intento, riferirmi alla direzione Andrate-Superga, ma non essendomi stato possibile collocare una mira notturna in detto punto, nè convenendomi per difficoltà finanziarie e materiali di servirmi dei vertici di 1° ordine circostanti, tutti situati nella alta regione alpina, se togliesi Monte Vesco, di deficiente visibilità, approfittai delle operazioni che contemporaneamente avevo iniziato per il collegamento della mia stazione alla rete di 1° ordine dello Stato.

Per l'attacco medesimo mi era occorso determinare nel mio ex-centro un vertice di piramide, scegliendo, come direzione origine, quella del campanile di Brosso, punto di 4° ordine a circa 7 km. di distanza, ed in ottime condizioni di visibilità; reputai quindi miglior cosa servirmi senz'altro del punto medesimo, e mi ridussi, pertanto, a determinare l'azimut astronomico della sua direzione.

Di più, siccome il collocare una mira notturna sul detto campanile, mi avrebbe obbligato, oltre che ad un altro ex-centro, eziandio a ulteriore dispendio, e a ulteriore perdita di tempo, approfittai della buona visibilità che il vertice in discorso presentava anche al tramonto, e compiei le mie osservazioni di azimut in questo periodo della giornata.

Mi limitai a compiere ogni giorno un solo strato, con otto puntamenti alla Mira, ed otto alla Polare, sacrificando la continuità del lavoro alla condizione di poter sempre compiere un buon puntamento.

Il metodo adoperato fu, di conseguenza, quello dello schema noto MPPM, MPPMMPPM, MPPM, metà dei puntamenti compiendosi col cerchio a destra, e metà col cerchio a sinistra.

Le osservazioni si protrassero dal 9 al 29 agosto 1926; al termine di ogni giorno il cerchio veniva reiterato di 30°, e dopo i primi tre giorni il cannocchiale fu invertito sui suoi appoggi.

Il cronometro adoperato fu un Kulberg, collocato nella sacrestia della chiesa di Santa Maria, locale adibito alle misure di gravità, fatte contemporaneamente dal mio assistente, e nelle quali venne usato lo stesso crono-

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1926.
(2) Vedi in questi « Rendiconti ».

Digitized by Google

metro: la correzione di esso, atteso il suo scopo principale, fu determinata col metodo di Döllen, ma con particolare cura; una linea lunga circa 300 m. congiungeva il detto cronometro con un cronografo a punta, sito nel casotto delle osservazioni astronomiche, dove un altro cronometro Nardin veniva consultato per la registrazione esatta del primo siderale.

Per la determinazione della correzione, si osservarono ogni sera diverse orarie, ed un corrispondente numero di polari; per i giorni di osservazione dell'azimut in cui non fu determinata la correzione dell'orologio, si ricorse ad interpolazione.

Nel primo dei due specchi che seguono, oltre la correzione del cronometro e l'istante siderale corrispondente, è indicato, nel suo complesso, il programma seguìto nelle varie sere in cui fu determinato il tempo; nel secondo sono riferiti i risultati complessivi delle osservazioni di azimut compiute; ogni valore proviene dalla media di otto puntamenti, coniugati fra loro; nelle ultime colonne sono trascritti i valori della collimazione per la Mira e per la Polare.

Data	Orarie	Correzione del Kullberg	Tempo siderale corrispondente
12 agosto 1926 . . .	109 Herculis 110 Herculis ζ Aquilae	K = + 5^s . 92	18^h 33^m 57^s . 15
13 » » . . .	109 Herculis 110 Herculis ζ Aquilae	+ 5 . 93	18^h 33^m 36^s . 55
15 » » . . .	72 Ophiuci 109 Herculis ζ Aquilae δ Aquilae	+ 4 . 97	18^h 33^m 19^s . 10
16 » » . . .	72 Ophiuci 110 Herculis ζ Aquilae	+ 5 . 37	18^h 14^m 37^s . 55
23 » » . . .	δ Aquilae β Aquilae 24 Valpeculae	+ 2 . 80	19^h 48^m 56^s . 72
25 » » . . .	δ Aquilae β Aquilae 24 Valpeculae	+ 1 . 97	19^h 48^m 48^s . 21
26 » » . . .	δ Serpentis ω Aquilae γ Aquilae	+ 1 . 30	19^h 11^m 53^s . 57

Digitized by Google

Data	Reitera-zione	Azimut osservato	C_m	C_p	$C_m - C_p$
9 agosto 1926	0°	232°50′49″.6	− 4″.4	− 11″.1	+ 6″.7
12 » »	30°	46 .4	+ 1 .5	+ 15 .4	− 13 .9
23 » »	60°	47 .1	+ 2 .7	+ 6 .0	− 3 .3
24 » »	90°	48 .7	+ 3 .8	+ 8 .3	− 4 .5
26 » »	120°	48 .2	+ 2 .6	+ 11 .1	− 8 .5
29 » »	150°	49 .0	+ 4 .5	+ 12 .2	− 7 .7

Dai risultati di azimut qui su notati, facendone la media, si ottiene

$$232^\circ\ 50'\ 48''.17 \qquad m = \pm\ 0''.49$$

quale valore dell'*azimut astronomico di Brosso sull'orizzonte dell'ex-centro stabilito ad Andrate.*

Nel collegamento della stazione alla rete di 1° ordine dello Stato, si collimò anche al vertice di monte Ripa Vercelli; l'angolo fra la direzione al detto punto, e la direzione a Brosso, risultò

$$13^\circ\ 07'\ 51''.6$$

essendo questo ultimo punto ad ovest del primo.

Ne consegue, come *azimut astronomico di monte Ripa Vercelli*

$$219^\circ\ 42'\ 56''.6\ .$$

Possiamo utilizzare la conoscenza di questo valore, per compiere un confronto fra le determinazioni geodetiche e le astronomiche eseguite ad Andrate, essendo, nei dati dell'Istituto Geografico Militare il vertice summenzionato, direttamente collegato al detto paese.

Riduzione dell'azimut osservato, al campanile di Andrate.

Trovammo già, nelle determinazioni della latitudine, che l'eccentricità della stazione era data dal valore $e = 190^m.781$; ad essa vanno aggiunti gli altri dati occorrenti

$$\varepsilon = 33^\circ\ 03'\ 30'' \quad , \quad \alpha = 252^\circ\ 46'\ 27'' \quad , \quad s = 10594,7$$

che sono rispettivamente l'angolo della direzione ex-centro—Ripa Vercelli, con l'altra stazione-centro; l'azimut di quest'ultima direzione, e la distanza centro-Ripa Vercelli, tolta dal fascicolo dell'Istituto Geografico, relativo alla regione interessante.

Digitized by Google

Con questi elementi si ricava subito

Correzione per il centramento della direzione $= \frac{e \operatorname{sen} \varepsilon}{s \operatorname{arc} 1''} \ldots\ldots = -0^\circ\,33'\,46''.10$

Convergenza dei meridiani fra stazione e centro $= \frac{e \operatorname{sen} \alpha}{N \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg} \varphi \ldots = -\quad 05''.99$

onde la riduzione in centro per l'azimut $\ldots\ldots\ldots\ldots \Delta A = -0^\circ\,33'\,52''.09$

Questa correzione, applicata al valore precedentemente determinato, conduce al risultato finale

Azimut astronomico di Monte Ripa Vercelli sull'orizzonte di Andrate (campanile del paese).

$219^\circ\,09'\,04''.5$

ATTRAZIONE LOCALE.

Richiamando col precedente, il risultato già ottenuto nella determinazione della latitudine di Andrate, e procedendo al confronto coi valori geodetici delle medesime grandezze osservate, si potranno determinare le componenti dell'attrazione locale in Andrate, salvo ad apportarvi poi quelle ulteriori eventuali correzioni, che il collegamento con la rete di 1° ordine saprà indicare.

Abbiamo così:

Latitudine di Andrate (campanile del paese)	astronomica	$\varphi_a =$	$45^\circ\,31'\,09''.9$
	geodetica	$\varphi_g =$	$45^\circ\,31'\,38''.9$
		$\varphi_a - \varphi_g =$	$-\ 29''.0$
Azimut della direzione Andrate-Ripa Vercelli	astronomico	$A_a =$	$219^\circ\,09'\,04''.5$
	geodetico	$A_g =$	$219^\circ\,08'\,47''.6$
		$A_a - A_g =$	$+\ 16''.9$

Se ne ricavano di qui le due componenti dell'attrazione locale

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g = -\ 29''.0$$
$$\eta = (A_a - A_g) = \operatorname{cotg} \varphi_a = +\ 16''.59\,,$$

dalle quali, per le formole

$$\operatorname{tg} A = \frac{\eta}{\xi} \quad , \quad \Theta = \frac{\xi}{\cos A} = \frac{\eta}{\operatorname{sen} A}$$

ne conseguono l'azimut ellissoidico, ed il valore dell'attrazione locale

$$A = 150^\circ\,13'\,05''$$
$$\Theta = \quad 33''.34\,.$$

Digitized by Google

Chimica fisica. — *Sul calcolo dell'affinità chimica in base alle entropie.* Nota II di G. Bozza e G. Devoto, presentata [1] dal Corrisp. L. Cambi [2].

La relazione (18)

$$\Delta F_T = \Delta U_{298} - \sum_0^n \frac{\Delta b_h}{h+1} \cdot 298^{h+1} - \Delta b_0 T \ln T - \sum_1^n \frac{\Delta b_h}{h(h+1)} T^{h+1} +$$

$$+ T \left\{ (1 + \ln 298) \Delta b_0 + \sum_1^n \frac{\Delta b_h}{h} 298^h - \Delta S_{298} \right\},$$

da noi dedotta in una Nota precedente [3], permette di calcolare l'energia libera di un processo chimico in base al calore di reazione a 298° K, alle entropie a 298° dei componenti nello stato fisico nel quale figurano nell'equilibrio considerato, e ai calori specifici da 298° alla temperatura considerata.

L'uso delle entropie, accennato da Lewis e Gibson [4], ma non sistematicamente adottato in seguito, presenta sull'impiego delle costanti chimiche, introdotte e usate dalla scuola tedesca, vantaggi che vengono qui di seguito esposti.

Se si prende in considerazione il procedimento di Eucken [5], si osserva che per il calcolo di un equilibrio è necessaria la conoscenza non solo delle costanti chimiche, ma anche di certe funzioni $\Phi = \int_0^T \frac{dT}{T^2} \int_0^T c_p \, dT$.

Ora c_p è in generale espresso da formule empiriche al disopra della temperatura ordinaria, mentre a basse temperature è esprimibile con funzioni di Debye, di Einstein o con loro somme; è conveniente allora scindere l'integrale in due parti, una fino alla temperatura ordinaria, calcolabile una volta per tutte, l'altra espressa in funzione del limite superiore. In altre parole, per tutti i componenti gassosi si vengono ad avere due costanti, la costante chimica i e la quantità $\Phi' - \Phi$ da 0 a 298° (Φ' per lo stato gas, Φ per gli stati condensati); per i componenti condensati solo questa ultima. L'uso dell'entropia, S_{298}, elimina tale sdoppiamento.

Inoltre il calcolo delle i si fa attraverso le curve di tensione di vapore del componente: sono perciò necessarie molteplici correzioni per tener conto

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della Regia Università di Milano.

(3) Questi « Rendiconti » [VI], 5, (1927).

(4) « J. Am. Chem. Soc. », 39, 2554 (1917).

(5) Eucken, Karwat, Fried, « Z. f. Phys. », 29, 1 (1924); Eucken e Fried, id., 36.

Digitized by Google

delle deviazioni dalla legge dei gas [1]. Si richiede poi l'esatta conoscenza del c_p del gas allo zero assoluto, che si può avere solo per induzione [2]. Tutto questo naturalmente non interviene nel caso delle entropie, per le quali è necessaria solo la conoscenza dei calori specifici degli stati fisici successivi dallo zero a 298° K.

L'uso delle entropie rende poi chiaro il significato termodinamico delle operazioni. In sostanza non si ha che l'impiego sistematico della relazione del potenziale termodinamico a pressione costante, con le correzioni necessarie a passare da una temperatura ad un'altra.

La determinazione pratica di queste entropie può essere fatta in vari modi. Il più diretto è quello dell'integrazione, per gli stati fisici successivi, di $dS = c_p\, dln T$, aggiungendovi i cambi di entropia ai punti di trasformazione. Richiederebbe la conoscenza dei calori specifici fino allo zero assoluto; l'unica incertezza dipende dalla extrapolazione dei valori sperimentali e dall'errore possibile di questi [3].

Per i gas, dalla teoria dei quanti, sono state calcolate formule teoriche diverse, che danno l'entropia in base al peso molecolare e al momento di inerzia della molecola [4], talora completando il calcolo con la considerazione degli spettri di assorbimento infrarossi del gas [5]. Si giunge a valori sufficientemente concordanti con quelli dedotti con il metodo precedente.

Infine la costante entropica a 298° K può essere dedotta per mezzo di un equilibrio ben noto, quando siano conosciute quelle degli altri componenti, eguagliando ΔS_{298} e ΣS_{298}. In un calcolo di questo genere, anche se eseguito per controllo, la concordanza ottenibile dipende dalla precisione con la quale sono conosciuti ΔU_{298}, K_p, e i calori specifici dei componenti. Si potrà ammettere molte volte un errore possibile totale di $\pm$ 0.5 unità entropiche, e anche maggiore, tenendo conto che per le reazioni a bassa temperatura hanno poca influenza le incertezze dei calori specifici, per quelle ad alta temperatura le incertezze sui calori di reazione.

(1) Vedi ad es. Simon, « Z. f. Phys. », 15, 307 (1923); Eucken, Karwat, Fried, cit.; W. H. van de Sande Bakhuyzen, « Z. f. Phys. Chemie », 111, 57 (1924).

(2) Cfr. in proposito F. A. Giacomini, « Phil. Mag. », 50, 146 (1924), e Eucken e Donath, « Z. f. Phys. Chemie », 124, 199 (1926).

(3) La maggior parte dei dati sui gas è dovuta a Eucken. Rimandiamo per i richiami bibliografici al cit. lavoro di Eucken, Karwat e Fried. Inoltre: Eucken e Karwat, « Z. f. Phys. Chemie », 112, 467 (1924). Per i condensati rimandiamo alle Landolt-Börstein Tabellen, per tutti i dati e la bibliografia fino al 1923.

(4) Sackur, « Ann. Phys. », 36, 598 (1911); id. id., 40, 87 (1913); Tetrode, id., 38, 434 (1912); Lewis, « Phys. Rew. », 18, 121 (1921); Fermi, « R. A. L. » [VI], 3, 145 (1926); Tolman, « J. Am. Chem. Soc. », 42, 1185 (1920); id. id., 43, 866 (1921); Eastman, id., 45, 80 (1923); Urey, id., 45, 1445 (1923); Linhart, id., 44, 140 (1922); id. id., 44, 1881 (1922); Latimer, id., 43, 818 (1921); Schames, « Phys. Z. », 21, 38 (1920); e altri. Anche per gli elementi solidi e per i sali è stata dedotta una formula da Latimer, cit.

(5) Hicks e Mitchell, « J. Am. Chem. Soc. », 48, 1520 (1926).

Digitized by Google

Gibson, Lewis e Latimer [1] hanno presentato una tabella di entropie a 298° K degli elementi, che con i nuovi dati di calori specifici, va in molta parte riveduta. Abbiamo qui raccolto le entropie di quegli elementi per i quali si sono avuti dati più recenti di calori specifici nonchè quelle di alcuni composti che intervengono negli equilibri che prenderemo in considerazione.

TABELLA I.

H_2	31.0 (2) (13)	Fe	6.9 (8)	HBr	47.8 (3) (13)
O_2	48.5 (13)	Ni	7.24 (8)	HI	48.8 (3) (13)
N_2	46.2 (13)	Mo	6.82 (7)	NH_3	46.7 (13)
Cl_2	52.2 (3) (13) (4)	Sn (b)	12.45 (5)	NO	48.5 (13)
1/2 Br_2 (l)	18.4 (6)	Sn (gr.)	10.74 (5)	CO	45.0 (13)
Br_2 (g)	59.4	Pt	9.98 (7)	CO_2	48.4 (13)
1/2 I_2 (s)	13.95 (5)	Hg (l)	18.25 (9)	CH_4	45.6 (13)
I_2 (g)	63.0	Hg (g)	41.75	CaO	9.5 (14)
C (graf.)	1.37	Pb	15.41 (10)	ZnO	10.4 (15)
S_2 (g)	53.4	Zn (g)	48.4 (11)	HgO	16.15
S (romb.)	7.6	H_2O (l)	15.80 (12)	PbO	16.3
Na (s)	12.26 (7)	H_2O (g)	44.00	$CaCO_3$	21.5
K (s)	15.18 (7)	HCl	43.7 (3) (13)	NH_4Cl	22.6 (16)

(1) « J. Am. Chem. Soc. », 41, 1008 (1922); vedi anche LEWIS e RANDALL, *Thermodynamics*, 1923, 464.

(2) 29.25 dai calori specifici.

(3) Calori di vaporizzazione di ESTREICHER e SCHNERR, « Krak. Anz. », 1910, 345. Il calore di evaporazione che si può determinare dalle tensioni di vapore non coincide assolutamente con quello determinato sperimentalmente. Eucken, Karwat e Fried assumono come esatto quello dalle tensioni di vapore. Poichè non conosciamo lo stato molecolare del vapore a bassa temperatura, noi crediamo che sia più esatto prendere il valore sperimentale: in base a questo sono calcolate le entropie della tabella.

(4) GERKE, « J. Am. Chem. Soc. », 44, 1684, 1922, da coefficienti di temperatura di due celle, ottiene un valore per il cloro un po' superiore.

(5) LANGE, « Z. Phys. Ch. », 110, 343 (1924).

(6) SUHRMANN e LÜDE, « Z. Phys. », 29, 71 (1924); LATIMER, « J. Am. Chem. Soc. », 48, 19 (1926).

(7) SIMON e ZEIDLER, « Z. Phys. Ch. », 123, 383 (1926).

(8) RODEBUSH, « J. Am. Chem. Soc. », 45, 1413 (1923).

(9) SIMON, « Z. Phys. Ch. », 107, 279 (1923).

(10) SIMON, « Z. Phys. Ch. », 110, 572 (1924).

(11) MAIER, « J. Am. Chem. Soc. », 48, 356 (1926).

(12) SIMON, « Handbuch der Physik », 10, 363.

(13) Per la bibliografia sui dati riguardanti i gas, vedi EUCKEN, KARWAT e FRIED, « Z. Phys. », 29, 1 (1924).

(14) Vedi anche PARKS e KELLEY, « J. Phys. Chem. », 30, 47 (1926), oltre NERNST e SCHWERS.

(15) MAIER, PARKS, TRAVIS ANDERSON, « J. Am. Chem. Soc. », 48, 2564 (1926).

(16) SIMON, « Ann. Phys. », 68, 241 (1922).

Digitized by Google

Abbiamo preso in esame un equilibrio tipico

$$H_2 + \frac{1}{2} O_2 = H_2O\,(gas).$$

Si conoscono i calori specifici dei tre gas, per i quali sono stati adottati i valori di Lewis e Randall: formule di altri autori conducono a risultati praticamente uguali. Si adopera per ΔU_{298} il valore critico di Lewis — 57820, per ΔF i valori ricavati dai dati di equilibrio di Nernst e Wartenberg, Wartenberg, Langmuir, Löwenstein, in un campo di temperature da 1325° a 2257° K. I dati di Brönsted non sono stati considerati per la incertezza dei calori specifici alle elevate temperature. Usando la (18) si ottiene come media $\Delta S_{298} = -11.0$. Accettando come sicuri entro 0.5 i valori di S_{298} per O_2 e H_2O sperimentali, per avere la concordanza in ΣS_{298} è necessario assumere per H_2 $S_{298} = 31$. Questo valore sarà confermato dagli altri equilibri e, nella tabella che segue, verrà costantemente impiegato.

Sempre con la (18) e con i dati della tabella I sono state calcolate le reazioni che seguono (tabella II). In genere sono stati usati i calori specifici dei gas dati da Lewis e Randall [1].

Non riportiamo i risultati dei calcoli dei noti equilibri che avvengono in fase condensata, dei quali vari autori si sono già occupati.

(1) Cit., p. 80. L'impiego di formule di calori specifici per gas esprimenti la loro variazione con funzioni di Einstein (Eucken) non compensa con la maggiore precisione il maggior lavoro per il calcolo. Tranne che in qualche caso le deviazioni dalle formule comuni non sono notevoli.

Digitized by Google

TABELLA II.

Numero	EQUILIBRIO (*)	ΔU_{298}	ΔS_{298}	ΣS_{298}	Δ	Osservazioni
1	$H_2 + \frac{1}{2} O_2 = H_2O\,(g)$	— 57820	— 11.0	— 11.25	+ 0.25	
2	$\frac{1}{2} Cl_2 + \frac{1}{2} H_2O\,(g) = HCl\,(g) + \frac{1}{4} O_2$	+ 6910	+ 7.9	+ 7.72	+ 0.18	
3	$\frac{1}{2} H_2 + \frac{1}{2} Cl_2 = HCl$	— 22000	+ 2.3	+ 2.10	+ 0.20	$\Delta F = -22692$
4	$\frac{1}{2} H_2 + \frac{1}{2} Br_2\,(g) = HBr$	— 12100	+ 2.75	+ 2.50	+ 0.25	
5	$\frac{1}{2} H_2 + \frac{1}{2} I_2\,(g) = HI$	— 1400	+ 1.96	+ 1.80	+ 0.16	
6	$CO_2 + H_2 = CO + H_2O\,(g)$	+ 10300	+ 10.22	+ 10.2	+ 0.02	
7	$CO + \frac{1}{2} O_2 = CO_2$	— 68100	— 21.40	— 21.45	+ 0.05	
8	$C\,(graf.) + CO_2 = 2\,CO$	+ 41950	+ 42.80	+ 41.43	+ 1.37	
9	$C\,(graf.) + 2\,H_2 = CH_4$	— 18300	— (18 ÷ 19)	— 18.17	—	
10	$CO + 3\,H_2 = CH_4 + H_2O$	— 50100	— (49 ÷ 50)	— 49.40	—	
11	$CO_2 + 4\,H_2 = CH_4 + 2\,H_2O$	— 39800	— (40 ÷ 41)	— 39.20	—	
12	$\frac{1}{2} N_2 + \frac{1}{2} O_2 = NO$	+ 21600	+ 2.50	+ 1.15	+ 1.35	
13	$\frac{1}{2} N_2 + \frac{3}{2} H_2 = NH_3$	— 10950	— 23.70	— 22.9	— 0.8	
14	$2\,CO_2 + \frac{1}{2} S_2\,(g) = 2\,CO + SO_2$	+ 52360	+ 24.64	—	—	Si ottiene $SO_2 : S_{298} = 57.0$
15	$H_2 + \frac{1}{2} S_2\,(g) = H_2S$	— 19600	— 8.81	—	—	» » $H_2S : S_{298} = 48.9$
16	$3\,H_2 + SO_2 = H_2S + H_2O\,(g)$	— 51400	— 13.77	— 13.10	— 0.67	
17	$S\,(romb.) + 2\,HI = I_2\,(s) + H_2S$	— 17060	— 28.8	— 28.4	— 0.4	
18	$CaCO_3 = CaO + CO_2$	+ 40250	—	+ 36.38	—	
19	$Hg\,(g) + \frac{1}{2} O_2 = HgO\,(s)$	— 36250	— 50.0	— 49.85	— 0.15	

(*) Per gli equilibri senza indicazione bibliografica vedi *Termodyn.*, cit., e EUCKEN e FRIED, cit.

Eq. 18. - Cfr. FALCKE, « Z. f. Electroch. », 33, 1 (1927). Riassunto e discussione dei vari dati sperimentali.

Eq. 18 - ANDRUSSOW, « Z. f. Phys. Chem. », 116, 81 (1925); sono riportati i risultati precedenti. In base a ΣS_{298} e ai calori specifici, tenendo per la pressione 1 atm. la temperatura sperimentale 1155° K, è stato calcolato $\Delta U_{298} = +40250$ (von KOHNER, Diss. », Berlin, 1914, $\Delta U_{298} = +39700 \pm 800$).

Digitized by Google

Numero	EQUILIBRIO	ΔU_{298}	ΔS_{298}	ΣS_{298}	Δ	Osservazioni
20	$HgO + H_2 = Hg\,(l) + H_2O\,(l)$	—	+ 13.40	+ 13.10	+ 0.30	
21	$HgO + Pb = Hg\,(l) + PbO$	—	— 2.80	— 2.90	+ 0.10	
22	Chinidrone $+ H_2 =$ 2 (idrochinone)	—	— 31.72	— 33.12	+ 1.40	
23	2 (Chinone) $+ H_2=$ chinidrone	—	— 39.68	— 40.88	+ 1.20	
24	Chinone $+ H_2 =$ idrochinone	— 42034	— 36.0	— 36.90	+ 0.90	Valori a 290° K $\Delta F = -31597$
25	$ZnO + CO = Zn\,(g) + CO_2$	— 82830	+ 30.8	+ 30.8	± 0	
26	$NH_4Cl = NH_3 + HCl$	+ 16350	+ 26.9	+ 26.6	+ 0.30	Valori a 606° K

eq. 20-21. - Fried, « Z. f. Phys. Chem. », 123, 406 (1926).
eq. 22-23-24. - Schreiner, « Z. f. Phys. Chem. », 117, 57 (1925).
eq. 25. - Maier, e Ralston, « J. Am. Chem. Soc. », 48, 364 (1926), e anche Theis, « Z. f. ang. Chem. », 39, 1568 (1926).
eq. 26. - A. Smith e Lombard, « J. Am. Chem. Soc. », 37, 38 (1915); è stato tenuto conto, per calcolare l'entropia di vaporizzazione di NH_4Cl, della dissociazione. Fra 298° e 606° il calore specifico di NH_4Cl è poco noto; fra 447° e 457° K esiste una trasformazione della quale ΔU è ignoto, probabilmente piccolo.

La concordanza notevole fra i valori ΔS_{298} ricavati dagli equilibri e quelli di ΣS_{298} è una prova del teorema di Nernst e del metodo di calcolo da noi adottato. Gli equilibri che danno una deviazione sensibile sono i nn. 12, 8, 9, 22, 23, 24; per il 12 (formazione di NO) vi è molta incertezza sui K_p; per 8 e 9 non si conosce lo stato fisico del carbonio nell'equilibrio, come dimostrano anche le divergenze notevoli tra i vari sperimentatori; inoltre, per gli equilibri ove entra il metano, causa di errore sono il calore di formazione e i calori specifici di questo composto, assai incerti. Negli equilibri aventi come componente H_2, dalla concordanza dei valori di ΔS_{298} con ΣS_{298}, qualora si assuma per questo gas $S_{298} = 31$, anzichè, come ricavato dai calori specifici, 29.25, rimane confermato il primo valore, al quale danno verosimiglianza alcune formule teoriche. Specialmente interessante è la serie dei tre equilibri sui composti dello zolfo, due dei quali servono a determinare le entropie di SO_2 e H_2S, mentre il terzo, con le costanti date dai due primi e con il valore 31 per H_2, dà risultati concordanti in ΣS_{298}.

Solo i risultati degli equilibri 22, 23, 24 porterebbero a valori per H_2 29.52 e 29.78 dai coefficienti di temperatura, 29.95 dai dati termici, cioè valori intermedi fra quello sperimentale e quello da noi adottato; dobbiamo però fare qualche riserva sul metodo seguito dall'autore per tener conto della solubilità dei componenti e dell'effetto dei sali neutri.

L'entropia dell'idrogeno è ancora oggetto di studio: Simon [1] sta compiendo determinazioni di calore specifico alla temperatura dell'elio: è da

(1) « Z. f. Phys. Chem. », 123, 405 (1926).

Digitized by Google

sperare che esse possano togliere anche l'ultimo dubbio circa la validità assoluta dell'ipotesi di Nernst.

Passiamo infine a considerare la questione degli equilibri ad altissime pressioni, esempio tipico, l'ammoniaca.

Come si può rilevare dagli esperimenti di Larson [1] in confronto con quelli di Haber, la costante di equilibrio alla stessa temperatura, ma sotto diverse pressioni totali, mostra un aumento assai grande col crescere della pressione. La costante che si deduce dall'equazione termodinamica è la costante rapporto di fugacità. Trattandosi di un miscuglio abbiamo adottato per il calcolo delle fugacità alle varie pressioni la regola di Lewis e Randall [2].

Le fugacità sono state da noi determinate graficamente per i singoli gas partendo dalle equazioni di stato (van der Waals) con i coefficienti riportati da van Laar [3]; i risultati per $T = 723°$ sono qui raccolti:

Pressione, atm.	10	30	50	100	300	600	1000
K_p (Larson)	0.00659	0.00676	0.00690	0.00725	0.00884	0.01294	0.02328
K_f	0.00659	0.00674	0.00669	0.00667	0.00637	0.00676	0.00868

Solo l'ultimo dei valori di K_f devia sensibilmente dal valore medio (0.00663) fino a 600 atm. Questo dipende dalla non applicabilità dalla delle equazioni di stato scelte alle pressioni più alte e probabilmente anche variabilità di c_p con la pressione. Pur tuttavia il valore ottenuto per K_f a 1000 atm., data l'incertezza della base di calcolo, è ancora soddisfacente.

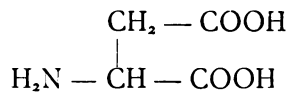
È chiaro che nei casi nei quali per l'equilibrio si debbano usare pressioni molto forti, anche se non si ha variazione di volume nella reazione, sono i K_f che bisogna considerare: ossia per un confronto quantitativo e per la previsione di una costante di equilibrio è necessaria la conoscenza delle fugacità dei gas reagenti.

(1) « J. Am. Chem. Soc. », 46, 369 (1924); Larson e Dodge, id. 45, 2918 (1923).
(2) Vedi anche Gillespie, id., 48, 28 (1926).
(3) « Zustandsgleichung », Leipzig, 1924.

Digitized by Google

Chimica. — *Sulla dispersione rotatoria di alcuni eteri aspartici.* Nota del dott. F. P. Mazza e di G. Dello Jojo, presentata [1] dal Socio A. Piutti.

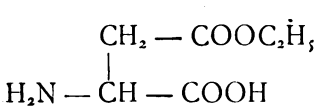
Il potere rotatorio degli esteri monoalchilici dell'acido aspartico



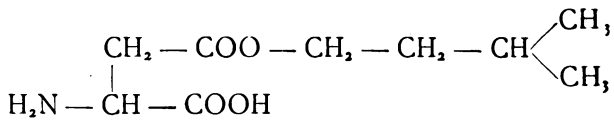
è stato studiato nel 1906, in soluzione acquosa ed in funzione della concentrazione e della temperatura, dal prof. A. Piutti insieme al dottor G. Magli [2]. Questi autori notarono che il potere rotatorio di dette soluzioni diminuiva col crescere della temperatura, fino a divenire nullo ad una temperatura determinata, superata la quale assumeva segno contrario.

Dietro invito del prof. Piutti, ci è sembrato non privo di interesse lo studio della variazione del potere rotatorio di alcuni esteri monoalchil – e dialchil-aspartici, in dipendenza della lunghezza d'onda della luce impiegata nelle determinazioni, poichè dai bei lavori del Guye, del Rupe, del Lowry per non menzionare che pochi nomi, emerge l'importanza di misure di questo genere in chimica organica, giacchè la « dispersione rotatoria » è in strettissima relazione con la costituzione molecolare.

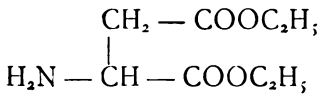
I composti da noi studiati sono:



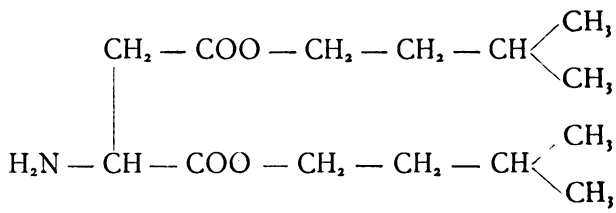
l-aspartato β-mono-etilico
f = 189°-190°



l-aspartato β-mono-isoamilico
f = 195°-196°



l-aspartato dietilico



l-aspartato diisoamilico

(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927.
(2) « Gazz. Chim. It. », *36*, 1906.

Digitized by Google

Faremo notare che nella nomenclatura degli acidi aspartici otticamente attivi vi è confusione, perchè si considera come ac. l-aspartico quello che deriva dalla disammidazione della l-asparagina, e come d-aspartico quello derivato dalla asparagina destrogira.

Intanto l'acido così detto levogiro è destrogiro in soluzione acquosa ed acida; ma levogiro in soluzione alcalina. Il contrario avviene per il destrogiro.

Secondo il Clough quest'apparente anomalia è dovuta a variazioni dell'edificio molecolare in soluzione acquosa ed acida.

Karrer ed Haase [1], nei loro studi sull'inversione di Walden, sono di opinione che l'acido aspartico ordinariamente indicato come l- sia da indicarsi con maggiore esattezza come d, anche perchè questa designazione va meglio d'accordo con lo svolgersi dell'inversione, che segue l'andamento ac. l-aspartico ⟶ ac. l. cloro succinico ⟶ ac. d-malico. Vi è però il fatto che, per potere stabilire con sicurezza il segno della rotazione del piano di polarizzazione della luce si dovrebbe operare in seno a solventi tali che non alterassero per nulla l'architettura molecolare del composto; mentre non possiamo stabilire che in soluzione acquosa o cloridrica l'acido aspartico abbia realmente la struttura

$$\begin{array}{l} CH_2 - COOH \\ | \\ CH\,(NH_2) - COOH \end{array}$$

nel sale sodico e negli eteri di-alchilici la possederà certamente; ma questi ultimi composti sono levogiri e quindi ci sembra più razionale indicare come acido l-aspartico il destrogiro in soluzione acquosa.

Parte sperimentale.

Gli aspartati monoetilico e monoisoamilico ci sono stati forniti dalla cortesia del professore Piutti, che qui cordialmente ringraziamo. Fondevano, rispettivamente a 189°–190° e 195°–196°. L'aspartato dietilico venne preparato col metodo suggerito da E. Fischer [2]. Bolliva a 127° sotto 11 mm. L'aspartato disoamilico, nuovo per la letteratura, è stato da noi preparato come segue:

In gr. 125 di alcool isoamilico (purificato col metodo di Le Bel) vennero sospesi gr. 25 di acido aspartico puro e secco. Si fece passare una forte corrente HCl fino a soluzione e si scaldò all'ebollizione per un ora a ricadere. Si eliminò l'eccesso d'alcool per distillazione sotto pressione assai bassa ($^1/_2$ mm.), ed il cloridrato dell'etere venne disciolto in poca acqua e decomposto con un forte eccesso di carbonato potassico. Si è estratto con

(1) « Helv. Chem. A. », 2, 436-54, 1919.
(2) « Ber. », 34, 1901.

Digitized by Google

etere, si essiccò l'estratto su solfato sodico anidro e si distillò il solvente. Il residuo è stato frazionato nel vuoto sotto 20 mm: la maggior parte passò a 198°-199°. Rendimento gr. 20. L'analisi ha dato numeri concordanti con la composizione di un aspartato di isoamilico. Questo composto è un liquido incolore oleoso, di odore tra quello dell'alcool amilico e quello della piperidina, miscibile con alcool ed etere, ma poco solubile in acqua. Si è ripetuto il frazionamento sino ad avere un potere rotatorio costante.

È necessario che gli aspartati dialchilici vengano impiegati appena preparati, perchè rapidamente si condensano, spontaneamente (nel modo osservato da Fischer nel riscaldamento con cloruro di zinco) eliminando alcool ed originando derivati della diossipiperazina.

Per le misure di dispersione rotatoria ci siamo serviti del metodo già adoperato dal Lowry [1], come di quello che presentava le maggiori garanzie di esattezza. Esso è stato opportunamente semplificato in proporzione ai mezzi sperimentali in nostro possesso.

Le sorgenti luminose impiegate sono state: *a*) lo spettro di fiamma del sodio; *b*) quello del litio; *c*) lo spettro di arco di una lega di cadmio ed argento; *d*) idem di una lega di rame e zinco; *e*) idem del mercurio.

Pei primi due ci siamo serviti del polverizzatore di Guye, alimentato con idrogeno, e contenente soluzione di cloruro sodico o di cloruro di litio appositamente purificati.

Per gli spettri d'arco ci è servito egregiamente un arco ad elettrodi ruotanti, del tipo descritto dal Baly, leggermente modificato e costruito dal tecnico di questo Istituto, signor Varriale. Esso arco veniva mantenuto ad un regime di 10 A., fornendo un arco assai costante.

Lo spettro d'arco del mercurio ci è stato dato da una lampada di quarzo a vapori di mercurio, di alta intensità tipo George, costruzione Gaulois. Era alimentata con corrente continua a 110 V. e 4 A. Come si vede, abbiamo impiegato sorgenti luminose assai intense allo scopo di ottenere una notevole sensibilità.

La luce del sodio dà il doppietto $\lambda = 5896$ Å e $\lambda = 5890$ Å. Abbiamo assunto il valore medio di 5893 Å. Si è letto rispetto a questa riga con un angolo di penombra di 5°.

Il litio ci ha dato la linea rossa $\lambda = 6708$ Å. Angolo di penombra 7°.

Le linee fornite dagli spettri d'arco sono, generalmente, assai brillanti e permettono facili letture.

La lega cadmio-argento si è ottenuta per fusione di parti eguali dei metalli.

L'argento dà: una linea verde oscura $\lambda = 5209$ Å di facile lettura, con una penombra di 3°; un doppietto verde $\lambda = 5471$ Å e $\lambda = 5465$ Å. Se ne è considerato il valore medio 5467.

(1) « Phil. trans. », serie A, *212*, 261, 291.

Digitized by Google

Il cadmio ci ha fornito: la riga verde $\lambda = 5085$ Å, letta con una penombra di 3°; la riga azzurro chiara $\lambda = 4799$ Å, letta con penombra di 3°; la linea azzurro–scura $\lambda = 4678$ Å di difficile lettura. Si è usato per essa una penombra di 8°.

La lega di rame e zinco si è preparata da parti eguali di rame elettrolitico e zinco bidistillato.

Il rame ha dato: due linee gialle $\lambda = 5782$ Å e $\lambda = 5700$ Å; (se ne è letta solo la prima, più intensa, con penombra di 4°); tre linee verdi: $\lambda = 5218$; 5153; 5105 Å. Queste magnifiche linee permettono letture agevolissime, con penombra di 3°.

Lo zinco ha dato: una linea rossa $\lambda = 6363$, che richiede molta precauzione nelle letture, per la presenza di luce rossa continua. Penombra 7°. Tre linee azzurre: $\lambda = 4810$; 4722; 4680 Å. Sono state lette come quelle corrispondenti del cadmio.

Dello spettro del mercurio abbiamo impiegato le linee gialle 5790 e 5769 Å e la verde 5460 Å, che si sono lette con una penombra di 5°. In tutto si sono impiegate 18 lunghezze d'onda, comprese tra 6708 Å e 4678 Å.

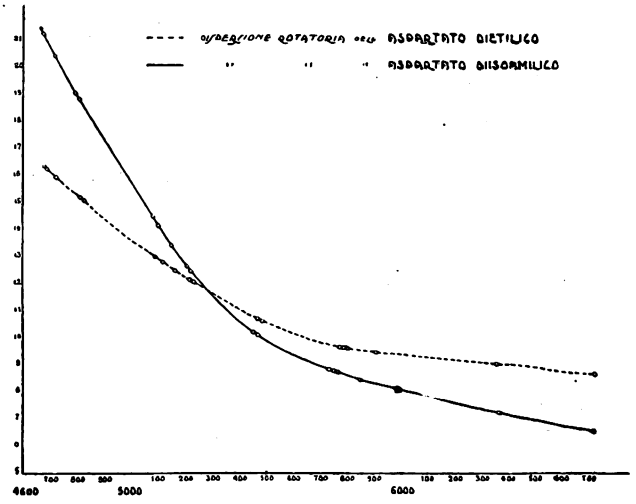
La disposizione sperimentale è stata la seguente: la luce veniva inviata a mezzo di una lente acromatica sulla fenditura di uno spettografo di Hilgher, a deviazione costante; al canocchiale di questo strumento si era sostituita una lente acromatica di 60 cm. di lunghezza focale, la quale forniva un'immagine circa doppia della fenditura. Quest'ultima si allargava simmetricamente fino a 3 mm. e si aveva così un'immagine di circa 6 mm., capace di coprire completamente il campo del polarimetro.

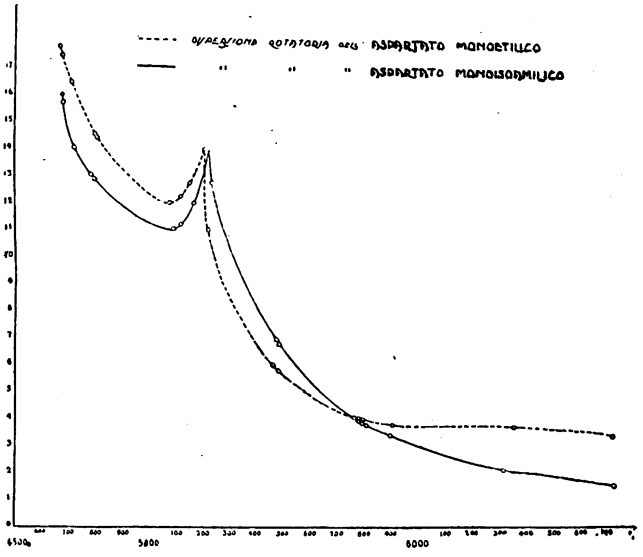
Questo era a campo tripartito tipo di Lippich, graduato in 0°,01, disposto in modo tale che l'immagine della fenditura vi cadesse esattamente. Immediatamente innanzi al campo tripartito era situata una fenditura simmetrica, con la quale era possibile eliminare la luce proveniente dalle linee adiacenti. Il tubo polarimetrico veniva mantenuto a temperatura costante, mediante una corrente d'acqua. Girando il tamburo dello spettrografo le linee venivano inviate, l'una dopo l'altra, sul campo del polarimetro. Dopo aver variato l'angolo di penombra, veniva determinato lo zero per ogni linea, si introduceva il tubo con la sostanza e si eseguiva una serie di letture, di cui si assumeva la media.

Gli aspartati monoalchilici sono stati osservati in soluzione acquosa; i dialchilici assoluti.

I risultati sono espressi dalle tabelle e dalle curve seguenti:

Digitized by Google





Digitized by Google

Tabella I.

Dispersione rotatoria.

A) — Aspartato monoetilico = soluzione acquosa

$p = 7.2\ \%$; $d = 1.034$; $T = 14°$; $l = 1$ dm.

B) — Aspartato dietilico (puro)

$d = 1.091$; $t = 15°$; $l = 0.5$

Lunghezza d'onda in Å	A		B	
	α	$[\alpha] = \frac{100\,\alpha}{l\,p\,d}$	α	$[\alpha] = \frac{100\,\alpha}{l\,p\,d}$
6708	+ 0°.25	+ 3°.36	— 4°.72	— 8°.65
6363	0°.27	3°.67	4°.93	9°.03
5893	0°.28	3°.80	5°.18	9°.50
5790	0°.29	3°.95	5°.27	9°.67
5782	0°.30	4°.03	5°.29	9°.70
5769	0°.31	4°.09	5°.33	9°.77
5467	0°.43	5°.81	5°.82	10°.68
5460	0°.44	6°.00	5°.86	10°.75
5218	0°.81	11°.00	6°.57	12°.04
5209	1°.04	14°.12	6°.63	12°.06
5153	0°.94	12°.07	6°.81	12°.48
5105	0°.90	12°.15	6°.99	12°.82
5085	0°.89	12°.00	7°.08	13°.01
4810	1°.06	14°.40	8°.23	15°.10
4799	1°,07	14°.50	8°.32	15°.25
4722	1°.23	16°.52	8°.68	15°.91
4680	1°.30	17°.49	8°.91	16°.34
4678	1°.33	17°.86	8°.98	16°.47

Digitized by Google

TABELLA II.

C) — Aspartato monoisoamilico (soluzione acquosa)

$p = 3.25\ \%$; $d = 1.004$; $t = 20°$; $l = 2$ dm.

D) — Aspartato diisoamilico

$d = 0.989$; $t = 16°$; $l = 0.5$ dm.

Lunghezza d'onda in Å	C		D	
	α	$[\alpha]$	α	$[\alpha]$
6708	+ 0°.22	+ 3°.38	— 3°.30	— 6°.67
6363	0°.28	4°.30	3°.61	7°.30
5893	0°.45	6°.90	4°.20	8°.50
5790	0°.48	7°.60	4°.34	8°.78
5782	0°.50	7°.67	4°.36	8°.82
5769	0°.51	7°.80	4°.38	8°.85
5467	0°.89	13°.70	5°.00	10°.10
5460	0°.91	14°.00	5°.04	10°.21
5218	1°.67	25°.60	6°.18	12°.50
5209	1°.83	28°.00	6°.28	12°.70
5153	1°.56	24°.00	6°.65	13°.45
5105	1°.49	22°.90	7°.02	14°.20
5085	1°.47	22°.60	7°.17	14°.50
4800	1°.68	25°.70	9°.29	18°.80
4799	1°.70	26°.00	9°.40	19°.00
4722	1°.83	28°.04	10°.09	20°.04
4680	2°.05	31°.41	10°.50	21°.22
4678	2°.09	32°.00	10°.63	21°.63

Da esse si vede che, mentre gli aspartati dialchilici presentano una dispersione normale, quelli monoalchilici presentano un massimo assai spiccato in corrispondenza di $\lambda = 5209$ Å.

Per spiegare questi risultati riassumeremo brevemente le ricerche sinora eseguite su composti simili ai nostri.

La dispersione rotatoria dell'acido aspartico è stata studiata da Karrer (loc. cit.). Egli ha trovato un massimo positivo nella curva, ed un andamento normale della curva del dietilaspartato, servendosi però di sole quattro lunghezze d'onda.

Digitized by Google

Sulla dispersione rotatoria della l–asparagina ha lavorato la dottoressa Pagliarulo [1], ed ha trovato un flesso nella curva di dispersione, nella regione verde dello spettro.

Noi abbiamo osservato l'andamento anomalo dei monoalchiloaspartati. Questo fenomeno abbastanza notevole non può essere che in relazione con una particolare struttura dei monoesteri, almeno in soluzione acquosa, nella quale sono destrogiri.

Dai lavori del Clough [2] risulta che i poteri rotatori della l-asparagina e dell'acido l-aspartico sono assai suscettibili all'influenza dei sali inorganici; eguali risultati ottenne lo Pfeffer [3] con la d-alanina ed in generale ciò si può dire di tutti gli α-amminoacidi. La l-asparagina è destrogira in soluzione cloridrica.

Il Clough ha osservato, inoltre, che il l–aspartato dietelico è destrogiro in soluzione cloridrica: questa variazione non può essere dovuta che alla trasformazione dell'azoto da privalente a pentavalente, sia come $— NH_3$ che come $— NH_3 — OH$. È verosimile, quindi, che gli aspartati monoalchilici, in soluzione acquosa, rispondano ad una costituzione in cui il carbossile in α è salificato col gruppo amminico:

$$\begin{array}{l} CO — O \\ | \quad | \\ CH_2 — NH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOR \end{array}$$

Ma si avrebbe nella soluzione un equilibrio per l'unione dell'acqua sul composto secondo lo schema:

$$\begin{array}{l} CO — O \\ | \quad | \\ CH_2 — NH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOR \end{array} + H_2O \rightleftarrows \begin{array}{l} COOH \\ | \\ CH — NH_3 — OH \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOR \end{array} \rightleftarrows \begin{array}{l} COOH \\ | \\ CH — NH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOR \end{array} + H_2O$$

Equilibri che, evidentemente, devono dipendere dalla temperatura e dalla concentrazione spiegandosi in questo modo i risultati ottenuti dal Piutti e dal Magli.

Ci è grato qui esprimere la nostra riconoscenza al prof. Piutti per avere messo a nostra disposizione i suoi preparati di aspartati monoalchilici, e i mezzi sperimentali necessari alle nostre ricerche nonchè per i suoi preziosi consigli.

(1) « Nuovo Cimento », nn. 1-2 (1926).
(2) « Trans. chem. Soc. » (1915), *107*, 1593.
(3) « Ber. », 48, 1938.

Digitized by Google

Chimica. — *Ricerche sui solfosali.* Nota preliminare di L. FERNANDES [1], presentata [2] dal Corrisp. L. ROLLA.

Se si considera la letteratura di quest'ultimo venticinquennio, si può constatare come quasi nulla sia stato più fatto per lo studio dei solfosali, e la cosa riesce molto naturale quando si consideri che una volta conosciuti i vari tipi di solfo- e solfossisali normali, di quei pochi elementi che dànno luogo a questo tipo di composti, null'altro restava più da studiare da questo punto di vista.

La sistematica, la preparazione e lo studio dei vari composti fu eseguito sopratutto nel secolo passato per opera di Berzelius, Krüss e altri valorosi sperimentatori.

Io ritengo però che lo studio dei solfosali possa presentare ancora un notevole interesse purchè si parta da considerazioni e da punti di vista completamente diversi da quelli che hanno guidato i precedenti sperimentatori.

Io ho iniziato una ricerca allo scopo di stabilire come variano le forze di coordinazione di un sale quando all'ossigeno venga parzialmente o totalmente sostituito lo zolfo e quindi quale sia l'importanza della funzione dell'ossigeno nella formazione di complessi.

Mediante questa ricerca ho intenzione di stabilire in quali casi tale sostituzione sia completamente possibile, in quali casi solo in parte e in quali sia impossibile sostituire nella molecola complessa anche un numero limitato di atomi di zolfo a quelli di ossigeno.

Inoltre può essere di non scarso interesse l'osservazione dei vari prodotti complessi solforati e ossisolforati, ed il variare della loro complessità e delle loro proprietà col variare della quantità di zolfo.

Ho iniziato questa ricerca considerando inizialmente tre classi di composti: i complessi interni metallorganici, gli iso- ed eteropoliacidi, e i prodotti di addizione con basi organiche.

In generale si riscontrano delle difficoltà sperimentali qualche volta quasi insormontabili; nella massima parte dei casi si ottengono prodotti molto solubili e bisogna ricorrere ad artifici sperimentali per ottenere sali cristallizzati ed omogenei, inoltre la massima parte anche dei prodotti di partenza presentano un grado di stabilità molto relativo e questo porta a numerosi inconvenienti durante la preparazione e la concentrazione delle soluzioni.

Non è inoltre possibile operare, se non in particolarissime condizioni, in soluzione acida perchè ciò provocherebbe la decomposizione dei solfosali.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 20 febbraio 1927.

Digitized by Google

Se ciò non porta nessun inconveniente nella preparazione dei complessi metallorganici che si formano in soluzione alcalina, riesce di grande impedimento nella preparazione degli iso- ed- eteropoliacidi che richiedono per la loro genesi un ambiente o neutro o debolmente acido.

Sarà quindi possibile la formazione di questi composti quando, sia sufficiente per produrre la polimerizzazione, un acido così debole da non decomporre il solfosale.

Per quello poi che riguarda i composti di addizione con basi organiche, è particolarmente facile ottenere composti con l'urotropina, anche ben cristallizzati e molto più stabili dei solfosali semplici.

La proprietà di dar luogo a prodotti di addizione con basi organiche, è tanto generale per gli ossisali e per i sali alogenici, da rendere quasi privo di interesse il contributo di nuovi dati sperimentali, soprattutto considerando la complessità estremamente esigua di questi composti.

Nel caso attuale, particolare la reazione viene estesa ai sali solforati e presenta inoltre, come in molti casi simili, l'interesse di poter arrivare a prodotti stabili e ben cristallizzati, e quindi di poter rendere possibile qualche volta l'isolamento di composti che altrimenti sarebbe impossibile separare.

Il primo degli elementi considerati è stato il molibdeno, che, come è noto, è uno degli elementi che presenta maggior tendenza a dar luogo a sali complessi. Inoltre tanto i solfossi- che i solfomolibdati si possono ottenere facilmente ben cristallizzati e sono relativamente stabili.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati della Piridina.* Nota di A. Pieroni, presentata [1] dal Socio A. Angeli.

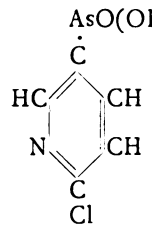
In una precedente pubblicazione [2] misi in evidenza il comportamento della piridina relativamente al carattere basico dei suoi atomi di idrogeno in posizione α e γ, per effetto dell'influenza che su di essi esercita il gruppo $C = N -$. Ebbi anche occasione di descrivere una serie di derivati della piridina stessa che assumono un particolare interesse e dal punto di vista farmacologico e da quello biochimico, specie per le ricerche di Robert R. Williams, sulla natura chimica delle vitamine e le proprietà antineuritiche delle ossipiridine [3].

Argomento della presente Nota sono i raffronti di nuovi derivati della piridina ed i corrispondenti benzenici con particolare riguardo a quelli dotati di proprietà terapeutiche considerati in sè e come termini laterali ad

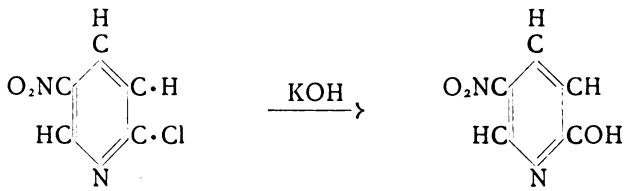
(1) Nella seduta del 6 febbraio 1927,
(2) Questi «Rendiconti», 1925, II, 125.
(3) «C. I.», 101 (1917).

Digitized by Google

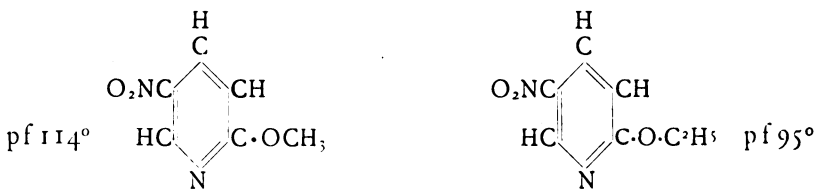
altri di passaggio, che mi hanno condotto a preparare il primo acido arsenico della serie e cioè:



È noto come il p. cloronitrobenzolo trattato con soluzione acquosa di potassa caustica, sostituisce il cloro con un ossidrile; dalle mie ricerche risulta che la 2-cloro 5-nitropiridina si comporta in modo analogo con la sola differenza che il cloro di questa presenta una mobilità sensibilmente più grande di quella che si riscontra per il cloro-nitrobenzolo, infatti per breve riscaldamento a b. m. ha luogo la reazione:



analogamente con potassa caustica in soluzione metilica od etilica si ha:



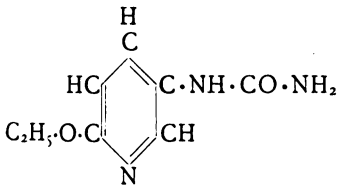
I. —	Calcolato per $C_6H_6O_3N_2$	N 18,18 %
	Trovato	N 18,35 %
II. —	Calcolato per $C_7H_8O_3N_2$	N 16,66 %
	Trovato	N 16,94 %

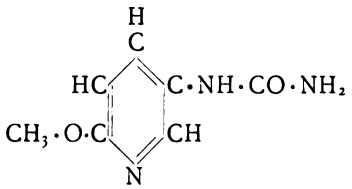
La 2-etossi 5-nitropiridina fu preparata anche da Tschischibabin [1] in modo del tutto differente e ad essa fu assegnato il p. di f. di 72°; che si tratti della stessa sostanza a p. di f. 95° come ho indicato, non v'è dubbio, poichè riducendo la 2-etossi 5-nitropiridina e quindi acetilando, Tschischibabin ottenne la acetammide corrispondente a p. di f. 122°. La 2-etossi 5-nitropiridina da me preparata per lo stesso trattamento dà pure una bella sostanza bianca cristallina che fonde a 122°.

(1) « C. », 1923, III, 1020.

Digitized by Google

L'interesse che possono avere queste ossialchilammine della piridina dal punto di vista farmacologico data la loro analogia con le corrispondenti anisidine e fenetidine mi ha indotto a studiarne i derivati, così ottenni:





sostanze bianche cristalline che fondono rispettivamente a 175° e a 185°; la prima ha sapore dolciastro similmente alla analoga dulcina.

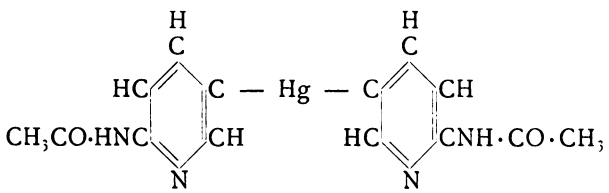
Calcolato per $C_8H_{11}O_2N_3$	N 23,20 %
Trovato	N 23,12 %

Dalla 2-acetammide 5-nitropiridina [1] che fu più tardi ottenuta anche da Tschischibabin [2] per riduzione con ferro ed acido acetico si ottiene la 2-acetammide 5-ammino piridina, sostanza che si altera facilmente assumendo colorazione rossa, fonde a 154°.

Le ammino piridine reagiscono con l'ossido giallo di mercurio analogamente alle aniline, così la 2-acetammide piridina dà con HgO differenti composti, fra i quali ho isolato un prodotto a cui corrisponde la formula: $C_{15}H_{14}O_2N_4Hg$

Calcolato Hg	42,55 %
Trovato Hg	41,72 %

e la cui struttura è verosimilmente:



scaldato sino a 230° non fonde.

Nella precedente Nota descrissi la 2-cloro piridil 5-idrazina che con l'etere acetacetico dà il piridil-idrazone corrispondente, il quale cristallizzato dall'alcool fonde a 143°.

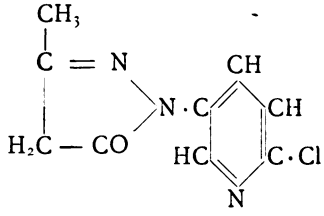
Calcolato per $C_{11}H_{14}O_2N_3Cl$	N 16,83 %
Trovato	N 16,39 %

(1) Pieroni, questi «Rendiconti», 1925.
(2) Tschischibabin, «C.», 1926, 3334.

Digitized by Google

Sciolto in acido acetico e scaldato a b. m. bollente si ottiene un prodotto cristallino che purificato dall'alcool, fonde a 175°.

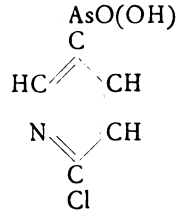
È una sostanza bianca la cui soluzione si colora in rosso con cloruro ferrico e coi sali di diazonio, analogamente al fenilmetilpirazolone, molto verosimilmente si tratta del



Ma il composto a cui queste ricerche tendevano giungere e che più mi interessa per la facile previsione che di esso e dei suoi derivati se ne può fare, su la loro importanza nel campo terapeutico, data l'analogia già messa in evidenza fra i derivati benzenici è piridinici, e l'acido piridilarsenico: partendo dall'anilina si può ottenere attraverso le reazioni:

$$C_6H_5NH_2 \longrightarrow C_6H_5N = NCl \xrightarrow{KH_2AsO_3} C_6H_5AsO(OH)_2$$

Con reazioni analoghe fra il cloruro di diazo-cloropiridina e l'arsenito potassico, mi è riuscito di preparare il primo acido arsenico della serie piridimica:



Sostanza molto solubile in acqua, in alcool, abbastanza in etere, quasi insolubile in benzolo, cristallizza in aghi di color giallo pallido che fondono a 186°.

Calcolato per $C_5H_5O_3NAs$	As 31,58 %
Trovato	As 31,75 %

Su questo ed altri prodotti appena accennati nella presente Nota, mi riservo approfondire le mie ricerche.

Al sig. dott. Antonio Zanuccoli porgo doverosi ringraziamenti per la sua valida collaborazione sperimentale.

Digitized by Google

Chimica. — *Ricerche sui solfosali (II). Solfossipolimolibdati di ammonio e di guanidina.* Nota di L. FERNANDES e F. PALAZZO, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Sull'azione della concentrazione degli idrogenioni sul ricambio respiratorio dei tessuti.* Nota [1] preventiva del dottor M. COMEL, presentata [2] dal Corrisp. A. HERLITZKA.

Allo scopo di indagare quali sono le variazioni del ricambio respiratorio dei tessuti in funzione della concentrazione degli idrogenioni, ho intrapreso una serie di ricerche sui muscoli, e, meno particolareggiatamente, sul fegato di rana. Per queste ricerche ho preferito di portare la mia attenzione sulla poltiglia di tessuto, in modo da ridurre il problema allo studio, alla sua espressione più semplice ed elementare.

Mi sono servito all'uopo del microrespirometro costruito in questo Laboratorio da A. Rabbeno [3]. Per mezzo del suo apparecchio, che rappresenta un'applicazione allo studio del ricambio respiratorio di poltiglie di tessuti del noto manometro del Barcroft, si porta la ricerca su tessuti sopravviventi escisi dall'organismo, e finamente sminuzzati.

Per risolvere il compito prefissomi, mi sono servito delle soluzioni equilibratrici studiate e preparate da Soerensen, ed essenzialmente di due sistemi regolatori, costituiti, il primo, da una miscela di fosfato monopotassico e di fosfato disodico, il secondo da una miscela di citrato disodico e di acido cloridrico. A seconda delle parti proporzionali mescolate dell'una e dell'altra sostanza componente i due detti sistemi, si ottennero e si studiarono i seguenti pH:

1) Coi *fosfati*	2) Col *citrato*–HCl
7.86	4.83
7.65	3.69
7.35	1.17

(1) Dal Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino, diretto dal professore A. Herlitzka.

(2) Nella seduta del 20 febbraio 1927.

(3) A. RABBENO, *Ricerche sul ricambio respiratorio dei tessuti*, « Arch. di Scienze biologiche », VII, 1925, 30.

Digitized by Google

1) Coi *fosfati*	2) Col *citrato* - HCl
7.15	—
6.98	—
6.64	—
6.24	—
5.31	—

La ricerca fu portata, come già si è accennato sopra, sui muscoli e sul fegato di rana. Ho eseguito 21 serie di esperimenti. Mi limito qui a riassumere in due tabelle le medie degli esperimenti principali, alle quali faccio seguire le conclusioni che essi mi permisero di trarre. Nella prima colonna di queste due tabelle viene riportato il numero complessivo di esperimenti eseguiti con un dato pH, che è indicato nella II colonna. La terza e la quarta colonna contengono le medie dei valori trovati per la produzione di CO_2 e il consumo di O_2, che sono indicati in mmc di gas per mg di peso di tessuto. Nella V colonna sono citate le medie dei quozienti CO_2/O_2 corrispondenti. I pH studiati furono ottenuti, come già si disse, da pH = = 7.86 a 5.31 coi fosfati; da 4.83 a 1.17 col citrato e HCl.

La prima tabella riguarda le ricerche eseguite sui muscoli di rana primaverile.

TABELLA I.

N. degli esperim.	pH	CO_2	O_2	CO_2/O_2
12	7.86	0.375	0.433	0.865
10	7.65	0.406	0.441	0.924
10	7.35	0.465	0.467	0.993
11	7.15	0.453	0.447	1.010
10	6.98	0.465	0.457	1.014
10	6.64	0.484	0.481	1.007
15	6.24	0.473	0.464	1.018
12	5.31	0.413	0.409	1.012
10	4.83	0.158	0.117	1.336
10	3.69	0.171	0.132	1.309
10	1.17	0.103	0.084	1.212

In un'altra serie di esperimenti, che ometto di riportare in questa breve Nota preventiva, e che eseguii con un altro lotto di rane alla fine dell'inverno, ottenni interessanti variazioni quantitative che non posso fare a meno d'attribuire all'influenza della stagione.

Digitized by Google

La seconda tabella riguarda le ricerche eseguite a varia concentrazione di idrogenioni sul fegato di rana primaverile. I pH studiati furono ottenuti come per i muscoli, e le colonne della tabella riportano i rispettivi valori nel modo detto per la tabella precedente.

TABELLA II.

N. degli esperim.	pH	CO_2	O_2	CO_2/O_2
6	7.86	0.462	0.562	0.828
6	7.15	0.486	0.519	0.956
6	5.31	0.417	0.394	1.045
10	4.83	0.366	0.199	1.769
10	3.69	0.281	0.152	1.895
10	1.17	0.191	0.111	1.727

Non mi è qui consentito, naturalmente, di dilungarmi nella discussione dei risultati sperimentali. Le conclusioni alle quali portano tali risultati sono essenzialmente le seguenti:

I. Eseguendo ricerche sul ricambio respiratorio di poltiglie di muscoli di rane primaverili, a diversa concentrazione degli idrogenioni del liquido conservatore equilibrato (fosfati per un pH da 7.86 a 5.31; citrato e HCl da 4.83 a 1.17) si nota che il consumo di ossigeno è praticamente costante per valori di pH tra 7.86 e 6.24. A pH = 5.31 vi è diminuzione del consumo di ossigeno. L'anidride carbonica prodotta va aumentando fino a pH = 7.35 e rimane poi costante fino a 6.24. A pH = 5.31 diminuisce pure la eliminazione di CO_2. Il Q. R. sale da pH = 7.86 a pH = 7.15, dove raggiunge l'unità, per mantenervisi fino a pH = 5.31. In rane ibernanti a pH superiori a 7.15 tanto il consumo di O_2 quanto la produzione di CO_2 si mantengono su cifre non molto differenti: il quoziente sale entro limiti ristretti.

II. Per valori di pH inferiori a 5.31 si osserva una rapida discesa dei valori dell'ossigeno consumato, e una contemporanea, ma non parallela discesa di quelli del CO_2 prodotto; ne risulta un quoziente cospicuamente aumentato. A pH = 1.17 i valori di O_2 sono ridottissimi, e si ha ulteriore diminuzione del CO_2 prodotto, in confronto del pH immediatamente superiore.

III. Le ricerche sul fegato confermano i risultati ottenuti con i muscoli, offrendo dati più uniformi e differenze più cospicue. Il consumo di

Digitized by Google

ossigeno è massimo a pH = 7.86, scende poi gradualmente fino a 5.31, mentre presenta una brusca discesa da questo valore a quello di 4.83, per abbassarsi di nuovo, poi, lentamente, fino a divenire praticamente nullo a pH = 1.17. Più uniforme è la curva di discesa della produzione di anidride carbonica. Anche per il fegato il Q. R. cresce da 7.86 a 7.15, si mantiene intorno a 1 fino a 5.31, si porta poi a valori alti (maggiori che per il muscolo) fino a 3.69. Tanto per il fegato che per i muscoli, fra un pH = = 3.69 e pH = 1.17 il quoziente CO_2/O_2 torna ad abbassarsi.

IV. Le modificazioni dell'attività respiratoria, cioè la diminuzione di essa col diminuire del pH, si spiegano, sia ammettendo che il fosfatione abbia un'azione specifica di esaltamento del ricambio respiratorio; sia, più probabilmente, che il fattore fondamentale per mantenere elevato il ricambio respiratorio, è la concentrazione degli idrogenioni inferiore al punto isoelettrico, cioè tale da permettere l'esistenza di una dissociazione di anioni proteici. Pur avendosi infatti l'inizio della diminuzione dell'attività respiratoria a pH = 5.31, quindi coi fosfati, occorrono tuttavia ulteriori esperimenti per escludere l'intervento del fosfatione.

Embriologia sperimentale. — *Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi. - I. Segmentazione atipica e successivo sviluppo delle ova di Arbacia punctulata Grey centrifugate dopo la fecondazione.* Nota di P. PASQUINI, presentata dal Corrispondente F. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

G. C.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomi XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). — Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV, V, VI, VII, VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII, Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. (1892-1924).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI. (1904-1924).

Serie 6ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I.-VI. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-II. (1925-1927).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-III. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I. (1925-1927).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-III. (1925-1927).

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti Adunanze Solenni. Vol. I-III. (1892-1927.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. 12 Volumi.
» » » » » 3 Bollettini.
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1927.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXXI.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-IV.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia. (1908).
Indice degli Atti Accademici (alfabetico per nomi autori) dall'inizio al 1910.

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1927

SERIE 6ª

Rendiconti	Scienze fisiche, ecc. Vol. V (1° semestre 1927) in fascicoli bimensili . . .	L. 54 —
»	» » » Vol. VI (2° » 1927) » » . . .	» 54 —
Memorie	» » » Vol. II (continuazione) in fascicoli progressivi	prezzi vari
Rendiconti	Scienze morali, ecc. Vol. II, in fascicoli trimestrali	L. 54 —
Memorie	» » » Vol. I (continuazione) in fascicoli progressivi	prezzi vari
Notizie degli	Scavi, Vol. III (52° dall'inizio) in fascicoli trimestrali	L. 120 —

Rendiconto	adunanza solenne, Vol. III, fascicolo 13	L. 8 —
Annuario	. . . . .	» 4 —
Monumenti	antichi, Vol. XXX, ecc.	prezzi vari

N. B. – Le pubblicazioni dell'Accademia sono in vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (104) e presso le principali Librerie. I prezzi sono franco Roma. È concesso uno sconto ai Librai.
Nelle richieste indicare sempre: la pubblicazione, la serie, il volume e il fascicolo. Le richieste precise e scritte in italiano o in francese potranno essere esaurite più sollecitamente delle altre.

Digitized by Google

RENDICONTI - Febbraio 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Fascicolo del 20 febbraio (Anno V)

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

TONELLI L. – Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie . Pag. 229
VINASSA P. – I costituenti degli involucri terrestri ed il « numero molecolare » . . »
RUSSO A. – Il potere germinativo delle cellule somatiche dei Metazoi e dei Metafiti e la ripresa del potere sessuale nei Gametogeni impuri in « Cryptochilum echini » Maupas, in relazione al comportamento dei nuclei, durante il ciclo di sviluppo . 235
BAGLIONI S. e GALAMINI A. – Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Azione nell'accrescimento, nell'alimentazione insufficiente, nel digiuno e nella rialimentazione del ratto albino 239
HERRERA A. L. – Nuova imitazione delle amebe in movimento 245
ID. – Accrescimento e moltiplicazione delle amebe artificiali 248

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

CRUDELI U. – Su lo scostamento geodetico elementare: procedimento di estensione nella equazione di Jacobi ad una qualsiasi varietà riemanniana (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) . . . . . »
SPAMPINATO N. – Nuovi contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann (pres. dal Corrisp. *G. Scorza*) 251
CACCIOPPOLI R. – Sui funzionali multilineari (pres. dal Corrisp. *L. Tonelli*) . . . 254
WEINSTEIN A. – Sur un problème mixte pour les fonctions harmoniques (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 259
DUBOURDIEU J. – Sur les congruences des courbes (pres. *Id.*) 265
ONICESCU O. – Il comportamento asintotico e gli zeri di una classe di funzioni intere (pres. *Id.*) 271
ANDREOLI G. – Sulla curvatura e sul parallelismo su una superficie (pres. dal Socio *R. Marcolongo*) 274
VRANCEANU G. – Stabilità geodetica. Applicazione ai sistemi conservativi della meccanica (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 275
BURGERS J. M. – Sur quelques recherches de Helmoltz et de Wien relatives à la forme des ondes se propageant à la surface de séparation de deux liquides (pres. *Id.*) 279
PASCAL M. – Sulle curve che compaiono nello studio della corrente circuito-traslatoria (pres. dal Socio *R. Marcolongo*) . . . . . »
ID. – Curve per la spinta massima (o minima) (pres. *Id.*) 282
BARBIERI U. – Determinazione di azimut assoluto, eseguita ad Andrate nell'agosto 1926 (pres. dal Corrisp. *G. Loria*) 283
BOZZA G. e DEVOTO G. – Sul calcolo dell'affinità chimica in base alle entropie (pres. dal Corrisp. *L. Cambi*) 287
MAZZA F. P. e DELLO JOJO G. – Sulla dispersione rotatoria di alcuni eteri aspartici (pres. dal Socio *A. Piutti*) 294
FERNANDES L. – Ricerche sui solfosali (pres. dal Corrisp. *L. Rolla*) 302
PIERONI A. – Sopra alcuni derivati della Piridina (pres. dal Socio *A. Angeli*) . . . 303
FERNANDES L. e PALAZZO F. – Ricerche sui solfosali (II). Solfossipolimolibdati di ammonio e guanidina (pres. dal Corrisp. *L. Rolla*) 307
COMEL M. – Sull'azione della concentrazione degli idrogenioni sul ricambio respiratorio dei tessuti (pres. dal Corrisp. *A. Herlitzka*) . . . . . »
PASQUINI P. – Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi. – I. Segmentazione atipica e successivo sviluppo delle ova di Arbacia punctulata Grey centrifugate dopo la fecondazione (pres. dal Corrisp. *F. Raffaele*) 310

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 marzo 1927 (Anno V)

Presidenza del Socio anziano E. PATERNÒ

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie.* Nota [1] del Socio Corrisp. L. TONELLI.

In alcune Note, pubblicate in questi stessi « Rendiconti » [2], studiai i problema della quadratura delle superficie, date nella forma

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

con $f(x, y)$ funzione continua, definita nel quadrato Q_0 di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Adottando la definizione di area di una superficie proposta dal Lebesgue, riuscii a caratterizzare le superficie (1), ad area finita, mediante la nozione di funzione di due variabili *a variazione limitata*, da me introdotta; poi, con la nozione di funzione di due variabili *assolutamente continua*, pure da me introdotta, caratterizzai le superficie (1), ad area finita, per le quali tale area è espressa dal noto classico integrale. Per quest'ultima questione feci ricorso al *polinomio di Stieltjes* $\pi_n(x, y)$ relativo alla funzione $f(x, y)$, per il quale dimostrai la seguente proposizione: « Supposta la $f(x, y)$ assolutamente continua (oltre che continua), e considerato un qualunque rettangolo R completamente *interno* a Q_0, l'area $S_n(R)$ della parte della superficie $z = \pi_n(x, y)$ che corrisponde al rettangolo R tende, per $n \to \infty$, all'area S (R) della parte corrispondente della superficie (1) ».

(1) Presentata nella seduta del 20 febbraio 1927.

(2) Vol. III, 1° sem. 1926, pp. 357, 445, 633, 714. Queste Note verranno indicate, nel seguito, con N. I, N. II, N. III, N. IV.

Digitized by Google

In una comunicazione fatta al recente Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze [1], indicai un'estensione del teorema precedente; dissi cioè che *esso vale in tutti i casi in cui la superficie* (1) *ha area finita, anche se la* $f(x, y)$ *non è assolutamente continua.* La dimostrazione di questa estensione forma l'oggetto della presente Nota.

1. Supponiamo, per maggiore generalità, che la funzione continua $f(x, y)$ sia definita nel rettangolo Q, determinato dalle disuguaglianze

$$a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d \qquad \text{con} \qquad 0 \leq a < b \leq 1 \quad , \quad 0 \leq c < d \leq 1,$$

e sia

$$(2) \quad \pi_n(x, y) = \frac{k_n^2}{4} \iint_Q f(u, v) \, [1 - (u - x)^2]^n \, [1 - (v - y)^2]^n \, du \, dv,$$

con $1 : k_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n \, dt$. Considerato un rettangolo $R = [a_1 \leq x \leq b_1 \, , \, c_1 \leq y \leq d_1]$, con $a < a_1 < b_1 < b \quad , \quad c < c_1 < d_1 < d$, ed un intervallo (α, β) di (a_1, b_1), abbiamo, come nel n. 2 di N. IV,

$$|\pi_n(\beta, y) - \pi_n(\alpha, y)| \leq 2M(n + 1)(1 - \varepsilon^2)^n (\beta - \alpha)$$

$$+ \frac{k_n^2}{4} \int_c^d [1 - (v - y)^2]^n \, dv \int_{a - b_1}^{b - a_1} |f(\beta + t, v) - f(\alpha + t, v)| \, (1 - t^2)^n \, dt,$$

dove M indica il massimo modulo della $f(x, y)$ in Q, ε è un numero positivo, minore di tutte le differenze $a_1 - a \quad , \quad b - b_1 \quad , \quad c_1 - c \quad , \quad d - d_1$, e dove si è posto, per ogni y di (c, d), $f(x, y) = f(a, y)$ se $x < a$, e $f(x, y) = f(b, y)$ se $x > b$. Ponendo poi $f(x, y) = 0$ per ogni $y < c$ e per ogni $y > d$, abbiamo, dalla precedente disuguaglianza,

$$(3) \quad \begin{cases} |\pi_n(\beta, y) - \pi_n(\alpha, y)| \leq 2M(n + 1)(1 - \varepsilon^2)^n (\beta - \alpha) \\ + \frac{k_n^2}{4} \int_{-1}^{1} (1 - \zeta^2)^n \, d\zeta \int_{-1}^{1} |f(\beta + t, y + \zeta) - f(\alpha + t, y + \zeta)| \, (1 - t^2)^n \, dt. \end{cases}$$

Pertanto, se (α', β') è un qualsiasi intervallo di (a_1, b_1) e lo si decompone in un numero finito di intervalli (α, β), si ottiene

$$\sum |\pi_n(\beta, y) - \pi_n(\alpha, y)| \leq 2M(n + 1)(1 - \varepsilon^2)^n (\beta' - \alpha')$$

$$+ \frac{k_n^2}{4} \int_{-1}^{1} (1 - \zeta^2)^n \, d\zeta \int_{-1}^{1} \sum |f(\beta + t, y + \zeta) - f(\alpha + t, y + \zeta)| \, (1 - t^2)^n \, dt.$$

Poichè questa disuguaglianza vale per ogni decomposizione di (α', β') in parti (α, β), potremo, dapprima, sostituire, alla sommatoria del secondo

(1) Bologna; seduta del 2 novembre 1926. Cfr. « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno V (1926), p. 253.

Digitized by Google

membro, la variazione totale della $f(x, y+\zeta)$, rispetto ad x nell'intervallo $(\alpha'+t, \beta'+t)$, e poi mettere, in luogo della sommatoria del primo membro, la variazione totale della $\pi_n(x, y)$, rispetto ad x, nell'intervallo (α', β'). Se, per ogni y di (c, d), indichiamo con $V(x, y)$ la variazione totale della $f(x, y)$, rispetto ad x, nell'intervallo (a, x), quando sia $a \leq x \leq b$, ponendo $V(x, y) = 0$ se è $x < a$ e $V(x, y) = V(b, y)$ se è $x > b$, e se poi poniamo $V(x, y) = 0$ per ogni y minore di c o maggiore di d, la funzione $V(b, y)$ risulta finita per quasi tutti i valori di y e integrabile rispetto ad y, in virtù dell'ipotesi che l'area della superficie $z = f(x, y)$, per (x, y) in Q, sia finita, da cui segue (N. I) che la $f(x, y)$ è funzione di due variabili a variazione limitata in Q. Pertanto, data la definizione posta per la $f(x, y)$ fuori di Q, dalla disuguaglianza sopra scritta segue

$$(4)\quad \begin{cases} V_n(\beta', y) - V_n(\alpha', y) \leq 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n(\beta'-\alpha') \\ + \dfrac{k_n^2}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)^n\,d\zeta\int_{-1}^{1}\{V(\beta'+t, y+\zeta) - V(\alpha'+t, y+\zeta)\}(1-t^2)^n\,dt \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con $V_n(x, y)$ la variazione totale della $\pi_n(x, y)$, come funzione della sola x, nell'intervallo (a, x).

2. In modo analogo otteniamo

$$(5)\quad \begin{cases} W_n(x, \delta') - W_n(x, \gamma') \leq 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n(\delta'-\gamma') \\ + \dfrac{k_n^2}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt\int_{-1}^{1}\{W(x+t, \delta'+\zeta) - W(x+t, \gamma'+\zeta)\}(1-\zeta^2)^n\,d\zeta, \end{cases}$$

dove (γ', δ') è un qualsiasi intervallo di (c_1, d_1), $W_n(x, y)$ è la variazione totale della $\pi_n(x, y)$, come funzione della sola y, nell'intervallo (c, y), e $W(x, y)$ è quella della $f(x, y)$, essendosi posto $W(x, y) = 0$ per ogni $y < c$, ed anche per ogni x minore di a o maggiore di b, e $W(x, y) = W(x, d)$ per ogni $y > d$.

3. Suddividiamo gli intervalli (a_1, b_1) e (c_1, d_1) in parti mediante i punti $a_1 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b_1$, $c_1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m'} = d_1$, e, indicando con $R_{r,s}$ il rettangolo

$$[x_{r-1} \leq x \leq x_r \quad , \quad y_{s-1} \leq y \leq y_s] \quad (r = 1, 2, \cdots, m \quad ; \quad s = 1, 2, \cdots, m')$$

poniamo

$$\alpha_{r,s} = \int_{x_{r-1}}^{x_r}\{W(x, y_s) - W(x, y_{s-1})\}\,dx,$$

$$\beta_{r,s} = \int_{y_{s-1}}^{y_s}\{V(x_r, y) - V(x_{r-1}, y)\}\,dy,$$

$$a_{r,s} = (R_{r,s}^2 + \alpha_{r,s}^2 + \beta_{r,s}^2)^{\frac{1}{2}},$$

Digitized by Google

(dove è $R_{r,s} = (x_r - x_{r-1})(y_{s-1} - y_s)$); indichiamo poi con $\alpha^{(n)}_{r,s}$, $\beta^{(n)}_{r,s}$ e $a^{(n)}_{r,s}$ le espressioni analoghe alle precedenti e relative alla funzione $\pi_n(x,y)$. Dalla (5) abbiamo allora (con un'inversione nell'ordine delle integrazioni)

$$\alpha^{(n)}_{r,s} \leq 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n R_{r,s}$$
$$+ \frac{k_n^2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(1-\tau^2)^n\,dt\,d\tau\int_{x_{r-1}}^{x_r}\{W(x+t,y_s+\tau)-W(x+t,y_{s-1}+\tau)\}\,dx;$$

e dalla (4) deduciamo una disuguaglianza analoga per $\beta^{(n)}_{r,s}$. Applicando perciò le disuguaglianze

$$\{(\sum a_r)^2+(\sum b_r)^2+\cdots\}^{\frac12} \leq \sum(a_r^2+b_r^2+\cdots)^{\frac12},$$
$$\left\{\left(\int\varphi_1\,ds\right)^2+\left(\int\varphi_2\,ds\right)^2+\cdots\right\}^{\frac12} \leq \int(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\cdots)^{\frac12}\,ds,$$

otteniamo

$$a^{(n)}_{r,s} \leq 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n R_{r,s}\sqrt{2}$$
$$+\left[R_{r,s}^2+\left(\frac{k_n^2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(1-\tau^2)^n\,dt\,d\tau\int_{x_{r-1}}^{x_r}\{W(x+t,y_s+\tau)-\right.\right.$$
$$\left.-W(x+t,y_{s-1}+\tau)\}\,dx\right)^2$$
$$+\left(\frac{k_n^2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(1-\tau^2)^n\,dt\,d\tau\int_{y_{s-1}}^{y_s}\{V(x_r+t,y+\tau)-\right.$$
$$\left.\left.-V(x_{r-1}+t,y+\tau)\}\,dy\right)^2\right]^{\frac12}$$
$$\leq 2M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n R_{r,s}\sqrt{2}+\frac{k_n^2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(1-\tau^2)^n a_{r,s}(t,\tau)\,dt\,d\tau,$$

dove abbiamo posto

$$a_{r,s}(t,\tau)=\left[R_{r,s}^2+\left(\int_{x_{r-1}}^{x_r}\{W(x+t,y_s+\tau)-W(x+t,y_{s-1}+\tau)\}\,dx\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\int_{y_{s-1}}^{y_s}\{V(x_r+t,y+\tau)-V(x_{r-1}+t,y+\tau)\}\,dy\right)^2\right]^{\frac12}.$$

Dalla disuguaglianza scritta ricaviamo, sommando per $r=1,2,\cdots,m$; $s=1,2,\cdots,m'$,

$$\sum a^{(n)}_{r,s} \leq 2\sqrt{2}\,M(n+1)(1-\varepsilon^2)^n(b_1-a_1)(d_1-c_1)$$
$$+\frac{k_n^2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(1-\tau^2)^n\sum a_{r,s}(t,\tau)\,dt\,d\tau.$$

Digitized by Google

Indichiamo ora con A (R) il limite superiore di tutte le somme $\sum a_{r,s}$, e con A (Q) il numero analogo relativo al rettangolo Q. Se supponiamo che la superficie $z = f(x, y)$, per (x, y) in Q, sia ad area finita, A (Q) è finito (N. II), e tale è anche *a fortiori* il numero A relativo ad un qualsiasi rettangolo contenuto in Q, e in particolare A (R). Di più, (sempre per quanto è dimostrato in N. II) preso ad arbitrio un $\eta > 0$, possiamo supporre che l'ε già considerato sia anche così piccolo da far sì che, per ogni rettangolo $R' \equiv [a' \leq x \leq b' \quad , \quad c' \leq y \leq d']$, tale che $|a' - a_1| < \varepsilon \quad , \quad |b' - b_1| < \varepsilon \quad , \quad |c' - c_1| < \varepsilon \quad , \quad |d' - d_1| < \varepsilon$, sia $|A(R') - A(R)| < \eta$. Allora, osservando che il limite superiore delle somme $\sum a_{r,s}(t, \tau)$, per tutte le possibili decomposizioni di (a_1, b_1) e di (c_1, d_1) in parti, non è che il numero A relativo al rettangolo $[a_1 + t \leq x \leq b_1 + t \; , \; c_1 + \tau \leq y \leq d_1 + \tau]$, e che perciò, mentre da una parte, per le posizioni fatte nei nn. 1 e 2, relativamente alle funzioni V (x, y) e W (x, y) fuori di Q, tale limite superiore non può mai superare A (Q), dall'altra, quando sia $|t| < \varepsilon \quad , \quad |\tau| < \varepsilon$, lo stesso limite non può superare A (R) + η. È dunque

$$\sum a_{r,s}^{(n)} \leq 2\sqrt{2}\, M (n+1)(1-\varepsilon^2)^n + k_n^2 (1-\varepsilon^2)^n A(Q) + [A(R) + \eta]$$

$$\leq 4 (n+1)^2 (1-\varepsilon^2)^n \{M + A(Q)\} + A(R) + \eta,$$

per essere $k_n < 2(n+1)$; e poichè ciò vale per ogni suddivisione di (a_1, b_1) e (c_1, d_1) in parti, è anche

$$A_n(R) \leq 4 (n+1)^2 (1-\varepsilon^2)^n \{M + A(Q)\} + A(R) + \eta,$$

dove abbiamo indicato con $A_n(R)$ il limite A (R) relativo alla funzione $\pi_n(x, y)$. Possiamo, pertanto, determinare un n_1 tale che, per ogni $n > n_1$, sia $A_n(R) \leq A(R) + 2\eta$. Ma essendo $\pi_n(x, y)$ una funzione razionale intera, l'area $S_n(R)$ della superficie $z = \pi_n(x, y)$, per (x, y) in R, è data dall'integrale classico, il quale, (N. II) non supera mai, in valore, $A_n(R)$. E poichè, d'altra parte, è (N. II) $A_n(R) \leq S_n(R)$, ne viene $A_n(R) = S_n(R)$, e dall'ultima disuguaglianza scritta segue Mass. lim $S_n(R) \leq A(R)$. Per la convergenza uniforme di $\pi_n(x, y)$ a $f(x, y)$ in tutto R, è poi Min. lim $S_n(R) \geq S(R)$, dove S (R) rappresenta l'area della superficie $z = f(x, y)$, relativa al rettangolo R; ed essendo (N. II) $S(R) \geq A(R)$, se ne conclude che esiste il limite di $S_n(R)$ per $n \to \infty$, e che è

$$\lim_{n \to \infty} S_n(R) = S(R) = A(R).$$

Digitized by Google

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema:

Se Q *è un rettangolo appartenente al quadrato* Q_0 *(eventualmente coincidente con esso) e la superficie*

$$z = f(x, y) \tag{6}$$

con $f(x, y)$ *definita e continua in* Q, *è ad area finita, l'area* $S_n(R)$ *della superficie* $z = \pi_n(x, y)$ *relativa ad un rettangolo* R *completamente interno a* Q, *e dove* $\pi_n(x, y)$ *è il polinomio di Stieltjes definito dalla* (2), *tende, per* $n \to \infty$, *all'area* S(R) *della parte corrispondente della superficie* (6).

Nella dimostrazione qui data, il rettangolo R è considerato a lati paralleli agli assi x e y; ma il teorema vale per un rettangolo qualunque in virtù della semicontinuità inferiore dell'area.

4. La proposizione qui dimostrata prova che i polinomi $\pi_n(x, y)$ forniscono un *procedimento regolare per il calcolo dell'area di una superficie.* Si consideri, infatti, una successione di rettangoli $R_1, R_2, \cdots$, tali che ognuno di essi contenga il precedente e che R_m tenda a Q, per $m \to \infty$. Allora, essendo evidente che se è $S(R_m) = +\infty$ è pure $\lim_{n\to\infty} S_n(R_m) = +\infty$, si ha che, se per almeno un valore di m non esiste finito il limite di $S_n(R_m)$, per $n \to \infty$, è $S(R) = +\infty$; se poi esistono finiti tutti i limiti $\lim_{n\to\infty} S_n(R_m)$, sarà $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} S_n(R_m) = S(R)$, uguaglianza valida anche nel caso che il limite del primo membro sia $+\infty$, perchè, in tale caso, dovrà essere necessariamente $S(R) = +\infty$.

5. Le espressioni $\alpha_{r,s}$ e $\beta_{r,s}$, da noi usate, sono evidentemente le proiezioni sui piani (x, z) e (y, z) del pezzo della superficie (6) corrispondente al rettangolo $R_{r,s}$, e $a_{r,s}$ è perciò la radice quadrata della somma dei quadrati delle proiezioni della superficie indicata sui tre piani coordinati. Ciò rende intuitivo il fatto, che risulta dalla dimostrazione del n. 3, e cioè che è $A(R) = S(R)$, e quindi anche $A(Q) = S(Q)$. Questa uguaglianza fu già dimostrata da T. Rado (1).

6. Utilizzando la disuguaglianza (3) in luogo della (4), nella dimostrazione del n. 3 alle somme $\sum a_{r,s}$ si possono sostituire le somme di Geöcze, recentemente riprese in considerazione dal Rado (loc. cit.).

(1) « Comptes rendus », to. 183 (1926), p. 358.

Digitized by Google

Geofisica. — *Sulla determinazione delle costanti geoidiche mediante sole misure di gravità.* Nota [1] del Socio C. SOMIGLIANA.

I.

Ho dimostrato in una Nota precedente [2] la possibilità teorica di determinare le costanti del geoide, supposto ellissoidico di rotazione, mediante sole misure di gravità, e precisamente di determinarne gli assi e la densità media mediante i valori della gravità in tre località della superficie di latitudine differente e conosciuta.

È interessante ora di verificare in qualche caso speciale come il procedimento indicato possa effettivamente condurre alla risoluzione completa del problema. Si è visto che questo si riduce sostanzialmente alla determinazione dell'eccentricità in funzione dei tre valori, supposti conosciuti, della gravità e della latitudine. Ci occuperemo perciò soltanto di tale quistione.

Supporremo conosciuti i valori della gravità al polo ed all'equatore, e inoltre ad una data latitudine intermedia φ qualsiasi. Porremo perciò nelle formole della Nota sopra richiamata

$$\varphi_1 = 0 \qquad \varphi_2 = \varphi \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} \qquad \cos^2\varphi_1 = 1$$

$$g_1 = g_e \qquad g_2 = g \qquad g_3 = g_p \qquad \cos^2\varphi_3 = 0.$$

L'equazione che determina la costante i, che abbiamo chiamato eccentricità aggiunta, definita dalla relazione

$$i = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}$$

prende allora la forma

$$g_e \cos^2\varphi \sqrt{1 + i^2} + g_p \operatorname{sen}^2\varphi = g\sqrt{1 + i^2\cos^2\varphi}. \tag{1}$$

Introduciamo il rapporto del semiasse maggiore al minore, che indicheremo con j

$$j = \frac{a}{c} = \sqrt{1 + i^2}$$

(1) Presentata all'Accademia nella seduta del 2 gennaio 1927.
(2) *Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità.*

Digitized by Google

e l'equazione precedente, ridotta razionale, prenderà la forma

$$(1') \qquad g^2 (j^2 \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) = (j g_e \cos^2 \varphi + g_p \operatorname{sen}^2 \varphi)^2$$

ossia

$$(g^2 \cos^2 \varphi - g_e^2 \cos^4 \varphi) j^2 - 2 j g_e g_p \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + g^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - g_p^2 \operatorname{sen}^4 \varphi = 0$$

o anche

$$(2) \quad (g^2 - g_e^2 \cos^2 \varphi) j^2 - 2 j g_e g_p \operatorname{sen}^2 \varphi + (g^2 - g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \operatorname{tg}^2 \varphi = 0 .$$

È questa l'equazione che conviene risolvere per avere j e quindi l'eccentricità aggiunta.

Pel discriminante di questa equazione si trova facilmente

$$\Delta = (g_e^2 \cos^2 \varphi + g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - g^2) g^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$$

ed è facile dimostrare che questa espressione non può essere negativa, e che quindi le radici della (2) sono sempre reali. Osserviamo infatti che la relazione (1') si può scrivere anche nella forma seguente

$$g = \frac{j g_e \cos^2 \varphi + g_p \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{j^2 \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{a g_e \cos^2 \varphi + c g_p \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

formola notevole che dà la gravità ad una latitudine qualsiasi mediante i valori della gravità al polo ed all'equatore. Se ora consideriamo due vettori A, G che abbiano rispettivamente per componenti

$$a \cos \varphi \quad , \quad c \operatorname{sen} \varphi \qquad \text{e} \qquad g_e \cos \varphi \quad , \quad g_p \operatorname{sen} \varphi$$

la formola precedente dimostra che la gravità ad una latitudine φ è la proiezione del vettore G sul vettore A si ha cioè

$$g = G \cos (GA).$$

Ne segue

$$|g| < |G|$$

ossia

$$g^2 < g_e^2 \cos^2 \varphi + g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

e perciò Δ non può essere negativo.

Risolvendo l'equazione (2) troviamo così pel rapporto degli assi dell'ellissoide

$$\frac{a}{c} = \frac{g_e g_p \operatorname{sen}^2 \varphi}{g^2 - g_e^2 \cos^2 \varphi} \pm \frac{g \operatorname{tang} \varphi}{g^2 - g_e^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{g_e^2 \cos^2 \varphi + g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - g^2} .$$

Digitized by Google

Per decidere nei casi speciali quale di questi due valori si debba scegliere, basterà in generale tener conto del fatto che il rapporto $a : c$ deve avere un valore maggiore di 1, ed assai prossimo a questo numero.

Dalle relazioni precedenti si ricava anche

$$\frac{c}{a} = \frac{g_e g_p \cos^2\varphi}{g^2 - g^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \mp \frac{g \operatorname{cotang}\varphi}{g^2 - g_p^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \sqrt{g_e^2 \cos^2\varphi + g_p^2 \operatorname{sen}^2\varphi - g^2}$$

formola equivalente alla precedente, ma che può in qualche caso essere più utile nei calcoli.

II.

Supponiamo ora che la latitudine φ sia 45°, e quindi

$$\cos^2\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi = \frac{1}{2} .$$

L'equazione (1) diviene, posto $g = g_q$ in questo caso,

$$g_p + g_e \sqrt{1 + i^2} = 2 g_q \sqrt{1 + \frac{i^2}{2}}$$

e la (2)

$$(2 g_q^2 - g_e^2) j^2 - 2 j g_p g_e + 2 g_q^2 - g_p^2 = 0$$

ed il valore della gravità a 45° risulta legato ai valori della gravità al polo ed all'equatore dalla relazione assai semplice

$$g_q \sqrt{2} = \frac{a g_e + c g_p}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

che ha il significato geometrico che già abbiamo indicato.

Per il rapporto dei semi assi si ha

$$j = \frac{g_p g_e}{2 g_q^2 - g_e^2} \pm \frac{2 g_q}{2 g_q^2 - g_e^2} \sqrt{\frac{1}{2}(g_p^2 + g_e^2) - g_q^2} .$$

Se indichiamo con j_1, j_2 questi due valori di j, abbiamo

$$j_1 + j_2 = \frac{2 g_p g_e}{2 g_q^2 - g_e^2} \qquad j_1 j_2 = \frac{2 g_q^2 - g_p^2}{2 g_q^2 - g_e^2} .$$

Siccome g_q è maggiore di g_e, e minore di g_p, e non differisce di molto da g_p, questi due rapporti che compaiono nel 2° membro sono entrambi positivi, ed il secondo è minore dell'unità.

Digitized by Google

Ne segue che le due radici sono entrambe positive, e soltanto una, la maggiore, potrà essere maggiore dell'unità. Avremo così le due formole seguenti pel rapporto dei semi assi.

$$\frac{a}{c} = \frac{g_p\, g_e}{2\,g_q^2 - g_e^2} + \frac{2\,g_q}{2\,g_q^2 - g_e^2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(g_e^2 + g_p^2\right) - g_q^2}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{g_p\, g_e}{2\,g_q^2 - g_p^2} - \frac{2\,g_q}{2\,g_q^2 - g_p^2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(g_e^2 + g_p^2\right) - g_q^2}$$

dalle quali è scomparsa qualsiasi ambiguità, e che risolvono completamente il problema.

III.

È naturale di chiedere ora se queste relazioni siano effettivamente verificate dai valori che si conoscono per la gravità all'equatore, al polo ed alla latitudine di 45°. L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* dà i seguenti valori in unità C. G. S.

$$g_e = 978.046 \qquad g_q = 980.632 \qquad g_p = 983.232\ .$$

Posto

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\left(g_e^2 + g_p^2\right) - g_q^2$$

si trova con tali valori

$$\sqrt{\Delta_1} = 4.5224$$

e inoltre

$$2\,g_q^2 - g_e^2 = 966704.260$$

$$2\,g_q^2 - g_p^2 = 956533.073$$

$$g_e\, g_p = 961646.124\ .$$

Ne segue

$$\frac{c}{a} = \frac{g_e\, g_p - 2 g_q \sqrt{\Delta_1}}{2\,g_q^2 - g_p^2} = 1 - \frac{1}{256.9}$$

cioè per lo schiacciamento dell'ellissoide

$$s = \frac{a - c}{a} = \frac{1}{256.9}\ .$$

Questo valore è un po' maggiore di quello che ordinariamente si ritiene essere lo schiacciamento terrestre, al quale si attribuiscono valori compresi fra $\frac{1}{297}$ e $\frac{1}{300}$.

Digitized by Google

Però questa discordanza non può considerarsi come un difetto della teoria, la quale non essendo basata su alcuna ipotesi particolare, nè sopra approssimazioni di alcun genere, è da ritenersi inappuntabile. Nè sembra probabile che una maggiore approssimazione nei valori delle costanti g_r , g_q , g_p , possa alterare notevolmente il risultato ottenuto. Piuttosto, come mi ha fatto osservare l'egregio collega prof. Silva (che ha avuto la cortesia di controllare il precedente calcolo numerico) è da tenersi conto della circostanza che i valori della gravità, su cui il calcolo è basato, non sono dati diretti di osservazione, ma sono alla loro volta dedotti da formole con coefficienti empiricamente determinati. Potrebbe quindi darsi che le nuove relazioni che abbiamo stabilito dovessero portare ad una revisione di questi coefficienti, in modo da renderli più conformi alle richieste della teoria.

Astronomia. — *Sopra l'estinzione selettiva dell'atmosfera terrestre e sulla temperatura stellare effettiva e apparente.* Nota del Corrisp. G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla realizzazione di grandi self positive o negative per mezzo di una lampada a tre elettrodi e di circuiti induttivi.* Nota [1] del Socio O. M. CORBINO.

1. Nello schema della fig. 1, L rappresenta una lampada a tre elettrodi, con filamento F, placca P e griglia G . Essa è seguita da un trasformatore T e da una resistenza R . Agli estremi A , B si suppone che agisca una f. e. m.

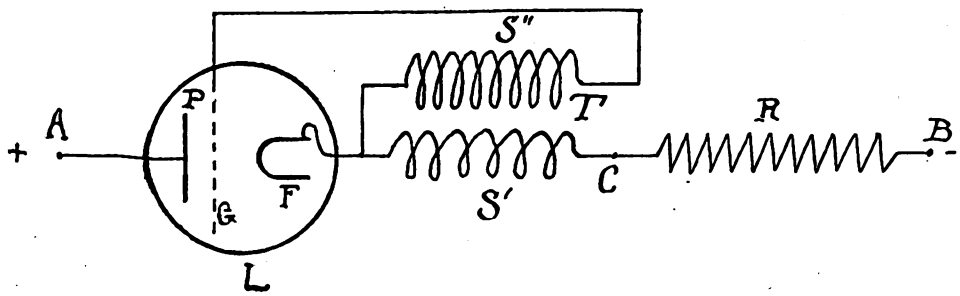


Fig. 1.

pulsante. Del trasformatore T un avvolgimento, S', è in serie tra la lampada e la resistenza; l'altro S'' è rilegato per i suoi estremi al filamento e alla griglia. A seconda del senso delle connessioni di S'' con il filamento

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

e la griglia la tensione u fra questi sarà $\pm m$ volte la tensione esistente in S', cioè fra il filamento e il punto C.

La forza e. m. pulsante che agisce tra A e B sia $v + v_o$ dove v denota la parte alternata, minore della parte costante v_o, cosicchè la corrente è unidirezionale. Si avrà nel circuito una corrente i che avrà una componente variabile j e una costante i_o. Supposto che la parte variabile j si svolga nella regione piana della superficie caratteristica della lampada, si avrà

$$\rho j = v_p + k u \tag{1}$$

dove ρ è la cosiddetta impedenza della lampada, k il suo coefficiente di amplificazione, v_p e u, rispettivamente, la parte variabile della differenza di potenziale fra placca e filamento e tra griglia e filamento.

Sia v_p'' la parte costante della differenza di potenziale placca-filamento, ed L il valore della autoinduzione di S'. Si avrà

$$v + v_o = v_p'' + v_p + L\frac{dj}{dt} + R(i_o + j) .$$

Isolando la parte variabile avremo:

$$v = v_p + L\frac{dj}{dt} + Rj$$

cioè

$$v_p = v - L\frac{dj}{dt} - Rj .$$

Quanto a u, detto m il valore numerico del coefficiente di moltiplicazione del trasformatore, si avrà nel caso della figura

$$u = -mL\frac{dj}{dt}$$

e perciò la (1) diviene

$$(R + \rho) j + (L + k m L)\frac{dj}{dt} = v .$$

Cioè la corrente variabile j sarà la stessa di quella che spetterebbe a un circuito dotato di una self $(1 + k m)$ L anzichè L; ciò che significa che l'efficacia della autoinduzione L viene amplificata nel rapporto di $1 + k m$ ad 1. Se fosse k superiore a 50 e il coefficiente di moltiplicazione del trasformatore fosse 20, l'autoinduzione L agirebbe come un'altra più che mille volte maggiore.

Si riconosce da quanto si è detto che il secondario S'' del trasformatore regola e controlla il potenziale di griglia rendendolo proporzionale e

Digitized by Google

di segno opposto alle variazioni periodiche della corrente pulsante, della quale attenua le pulsazioni allo stesso modo come farebbe un'autoinduzione di assai elevato valore.

Se si inserisce nel circuito di utilizzazione l'avvolgimento S″ invece di S′, e quest'ultimo si rilega alla griglia, si ottengono effetti corrispondenti a un'autoinduzione $(m + k)$ L. In tal caso la corrente principale dovrà traversare il secondario S″, di maggiore resistenza che non S′. In compenso le oscillazioni del potenziale di griglia sono minori, ciò che in certi casi può essere di vantaggio.

Infine si può avere dopo il filamento una semplice self L e rilegarne l'altro estremo a R e alla griglia; senza, cioè, ricorrere al trasformatore.

In ogni caso, prima di giungere alla griglia, occorrerà l'aggiunta di una f. e. m. E, per far lavorare la lampada nella regione più conveniente delle sue curve caratteristiche, e sopratutto per rendere nulla o piccolissima la corrente di griglia, che con la sua reazione sull'altro avvolgimento del trasformatore viene amplificata, nel circuito principale, nella misura m, con la prima disposizione, e ridotta a $\frac{1}{m}$ con la seconda.

2. Incrociando (fig. 1) le connessioni tra l'avvolgimento S″ rilegato al filamento e alla griglia, il coefficiente m cambia di segno; e allora la lampada e il trasformatore diventano equivalenti a una resistenza seguita da una self, negativa, $-(km - 1)$ L. Si riconosce da ciò che poichè in regime di f. e. m. sinusoidali la self negativa equivale a una capacità, il sistema lampada-trasformatore può essere adoperato in parallelo, anzichè in serie, sulla resistenza R, mentre altre self stanno sul circuito d'utilizzazione così da costituire, nell'insieme, un filtro capace d'epurare la corrente in R della sua parte variabile.

3. Al trasformatore con primario e secondario di cui ai numeri precedenti può essere sostituito un autotrasformatore, cioè un avvolgimento continuo con una presa intermedia. A un estremo si rilega la griglia; se l'altro estremo è legato a R e il filamento alla presa intermedia, il sistema funziona come una self positiva; se invece si scambiano le ultime due connessioni, il sistema funziona da autoinduzione negativa, come al n. 2.

4. Si osservi che le connessioni corrispondenti al n. 2 e all'ultima parte del n. 3 equivalgono a quelle ordinariamente adoperate perchè la lampada funzioni da generatore di oscillazioni persistenti ad accoppiamento magnetico, purchè una capacità sia disposta o agli estremi di S′ (fig. 1) o tra filamento e griglia.

Senza capacità, e disponendo tra A e B una f. e. m. costante, si constata che il circuito è percorso da correnti periodicamente interrotte, che hanno frequenza musicale se il trasformatore T è uno dei trasformatori adoperati in radiofonia per la bassa frequenza.

Digitized by Google

Si ha con ciò la spiegazione di alcuni effetti curiosi riscontrati dal prof. Mazzotto e da lui chiamati esperienza del triodo melodico.

La corrente, nel periodo variabile di chiusura, avendo il circuito una self negativa, cresce rapidissimamente, poichè quanto più è elevata la tensione induttiva $L\frac{dj}{dt}$ ancora più lo è la tensione tra griglia e filamento. Ma si raggiunge con ciò rapidamente la parte curvilinea della curva caratteristica e la corrente di saturazione della lampada.

Annullandosi allora il valore di $\frac{dj}{dt}$, cessa l'azione facilitatrice della griglia; la corrente decresce, e allora $\frac{dj}{dt}$ diviene negativa, cioè la griglia interviene a far diminuire j più rapidamente, fino a zero; dopo di che essa riprende le stesse vicissitudini.

È facile, con questa guida, rendersi conto di tutte le particolarità delle esperienze eseguite dal prof. Mazzotto.

Che, in più, la corrente dopo aver raggiunto il valore della saturazione ricada rapidamente al valore zero, mi è risultato dall'osservazione delle sovratensioni notevoli destate nel circuito durante il funzionamento.

Così con un piccolo trasformatore Marconi, come quelli usati negli apparecchi radiofonici, uno spinterometro inserito agli estremi del secondario diventa sede di scintille di oltre un millimetro di lunghezza rivelando con ciò sovratensioni capaci di compromettere l'isolamento degli avvolgimenti. La tensione anodica era di soli 100 volt.

5. I dispositivi descritti ai numeri 1, 2 e 3 sono stati riconosciuti, con esperienze da me eseguite, molto efficaci per attenuare le oscillazioni di una corrente continua pulsante, ottenuta da un ordinario convertitore ad alta tensione, e precisamente di circa 10 mila volt.

Sono particolarmente adatte allo scopo le lampade a griglia non troppo fitta, come le cosiddette modulatrici per trasmissioni radioroniche; queste, pur avendo un coefficiente di moltiplicazione non molto alto (esso è uguale a 40 nella modulatrice Marconi di 10 mila volt), permettono il funzionamento con caratteristiche rettilinee nella regione negativa dei potenziali di griglia, e quindi con correnti di griglia praticamente nulle.

Digitized by Google

Fisica. — *La corrente di saturazione delle valvole termoioniche.* Nota [1] del prof. A. Lo Surdo.

Si suol chiamare *corrente di saturazione* di una valvola termoionica il massimo valore della corrente che per una certa temperatura del filamento può passare attraverso alla valvola. Al crescere della differenza di potenziale fra placca e filamento, la corrente dovrebbe quindi raggiungere il valore di saturazione che è indipendente da un ulteriore incremento della differenza di potenziale: nella nota caratteristica della valvola (fig. 1), la saturazione viene perciò rappresentata con un tratto rettilineo parallelo all'asse delle V.

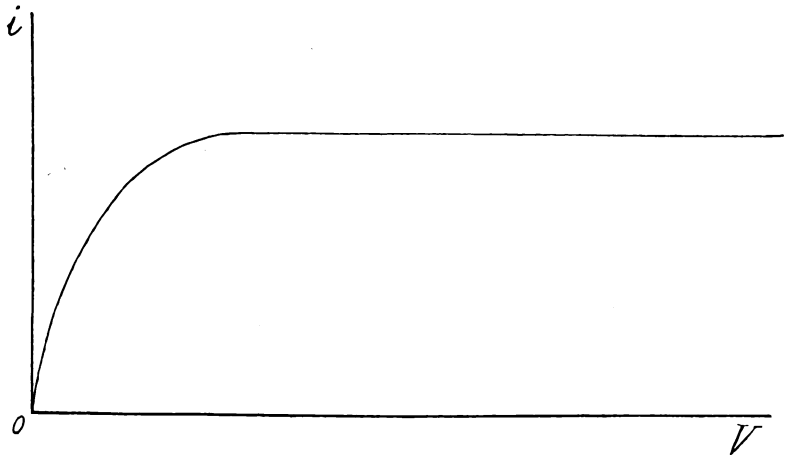


Fig. 1.

Ma il reale andamento della corrente nelle valvole termoioniche non corrisponde esattamente a quello rappresentato dalla fig. 1. Lavorando con valvole in saturazione che siano sottoposte a grandi variazioni della differenza di potenziale fra placca e filamento, ci si accorge che effettivamente al crescere del potenziale la corrente non raggiunge mai un valore massimo, indipendente quindi da un ulteriore incremento della differenza di potenziale, e che nella fase di saturazione l'intensità della corrente continua a crescere lievemente col crescere della differenza di potenziale. E questo fenomeno si osserva anche quando le condizioni della valvola portano ad escludere l'intervento delle note cause che ostacolano la saturazione e cioè la mutua repulsione degli elettroni, il campo magnetico della corrente che accende il filamento ed il gradiente di potenziale lungo il filamento.

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

Oggetto di questa Nota è di esporre alcuni risultati delle ricerche da me fatte sull'andamento della corrente nella fase di saturazione.

La disposizione che mi serviva per la misura dell'intensità della corrente di saturazione di una valvola termoionica era costituita da un circuito ben isolato nel quale agiva una f. e. m. costante, opportunamente regolabile, e che comprendeva la valvola in esame, gli strumenti di misura della intensità di corrente e della tensione, e gli interruttori. Per la f. e. m. mi servivo di una batteria di 10.000 piccoli accumulatori, che è costituita da gruppi di 100 elementi ciascuno, i quali possono essere collegati in serie e inseriti gruppo per gruppo, così che nel circuito si poteva regolare la f. e. m. di 200 in 200 volta circa. Per tensioni inferiori a 200 volta adoperavo una disposizione potenziometrica alimentata da una batteria di grandi accumulatori.

Il filamento della valvola era alimentato da un circuito costituito da comuni accumulatori, una resistenza regolabile, amperometro e interruttore, tutti accuratamente isolati dal suolo.

Nelle mie esperienze ho adoperato delle valvole termoioniche di diverso tipo, che per la maggior parte erano state fabbricate dalla Società Marconi o dalla Philips.

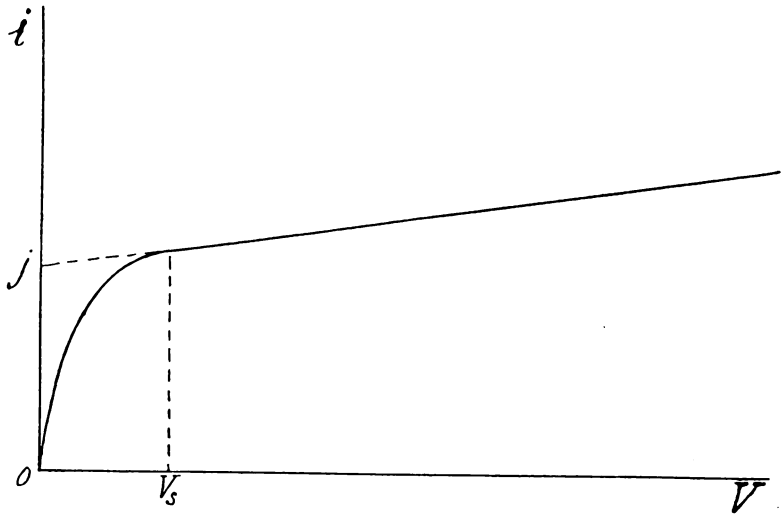


Fig. 2.

Con tutte queste valvole ho trovato che nella fase di saturazione l'intensità della corrente varia con buona approssimazione proporzionalmente alla differenza di potenziale fra placca e filamento.

La caratteristica reale della lampada (fig. 2), differisce quindi dalla nota caratteristica per la direzione del tratto rettilineo che rappresenta la satura-

Digitized by Google

zione, il quale, invece di essere parallelo all'asse delle V, presenta una lieve inclinazione.

L' intensità i della corrente nella fase di saturazione risulta quindi con buona approssimazione:

(1) $$i = j + kV$$

dove j e $k = \frac{\delta i}{\delta V}$ sono due costanti.

Ma l'andamento della corrente col variare della differenza di potenziale si può vedere anche sui diagrammi che ho ottenuto con un tubo di Braun, le cui fotografie sono riprodotte nelle figg. 3 e 4. Sul fascetto catodico del

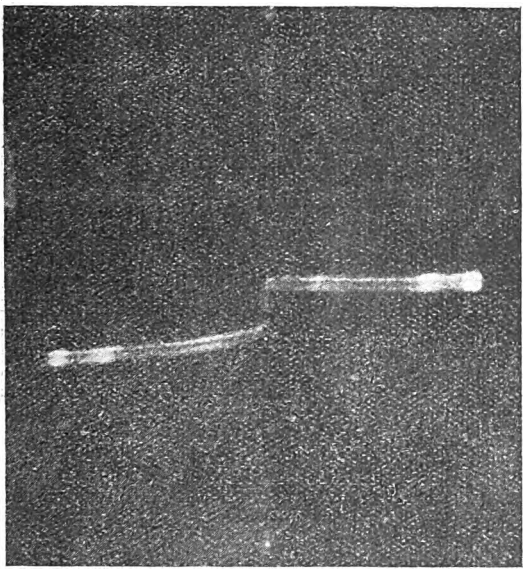


Fig. 3.

tubo di Braun agivano il campo magnetico orizzontale, prodotto dalla corrente anodica che passava in un sistema di due bobine accostate al tubo, ed il campo elettrico, pure orizzontale, proporzionale alla differenza di potenziale fra placca e filamento, campo che si stabiliva fra i due appositi elettrodi di cui era munito il Braun. Il diagramma ha quindi l'asse delle V orizzontale, e quello delle i verticale.

I diagrammi erano ottenuti facendo agire nel circuito della valvola una f. e. m. alternativa. Perciò la valvola veniva collegata al secondario di un trasformatore la cui tensione efficace poteva essere portata fino a 30.000 volta.

Le figg. 3 a 4 rappresentano le caratteristiche di una stessa lampada Philips [1] nelle quali la massima differenza di potenziale fra placca e fila-

(1) Tipo Z G 14 (corrente del filamento fino a 6,5 ampère – tensione anodica fino a 10000 volta – dissipazione 250 watt).

Digitized by Google

mento era rispettivamente di 8200 e 7900 volta circa, e la massima escursione verticale della prima corrisponde all'intensità di corrente di 9 milliampère e della seconda 24 milliampère.

L'andamento che si rileva sui diagrammi costruiti per punti in base ai valori della corrente di saturazione misurati con differenze di potenziale

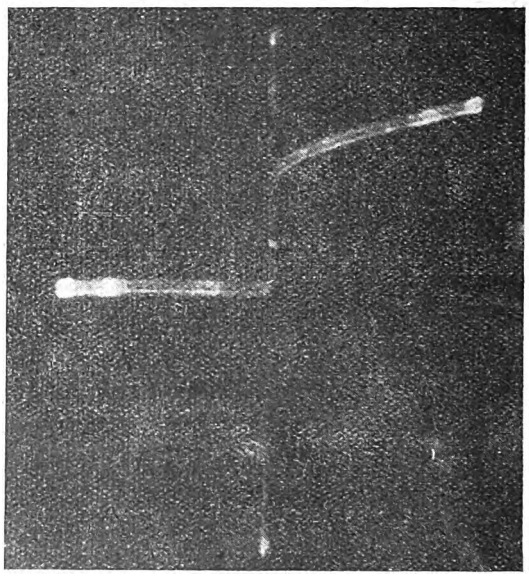


Fig. 4.

costanti, risulta confermato da questi diagrammi che la macchia fluorescente del tubo di Braun tracciava in una piccola frazione di secondo.

Nelle mie esperienze ho trovato inoltre che, entro ampi limiti, qualunque sia la temperatura del filamento gli aumenti della corrente di saturazione corrispondenti ad un determinato aumento della tensione anodica sono per una stessa valvola una parte approssimativamente costante delle rispettive correnti. Questo fatto si rileva dalla fig. 5 dove l'andamento di una stessa lampada Marconi [1] è rappresentato per tre accensioni diverse, che a 6000 volta davano la corrente di 2,4 milliampère (•), 6,2 milliampère (×), e 96 milliampère (O), in scale differenti in modo che questi tre valori della intensità risultino rappresentati dallo stesso punto. E le tre caratteristiche della saturazione possono essere rappresentate dalla stessa retta!

Se quindi per due accensioni differenti del filamento della stessa lampada le costanti della relazione (1) sono rispettivamente $j\ k$ e $j'\ k'$ per modo che con due differenti tensioni anodiche V_1 e V_2 risulti, per la prima accensione:

$$i_1 = j + kV_1 \qquad \text{e} \qquad i_2 = j + kV_2 \ ,$$

(1) Tipo M R 4 (corrente del filamento fino a 6,5 ampère – tensione anodica fino a 8000 volta – dissipazione 300 watt).

Digitized by Google

e per la seconda:

$$i'_1 = j' + k'V_1 \qquad \text{e} \qquad i'_2 = j' + k'V_2 \ ,$$

si può scrivere:

$$\frac{i_2 - i_1}{i_1} = \frac{i'_2 - i'_1}{i'_1} \qquad (2)$$

da cui

$$\frac{k}{j} = \frac{k'}{j'} \qquad (3)$$

ossia

$$k = \alpha j$$

dove α è una costante.

La (1) quindi si può scrivere

$$i = j(1 + \alpha V) \ . \qquad (4)$$

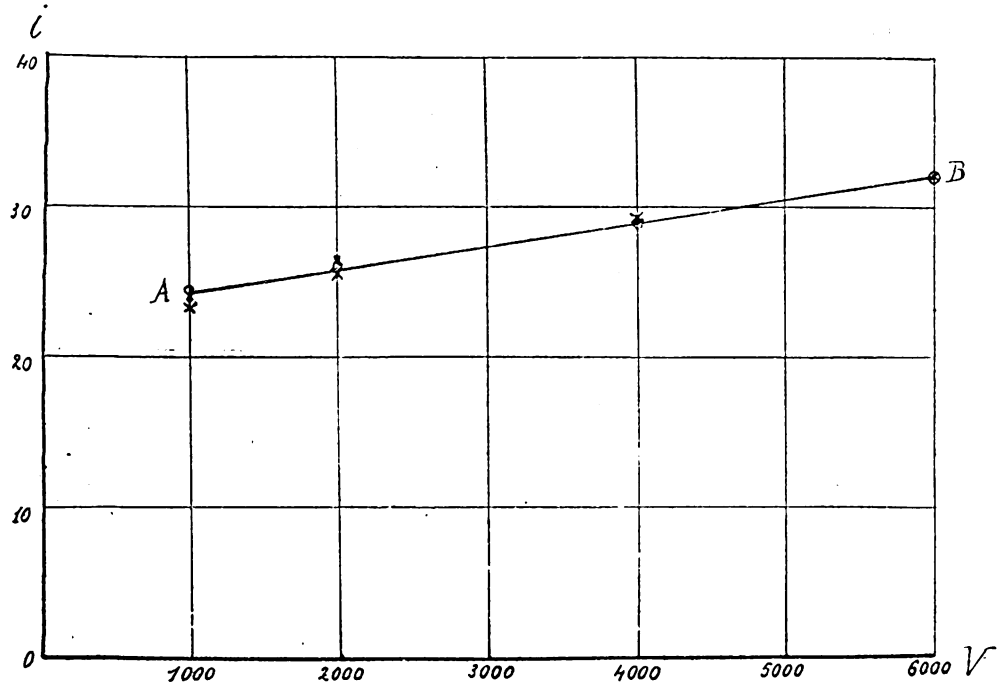


Fig. 5.

Mi riservo di discutere in una successiva Nota i risultati già ottenuti e quelli delle ricerche in corso specialmente in rapporto alle cause che ostacolano il raggiungimento della saturazione, nel senso ordinario, e alla variazione col potenziale anodico dell'emissione elettronica del filamento, variazione che secondo Schottky (1) proviene dall'induzione elettrostatica dell'elettrone sul filamento, cioè dalla forza di attrazione tra l'elettrone e la sua imagine elettrica dovuta al filamento.

(1) «Physikalische Zeitschrift», 15, 872, 1914.

Digitized by Google

Fisica. — *Sulla corrente elettrica filtrata attraverso ad una valvola termonionica saturata.* Nota del Corrisp. A. Lo Surdo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Bilancia termoionica.* Nota del Corrispondente A. Lo Surdo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla rappresentazione analitica in forma finita delle grandezze espresse da posizioni diverse in domini del piano e dello spazio assegnati ad arbitrio.* Nota di L. Laboccetta, presentata dal Corrisp. G. A. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla integrazione delle forme differenziali lineari.* Nota di S. Cherubino, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Ulteriori contributi alla teoria generale delle Matrici di Riemann.* Nota di N. Spampinato, presentata dal Corrisp. G. Scorza.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul teorema fondamentale della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica.* Nota di G. Albanese, presentata dal Socio F. Severi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Contact de deux courbes dans une* V_n. Nota di V. Hlavaty, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur le groupes d'holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions.* Nota di J. Dubourdieu, presentata dal Socio Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Geometria. — *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Sistemi assiali e connessioni nelle* V_m. Nota di E. BORTOLOTTI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Sull'elemento lineare di Liouville.* Nota di BLASCHKE, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sur quelques recherches de Helmholtz et de Wien relatives à la forme des ondes se propageant à la surface de séparation de deux liquides.* Nota di J. M. BURGERS (Delft), presentata[1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

En 1889 Helmholtz a développé pour le calcul des ondes à la surface de séparation de deux liquides différentes, des formules qui permettaient d'obtenir une approximation un peu plus élevée que celle donnée par la théorie primitive. Ses recherches ont été continuées plus tard par W. Wien, qui a donné plusieurs approximations différentes[2]. Dans les mémoires de Helmholtz et de Wien les raisonnements s'attachent pour la plus grande partie à des développements en série; il n'est pas toujours facile de voir comment ils sont parvenus à ces développements, et d'autre part on n'obtient pas une idée du degré d'approximation de leurs résultats.

Bien que l'intérêt de ces recherches ait diminué à la suite du développement des méthodes analytiques rigoureuses par MM. Levi-Civita, Struik, Weinstein et d'autres, je voudrais reprendre ici les considérations de Helmholtz, afin de les présenter sous une forme un peu plus claire, qui tout en n'élevant pas l'ordre d'approximation, laisse mieux apercevoir quelles en sont les principes, et ce qu'elles peuvent donner.

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1927.

(2) Comp.: H. VON HELMHOLTZ, *Ueber atmosphärische Bewegungen, II (Zur Theorie von Wind und Wellen)*, « Sitz. Ber. Preuss. Akad. », 1889, p. 761 (« Wissenschaftliche Abhandlungen », Bd. III, p. 309); W. WIEN, « Sitz. Ber. Preuss. Akad. », 1894, p. 509, et aussi: *Lehrbuch der Hydrodynamik* (Leipzig, 1900), p. 169.

Digitized by Google

Introduisons un système de coordonnées Oxy lié invariablement aux ondes, de façon que le mouvement des liquides soit stationnaire par rapport à ce système (fig. 1). Soit ABC le profil de l'onde, que nous supposons symétrique par rapport aux crêtes (et par là, aussi par rapport aux creux); la longueur de l'onde soit λ; posons pour abréger $n = \frac{2\pi}{\lambda}$. Désignons par U_1 la vitesse, dirigée dans le sens des x positifs, du liquide supérieur, et par U_2 la vitesse, dirigée dans le sens contraire, du liquide inférieur.

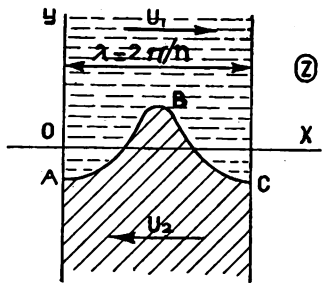


FIG. 1

Posons: $\zeta = x + iy$; soit $\chi_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ le potentiel complexe du mouvement du liquide supérieur, et $\chi_2 = \varphi_2 + i\psi_2$ la fonction analogue pour le liquide inférieur. La première de ces deux fonctions nous donne une représentation conforme de la partie située au-dessus du profil de l'onde ABC d'une bande de largeur λ du plan des ζ sur une demi-bande de

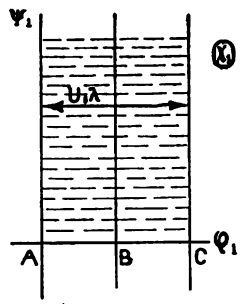


FIG. 2a

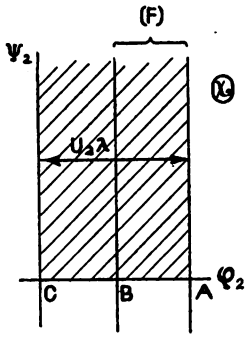


FIG. 2b

largeur $U_1\lambda$ du plan de la fonction χ_1; la seconde donne la représentation conforme de la partie inférieure de la même bande du plan des ζ sur une demi-bande de largeur $U_2\lambda$ du plan χ_2 (comp. fig. 2 *a*, 2 *b*; dans toutes les figures les domaines correspondants sont désignés par des hachures analogues). La détermination immédiate de ces deux correspondances présente des difficultés à cause de la forme inconnue du profil ABC. Les procédés de Helmholtz et de Wien consistent à substituer à la place du profil vrai une autre courbe, de telle forme qu'il soit possible de la faire correspondre à une ligne droite au moyen d'une fonction auxiliaire simple.

La fonction introduite par les auteurs cités au moyen de la formule:

$$\upsilon = \sigma + i\tau = e^{-in\zeta} = e^{ny - inx} \tag{1}$$

donne une transformation d'une bande du plan des ζ dans le domaine entier du plan de la variable υ; le profil de l'onde se transforme en une

Digitized by Google

courbe fermée (fig. 3). Pour $y = +\infty$, υ devient égal à ∞; pour $y = -\infty$, υ devient égal à zéro (le point F dans la figure).

Dans le cas d'ondes d'amplitude infiniment petite la courbe ABC dans le plan des υ devient un cercle. Pour aborder un cas plus général, Helmholtz a substitué une *ellipse* à la place de la courbe vraie; le degré d'approximation que l'on peut obtenir de cette façon dépend de deux paramètres: l'excentricité de l'ellipse et la position du centre (les dimensions de l'ellipse n'ont point d'importance, parce qu'une dilatation homographique par rapport au centre du plan des υ n'engendre qu'un déplacement du plan des ζ parallèle à l'axe des y).

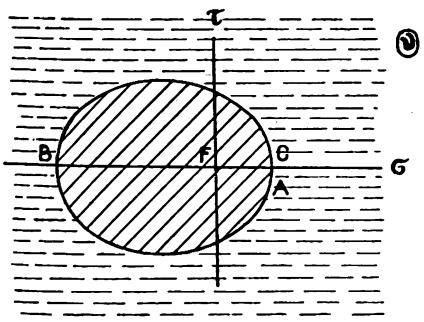


FIG. 3

Posons donc avec Helmholtz et Wien:

$$\upsilon = \cos\zeta - E \tag{2}$$

où: $\zeta = \xi + i\eta$, tandis que E est une constante réelle, que nous pouvons encore représenter par $\cos\varepsilon$. Alors l'équation:

$$\eta = \text{constante} = h$$

engendre une ellipse dans le plan des υ. Les coordonnées des points A et B déterminent la hauteur des ondes dans le plan des ζ; on trouve facilement:

$$y_B - y_A = \frac{\lambda}{2\pi} \lg \frac{\cosh h + \cos\varepsilon}{\cosh h - \cos\varepsilon}.$$

La formule (2) donne une représentation conforme du plan des υ, et dès lors d'une bande du plan des ζ, sur une demi-bande du plan des ζ (fig. 4). En nous rappelant les relations existant entre ζ et les fonctions χ_1, χ_2, nous constatons que la partie de la demi-bande dans le plan des ζ située au-dessus de la droite ABC correspond avec une demi-bande du plan des χ_1, tandis que la partie rectangulaire A′B′C′CBAA′ du plan des ζ correspond avec une demi-bande du plan des χ_2.

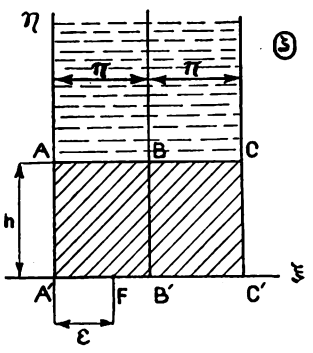


FIG. 4

On trouve facilement que la première de ces deux correspondances est donnée par la transformation homographique:

$$\chi_1 = \frac{U_1}{n}\zeta + \text{constante}. \tag{3}$$

Digitized by Google

La correspondance entre le domaine A′B′C′CBAA′ du plan des ζ et la demi-bande du plan des χ_2 se laisse formuler au moyen d'une variable auxiliaire t, en employant la méthode de Schwarz-Christoffel. Comme M. Levi-Civita a eu la bienveillance de m'indiquer, il est avantageux de ne considérer que la moitié de ces deux figures, en les divisant par une ligne droite verticale, passant par les points B et B′. Prenons la partie gauche A′B′BAA′ du domaine dans le plan des ζ, correspondant à la partie droite de la demi-bande dans le plan des χ_2; faisons correspondre ces deux parties à un demi-plan de la variable t (fig. 5), de telle façon

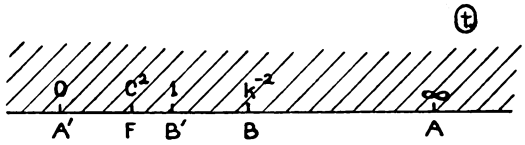


FIG. 5

que le point A′ corresponde à $t = 0$, B′ à $t = 1$, B à $t = k^{-2}$, A à $t = \infty$. En prenant k comme module d'une fonction elliptique, et en désignant par K et K′ les intégrales complètes de première espèce, le paramètre correspondant étant $q = e^{-k}$, on aura:

$$t = \mathrm{sn}^2\left(\frac{K\zeta}{\pi}\right). \tag{4}$$

D'autre part, si $t = c^2$ représente le point qui doit correspondre au point F ($\chi_2 = +\infty$) du plan des χ_2, on trouve:

$$\frac{d\chi_2}{dt} = \frac{\text{const.}}{(t - c^2)\sqrt{t - k^{-2}}},$$

d'où, en déterminant convenablement la constante multiplicative:

$$\cos\frac{\pi\chi_2}{U_2} = \frac{t + c^2 - 2k^{-2}}{t - c^2}. \tag{5}$$

La relation entre c^2 et $E = \cos\varepsilon$ est donnée par l'équation:

$$c = \mathrm{sn}\left(\frac{K\varepsilon}{\pi}\right).$$

Dans les figures on a supposé que $E < 1$; alors ε est réel.

Les relations entre la variable ζ et les potentiels χ_1, χ_2, qui sont données par des développements en série par Helmholtz et Wien, se trouvent maintenant exprimées sous forme finie.

Digitized by Google

L'équation qui exprime l'égalité des pressions des deux côtés de la ligne ABC peut être mise sous la forme:

$$(6) \qquad (\rho_2 - \rho_1)\, gy + \frac{1}{2}\rho_2 \left|\frac{d\chi_2}{dz}\right|^2 - \frac{1}{2}\rho_1 \left|\frac{d\chi_1}{dz}\right|^2 = \text{constante.}$$

Ecrivons, pour abréger les notations:

$$nx = X \;,\; ny = Y \;,\; nz = Z \;;\; P = \frac{n\rho_1 U_1^2}{2(\rho_2 - \rho_1)\, g} \;;\; Q = \frac{n\rho_2 U_2^2}{2(\rho_2 - \rho_1)\, g};$$

alors, en introduisant la variable ζ, l'équation (6) prend la forme:

$$(6\,a) \qquad Y + C = \left\{ P\left(\frac{n}{U_1}\frac{d\chi_1}{d\zeta}\right)^2 - Q\left(\frac{n}{U_2}\frac{d\chi_2}{d\zeta}\right)^2 \right\} \left|\frac{d\zeta}{dZ}\right|^2.$$

Les dérivées $\frac{d\chi_1}{d\zeta}$, $\frac{d\chi_2}{d\zeta}$ sont réelles sur la ligne ABC. On peut effectuer toutes les différentiations nécessaires, et après l'élimination de t on obtient:

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\lg\{(\cos\xi\cosh h - E)^2 + \sin^2\xi \sinh^2 h\} + C =$$

$$= \left\{ P - Q\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{(1 - c^2k^2)\left(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\frac{K\xi}{\pi}\right)}{\left(1 - c^2k^2 \operatorname{sn}^2\frac{K\xi}{\pi}\right)^2} \right\} \frac{(\cos\xi\cosh h - E)^2 + \sin^2\xi\sinh^2 h}{\sin^2\xi\cosh^2 h + \cos^2\xi\sinh^2 h}.$$

Dans l'équation (7) figurent cinq paramètres: k, c, P, Q, C. Il est évident qu'on ne peut pas satisfaire identiquement à cette équation, c.-à-d. dans tous les points de la ligne ABC; on peut demander seulement qu'elle soit satisfaite dans un nombre limité de points (cinq au plus). Afin de garder la possibilité de considérer des types différentes d'ondes, on peut encore diminuer ce nombre jusqu'à quatre; alors un des paramètres reste arbitraire. J'ai pris pour ces points ceux qui correspondent aux valeurs de ξ: 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π; pour une série de valeurs de k, ou ce qui revient au même, du paramètre q, j'ai effectué les calculs numériques, dont les résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Digitized by Google

q	$E = \cos \varepsilon$	P	Q	$\frac{Y_{max} - Y_{min}}{2\pi}$	Δ
0	0.828	0.0678	0.4322	0	—
0.207	0.816	0.0657	0.480	0.107	0.008
0.307	0.807	0.0613	0.547	0.156	0.021
0.403	0.800	0.0528	0.657	0.199	0.050
0.490	0.795	0.0418	0.831	0.235	0.088
(0.600)	(0.794)	—	—	(0.279)	—

La colonne marquée Δ donne la différence entre les valeurs des deux membres de l'équation (7) dans le point $\xi = \frac{\pi}{2}$, exprimée en parties de la valeur de $Y_{max} - Y_{min}$. Les profils des ondes correspondantes sont représentés dans la fig. 6, dans laquelle on a marqué les points où ξ prend une des valeurs: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$.

Dès que $\cos \varepsilon \cosh b$ devient plus petit que l'unité, ce qui a lieu pour q un peu plus grand que 0.49, le profil de l'onde, donné par les formules (1) et (2), présente un maximum secondaire dans les creux, accompagné d'un minimum de chaque côté (comp. la courbe la plus basse de la fig. 6, dans laquelle on a marqué aussi le minimum). Dans ce cas la méthode d'approximation ne semble plus utilisable.

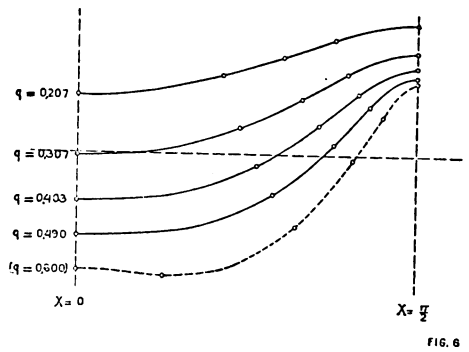


FIG. 6

Pour les petites valeurs de q on peut développer en séries les grandeurs qui figurent dans l'équation (7). Ces séries peuvent être arrangées suivant les cosinus des multiples de ξ. Si l'on ne conserve que les termes de l'ordre q^3, les séries s'arrêtent à $\cos 3\xi$, et on peut, comme cela est fait par Helmholtz, exiger que les coefficients de $\cos 0 \cdot \xi$, $\cos \xi$, $\cos 2\xi$, $\cos 3\xi$ soient égaux dans les deux membres de (7). De cette façon on obtient encore quatre équations entre les cinq paramètres, ce qui permet de les exprimer en fonction d'un seul d'entre eux. C'est de cette manière que les valeurs de E , P , Q pour $q = 0$ ont été trouvées. J'ai vérifié que les équations obtenues de cette façon sont les mêmes que celles données par Helmholtz dans son mémoire (sauf à un des coefficients qui figurent dans le développement de Y).

Digitized by Google

Fisica. — *Ricerche sulla termoelettricità accidentale del bismuto.* Nota di G. TODESCO, presentata dal Socio Q. MAJORANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche sui solfosali (II). Solfossipolimolibdati di ammonio e di guanidina.* Nota di L. FERNANDES e F. PALAZZO [1], presentata [2] dal Corrisp. L. ROLLA.

In una precedente Nota uno di noi ha accennato alla possibilità di ottenere complessi nei quali l'ossigeno è parzialmente o totalmente sostituito da solfo bivalente; nel presente lavoro noi abbiamo preso in considerazione gli isopoliacidi del molibdeno nei quali l'ossigeno è parzialmente sostituito.

Se alla soluzione di un solfomolibdato normale si aggiunge un acido, anche relativamente debole (acido acetico, formico, ecc.), si provoca la decomposizione del sale con sviluppo di H_2S e precipitazione del MoS_3.

I solfossisali invece, mentre che vengono decomposti dagli acidi minerali forti, si comportano in modo completamente diverso per azione di acidi deboli e in piccola concentrazione. Essi subiscono cioè una polimerizzazione simile a quella dei sali ossigenati.

Mediante la teoria di Copaux-Rosenheim i polimolibdati si possono considerare come derivati dell'ipotetico acido acquico $(H_2O_6)H_{10}$ e si può ritenere che i due atomi di idrogeno centrali coordinino 6 aggruppamenti MoO_4 o Mo_2O_7 a seconda che si tratti di para- o meta-sali.

Nel caso particolare dei para-sali si possono avere i trimolibdati, i paramolibdati e i dimolibdati a seconda che dei dieci atomi di idrogeno extracoordinati ne siano sostituiti con la base o quattro o cinque o sei.

Nei meta-sali non è possibile sostituire agli aggruppamenti Mo_2O_7 aggruppamenti contenenti solfo, nel caso dei para-sali si può invece ottenere dei composti contenenti gli aggruppamenti MoS_2O_2 e MoS_3O.

In particolare furono ottenuti i seguenti composti di ammonio e di guanidina.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.
(2) Nella seduta del 20 febbraio 1927.

Digitized by Google

$$\left[H_2(MoS_2O_2)_6\right]^{(NH_4)_4}_{H_6} \cdot 5\,H_2O \qquad \left[H_2(MoS_2O_2)_6\right]^{Gu_4}_{H_6} \cdot 8\,H_2O$$

$$\left[H_2{}^{(MoS_3O)_3}_{(MoS_2O_2)_3}\right]^{(NH_4)_5}_{H_5} \cdot 16\,H_2O \qquad \left[H_2(MoS_2O_2)_6\right]^{Gu_5}_{H_5} \cdot 9\,H_2O$$

$$\left[H_2(MoS_3O)_6\right]^{(NH_4)_5}_{H_5} \cdot 27\,H_2O \qquad \left[H_2{}^{(MoS_2O_2)_3}_{(MoS_3O)_3}\right]^{Gu_4}_{H_6} \cdot 10\,H_2O$$

$$\left[H_2{}^{(MoS_2O_2)_3}_{(MoS_3O)_3}\right]^{Gu_5}_{H_5} \cdot 9\,H_2O$$

$$\left[H_2{}^{(MoS_2O_2)_2}_{(MoS_3O)_4}\right]^{Gu_5}_{H_5} \cdot 7\,H_2O$$

I solfossitrimolibdati contenenti solo 4 atomi di idrogeno sostituiti si ottengono mediante l'aggiunta di quantità relativamente forti di acido, mentre che i solfossiparamolibdati (5 atomi di idrogeno sostituiti) si ottengono per debole acidificazione.

Nel caso dei sali di ammonio contenenti solo l'aggruppamento MoS_2O_2 non si riesce ad ottenere un sale con 5 idrogeni sostituiti perchè, anche per aggiunte di quantità debolissime di acido, si ottengono i trisali con quattro aggruppamenti NH_4 extracoordinati.

Abbiamo eseguito una serie di esperienze partendo da 10 grammi di $(NH_4)_2\ MoO_2S_2$ sciolti nella minor quantità possibile di acqua e aggiungendo quantità sempre decrescenti di acido acetico in soluzione normale (siamo partiti da 15 cmc. e siamo arrivati ad 1 cmc.) e in ogni caso per evaporazione si è sempre ottenuto lo stesso composto 1.

Tanto nel caso dei sali di ammonio che in quello di guanidina abbiamo eseguito una numerosa serie di preparazioni cominciando dal diossisolfosale puro e aggiungendo poi, nelle preparazioni successive, quantità crescenti del solfosale normale in maniera da ottenere soluzioni contenenti quantità sempre crescenti di solfo. Mentre nel caso dei sali di guanidina è impossibile ottenere composti molto solforati, nel caso dei sali di ammonio si può arrivare sino ai sali come il n. 3 il quale contiene solo 6 atomi di ossigeno che si può supporre siano quelli dell'originario acido acquico.

Nelle nostre condizioni sperimentali non è possibile ottenere composti più solforati.

Digitized by Google

PARTE SPERIMENTALE

Sali di ammonio.

(1) $$\left[H_2(MoS_2O_2)_6\right]^{(NH_4)_4}_{H_6} \cdot 5\,H_2O$$

10 grammi di $(NH_4)_2MoS_2O_2$ vennero sciolti a caldo in poca acqua distillata e questa soluzione fu addizionata di 15 cmc. di acido acetico normale. Si ottenne un intorbidamento prodotto dalla separazione di un sale giallo-arancio polverulento. Per raffreddamento si separò una quantità assai maggiore del prodotto, il quale venne spremuto, lavato con acqua calda, alcool ed etere.

Esso presenta una stabilità all'aria molto superiore a quella del sale di partenza. Lo si può conservare anche in ambiente aperto per molti mesi senza che esso subisca la minima alterazione.

L'analisi venne eseguita su tre campioni diversi. Un campione venne arroventato a moderato calore e trasformato in MoO_3, un altro venne trattato con ammoniaca ed acqua ossigenata per ossidare lo solfo a solfato di ammonio e poi venne precipitato in soluzione acida il solfato di bario. In un terzo campione venne dosata l'ammoniaca distillandola su acido solforico titolato.

Trovato °/o Mo 43.5 S 29.08 NH_4 5.14 H_2O 6.6

Calcolato °/o Mo 43.5 S 29.08 NH_4 5.14 H_2O 6.8

(2) $$\left[H_2\begin{matrix}(MoS_2O_2)_3\\(MoS_3O)_3\end{matrix}\right]^{(NH_4)_3}_{H_3} \cdot 16\,H_2O$$

Furono sciolte in acqua calda quantità eguali di solfo e solfossimolibdato di ammonio e alla soluzione venne aggiunto acido acetico in soluzione normale.

Per raffreddamento della soluzione fu ottenuto un prodotto marrone polverulento che venne trattato e analizzato come il precedente.

Trovato °/o Mo 36.2 S 29.6 NH_4 5.7 H_2O 17.9

Calcolato °/o Mo 36.3 S 30.2 NH_4 5.7 H_2O 18.2

(3) $$\left[H_2(MoS_3O)_6\right]^{(NH_4)_3}_{H_3}$$

Digitized by Google

Per aggiunta di acido acetico alla soluzione contenente quantità sempre crescenti di $(NH_4)_2\,MoS_4$ rispetto a $(NH_4)_2\,MoS_2O_2$ venne sempre ottenuto il sale precedente.

Quando si arrivò invece alla concentrazione di 9 grammi del primo e 1 grammo del secondo, per aggiunta dell'acido acetico si ottenne subito a caldo un prodotto rosso cupo, microcristallino, contenente una percentuale di solfo molto superiore. Anche per questo prodotto venne usato un trattamento come per i precedenti.

Trovato %	Mo	31.4	S	31.2	NH_4	4.3	H_2O 25.9
Calcolato %	Mo	31.4	S	31.4	NH_4	4.9	H_2O 26.5

Sali di guanidina.

Anche con la guanidina furono ottenuti composti con 4 o con 5 molecole di questa base. I prodotti dei due tipi si possono riconoscere dal loro aspetto esteriore.

I composti del primo tipo sono polverulenti e di un colore che va dal giallo al marrone, mentre che quelli del secondo sono cristallini e colorati in rosso. Rosso vivo quelli poveri di solfo e rosso cupo quelli più ricchi. Inoltre mentre i primi si formano solo per aggiunta di forte quantità di acido, i secondi si possono formare anche per spontanea decomposizione del sale normale di partenza il quale in soluzione perde parte della base e si trasforma nel sale acido.

(4) $$\left[H_2(MoS_2O_2)_6\right]^{Gu_4}_{H_6}\cdot 8\,H_2O$$

La soluzione diluita del sale di ammonio venne a caldo trattata con una soluzione di acetato di guanidina. Si formò subito un intorbidamento che andò man mano aumentando col raffreddarsi della soluzione.

Dopo poco tempo venne spremuto un prodotto giallo-arancio simile a quello di ammonio.

L'analisi venne condotta in modo simile. Per la guanidina venne dosato l'azoto col metodo gas-volumetrico.

Trovato %	Mo	37.1	S	23.5	N	10.6	H_2O 10.8
Calcolato %	Mo	37.4	S	23.9	N	10.9	H_2O 9.3

(5) $$\left[H_2(MoS_2O_2)_6\right]^{Gu_5}_{H_5}\cdot 9\,H_2O$$

Digitized by Google

Una soluzione relativamente diluita di solfossimolibdato di ammonio venne addizionata di acetato di guanidina e lasciata a sè qualche tempo. Dopo qualche giorno si separò un bellissimo prodotto cristallino color rosso fuoco che venne spremuto ed analizzato come i precedenti.

Trovato °/o Mo 34.5 S 24.2 N 13.6 H_2O 10.2
Calcolato °/o Mo 35.6 S 23.8 N 13.1 H_2O 10.04

(6) $$\left[H_2 \begin{matrix} (MoS_2O_2)_3 \\ (MoS_3O)_3 \end{matrix} \right] \begin{matrix} Gu_4 \\ H_6 \end{matrix} \cdot 10\, H_2O$$

Per aggiunta di acido acetico a soluzioni contenenti quantità via via crescenti di solfomolibdato normale venne ottenuto questo composto sotto forma di un prodotto marrone polverulento.

Trovato °/o Mo 34.4 S 30.1 N 10.9 H_2O 11.5
Calcolato °/o Mo 35.4 S 29.6 N 10.4 H_2O 11.1

(7) $$\left[H_2 \begin{matrix} (MoS_2O_2)_3 \\ (MoS_3O)_3 \end{matrix} \right] \begin{matrix} Gu_5 \\ H_5 \end{matrix} \cdot 9\, H_2O$$

Anche questo prodotto fu ripetutamente ottenuto da soluzioni le quali contenevano accanto al solfossisale quantità sempre crescenti di solfomolibdato normale.

In questo caso però venivano impiegate solo poche gocce di acido acetico e la soluzione contenente anche i sali di guanidina veniva lasciata lungo tempo a sè, e si otteneva allora la formazione del sale sotto forma di un bel prodotto rosso cristallino.

Trovato °/o Mo 34.8 S 28.7 N 12.8 H_2O 9.5
Calcolato °/o Mo 34.7 S 28.9 N 12.7 H_2O 9.8

(8) $$\left[H_2 \begin{matrix} (MoS_2O_2)_2 \\ (MoS_3O)_4 \end{matrix} \right] \begin{matrix} Gu_5 \\ H_5 \end{matrix} \cdot 7\, H_2O$$

Alla concentrazione di 9 grammi di $(NH_4)_2\, MoS_4$ e di 1 grammo di $(NH_4)_2\, MoS_2O_2$ venne ottenuto per aggiunta di acetato di guanidina e poche gocce di acido acetico un prodotto microcristallino, rosso cupo, di questa composizione.

Trovato °/o Mo 35.8 S 27.8 N 14.0 H_2O 8.1
Calcolato °/o Mo 35.8 S 27.8 N 13.1 H_2O 7.82

Composti di guanidina più solforati, non è stato possibile ottenerli nelle nostre condizioni sperimentali.

Digitized by Google

Chimica. — *Sulla fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio esposte all'azione dei raggi ultravioletti.* Nota di REMO DE FAZI [1] presentata [2] dal Socio N. PARRAVANO.

L'azione dei raggi ultravioletti durante la fermentazione alcoolica provocata dal *saccharomyces cerevisiae* su soluzioni di zuccheri fermentescibili è stata lungamente studiata da me e da mio fratello. E con numerose esperienze in parte pubblicate in cinque Note [3] abbiamo dimostrato come, in determinate condizioni, tale azione sia decisamente favorevole, e come sia anche possibile il selezionamento del comune lievito di birra [4].

I risultati da noi ottenuti furono controllati e completamente confermati prima a Berlino dal prof. Lindner [5] e poi a Parigi all'Istituto Pasteur dal prof. Fernbach [6].

Dopo le nostre ricerche si è anche tentato di spiegare questa particolare e favorevole azione, ma per ora si è ammesso che essa sia dovuta o ad un'azione catalitica, o al potere bactericida che hanno le radiazioni ultraviolette. Nella mia comunicazione *L'Energia raggiante nella Chimica Industriale* [7] ho creduto probabile che ciò fosse dovuto proprio alla differente resistenza dei *saccharomyces* in confronto a quella dei bacteri all'azione dei raggi ultravioletti.

Nessuno dei precedenti Autori aveva pensato di osservare il comportamento dei *saccharomyces cerevisiae* in una soluzione di glucosio esposta alle radiazioni ultraviolette. Lindner ha soltanto notato che una soluzione di glucosio non svolge anidride carbonica durante l'azione delle radiazioni ultraviolette [8].

Le mie ricerche attuali sono state eseguite per controllare l'andamento della fermentazione di soluzioni acquose di glucosio lasciate prima per un determinato tempo all'azione delle radiazioni emesse da una lampada in quarzo a vapori di mercurio, e poi facendo avvenire la fermentazione fin dall'inizio senza tale azione.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica App. della R. Scuola d'Ingegneria di Roma.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(3) R. e R. DE FAZI, « Ann. Chim. App. », vol. IV, 301 (1915); vol. VI, 221 (1916); vol. VIII, 93 (1917); « R. Acc. Lincei », 31 (II), 31 (1922), e « Atti del Congresso di Chimica Industr. », Milano, aprile 1924.

(4) R. e R. DE FAZI, « Atti Congresso di Chim. Ind. », Milano, aprile 1924.

(5) LINDNER, « Wochenschrift für Brauerei », 39, 116 (1922).

(6) FERNBACH, « Ann. de la Brasserie et de la Distillerie », XXII, 97 (1923).

(7) R. DE FAZI, « Elettrotecnica », vol. XI, novembre 1924.

(8) LINDNER, loc. cit.

Digitized by Google

In tutti gli esperimenti furono fatte contemporaneamente prove di controllo con soluzioni acquose di glucosio di eguali concentrazioni, ma non esposte a tali radiazioni, e con identici fermenti.

La velocità di fermentazione è stata sempre superiore, e qualche volta anche notevolmente, per la soluzione esposta all'azione dei raggi ultravioletti e così pure l'acidità determinata alla fine della fermentazione, e anche dopo qualche giorno, è stata sensibilmente inferiore all'altra.

Inoltre le osservazioni microscopiche hanno permesso di notare che il lievito di birra dopo la fermentazione contiene pochissimi bacilli, mentre quello proveniente dalle soluzioni di controllo ne ha quantità maggiori.

Le esperienze fino ad ora eseguite sono quattordici ed in tutte si sono avuti risultati concordanti, anche facendo avvenire la fermentazione a temperature varie ed esponendo soluzioni di glucosio all'azione delle radiazioni ultraviolette persino per una sola ora. Inoltre osservazioni polarimetriche hanno dimostrato che le soluzioni di glucosio rimangono inalterate dopo l'azione di tali radiazioni.

In questa Nota preliminare non posso dare una spiegazione dei risultati, ma mi sembra probabile che possano attribuirsi alla proprietà battericida che la soluzione viene ad acquistare dopo l'esposizione alle radiazioni ultraviolette.

Questa mia ipotesi potrà essere facilmente controllata facendo la soluzione di glucosio con dell'acqua esposta a tali radiazioni, ed è anche importante esperimentare con acqua radioattiva.

Mi propongo fra breve di riferire i risultati di queste esperienze che ho in corso e che certamente hanno un particolare interesse non soltanto teorico, ma anche pratico.

Per quanto nelle radiazioni emesse da una lampada in quarzo a vapori di mercurio non sia dimostrata l'esistenza di radiazioni capaci di essere trattenute dai liquidi, si può anche ammettere l'emissione di radiazioni trattenibili dalle soluzioni acquose di glucosio, per le quali queste acquistino proprietà bactericide; come non è da escludersi che le suddette radiazioni siano capaci di provocare trasformazioni chimiche.

Parte sperimentale.

Comunico, per ora, i risultati soltanto di tre delle quattordici esperienze eseguite.

1ª esperienza. – È stata preparata una soluzione al 10 % di glucosio puro con acqua distillata sterilizzata. Una parte di questa soluzione è stata posta in un pallone di quarzo, ben chiuso, ed esposta per sei ore alle radiazioni emesse da una lampada in quarzo a vapori di mercurio [1] situata a 10 cm. di distanza.

(1) Lampada in quarzo a vapori di mercurio: 1.500 candele; 110 V. - 4 A.

Digitized by Google

A 100 cc. di questa soluzione furono aggiunti, subito dopo l'esposizione, 2 gr. di lievito di birra delle Distillerie Italiane.

La velocità di fermentazione fu determinata con l'apparecchio già descritto nei precedenti studi [1] misurando la quantità di anidride carbonica svolta. In ogni esperienza si fece contemporaneamente la prova di confronto e di controllo con lo stesso lievito di birra, e con uguale soluzione di glucosio, ma non esposta alle radiazioni ultraviolette.

Il quadro riassuntivo seguente dà l'andamento della fermentazione nelle prime sei ore:

Temperatura	Tempo in ore	Soluzione di glucosio esposta alle radiazioni		Soluzione di glucosio di controllo	
		CO_2 in cc.	CO_2 in cc. totale	CO_2 in cc.	CO_2 in cc. totale
15°.8	0				
16°.1	2	145	145	44	44
18°.1	3	114	259	46	90
21°.4	4	110	369	58	148
21°.5	5	91	460	59	207
22°	6	82	542	60	267

La velocità di fermentazione nelle prime sei ore è stata dunque notevolmente superiore nella soluzione di glucosio esposta per sei ore alle radiazioni emesse dalla lampada a vapore di mercurio.

Inoltre fu notato che l'odore di questa soluzione, dopo la fermentazione, è migliore di quello della soluzione di controllo e che nel lievito di birra vi sono pochissimi bacteri in confronto all'altro che ne contiene una maggiore quantità. Infine anche l'acidità determinata nelle due soluzioni, dopo 24 ore dall'inizio della fermentazione è differente: nella prima gr. 0,0984 % (calcolata come acido acetico) ed in quella di controllo gr. 0,1020 %.

2ª *esperienza.* - La seconda esperienza si differenzia dalla prima per avere esposto la soluzione di glucosio al 10 % per sole tre ore alle radiazioni ultraviolette, e perchè furono fatti fermentare 200 cc. di tale soluzione con 4 gr. di lievito di birra alla temperatura di 27°,5.

(1) R. e R. de Fazi, « Ann. Chim. Appl. », vol. IV, 301 (1915).

Digitized by Google

Temperatura	Tempo in ore	Soluzione di glucosio esposta alle radiazioni		Soluzione di glucosio di controllo	
		CO_2 in cc.	CO_2 in cc. totale	CO_2 in cc.	CO_2 in cc. totale
27°.5	0				
27°.5	1	166	166	147	147
27°.5	1.30	132	298	124	271
27°.5	2	125	423	119	390
27°.5	2.30	117	540	113	503
27°.5	3	107	647	103	606
27°.5	3.30	93	740	89	695
27°.5	4	89	829	85	780
27°.5	4.30	86	915	83	863

In queste condizioni la velocità di fermentazione è nettamente superiore per la soluzione di glucosio esposta alle radiazioni emesse dalla lampada a vapori di mercurio, ma la differenza è inferiore in confronto a quella osservata nella prima esperienza. I risultati così ottenuti mettono in evidenza il comportamento della fermentazione delle due soluzioni a temperatura superiore ai 22°, dopo minor tempo di esposizione a tali radiazioni della prima soluzione.

Anche in questa esperienza è stato notato il migliore odore e la minore acidità della soluzione irradiata: acidità (calcolata come acido acetico) gr. 0,1008 % e nella soluzione di controllo gr. 0,1080 %. Come pure si è potuto constatare la minor quantità dei bacteri nel lievito della soluzione esposta.

3ª esperienza. - Una soluzione acquosa di glucosio al 7 % è stata lasciata all'azione delle radiazioni, impiegate nelle precedenti esperienze, per una sola ora.

Per l'esperimento si impiegarono 100 cc. di questa soluzione e gr. 2 di lievito di birra; la fermentazione si fece avvenire alla temperatura di 14°,2.

Digitized by Google

Temperatura	Tempo in ore	Soluzione di glucosio esposta alle radiazioni		Soluzione di glucosio di controllo	
		CO_2 in cc.	CO_2 in cc. totale	CO_2 in cc.	CO_2 in cc. totale
14°.2	0				
14°.2	3	147	147	128	128
14°.2	4	53	200	44	172
14°.2	5	54	254	45	217
14°.2	6	55	309	48	265

L'acidità fu determinata 48 ore dopo l'inizio della fermentazione: gr. 0,0672 °/₀; e gr. 0,0744 °/₀ (sempre calcolata come acido acetico) per la soluzione di controllo. Anche in questa esperienza è stata notata la minor quantità di bacteri nel lievito della soluzione di glucosio irradiata in confronto a quella di controllo.

Chimica. — *Relazioni fra nitroderivati aromatici e azossicomposti.* Nota di D. BIGIAVI, presentata dal Socio A. ANGELI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il sistema* $Al(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$ *a 25°.* Nota di G. MALQUORI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il sistema* $AlCl_3 - KCl - H_2O$ *a 25°.* Nota di G. MALQUORI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *I sistemi* $AlCl_3 - HCl - H_2O$; $KCl - HCl - H_2O$ *e* $KNO_3 - HNO_3 - H_2O$ *a 25°.* Nota di G. MALQUORI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Biologia. — *Nuove osservazioni sull'influenza del sistema nervoso in relazione a nutrizione con tiroide nella morfogenesi degli Anfibi Anuri.* Nota [1] di G. COTRONEI, presentata [2] dal Socio Corrisp. F. RAFFAELE.

In una Nota pubblicata nel 1925 [3] esposi i primi risultati ottenuti nello studiare con nuovo procedimento di esperienze combinate i problemi inerenti ai processi differenziativi e di metamorfosi degli Anfibi Anuri. Il metodo adoperato consisteva nell'asportare zone del neurasse, a tratti, dalla parte più cefalica a quella più caudale. Le esperienze danno riuscita sicura quando si opera su giovani embrioni, e quando si è raggiunto una notevole pratica sperimentale, si può operare sul neurasse senza ledere la corda dorsale. In quella Nota (p. 165) riferivo anche su quali parti del neurasse avevo maggiormente concentrato le mie operazioni; sull'encefalo nella parte precordale, asportazione di una parte del midollo spinale nella regione del tronco, asportazione del midollo spinale dell'abbozzo codale comprendendo molte volte zone più o meno estese del midollo spinale della parte posteriore del tronco. Le larve che si sviluppavano da embrioni operati venivano di regola nutrite per un primo tempo con tuorlo d'uovo, poi sottoposte a un trattamento con tiroide. Negli esemplari operati sull'encefalo riuscii ad ottenere dei ciclopi, segno questo della riuscita dell'operazione e dicevo: « Il metodo adoperato mi ha permesso di decidere una questione insoluta. Sono riuscito ad ottenere dei ciclopi nei quali si è sviluppata la bocca e questi ciclopi trattati con tiroide hanno mostrato di risentire la nota azione (per quanto mi riserbo di trattare in seguito, circa l'accelerazione, l'esame di confronto con esemplari normali nutriti con tiroide) e alcuni esemplari sono entrati in metamorfosi ».

Dopo aver riportato qualche particolare su processi correlativi degli operati sull'encefalo precordale dicevo: « Negli esemplari operati su tratti di midollo spinale in corrispondenza a circa metà del tronco si è ottenuto una maggiore mortalità quando si è tentato di protrarre il differenziamento larvale con trattamento con tiroide. Ho però ottenuto dei casi nei quali l'arto posteriore aveva raggiunto uno stadio avanzato di sviluppo e mi riservo di esaminare altri reperti già ottenuti con l'esperimento, ma non ancora valutati con l'analisi istologica.

(1) Dall'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(3) COTRONEI GIULIO, *Risultati di esperienze sugli Anfibi sull'influenza del sistema nervoso in relazione a nutrizione con tiroide.* « Bollettino Società dei Naturalisti in Napoli », vol. XXXVII, 1925.

Digitized by Google

Ho ottenuto, poi, che entrassero in metamorfosi, con l'azione della tiroide, esemplari nei quali era stato asportato il midollo spinale codale».

Da questi risultati che io riferivo schematicamente si vedeva che le operazioni praticate che inducevano più gravi conseguenze erano quelle sul midollo spinale del tronco, quando cioè si avevano delle larve con neurasse interrotto. Infatti mentre avevo ottenuto la metamorfosi in quell'operato sul cervello precordale e sulla parte posteriore del midollo riferivo soltanto, facendolo risaltare come un successo, di aver potuto ottenere con l'azione della tiroide uno stadio avanzato di sviluppo dell'arto posteriore in esemplari operati sul tronco, dove, come risulta dal brano riportato, si verificava un'azione sfavorevole sui processi differenziativi tanto che io mettevo in evidenza i risultati sfavorevoli ottenuti quando *tentavo di protrarre il differenziamento*, ossia di portare più oltre il differenziamento, ricorrendo alla nota azione della tiroide nei processi differenziativi.

Dopo la pubblicazione di quella Nota ho proseguito le mie esperienze e le mie osservazioni integrate con i relativi controlli istologici, e per la complessità delle esperienze impostate, il lettore può ben comprendere come queste ricerche non possano che procedere che assai lentamente.

Le nuove esperienze eseguite sempre sul *Bufo vulgaris* e sulla *Rana esculenta* durante il decorso anno (1926) mi danno una conferma e mi consentono una più ampia estensione dei risultati già annunziati nel 1925. Le ricerche da me impostate mirano essenzialmente a valutare l'azione delle glandole endocrine nello sviluppo in relazione all'influenza concomitante del sistema nervoso, ed ho scelto la nutrizione con tiroide per gli imponenti risultati che già si conoscono sull'influenza di questa sui processi differenziativi larvali e che quindi era da presumere consentissero una più agevole valutazione di rapporti tra tiroide e sistema nervoso. Con le mie esperienze si ha contemporaneamente un metodo, quando sia rotta l'integrità del sistema nervoso centrale, di valutare l'importanza di quest'ultima sui fenomeni inerenti ai processi di sviluppo e di metamorfosi.

Anche in queste nuove esperienze io ho ottenuto, che le operazioni sull'encefalo precordale sono quelle che recano minor danno, vi sono anzi dei casi in cui parrebbe che l'accrescimento larvale, con i processi differenziativi, e la metamorfosi vadano parallelamente a quegli esemplari normali di controllo sottoposti al medesimo trattamento, dapprima tuorlo d'uovo e poi nutrizione con tiroide. Ma anche nelle operazioni sull'encefalo si possono ottenere dei rallentamenti di accrescimento e malformazioni nello sviluppo degli arti posteriori, ma in questi casi io ritengo che ciò sia dovuto all'asportazione di una parte almeno del mesencefalo.

Nelle operazioni sul midollo spinale del tronco ho raggiunto nuovi risultati che sviluppano quelli che si delineavano nella prima comunicazione. Queste larve già si notano per la loro minore vivacità, stimolate reagiscono più lentamente, si stancano più facilmente e tentano ad appoggiarsi sul fondo.

Digitized by Google

Si nota un rallentamento nello sviluppo larvale e nei processi differenziativi, pigliando come punto di riferimento il differenziamento dell'arto posteriore; si riscontrano variazioni individuali, che sono da mettere forse inrapporto al livello in cui è stato asportato il tratto di midollo spinale. Insistendo di molto nelle mie esperienze sono finalmente riuscito, su di un largo materiale operato, ad ottenere che delle larve entrassero in metamorfosi, sotto l'azione della nutrizione con tiroide, in maniera tale che quei processi differenziativi (arto posteriore ad esempio) che si mostravano arretrati, sotto l'azione della tiroide hanno risentito un'influenza acceleratrice. Queste osservazioni mi permettono oggi di dire che anche nell'assenza dell'integrità, e quindi della continuità del neurasse, la nutrizione con tiroide lascia ancora scorgere la sua azione acceleratrice sui processi differenziativi anche nei casi in cui più sfavorevole si presenta, per altre condizioni fisiologiche, lo sviluppo larvale. Naturalmente questo non distrugge quanto risulta da tutto il complesso delle esperienze, che cioè la rottura dell'integrità del neurasse coll'asportazione di parte di esso nella regione del tronco, si esplichi sfavorevolmente nei processi di sviluppo larvale.

L'asportazione del midollo codale non manifesta un'influenza diretta sui processi di metamorfosi e, riferendomi all'atrofia della coda, io credo di poter dire che per i processi di istolisi l'innervazione dei muscoli codali è senza influenza quando siano in circolo delle sostanze che quei processi inducono.

In una valutazione sintetica dei risultati già conseguiti non si può prescindere, per analizzare l'influenza della tiroide, da tutte quelle complesse condizioni in cui sono state realizzate le esperienze. Bisogna ricordare che prima del trattamento con tiroide, io sottoponevo le larve a un trattamento con tuorlo d'uovo, e ciò non senza ragione perchè quando s'inizia il trattamento con tiroide già si palesano le influenze, o meno, dell'asportazione di determinate zone del neurasse; cosicchè nei confronti coi controlli, nella valutazione finale dopo il trattamento con tiroide, noi dobbiamo tener conto di questo fatto.

Nelle osservazioni avanti esposte mi sembra notevole aver potuto mettere in evidenza che coll'interruzione del midollo spinale la nutrizione con tiroide riesce, sia pure con maggiore difficoltà, a produrre la metamorfosi, anche quando l'asportazione di tratti del midollo spinale nella regione del tronco ha prodotto quello che io posso chiamare una discontinuità di vie nervose centrali. L'animale in confronto del sistema nervoso centrale si può considerare come costituito di due parti discontinue. Orbene in queste due parti gli organi in esse esistenti hanno mostrato di risentire l'influenza ormonale.

Questi risultati attraverso lunghi tentativi, in esperienze dove l'asportazione di parte del midollo spinale metteva in evidenza l'influenza del sistema nervoso centrale sull'accrescimento e sulla rapidità di sviluppo, mi

Digitized by Google

sembra ancora notevole in quanto lascia scorgere con un nuovo procedimento, la dissociazione tra processi di accrescimento e processi differenziativi per opera degli ormoni tiroidei, e lascia sospettare che l'influenza dovuta all'azione del sistema nervoso centrale, per lo meno nei confronti degli ormoni tiroidei messi in circolo, può ridursi a questioni di tempo di azione, ma non di più.

Ho raccolto molti dati sull'accrescimento nelle condizioni avanti notate e questi dati mi propongo di elaborare e se mi sono deciso alla pubblicazione della presente è perchè è comparsa in questi giorni una Nota di Aron (1) sull'influenza del sistema nervoso nello sviluppo. L'impostazione delle ricerche di Aron si impernia su operazioni praticate su embrioni di Anuri nei vari tratti del neurasse. L'Aron si serve di interruzioni del neurasse e ne valuta l'influenza sulla rapidità di sviluppo, venendo alla conclusione che il cervello anteriore non ha nessuna influenza, mentre ammette l'influenza di zone di crescenza localizzate nella *Rana esculenta* nell'estremità anteriore del midollo spinale, per la *Rana temporaria* all'estremità posteriore del cervello. A me non sembra che si possa localizzare l'influenza del sistema nervoso centrale in punti soltanto così circoscritti e credo, piuttosto, che zone più estese del neurasse, in rapporto col sistema nervoso viscerale, influenzino i processi di accrescimento. Anche nelle mie esperienze con interruzione del neurasse (midollo spinale) si verificano nell'accrescimento sproporzioni di sviluppo delle varie parti; ma mi riservo di decidere, caso per caso, l'andamento di queste rispetto al livello dell'operazione.

Prima di terminare questa Nota voglio anche riferire che nelle operazioni avanti accennate, praticate sul cervello precordale, si riesce ad ottenere la fusione degli abbozzi oculari che risultano avvicinati per l'asportazione del territorio interposto. Questi risultati che sono di passaggio graduale alla ciclopia, sono favorevoli a quanto ho ritenuto con precedenti ricerche che la ciclopia è dovuta alla fusione sulla linea mediana dei due territori oculari laterali in seguito a processi di inibizione del territorio interposto.

(1) ARON M., *Rôle du système nerveux dans la croissance des larves d'Anoures. Existence d'un centre de croissances*, «C.-R. Soc. d. Biologie», tome XCVI, 1927, n. 4, p. 271.

In una Nota precedente, ma sempre posteriore alla mia prima Nota, ARON ha riferito su fatti inerenti all'armonia di crescenza, in seguito a sezione degli organi assiali. «C. R. Acc. d. Sc.», 26 luglio 1926.

Digitized by Google

Embriologia sperimentale. — *Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi. - I. Segmentazione atipica e successivo sviluppo delle ova di Arbacia punctulata Grey centrifugate, dopo la fecondazione*[1]. Nota di P. PASQUINI presentata [2] dal Corrispondente F. RAFFAELE.

Con l'idea di studiare il comportamento delle ova di ricci di mare sottoposte alla forza centrifuga, ho trattato con questo metodo le ova subito dopo avvenuta la fecondazione e in successivi stadi tra la formazione della membrana di fecondazione e la comparsa del primo solco di segmentazione.

È noto per i lavori di Lyon [3], di Morgan e Spooner [4], che quando le ova non fecondate di Arbacia vengono sottoposte a rapida centrifugazione, si determina in esse una separazione e consecutiva sedimentazione dei materiali visibili nell'ovo che si stratificano, secondo il loro peso specifico, parallelamente gli uni agli altri e in direzione normale a un nuovo asse (asse secondario), determinatosi nell'ovo, che palesa la direzione secondo cui la forza turbatrice ha agito. Se queste ova vengono poi fecondate la segmentazione procede normalmente e lo sviluppo, fatta astrazione dalla particolare localizzazione dei granuli di pigmento nelle blastule e nelle gastrule che ne derivano, dà origine a plutei simili ai normali.

Si è tratto da ciò la conseguenza che le sostanze visibili nell'ovo di *Arbacia* di cui si è artificialmente mutata la topografia, non rappresentano sostanze organo formative del germe, nè hanno il valore di indici delle medesime.

Studiando il comportamento delle ova di Arbacia centrifugate dopo la fecondazione, anzichè prima, a intervalli di tempo successivi prima della comparsa del primo solco di segmentazione, ho potuto stabilire in rapporto ai cambiamenti di viscosità subìti dal plasma dell'ovo durante lo sviluppo, messi recentemente in rilievo, e con lo stesso metodo, da Heilbrunn [5], che il processo di segmentazione si presenta alquanto modificato e i prodotti che si ottengono, si scostano, in determinati casi, dal tipo normale.

(1) Le esperienze che riguardano queste ricerche furono eseguite durante la stagione estiva (luglio, agosto, settembre), al Marine Biological Laboratory in Woods-Hole, Mass. negli Stati Uniti d'America.

Porgo vive parole di ringraziamento al Prof. Frank Lillie che mi diresse durante il lavoro sperimentale.

(2) Nella seduta del 20 febbraio 1927.

(3) « Americ. Journ. Phys. », vol. XV, 1906, e « Arch. f. Entwicklungsmechanik », XXIII, 1907.

(4) « Arch. f. Entwicklungsmechanik », XXVIII, 1909.

(5) « Jour. Exp. Zool. », 34, 1921; « Jour. Exp. Zool. », vol. 41, 1926.

Digitized by Google

Gurwitsch [1] e Lyon [2] avevano prima sottoposto alla forza centrifuga le ova di *Arbacia* prima della fecondazione ed il Lyon particolarmente aveva usato negli esperimenti una considerevole velocità di rotazione pari a 10.000 giri per minuto primo, sì che sembrerebbe quasi impossibile che qualsiasi protoplasma vivente possa resistere a tale sconvolgimento.

Nelle esperienze da me condotte su ova di Arbacia punctulata Grey, la forza centrifuga realizzata è presso che pari al grado di quella usata da Lyon, ma gli effetti prodotti, in quanto si è agito su ova fecondate, sono alquanto diversi.

Lyon (lav. cit.) nell'ovo centrifugato prima della fecondazione, distingue 4 regioni distribuite parallelamente le une alle altre e normali all'asse di centrifugazione. Questo nuovo asse che abbiamo chiamato asse secondario, indipendentemente dall'asse di polarità dell'ovo passante per il micropilo, determina il piano direttivo della segmentazione. Dal polo centrifugo dell'ovo al polo centripeto, le regioni distinte dal Lyon e dal Morgan e dallo Spooner pienamente confermate, sono la zona dei granuli rossi di pigmento, la zona dei granuli di tuorlo, quella ialina plasmatica in cui trova sede il nucleo e infine una zona più ristretta grigio bruna costituita dalle sostanze più leggere, dagli AA. americani definita come *oil cup*, e che noi chiameremo calotta oleosa.

Il primo colpo di segmentazione, secondo il Lyon, è nel 90 % delle ova centrifugate, normale agli strati delle sostanze visibili; il secondo è quasi sempre equatoriale e determina la formazione di 4 blastomeri di cui quelli dell'emisfero pigmentato sono più grandi di quelli dell'emisfero non pigmentato; il terzo solco è di nuovo perpendicolare al piano di stratificazione delle sostanze e, con il 4°, si ha la formazione dei micromeri che, pur separandosi da cellule ricche di pigmento, sono incolori.

I micromeri, secondo il Morgan, si formerebbero nelle ova centrifugate, sempre dal lato opposto al micropilo. Il risultato di queste esperienze è la formazione di plutei normali che presentano come sola anomalia il pigmento spostato in differenti regioni.

Morgan del resto [3], in altre esperienze condotte su materiale diverso, il lamellibranco *Cumingia*, arriva alle stesse conclusioni ed anche in questo caso deduce che le sostanze visibili nell'ovo, che vengono separate e spostate dalla forza centrifuga, non hanno il valore di sostanze organo formative.

Nell'esporre i risultati delle mie esperienze è necessario premettere che le ova vennero centrifugate sempre per lo stesso periodo di tempo pari a un minuto primo e con una velocità costante [4].

(1) « Anat. Anz. », vol XXXVII, 1905.

(2) In collaborazione con Norgan, « Arch. f. Entwicklungsmech. », XXIV, 1907.

(3) « Jour. Exp. Zool. », vol. IX, 1910.

(4) La centrifuga adoperata fu la Bausch Lomb a mano con due velocità. La moltiplica corrispondente alla velocità maggiore, quella sempre usata negli esperimenti, trasforma

Digitized by Google

Prima della fecondazione le ova centrifugate assumono in meno che in un minuto quella colorazione descritta da Lyon e che è dovuta alla completa separazione dei materiali. I granuli di pigmento si spostano tutti al polo centrifugo dell'ovo, mentre la calotta oelosa bruna appare ben distinta al polo opposto; essa si distacca poi lievemente dalla parete della membrana vitellina portandosi con il nucleo superiormente alla zona chiara plasmatica. Mentre la zona rossa di pigmento rimane così localizzata definitivamente e tale si mantiene nelle blastule e nelle gastrule, la regione contenente i granuli di tuorlo, giallognola per trasparenza, si estende gradatamente riprendendo quasi, circa mezz'ora dopo l'azione centrifuga, la posizione primitiva tuttavia rimanendo sempre più densa nell'emisfero centrifugo dell'ovo.

Centrifugando le ova dopo la fecondazione, la separazione dei materiali nelle quattro tipiche zone é meno evidente: ciò è facilmente dimostrabile comparando il valore della forza centrifuga e il tempo sufficienti ad operare questa trasformazione nelle ova vergini, con la forza ed il tempo necessari per ottenere la stessa sedimentazione nelle ova fecondate. L'aumento di viscosità che subisce il plasma durante la fase di preparazione del primo fuso di segmentazione, si oppone allo spostameuto dei granuli rossi di pigmento, portatisi specialmente nel plasma corticale, spostamento che invece riesce ancora facile centrifugando le ova subito appena comparsa la membrana di fecondazione, qualche secondo dopo la penetrazione dello spermio.

La differenza più spiccata tra i due tipi di ova sta dunque nella stratificazione dei materiali: si comportano egualmente la calotta oleosa che al polo centripeto dell'ovo è chiaramente separata dalla zona ialoplasmatica come una vera scodellina, e la regione dei granuli del tuorlo. Quest'ultima che nelle ova centrifugate non fecondate si estende nuovamente a riprendere la primitiva posizione, nelle ova fecondate e poi centrifugate tarda a spostarsi e a riprendere, se pure in minima parte, la regione abbandonata. Il pigmento rosso è spostato solo in parte al polo centrifugo e i numerosi granuli che si sono portati dopo la fecondazione nel plasma corticale, non vengono che parzialmente rimossi al polo centrifugo dove tuttavia il pigmento appare più denso che nelle altre regioni.

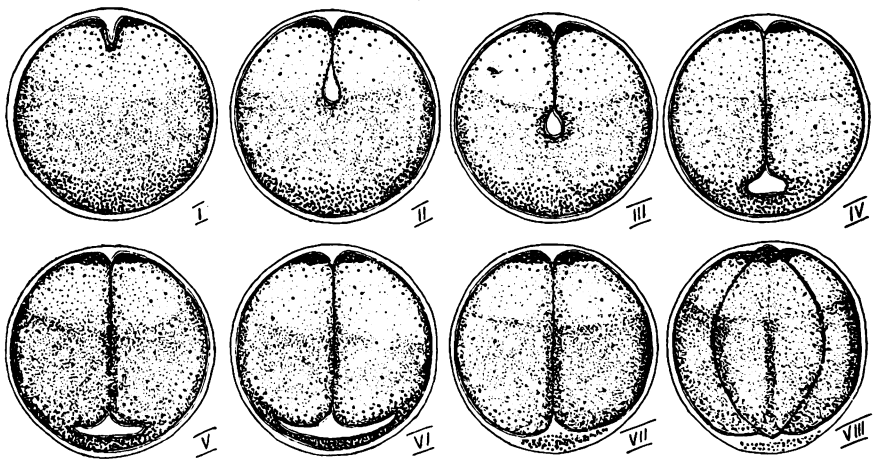
Anche a centrifugazione prolungata per un periodo più lungo, le ova fecondate non presentano mai esclusiva localizzazione del pigmento in una

un giro di manopola in 15 giri dei tubi, così che, con questa rapidità di rotazione, si rese necessario l'uso di piccoli tubi di vetro di diametro non superiore a 2 mm. Tenendo presente che la forza centrifuga è espressa dal'a relazione $m = \frac{mv^2}{r}$ dove m è la massa, nel caso delle ova non conosciuta ma presumibilmente costante, sostituendo nella relazione alle lettere i relativi valori cioè 7,5 cm. il raggio della centrifuga, per n (numero di giri per secondo) eguale a 138, riesce facile calcolare precisamente il valore della forza che ha agito sulle ova, nelle mie esperienze.

Digitized by Google

sola regione. Il nucleo in questo caso si riscontra portato in posizione centrale sull'asse secondario, fra la zona ialina e quella del tuorlo.

Le ova al termine della centrifugazione si possono presentare sotto differenti aspetti: la maggioranza, a eccezione della stratificazione più o meno evidente dei materiali, hanno la membrana di fecondazione integra e forma presso che normale, sebbene alcune volte lievemente allungata secondo l'asse di centrifugazione; caso meno frequente è quello in cui la membrana di fecondazione si presenta rotta in un punto: in tal caso il plasma dell'ovo non costretto che dalla sola esile membrana vitellina, esce fuori dando all'ovo una caratteristica forma ellittica quasi tubulare quando l'allungamento, avvenuto secondo l'asse secondario, è spinto fino al massimo grado. Le ova allungate possono però anche, nel 50 % dei casi, presentare la membrana di fecondazione assolutamente integra.



Da I a VIII, stadi schematici successivi della formazione del 1° solco, con espulsione di granuli di pigmento e formazione del 2° solco nelle ova di Arbacia centrifugate dopo la fecondazione.

Nelle ova del primo tipo il primo solco è, quasi regolarmente, meridiano e normale alle sostanze stratificate che ne vengono divise per metà; il secondo solco può essere egualmente meridiano a 90° dal 1°, ma più frequentemente nella direzione degli strati; esso cioè divide i primi due blastomeri inegualmente per un piano che è approssimativamente equatoriale talchè vengono a formarsi due blastomeri meno ricchi di pigmento e dove i granuli di tuorlo sono meno abbondanti e due blastomeri, nell'emisfero centrifugo dell'ovo, più grandi e infarciti di tuorlo e di pigmento. Fenomeno singolarissimo che si osserva di norma a termine del primo solco è la espulsione in corrispondenza del polo centrifugo di una certa quantità di granuli di pigmento che si raccolgono fra la membrana vitellina e la membrana di fecondazione (vedi fig.).

Digitized by Google

Il terzo solco è meridionale e con il quarto latitudinale si formano i micromeri. Nelle successive divisioni la velocità di segmentazione è diversa nei due emisferi dell'ovo sì che i blastomeri dell'emisfero centrifugo rimangono sempre più grandi di quelli dell'emisfero centripeto che si segmentano più attivamente. La maggiore concentrazione di tuorlo e di granuli di pigmento determina nell'ovo una tendenza alla segmentazione disuguale, caratteristica delle ova polarizzate ed infatti si può dire che nelle ova centrifugate la sedimentazione del tuorlo e del pigmento abbia determinato la formazione di un polo animale e di un polo vegetativo. Ma dove questa tendenza appare anche più evidente è nelle ova che hanno subìto un forte allungamento e nelle quali il succedersi dei solchi di segmentazione produce blastomeri piccoli, privi di tuorlo e poveri di pigmento nell'emisfero centripeto, e blastomeri grandi infarciti di tuorlo e carichi di pigmento nell'emisfero centrifugo. Avviene cioè presso a poco lo stesso di quel che succede, secondo quanto è stato rilevato da Hertwig [1], nella segmentazione delle ova di rana, centrifugate, dove il tuorlo è stato spostato verso il polo vegetativo dell'ovo indotto quindi a una segmentazione meroblastica. Nelle ova di Echino e di *Arbacia pustulosa* il Sanzo [2] ottenne, con la centrifugazione, la trasformazione di ova isolecitiche in ova telolecitiche e quindi una segmentazione disuguale; trasformazione che nelle mie esperienze non si rende così netta.

Il fatto veramente singolare dimostrato dalle mie ricerche, è che, sia le ova allungate che presentano questa atipica segmentazione, sia quelle nelle quali il primo solco è eccezionalmente equatoriale e dove il blastomero contenente in maggiore quantità il tuorlo ed il pigmento abortisce per citolisi, danno sempre origini a plutei presso che normali.

Le ova centrifugate subito dopo la fecondazione non si sviluppano mai in plutei normali nè in forme post-gastrulari riconducibili a plutei; regolarmente le blastule allungate, formatesi dalle ova con membrana di fecondazione rotta, si frammentano da sè per costrizione del corpo in due porzioni che, se di eguali dimensioni, possono ugualmente gastrulare. Se la costrizione del corpo della blastula non è accentuata, la frammentazione non ha luogo, ma anzichè prodursi l'invaginazione che origina l'archenteron, tale regione si estroflette producendo una exogastrula simile in tutti i caratteri alle exogastrule di Herbst [3] ottenute da questo A. con soluz. di sali di litio, e dal Driesch esponendo le blastule alla temp. di 30° - 31°.

La costrizione e consecutiva frammentazione delle blastule può essere doppia con la formazione, dal corpo centrale del germe, di una gastrula che procede il suo sviluppo e di due porzioni più piccole che rimangono per un certo tempo, ciliate, vaganti nella coltura, andando in seguito a male.

(1) « Arch. Mikr. Anat. Entw. », Bd. 53, 1899.
(2) « Ric. Lab. Anat. norm. R. Univ. Roma », vol. 10, fasc. 3, 1904.
(3) « Zeitsch. f. Wiss. Zool. », vol. 55, 1893.

Digitized by Google

Invece le ova centrifugate da 10 minuti dopo la fecondazione in poi, si segmentano più regolarmente, tuttavia presentando numerosi casi di segmentazione disordinata. Tutte le blastule però subiscono la gastrulazione e per quanto il pigmento presenti delle variazioni nella disposizione rispetto alle normali dei controlli, pure si ha formazione di plutei. Ne risulta una percentuale di forme con asimmetria spiccata, braccia post-orali di differente lunghezza, incompleto sviluppo dello scheletro, formazione difettosa o assenza totale di una delle due braccia o altre differenti anomalie; tuttavia queste forme sono indubbiamente riconoscibili come plutei.

La percentuale delle anomalie diminuisce sempre più nei lotti di ova centrifugate in periodi più lontani dalla fecondazione e diventa nulla se si centrifugano le ova pochi minuti prima del primo solco di segmentazione. In questo caso si hanno quasi esclusivamente plutei normali con una percentuale di anomalie non superiore a quella che si riscontra nei controlli.

Per concludere:

Le ova di *Arbacia* fecondate e poi centrifugate manifestano una tendenza alla segmentazione disuguale.

L'arresto di segmentazione, dopo il primo solco, in un blastomero che è impossibilitato a dividersi ulteriormente, per la concentrazione massima del tuorlo e del pigmento, è concomitante allo sviluppo regolare dell'altro blastomero ialino con rari granuli di pigmento, che continua a segmentarsi per dare un pluteo normale. Ciò mostra la totipotenza di questo blastomero, che pur non contenendo che la metà delle sostanze visibili che furono separate dalla centrifugazione, possiede cumulate in sè stesso quelle energie formative comprensive che traducono in atto l'idea della forma posseduta dal solo plasma. È interessante notare che per altre vie sperimentali il Loeb [1], l'Herbst [2], Driesch [3] e altri ancora e recentemente la Gianferrari [4] giunsero alle stesse conclusioni. Che nel nostro caso sono estensibili ai frammenti di blastula capaci anche essi di progredire nello sviluppo manifestandosi totipotenti e che ci dicono che il processo di segmentazione non è un processo di separazione di sostanze organo formative diffuse nel plasma, ma il plasma stesso delle blastule è unità totipotenziale.

Nella autoframmentazione delle blastule da ova centrifugate dopo la fecondazione si determina, conseguentemente per azione diversa, lo sviluppo dei loro frammenti ciò che il Morgan [5] prima, per scotimento dei germi, il Driesch [6] poi, per tagliuzzamento diretto delle blastule, misero in evidenza.

(1) « Arch. f. Entw. Mech. », Bd. 27, 1909.
(2) « Arch. f. Entw. Mech. », Bd. 2, 1896.
(3) « Arch. f. Entw. Mech. », Bd. 10, 1900.
(4) « Boll. Soc. Biol. Sperim. » Vol. I, num. 3, 1926.
(5) « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. 2, 1895.
(6) « Arch. f. Entwicklungsmech. », Bd. 2, 1895.

Digitized by Google

La formazione delle exogastrule nel mio caso, dimostra non essere specifica l'azione degli stimoli sul germe per determinare le stesse anomalie; stimoli molto diversi possono dare durante lo sviluppo delle ova gli stessi risultati, nel nostro caso la mancata introflessione gastrulare. Ciò è anche applicabile ai processi di embriogenesi più generali, quali ad es. la chiusura del blastoporo e il riassorbimento del tappo vitellino nelle gastrule degli Anfibi: ricordo a questo proposito la formazione di embrioni di Rana con tappo vitellino non riassorbito e tuttavia completi, ottenuti dal Morgan [1] e dallo Jenkinson [2] e recentemente da me [3] con la centrifugazione. Anche l'Hertwig, del resto, ponendo le ova di *R. fusca* e *R. esculenta* a sviluppare in soluzioni (0,6 °/₀-0,8°/₀) di NaCl ottenne gli stessi risultati.

Comparando infine il comportamento delle ova centrifugate prima della fecondazione, basandoci sui reperti di Lyon confermati da Morgan e riottenuti nelle mie esperienze, con quello delle ova centrifugate dopo la fecondazione, si osserva che i risultati sono differenti e, a seconda che si sottoposero le ova all'azione disturbatrice subito dopo la penetrazione dello spermio o a intervalli di tempo successivi che precedono la formazione del primo solco, lo sviluppo dà risultati diversi, nel primo caso non sviluppandosi mai plutei. Ciò ci induce a ritenere che la resistenza dell'ovo alla forza centrifuga è assai mutata subito dopo la fecondazione e in un certo senso il plasma in queste condizioni diviene più sensibile, forse per lo spostamento di quei materiali che sfuggono alla nostra indagine e che sono destinati a formare quelle determinate parti nel futuro embrione.

(1) « Biol. Bull. », vol. XII, 1906.
(2) « Quart. Journ. micr. Sc. N. S. », vol. LX, 1914.
(3) « Rend. R. Acc. Lincei, classe Sc. Fis. Mat. Nat. », vol. III, ser. 6ª, fasc. 10, 1926.

Digitized by Google

Biologia. — *Ricerche sull' ingrandimento dell'occhio dell'anguilla in rapporto alla maturità sessuale e considerazioni sul suo significato biologico* [2]. Nota preliminare di U. D'ANCONA, presentata [1] dal Socio Corrisp. F. RAFFAELE.

L'occhio dei Teleostei è caratterizzato da una grande varietà di forme e di strutture, che varie volte si cercò di mettere in rapporto con diversi fattori biologici [3]. Fra tutti i Teleostei poi, nell'anguilla ci troviamo di fronte a condizioni particolarmente interessanti, in quanto che l'occhio, quando è già da lungo tempo completamente sviluppato, all'inizio della maturità sessuale subisce un notevole ingrandimento.

Il diametro dell'occhio di una anguilla in abito di nozze può superare il doppio di quello di una anguilla immatura di uguale grandezza. Se dunque i diametri degli occhi stanno come 1 a 2, le superfici delle retine staranno come 1 a 4 e i volumi del bulbo oculare come 1 a 9. Si può facilmente comprendere quali modificazioni strutturali e funzionali debbano accompagnare un così notevole ingrandimento di un organo talmente differenziato e così squisitamente delicato come è l'occhio.

Lo studio dettagliato di questo problema attrasse da parecchio tempo la mia attenzione e intrapresi perciò un accurato esame istologico riservandomi in seguito di completare queste ricerche con le opportune indagini del comportamento funzionale dell'occhio in rapporto con le avvenute modificazioni. Distolto da altre ricerche, non mi è stato finora possibile ultimare questo lavoro, che richiede lunga raccolta ed elaborazione di osservazioni. Ritengo però conveniente esporre in questa nota preliminare il programma di lavoro e i primi risultati delle mie ricerche.

Mi sono servito di anguille gialle e argentine, con occhi sufficientemente ingrossati, provenienti dal Tevere. Quale tecnica ho usato le comuni colorazioni e i metodi di impregnazione argentica, rivolgendo per ora la mia attenzione in modo particolare alla retina, che è la parte dell'occhio che in questo caso offre il maggior interesse.

Da un primo esame sommario dei miei preparati trovo che negli occhi ingrossati:

1. I vari strati retinici sono distintamente assottigliati. Tale fatto è invece meno accentuato nello strato dei bastoncelli.

(1) Dall'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(3) WUNDER W., *Physiologische und vergleichendanatomische Untersuchungen an der Knochenfischnetzhaut.* « Zeitschr. vergl. Phys. », Bd. III, p. 1, 1926.

Digitized by Google

2. I singoli elementi retinici sono diradati, le grandezze cellulari sono in genere presso a poco eguali; un ingrandimento si osserva nei coni e nelle bipolari.

3. Le cellule del *tapetum nigrum* hanno la stessa grandezza come negli occhi piccoli.

4. Sia i capillari della retina, che le lacune sanguigne della coroide sono fortemente dilatati e ripieni di sangue.

Quest'ultimo è il fatto, fra quelli rilevati, che per ora mi sembra di maggior interesse.

La ricca vascolarizzazione della retina dell'anguilla, comune, tra i Teleostei, a quanto si sa solo al *Conger*, è dunque come era stato supposto, in rapporto con l'ingrossamento dell'occhio. Per l'ingrossamento stesso è necessaria una ricca alimentazione che viene arrecata dalla vascolarizzazione della retina, fornita da ramificazioni dell'arteria ialoidea. Questa condizione, in confronto a quanto si osserva negli altri Teleostei, può essere considerata come la conservazione di una condizione embrionale. Ramificazioni dell'arteria ialoidea si hanno infatti in periodi embrionali nell'interno dell'occhio, anche in altri Teleostei [1].

L'occhio dell'anguilla può dunque fino a un certo punto essere paragonato a un occhio embrionale che abbia assunto condizioni funzionali durature, occhio embrionale che passa allo stato definitivo soltanto dopo l'acquisizione dell'abito di nozze.

Un bel caso parallelo l'abbiamo nell'occhio dei Petromizonti che raggiunge lo sviluppo completo durante la trasformazione da *Ammocoetes* a *Petromyzon* adulto (Studnička). Anche qui Kohl ha rinvenuto vasi nel percorso intraretinico del nervo ottico.

Mi pare dunque giustificato il ritenere la vascolarizzazione della retina dell'anguilla un caso di conservazione duratura, con modificazioni in rapporto a stati funzionali, di condizioni che in altre forme si verificano in periodi embrionali.

Casi simili si osservano nelle forme larvali, in cui appunto stadi embrionali, altrove transitori, si conservano più a lungo assumendo condizioni funzionali. Un bel esempio del genere è stato da me illustrato per lo sclerotomo delle larve dei Murenoidi stessi [2], sclerotomo che nei Vertebrati in genere è una fugace formazione embrionale, nei Leptofaceli invece, in rapporto alla lunga vita larvale, assume, complicandosi, una importante funzione meccanica.

Nell'anguilla possiamo dunque ammettere che alcune formazioni larvali, per esempio lo sclerotomo, si mantengono durante la lunga vita lar-

(1) Cfr. Franz V., *Sehorgan* in « Oppel's Lehrbuch der vergl. mikr. Anat. Wirbeltiere », 1913.

(2) D'Ancona U., *Lo sclerotomo nei Murenoidi.* « R. Comit. Talass. It. », Mem. CV, 1923.

Digitized by Google

vale del leptocefalo; altre, per esempio la vascolarizzazione della retina, addirittura fino all'acquisizione dell'abito di nozze.

Ma allora siamo noi giustificati a chiamare abito di nozze uno stato che implica modificazioni di questo genere? Noi chiamiamo caratteri nuziali quelli che compaiono in rapporto coi periodi sessuali, determinati a quanto dobbiamo ritenere da correlazioni ormonali sessuali, caratteri che scompaiono col cessare dell'epoca della frega. Un esempio di questo genere ci è dato, per restare nel gruppo dei pesci, dal *Gasterosteus*. Nel caso dell'anguilla abbiamo invece a che fare con modificazioni irreversibili e che, seppure sono date da correlazioni ormonali sessuali, hanno in più un evidente significato in rapporto a modificate condizioni ambientali. L'ingrossamento dell'occhio dell'anguilla avviene in rapporto alla migrazione nel mare, e Grassi che per primo (1897) lo osservò, lo riferì alla vita in ambiente oscuro nelle profondità del mare [1].

Può dunque essere chiamato un carattere nuziale o non piuttosto le modificazioni che l'anguilla subisce in questo periodo debbono essere considerate una vera e propria metamorfosi? Nessuno certamente chiama abito di nozze quello che la farfalla assume trasformandosi dalla pupa.

Allora forse sarebbe più conveniente ammettere nell'anguilla due trasformazioni metamorfiche: una da leptocefalo in cieca ed una da anguilla gialla in anguilla argentina. Si potrebbequin di anche in questo Murenoide considerare ciò una ipermetamorfosi, come quella che recentemente Roule e Bertin [2] hanno rilevato in un altro Murenoide: il *Nemichthys scolopaceus*.

E ugualmente potrebbe considerarsi ipermetamorfosi quella dei Petromizonti. Cotronei [3] è riuscito recentemente a distinguere in *P. fluviatilis* e *marinus* la metamorfosi dalla maturità sessuale, che invece precedentemente erano state confuse in *P. Planeri*. Anche qui, come Cotronei rileva, l'abito di nozze determina imponenti modificazioni, che pure possono considerarsi una vera e propria fase metamorfica. Dunque possiamo ritenere due fasi metamorfiche quelle che si hanno nelle prime due specie, invece nel *Planeri*, che a differenza di quelle vive sempre in acqua dolce, le due fasi si avvicinano in modo da coincidere.

Un altro punto interessante è quello della concordanza della vascolarizzazione della retina in *Anguilla* e *Conger*. Ciò ci fa pensare che anche in questo secondo Murenoide, della cui riproduzione poco sappiamo, si abbia

(1) Grassi B., *Metamorfosi dei Murenoidi*. « R. Comit. Talass. It. », Monogr. I, 1913.

(2) Roule L. et Bertin L., *Sur le développement à métamorphoses complexes (hypermétamorphose) du « Nemichthys scolopaceus » Richardson*. « C. R. Ac. Sc. », T. CLXXXIII, p. 88, 1926.

(3) Cotronei G., *Il fenomeno dell'accorciamento in rapporto alla maturità sessuale e alla senescenza dei Petromizonti*. « Rend. Accad. Lincei », ser. V, vol. XXXIII, sem. 1, p. 530, 1924; *Morfologia ed Ecologia nello studio dei Petromizonti*. « Ibid. » ser. VI, vol. III, p, 767, 1926.

Digitized by Google

un ingrossamento dell'occhio in rapporto con una probabile migrazione in acque profonde.

Come si vede questo campo di studi è promettente di interessanti risultati sia morfologici che ecologici, risultati che prossimamente mi riprometto di elaborare.

Biologia. — *Ancora sulla variabilità delle Dafnie pelagiche del lago di Nemi* [1]. Nota preliminare di L. VOLTERRA D'ANCONA, presentata [2] dal Socio Corrisp. F. RAFFAELE.

In mie Note precedenti [3] ed in un lavoro in esteso [4], ho riferito le osservazioni da me eseguite sulla variabilità della *D. longispina* dei laghi di Albano e di Nemi e sulla *D. cucullata* (che, come si sa, non vive naturalmente al sud delle Alpi) immessa nel lago di Nemi dal 1914 (Woltereck).

Mentre avevo potuto raccogliere dati sufficienti sulla *D. longispina* indigena di questi nostri laghi, da cui ho potuto ricavare un quadro abbastanza completo dell'andamento della sua variabilità, purtroppo, malgrado numerose pescate eseguite nel lago di Nemi nelle più differenti condizioni, non mi era stato possibile ottenere che scarsi dati per la *D. cucullata*. Essi erano stati però già sufficienti a mostrare il grande interesse che aveva questo esperimento di cambiamento di ambiente per una specie variabile. Ho perciò rivolto ancora la mia attenzione a questa forma continuando ad eseguire pescate planctoniche nel lago di Nemi; ho ora potuto raccogliere nuove e più abbondanti notizie sulla *cucullata* stessa, in modo che mi sembra di potere trarre delle conclusioni, se non ancora complete, almeno più estese per quanto riguarda l'adattamento al nuovo ambiente, l'andamento della variabilità morfologica e del ciclo, le cause agenti su di essi, nonchè sulle differenze sistematiche tra le due specie di Dafnie.

Recentemente Wesenberg–Lund in un nuovo lavoro sulla variabilità delle Dafnie [5], si occupa in modo particolare del lago di Frederiksborg (Hilleröd, Danimarca) da cui proviene la nostra *cucullata* e quindi mi è ora possibile di fare un interessante confronto tra la forma originaria e quella ambientata nel lago di Nemi.

(1) Ricerche iniziate all' Istituto di anatomia comparata della R. Università di Roma ed in parte proseguite presso il R. Laboratorio centrale di idrobiologia in Roma.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XXXIII, 1924, e vol. I, 1925.

(4) « Int. Revue Hydrob. u. Hydrogr. », Bd. XV, 1926.

(5) *Contributions to the biology and morphology of the genus "Daphnia"*. « D. kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter Naturvidensk og. Mathem. », Afd. 8, Raekke. XI, 2, 1926.

Digitized by Google

La *cucullata* mostra a Nemi una frequenza saltuaria e diversa nei vari anni in cui è stata oggetto di studio. Così, mentre era frequente quando iniziai le ricerche, cioè nell'ottobre e nel novembre 1922, dal gennaio 1923 non mi è stato più possibile trovarla fino al novembre 1924, cioè dopo due anni circa di infruttuose ricerche (1). In novembre e dicembre 1924 era rara, si rinveniva in scarso numero nell'inverno 1925, era frequente invece nel maggio di questo anno, scarsa nell'agosto. Si trovava in abbondanza nei saggi di *plancton* raccolti in maggio, giugno, luglio 1926, in questo ultimo mese formava la quasi totalità del *plancton*. La sua scomparsa nell'inverno 1924 potrebbe avere una spiegazione nel suo periodo sessuale autunnale, ma non si comprende perchè sia scomparsa per un tempo così lungo. Come dicevo, poi, mentre un anno era frequente in autunno e mancante in primavera, un altro o mancava o era molto rara in autunno e frequente in primavera. Eppure nel nostro lago le condizioni ambientali sono miti e sono state simili in quei diversi anni.

Come ho esposto nei precedenti lavori, la variabilità stagionale della *D. longispina* di Nemi ha un andamento particolare, cioè il massimo della variabilità stessa si ha in autunno avanzato, il minimo in primavera. Ora per la *cucullata* si osserva pure che la maggiore lunghezza del capo si riscontra in ottobre-novembre 1922, che è grande anche nel novembre 1924, in diminuzione in inverno, minima ai primi di maggio, in aumento alla fine di questo mese; aumenta ancora nei mesi seguenti di giugno e luglio. La lunghezza totale maggiore si ha nei periodi di maggiore allungamento del capo; la variabilità della larghezza, della lunghezza del rostro e di quella delle II antenne ha, come per la *longispina*, un andamento opposto a quello del capo.

In confronto con le Dafnie del lago di Frederiksborg ed in genere degli altri laghi nordici, come per la *longispina*, anche per la *cucullata* il periodo di massima variabilità si sposta dunque verso l'autunno.

La curva della variabilità non mostra una distinta ed immediata relazione con quella della temperatura, fattore questo, come è noto, cui è stata attribuita la massima importanza da alcuni, mentre altri le negano alcuna influenza. Infatti nel caso nostro la diminuzione della variabilità nei mesi invernali e l'aumento negli estivi ci mostrerebbero una relazione con la diminuzione, rispettivamente con l'aumento della temperatura, ma l'aumento di essa in autunno avanzato quando la temperatura, dopo aver toccato il massimo nei mesi estivi, è vicina al minimo, e la sua diminuzione in primavera quando la temperatura è aumentata notevolmente, non indicherebbero che l'aumento e la diminuzione della temperatura sono paralleli con un aumento e una diminuzione della variabilità, a meno che non si voglia

(1) Per quanto io abbia ripetutamente e minuziosamente esaminato l'abbondante materiale raccolto nel 1923 (dal febbraio) e nel 1924 (fino al luglio) non mi è stato possibile trovarne nemmeno *una*.

Digitized by Google

ammettere che questa subisca un ritardo rispetto all'azione della temperatura.

Il fatto poi che la *cucullata* immessa nel lago di Nemi mostri questo comportamento simile a quello della *longispina* ci conferma l'importanza dell'influenza dei fattori esterni sulla variabilità. Con ciò non si può escludere l'azione di cause interne. Infatti, come hanno ritenuto altri autori, ho supposto che la minima variabilità della *longispina* in primavera fosse in relazione con la chiusura del ciclo (come ho mostrato, la *longispina* nei nostri laghi è monociclica col periodo sessuale in primavera), dato specialmente che questa relazione era costante e netta. La minima variabilità presentata dalla *cucullata* ai primi di maggio potrebbe forse essere ascritta alla stessa causa (visto che essa pure, come dirò più avanti, ha un periodo sessuale primaverile)?

Se poi vogliamo fare un confronto tra le forme di Nemi e quelle originarie dobbiamo tenere presente che le condizioni ambientali del lago di Frederiksborg e di quello di Nemi sono molto diverse: da noi il clima è molto più mite, la temperatura non ha mai valori così bassi (il lago di Nemi non è mai gelato!) e si mantiene alta per un tempo più lungo.

Si è supposto che procedendo da nord verso sud la forma delle Dafnie divenga più sottile e la testa più lunga. La *cucullata* di Nemi però, se non mostra mai misure minime come le Dafnie di Hilleröd, presenta un simile massimo allungamento del capo; la larghezza, pur raggiungendo le stesse misure minime, ha massime inferiori. Mentre a Hilleröd si ha il massimo di variabilità in giugno-luglio e diminuzione di essa in ottobre, da noi si ha il massimo in ottobre-novembre. Il capo della *cucullata* si mantiene lungo per una durata di tempo maggiore. In tutti e due i gruppi entro il mese di maggio si ha un notevole aumento di variabilità.

Anche il periodo in cui si ha la massima lunghezza totale è spostato verso l'autunno. Le Dafnie di Nemi raggiungono lunghezze maggiori [1] di quelle di Frederiksborg. La grandezza delle « neonatae » e delle « primiparae » e l'accrescimento nei primi stadi è simile.

La *cucullata* di Nemi mostra costante un periodo sessuale autunnale; come ho detto dopo di esso un anno (1923) è scomparsa [2], un altro anno (1925) invece, di inverno, si trovavano anche giovani. La *cucullata* di Frederiksborg ha pure costante un periodo sessuale autunnale.

(1) Le *longispine* indigene invece sono più piccole delle forme nordiche.

(2) Nel lago di Frederiksborg, a seconda della maggiore o minore asprezza dell'inverno, la forma scompare o permane in inverno. Nei grandi laghi danesi (Frederiksborg a causa della sua poca profondità (2-3 metri) è piuttosto simile ad uno stagno), in cui però prevale l'aciclia rispetto alle regioni più nordiche, le Dafnie sono generalmente presenti in inverno anche se hanno un periodo sessuale autunnale. È da rilevarsi che da noi, pur essendo le condizioni esterne così miti e simili nei diversi anni, la *cucullata* può non vivere in inverno.

Digitized by Google

Dunque la *cucullata* di Nemi avrebbe mantenuto questo periodo sessuale originario, che non ha invece la *longispina* indigena. Tale fatto e il diverso comportamento dei Cladoceri indigeni (infatti, come ho precedentemente rilevato, in autunno si trovano ♂ ♂ di *Leptodora*) ci fanno pensare all'azione sul ciclo di cause interne.

La *cucullata* di Nemi ha poi un altro periodo sessuale ai primi di maggio, limitato a piccola parte della popolazione e di breve durata, come quello proprio della *longispina* che a quanto mi risulta dalle notizie bibliografiche, le è particolare. Questo periodo sessuale manca, secondo le osservazioni di Wesenberg–Lund, nella *cucullata* di Frederiksborg; dunque esso sarebbe un nuovo acquisto nel nostro ambiente.

Tale fatto, cioè l'acquisizione di questo periodo sessuale primaverile, farebbe ammettere (più di quanto non si potesse dedurre dal solo esame del ciclo della *longispina*) l'intervento in questa stagione, nel nostro lago, di cause esterne non bene precisabili.

Anche da queste osservazioni sulla *cucullata* ritengo di concludere come precedentemente *che* cioè *sulla variabilità morfologica e sul ciclo sia un complesso di cause esterne ed interne che agisca.*

Nei miei saggi di *plancton* le *cucullatae* si differenziano sempre dalle *longispinae*; la stessa cosa appare da colture. La forma, sopratutto la forma del capo, è diversa, tanto che generalmente già a prima vista le due Dafnie sono distinguibili; valgono poi come sicuri caratteri sistematici: la posizione delle setole delle prime antenne e la pigmentazione dell'occhio semplice. Sono distinguibili pure gli individui sessuali. Inoltre la lunghezza del capo rispetto al guscio nella stessa stagione è sempre superiore nella *cucullata* che nella *longispina* e ciò si dimostra evidente anche in colture parallele. La variabilità del capo ha in natura un andamento simile nel seguirsi delle stagioni, ma di intensità diversa: le *longispinae* non hanno mai valori così alti come le *cucullatae*, nè queste i valori minimi delle *longispinae* (1).

Le *cucullatae* hanno minori lunghezze totali massime che le *longispinae*, così pure in coltura si vede che la lunghezza totale è diversa sia rispetto alle mute, sia al massimo raggiunto. Le *cucullatae* hanno uno sviluppo più precoce delle *longispinae*: raggiungono la maturità sessuale ad una muta più precoce.

Per tutti questi caratteri morfologici ed ecologici ritengo che le differenze tra le due forme di Dafnia siano più grandi di quanto generalmente non si ammetta per varietà della stessa specie, per cui ritengo che dall'esperimento di Nemi si sia indotti a considerarle due specie diverse.

(1) Come osserva Wesenberg-Lund le variazioni stagionali delle *cucullatae* sono più ampie di quelle delle *longispinae*.

Digitized by Google

Biologia. — *Trapianti omeoplastici degli abbozzi oculari negli embrioni di Pleurodeles Woltli.* Nota di P. PASQUINI, presentata dal Corrisp. RAFFAELE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio BAGLIONI presenta all'Assemblea un suo volume dal titolo « Udito e Voce » e ne espone brevemente il contenuto.

Il Socio G. FANO fa omaggio all'Accademia di una sua opera tradotta in inglese col titolo « Brain and Heart ».

Il Socio SEVERI presenta il primo volume, parte prima, della sua opera « Trattato di Geometria algebrica. Geometria delle Serie Lineari » e ne discorre.

L'Accademico Segretario prof. CASTELNUOVO presenta le opere giunte in dono all'Accademia segnalando numerosi opuscoli del Socio FANTÓLI; la « Relazione al Consiglio Superiore di Sanità » inviata dal dott. A. MESSEA; il volume « Una nueva ciencia: La Plasmogenia » del Socio straniero L. HERRERA; il volume XV, serie prima, dell'« Opera omnia » di Leonardo Eulerio.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

L'Accademico Segretario aggiunto prof. PARRAVANO, legge anche a nome del Socio PELLIZZARI la relazione sulla Memoria del dott. PASSERINI dal titolo « Ricerche sopra gli isonitrili » e propone che essa venga stampata fra le Memorie Accademiche.

L'Assemblea approva.

CONCORSI A PREMI

L'Accademico Segretario prof. CASTELNUOVO legge l'elenco dei concorrenti ai premi del Ministero della Pubblica Istruzione per le Scienze matematiche e fisiche e per le Scienze naturali, scaduti il 31 dicembre 1926. Essi sono:

Per le Scienze matematiche e fisiche:

BEDARIDA A. M., BERNINI A., BORTOLOTTI E., BRUNI G., BURZIO F., CHINI M., COMELLA G., DA RIOS S. L., DE CARLI F., DE FAZI R., GAL-

Digitized by Google

LUCCI G., LELLI M., PELLEGRINI N., RONCHI V., SBRANA F., SPAMPINATO N., SPERA S., STRAZZERI V., TIMPANARO S. .

Per le Scienze naturali:

ALBO G., CHIARUGI A., DALLA FIOR G., DE FIORE O., GABOTTO L., GRANDORI R., PIERSANTI C., SILVESTRI A.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente sen. PATERNÒ comunica un telegramma del sen. GARBASSO il quale si scusa di non poter intervenire alla seduta e propone che l'Accademia invii un saluto all'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere per la ricorrenza del centenario di Volta.

Il Socio MAJORANA comunica che nei giorni 8-13 settembre p. v. avrà luogo a Como, ad iniziativa del Comitato esecutivo per le onoranze a Volta nel I Centenario della morte, un Congresso Internazionale di Fisici, al quale hanno aderito circa sessanta tra le più spiccate personalità scientifiche d'Italia e del mondo intero. A nome del Comitato stesso rivolge preghiera all'Accademia dei Lincei perchè voglia delegare qualcuno dei propri Soci a rappresentarla nel detto Congresso, che si inizierà colla solenne cerimonia commemorativa di Alessandro Volta.

Il Presidente mette ai voti le due proposte, del sen. GARBASSO e del Socio MAJORANA e l'Assemblea approva dando il mandato al Consiglio di Presidenza di nominare a suo tempo i due soci che rappresenteranno l'Accademia al Congresso Internazionale dei Fisici.

Digitized by Google

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 marzo 1927

ALDRICH J. M. — Descriptions of new and little Known-Diptera or Twa-Winged Flies. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 69). Washington, 1926. 8°, pp. 126.

BAGLIONI S. — Udito e voce. Elementi fisiologici della parola e della musica. Roma, 1925. 8°, pp. I-XX, 1-467.

DE ANGELI D'OSSAT G. — Il contributo della scienza del suolo alla sperimentazione. (Estr. dai « Nuovi Annali dell'Agricoltura ». Anno VI, pp. 63-67). Roma, 1926. 8°.

EULERI L. — Opera omnia. Series I. Vol. XV. Lipsia, 1927. 4°, pp. I-X, 1-722.

FANA G. — Brain and Heart. Lectures on Physiology. Oxford, 1926. 8°, pp. I-XIII, 1-142.

FANTOLI G. — Ancora dell'esposizione di Basilea di navigazione interna. (Estr. dalla Rivista mensile « l'Energia Elettrica ». Vol. III, fasc. X). Milano, 1926. 4°, pp. 1-4.

FANTOLI G. — Cenno informativo sull'azione annuale della Società d'incoraggiamento d'arti e mestieri. Milano, 1927. 8°, pp. 1-8.

FANTOLI G. — Giudizi su due questioni per l'irrigazione nella Valle del Po. La rete dei canali Cavour. (Estr. dagli « Annali delle utilizzazioni delle acque ». Vol. I, fasc. II. Roma, 1924. 8°, pp. 1-26.

FANTOLI G. — I cigli delle portate naturali nell'Adda Alpina e il loro impiego nel giudizio idrologico sui bacini imbriferi. (Estr. dagli « Annali dei Lavori Pubblici ». Anno 1926, fasc. XI). Roma, 1926, 4°, pp. 1-10.

FANTOLI G. — I deflussi del Lago di Como valutati alla scala idrometrica sublacuale nell'Adda alla Resica di Cornate (Paderna). (Estr. dalla Rivista mensile « l'Energia Elettrica ». Vol. III, fasc. V). Milano, 1926. 4°, pp. 1-3.

FANTOLI G. — Intorno ai problemi delle dighe per serbatoi e del loro tipo nelle applicazioni italiane. (Estr. dalla Rivista mensile « l'Energia Elettrica ». Vol. II, fasc. VII). Milano, 1925. 4°, pp. 1-39.

FANTOLI G. — Progetto per l'ulteriore utilizzazione irrigua e industriale del fiume Ticino mediante la regolazione del lago Maggiore. Milano, 1924. 4°, pp. 1-109.

FANTOLI G. — Relazione a S. E. il Ministro dei Lavori Pubblici dei Delegati italiani al III Congresso Internazionale del carbone bianco a Grenoble (4-8 luglio 1925). (Estr. dagli « Annali dei Lavori Pubblici ». Anno 1925, fasc. VIII). Roma, 1925. 8°, pp. 1-22.

FANTOLI G. — Sul progetto di massima di un nuovo acquedotto per la città di Perugia. Perugia, 1925. 4°, pp. 1-45.

FEDERICI N. — Il metodo di Jefimow in chirurgia per scoprire l'elmintiasi con l'esame delle orine. (Estr. dalla « Rivista Medica ». Anno XXXV). Milano, 1927. 8°, pp. 1-7.

FEDERICI N. — La tubercolosi può essere o no ereditaria? (Estr. dalla « Rivista d'Ostetricia e Ginecologia pratica ».

Digitized by Google

Anno VIII, n. 6). Palermo, 1926. 8°, pp. 1-6.

FEDERICI N. — Per l'anafilassi in rapporto alla sieroterapia. (Estr. dalla « Rivista Medica ». Anno XXXIV). Milano, 1926. 8°, pp. 1-5.

FISHER W. J. — The Fireballs of November 15 and December 29. 1925. (Reprint. from « Popular Astronomy ». Vol. XXXIV). S. l., 1926. 8°, pp. 1-18.

GAHAN A. B. — Some Braconid and Chalcid Flies from Formosa. Parasitic on Aphids. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. LXX). Washington, 1926. 8°, pp. 1-7.

GREGORACI P. N. — La critica sanitaria. Anno V. Napoli 1924-26. 8°, pp. 1-24, 1-384, 1-382.

GREGORACI P. N. — La tubercolosi guarisce. Napoli, 1913. 8°, pp. 1-152, I-CXCVIII.

HERRERA A. L. — Una nueva Ciencia: la Plasmogenia. Barcelona, 1925. 8°, pp. 1-446.

PASSERINI N. — Sperimenti di granicoltura eseguiti nel 1925-26. (Estr. dal « Bollettino del R. Istituto Superiore Agrario di Pisa »). Pisa, 1926. 8°, pp. 1-26.

Relazione del Consiglio di Sanità. Ministero dell'Interno. Vol. I, II. Roma, 1926. 4°, pp. I-XXVIII, 1-117; I-X, 1-349.

RÉVÉSZ A. — Die Athmosphäre als optische Linse. Bocsa-montana, 1924, 8°, pp. 1-17.

SCHMEHL H. — Ueber die Anzahl der geodätischen Linien zwischen zwei Punkten des Erdellipsoids. (Sonderabd. aus der « Zeitschrift für Vermessungswesen ». Jahrg. 1927, H. 1). Stuttgart, 1927. 8°, pp. 1-9.

SEVERI F. — Trattato di geometria algebrica. Vol. I. Parte I. Bologna, 1926. 8°, pp. I-VIII, 1-358.

VELASCO DE PANDO M. — Solucion general del problema elastico. (Extr. dagli « Atti dell'Associación Española para el Progreso de las Ciencias », pp. 117-118). Coimbra, 1925. 8°.

VERRI A. — Commemorazione di Antonio Verri, tenente generale del genio, tenuta a Città della Pieve il 21 aprile 1926 da Gioacchino de Angelis d'Ossat. Perugia, 1926. 8°, pp. 1-23.

VICENTINI F. — Commemorazione di Filandro Vicentini, tenuta dal Dottor Giulio Cozzoli in Chieti. Chieti, 1927. 4°, pp. 1-27.

WILIP J. — On new Precision-Seirmographs. Dorpat, 1926. 8°, pp. 1-26.

G. C.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MALQUORI G. - Il sistema $Al(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$ a 25° (presentata dal Socio *N. Parravano*) . . . . . Pag. 348
ID. - Il sistema $AlCl_3 - KCl - H_2O$ a 25° (pres. *Id.*) . . . . . »
ID. - I sistemi $AlCl_3 - HCl - H_2O$; $KCl - HCl - H_2O$ e $KNO_3 - H_2O$ a 25° (pres. *Id.*) . . . . . »
COTRONEI G. - Nuove osservazioni sull'influenza del sistema nervoso in relazione a nutrizione con tiroide nella morfogenesi degli Anfibi Anuri (pres. dal Corrispondente *F. Raffaele*) 349
PASQUINI P. - Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi. - I. Segmentazione atipica e successivo sviluppo delle ova di Arbacia punctulata Grey centrifugate, dopo la fecondazione (pres. *Id.*) 353
D'ANCONA U. - Ricerche sull'ingrandimento dell'occhio dell'anguilla in rapporto alla maturità sessuale e considerazioni sul suo significato biologico (pres. *Id.*) . 360
VOLTERRA D'ANCONA L. – Ancora sulla variabilità delle Dafnie pelagiche del Lago di Nemi (pres. *Id.*) 363
PASQUINI P. – Trapianti omeoplastici degli abbozzi oculari negli embrioni di Pleurodeles Woltli (pres. *Id.*) 367

PRESENTAZIONE DI LIBRI

BAGLIONI S. – Presenta il suo volume « Udito e voce » . . . . . »
FANO G. – Fa omaggio di una sua opera tradotta in inglese col titolo « Brain and Heart » . . . . . »
SEVERI F. - Presenta il primo volume dei suoi « Elementi di Geometria algebrica » »
CASTELNUOVO G. (Segretario) - Presenta le opere giunte in dono segnalando quelle dei Soci FANTOLI e HERRERA, ed altre . . . . . »

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PARRAVANO N. (Relatore) – A nome anche del Socio Pellizzari riferisce favorevolmente per l'inserzione negli « Atti Accademici » della Memoria di C. PASSERINI « Ricerche sopra gli isonitrili » . . . . . »

CONCORSI A PREMI

CASTELNUOVO G. (Segretario) - Legge l'elenco dei concorrenti ai premi del Ministero della Pubblica Istruzione per le Scienze matematiche e fisiche e per le Scienze naturali, scaduti il 31 dicembre 1926 . . . . . »

COMUNICAZIONI

PATERNÒ E. (Presidente) – Comunica un telegramma del sen. GARBASSO che propone che si invii un telegramma per il Centenario Voltiano 368
MAJORANA C. - Invita l'Accademia a mandare dei rappresentanti alla festa del Centenario Voltiano . . . . . »

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

Presentate nella seduta del 6 marzo 1927 369

Digitized by Google

RENDICONTI - Marzo 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo (Anno V)

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Tonelli L. - Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie . Pag. 313
Somigliana C. - Sulla determinazione delle costanti geoidiche mediante sole misure di gravità 319
Armellini G. - Sopra l'estinzione selettiva dell'atmosfera terrestre e sulla temperatura stellare effettiva e apparente 323
Corbino O. M. - Sulla realizzazione di grandi self positive o negative per mezzo di una lampada a tre elettrodi e di circuiti induttivi . . . . . »
Lo Surdo A. - La corrente di saturazione delle valvole termoioniche 327
Id. - Sulla corrente elettrica filtrata attraverso ad una valvola termoionica saturata 332
Id. - Bilancia termoionica . . . . . »

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Laboccetta L. - Sulla rappresentazione analitica in forma finita delle grandezze espresse da posizioni diverse in domini del piano e dello spazio assegnati ad arbitrio (pres. dal Corrisp. *G. A. Crocco*) . . . . . »
Cherubino S. - Sulla integrazione delle forme differenziali lineari (pres. dal Corrispondente *G. Scorza*) . . . . . »
Spampinato N. - Ulteriori contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann (pres. dal Corrisp. *Id.*) . . . . . »
Albanese G. - Sul teorema fondamentale della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica (pres. dal Socio *F. Severi*) . . . . . »
Hlavatý V. - Contact de deux courbes dans une V_n (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) »
Dubourdieu J. - Sur les groupes d'holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions (pres. *Id.*) . . . . . »
Bompiani E. - Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà (presentata dal Socio *G. Castelnuovo*) 333
Bortolotti E. - Sistemi assiali e connessioni nelle V_m (pres. *Id.*) . . . . . »
Blaschke W. - Sull'elemento lineare di Liouville (pres. *Id.*) . . . . . »
Burgers J. M. - Sur quelques recherches de Helmoltz et de Wien relatives à la forme des ondes se propageant à la surface de séparation de deux liquides (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) . . . . . »
Todesco G. - Ricerche sulla termoelettricità accidentale del bismuto (pres. dal Socio *Q. Majorana*) 339
Fernandes L. e Palazzo F. - Ricerche sui solfosali (II). Solfossipolimolibdati di ammonio e guanidina (pres. dal Corrisp. *L. Rolla*) . . . . . »
de Fazi R. - Sulla fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio esposte all'azione dei raggi ultravioletti (pres. dal Socio *N. Parravano*) 344
Bigiavi D. - Relazioni fra nitroderivati aromatici e azossicomposti (pres. dal Socio *A. Angeli*) 348

(*Segue in terza pagina*).

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 marzo 1927 (anno V).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Biologia matematica. — *Sulle periodicità delle fluttuazioni biologiche.* Nota del Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Sulla geometria di una superficie nel gruppo proiettivo e nel gruppo conforme.* Nota [1] del Corrisp. G. FUBINI.

§ 1. Adotto senz'altro le notazioni abituali della geometria proiettivo-differenziale [2], e riferisco una superficie S alle sue asintotiche u, v. Indico con p, q le coordinate delle tangenti asintotiche, ponendo

$$(1) \qquad p = e^{-\theta}(x\, x_u) \qquad q = e^{-\theta}(x_v\, x).$$

Derivando e tenendo conto delle:

$$(2) \qquad x_{u\,u} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \qquad x_{v\,v} = \theta_v x_v + \gamma x_u + p_{22} x$$

(loc. cit., p. 90) ottengo:

$$(3) \qquad p_u = -\beta q \qquad q_v = -\gamma p.$$

Donde

$$(4) \qquad p_{u\,v} - \frac{\beta_v}{\beta} p_u - \beta\gamma p = 0 \qquad q_{u\,v} - \frac{\gamma_u}{\gamma} q_v - \beta\gamma q = 0.$$

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1927.
(2) Cfr. la *Geometria proiettiva differenziale* di FUBINI e ČECH.

Digitized by Google

Moltiplicando per $du\,dv$ gli invarianti di queste due equazioni di Laplace, trasformate di Laplace l'una dell'altra, si trovano forme *invarianti* (per collineazioni), di carattere *intrinseco* (indipendenti dalla scelta dei parametri delle u, v): forme che il Bompiani [1] chiama *associate* alle (4). Esse valgono

$$\beta\gamma\,du\,dv \quad , \quad \left(\beta\gamma + \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u\,\partial v}\right) du\,dv \quad , \quad \left(\beta\gamma + \frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u\,\partial v}\right) du\,dv .$$

La prima, associata ad entrambe le (4), *è la metà della forma*

$$\varphi_2 = 2\,\beta\gamma\,du\,dv ,$$

da me trovata e che ha un ufficio fondamentale nella teoria delle superficie. Questo metodo per giungere a tale forma è il più semplice possibile ed è dovuto al Bompiani. Così pure è dovuta al Bompiani e allo Tzitzeica l'osservazione che la coincidenza delle altre due forme caratterizza le superficie isotermo asintotiche. Approfittando di una recente Nota del Terracini [2], tali forme ricevono una semplicissima interpretazione geometrica. Occupandoci solo della prima, essa si può enunciare così:

Nel piano tangente (osculatore a entrambe le asintotiche) giacciono due tangenti consecutive di ciascuna delle due asintotiche. Il birapporto di queste quattro rette (cioè dei punti ove incontrano una retta del piano tangente) [3] *vale*

$$\frac{1}{2}\varphi_2 = \beta\gamma\,du\,dv .$$

Questo teorema, congiunto all'altro analogo del Terracini per l'elemento lineare proiettivo $\varphi_3 : \varphi_2$ dà semplicissimi significati delle forme φ_2, φ_3, definendole per mezzo di birapporti di tangenti asintotiche [4].

Vi è un'altra osservazione a proposito di (3). Se scriviamo A, B al posto di q, p, troviamo le stesse equazioni a cui io [5] ho ridotto la ricerca delle congruenze W, di cui S è prima falda focale. Mentre dunque è ben

(1) Lincei, 1927.

(2) « Boll. della Società Mat. Ital. », 1927.

(3) Più precisamente prendiamo le tangenti alla $u = u_0 = \text{cost.}$ nei punti $v_0, v_0 + dv$, e le tangenti alla $v = v_0 = \text{cost.}$ nei punti $u_0, u_0 + du$. Scegliamo queste 4 rette con un piano generico, e proiettiamo le 4 intersezioni da una retta generica. Il birapporto dei 4 piani così ottenuti ha $\beta\gamma du dv$ per termine principale (cioè ne differisce per infinitesimi d'ordine superiore). Questa costruzione è del tutto analoga all'altra del BOMPIANI (« Atti Acc. Torino », 1924, p. 421), che proietta da una retta per (u_0, v_0) le tangenti asintotiche e i due punti infinitamente vicini su di esse (nell'intorno del 2° ordine): la posizione limite della congiungente di questi è la coniugata armonica della tangente du/dv per la quale quel birapporto vale $\frac{1}{4}\beta\gamma\,du\,dv$.

(4) Cfr. la Nota del TERRACINI in questi « Rendiconti », 1926. Altre interpretazioni in BOMPIANI, « Atti Acc. Torino », 1924, e « Bollett. Un. Matem. Ital. », 1926.

(5) Loc. cit., cap. V.

Digitized by Google

noto che tale ricerca si riconduce alla ricerca delle soluzioni dell'equazione di Moutard, cui soddisfano le tre coordinate di Lelieuvre del piano tangente, ora vediamo che:

La ricerca delle congruenze W *di data prima falda focale equivale all'integrazione delle equazioni* (3), *cui soddisfano le coordinate delle tangenti asintotiche.*

Il prof. Terracini, cui ho comunicato questo teorema, ne ha trovato la ragione geometrica, che pubblicherà insieme ad altre sue ricerche relative alle congruenze W.

§ 2. Quest'ultimo teorema ha l'analogo nella geometria *conforme* di una superficie S. Siano u, v le linee di curvatura, x, y, z coordinate cartesiane ortogonali. Potremo assumere come coordinate pentasferiche di un punto le

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = z \quad , \quad x_4 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) ,$$

$$x_5 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 1) .$$

Se x_i è un punto generico O di S, se X, Y, Z sono i coseni direttori della normale in O, allora

$$Z_1 = X - x\rho \quad , \quad Z_2 = Y - y\rho \quad , \quad Z_3 = Z - z\rho ,$$

$$Z_4 = \rho \frac{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} + (Xx + Yy + Zz) ,$$

$$Z_5 = -\rho \frac{1 + x^2 + y^2 + z^2}{2} + Xx + Yy + Zz$$

sono coordinate pentasferiche della sfera di raggio $r = \frac{1}{\rho}$ che tocca S in O. Cioè è

$$\sum Z^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 - Z_5^2 = 1 ,$$

mentre, indicando con y coordinate pentasferiche correnti, è

$$0 = \sum Z y = Z_1 y_1 + Z_2 y_2 + Z_3 y_3 + Z_4 y_4 - Z_5 y_5$$

l'equazione di tale sfera (si noti il segno — negli ultimi termini). Indicheremo con z, e z' i valori corrispondenti a $\rho = \rho_2 = \frac{1}{r_2}$ e $\rho = \rho_1 = \frac{1}{r_1}$, ove r_1, r_2 sono i raggi *principali* di curvatura. Valgono le:

(3) *bis* $$\frac{z' - z}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{z_u}{\rho_{2u}} = \frac{z'_v}{\rho_{1v}} \qquad \left(\rho_{2u} = \frac{\partial \rho_2}{\partial u} , \rho_{1v} = \frac{\partial \rho_1}{\partial v}\right)$$

Digitized by Google

a cui soddisfano le coordinate z, z' *delle sfere di curvatura*, analoghe delle (3) nella geometria *conforme*. Ogni altra sfera tangente in O ad S ha coordinate pentasferiche del tipo

$$(5) \qquad Z = \frac{lz - mz'}{l - m} \qquad (\sum Z^2 = 1).$$

Se le l, m soddisfano alle stesse (3) *bis*, se cioè

$$(3)\,ter \qquad \frac{l - m}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{m_u}{\rho_{2u}} = \frac{l_v}{\rho_{1v}},$$

ne deduciamo:

$$Z_u = \left(\frac{l}{l - m}\right)_u (z - z') + \frac{lz_u - mz'_u}{l - m} = m\left(\frac{z' - z}{m - l}\right)_u \quad , \quad Z_v = l\left(\frac{z' - z}{m - l}\right)_v,$$

donde:

$$(6) \qquad \left(\frac{Z_u}{m}\right)_v = \left(\frac{Z_v}{l}\right)_u.$$

Dunque, *essendo le* Z *e l'unità coordinate omogenee pentasferiche di tale sfera soddisfacenti all'equazione di Laplace* (6), *l'inviluppo di queste sfere fa corrispondere alle linee di curvatura di* S (prima falda dell'inviluppo) *le linee di curvatura della seconda falda*. E perciò (in modo analogo a quanto abbiamo trovato per le congruenze W), *la ricerca di questi inviluppi di sfere è ridotta all'integrazione delle equazioni* (3) *bis e* (3) *ter, cui soddisfano le coordinate delle sfere di curvatura.*

§ 3. La ricerca di questi inviluppi di sfere è stata invece fatta da Tzitzeica col metodo seguente. Consideriamo sia l'equazione di Laplace

$$x_{uv} + a x_u + b x_v = 0$$

cui soddisfano le coordinate cartesiane e pentasferiche x di O, che l'equazione aggiunta

$$R_{uv} - (aR)_u - (bR)_v = 0,$$

cui soddisfa p. es. $R = \rho_1 - \rho_2$. Se R ne è una soluzione qualunque, esisteranno delle y tali che

$$y_u = (R_u - bR)\,x \quad , \quad y_v = R\,(x_v + a x),$$

ossia:

$$(Rx - y)_u = R\,(x_v + b x) \quad , \quad (Rx - y)_v = (R_u - aR)\,x.$$

Digitized by Google

La sfera generica di uno dei nostri inviluppi è quella sfera (5) che passa per un tale punto y, cioè è tale che $l \sum z y = m \sum z' y$. Possiamo scegliere il fattore di proporzionalità in guisa che $l = \sum z' y$, $m = \sum z y$. Ed è facile verificare che dalle equazioni citate dello Tzitzeica relative ad y si passa alle (3) *ter* per le l, m [1].

Fisica. — *L'elettrolisi senza elettrodi.* Nota [2] del Socio O. M. Corbino.

La corrente elettrica è di solito addotta a un elettrolito da elettrodi metallici, ottenendosi i noti effetti. Nulla vieta però che al posto di uno o di entrambi gli elettrodi vengano sostituiti degli afflussi di elettroni o di ioni gassosi, a esempio quelli che caratterizzano il passaggio della corrente, come arco o come scarica, in un gas. Si tratta cioè di fare scoccare un arco o una scarica ionica fra un elettrodo esterno al liquido elettrolitico e il liquido.

Già nel 1887 il Gubkin [3] eseguì una esperienza di questo genere, producendo una scarica a bagliore (Glimmentladung) tra un elettrodo esterno e una soluzione in un ambiente a bassa pressione che conteneva solo il vapore della soluzione. Ricerche più delicate furono poi eseguite da altri (Bose, Klupfel, Haber) nel caso in cui i prodotti della elettrolisi sono gassosi, per riconoscere se anche in tale elettrolisi si verifica la legge di Faraday. Il Gubkin operò con sali di zinco, argento e platino, riconoscendo nel liquido la formazione di un deposito pulverulento del metallo, nel caso in cui l'elettrodo esterno funzionava da catodo.

L'esperienze del Gubkin meritano di essere riprese, in condizioni opportunamente variate, poichè è da ritenere che le circostanze fisiche e chimiche della elettrolisi debbano subire notevoli modificazioni per la mancanza dell'elettrodo metallico su cui di solito avviene il deposito catodico. Ho voluto pertanto osservare il processo elettrolitico nel caso di un arco tra carbone e liquido, di una *glimmentladung* a pressione ordinaria tra un catodo a filamento incandescente di platino coperto di ossido, e il liquido; e infine di una *glimmentladung* a bassa pressione con catodo freddo.

(1) Sorgerebbero qui parecchie questioni: Alla soluzione $R = r_1 - r_2$ quale inviluppo corrisponde? In quali casi si trovano inviluppi di sfere (sulle cui falde focali si corrispondono le linee di curvatura) dando al rapporto $l : m$ valori uguali e di segno opposto? In quali casi l'equazione (6) ha invarianti uguali? Queste ultime domande riescono spontanee a chi volesse trovare le superficie che nel gruppo conforme hanno un ufficio analogo a quello che le superficie R hanno in geometria proiettiva.

(2) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1927.

(3) Gubkin, «Ann. d. Physik», 32, p. 114, 1887.

Digitized by Google

Tale processo, se il liquido è costituito da un sale metallico, per esempio solfato di rame, risulta consistente nel deposito, in seno al liquido, di granuli metallici finissimi, che solo nel caso dell'arco acquistano un volume notevole così da formare una polvere che cade, durante l'esperienza, al fondo del recipiente. Nel caso, invece, di una scarica permanente a bassa pressione e con piccola intensità di corrente, la formazione dei granuli di rame non si riesce ad osservare durante l'esperienza; però il liquido si intorbida, e lasciato a sè per qualche tempo deposita al fondo una polvere impalpabile di metallo.

L'esperienza è stata eseguita con un generatore di corrente quasi perfettamente continua, a 6000 volt, inserendo una elevata resistenza nel circuito che comprende il voltametro a vuoto. Questo era costituito da un ordinario essiccatore nel vuoto, con coperchio a piatto smerigliato. Un bicchiere basso conteneva la soluzione di solfato di rame, o di nitrato di argento, e un elettrodo dello stesso metallico, ricoperto da un tubo di vetro, e uscente dal foro superiore dell'essiccatore pescava nel bicchiere. L'altro elettrodo, esterno al liquido, era costituito da un grosso anello cilindrico o da un disco di alluminio, rilegato a un'asticella isolata uscente anch'essa dal foro superiore. Dall'essiccatore veniva estratta l'aria, rimanendovi così la pressione del vapore d'acqua della soluzioue. Tra il cilindro d'alluminio e la superficie del liquido era una distanza di quattro o cinque centimetri. La scarica era perfettamente tranquilla, e aveva l'aspetto consueto. Il cilindro di alluminio funzionava da catodo. La corrente adoperata variava da 10 a 60 milliampère; la tensione al voltametro era di circa 500 volt; come si è detto, la sospensione metallica formatasi era costituita da granuli più fini quando la corrente era meno intensa.

Risultati analoghi si hanno ricorrendo a una soluzione di nitrato d'argento, confermandosi anche la formazione di pellicole speculari d'argento alla superficie del liquido osservata dal Gubkin.

Con una soluzione di cloruro d'oro all'uno per cento si ritrova il deposito pulverulento metallico ottenuto cogli altri metalli: ma se la soluzione è più diluita, esempio all'uno per mille, il deposito di metallo è così sottile e diffuso da dar luogo a un lieve intorbidamento della soluzione, e a un cambiamento di colore, anche dopo filtrazione, che rivela già di per sè la formazione di oro allo stato colloidale.

Effettivamente esaminando la soluzione all'ultramitroscopio ho constatato la presenza di numerosi granuli animati da vivaci movimenti browniani, mentre alcuni di essi vanno progressivamente depositandosi sul vetro portaoggetti. Il deposito è immediato se la vaschetta di osservazione è di qualche micron di spessore; mentre il moto browniano si constata anche dopo alcuni giorni di permanenza del liquido in una vaschetta dello spessore di mezzo millimetro.

Ma più inatteso è il risultato della elettrolisi se il liquido è costituito da uno dei soliti bagni di doratura galvanica con cloruro d'oro e cianuro di potassio.

Digitized by Google

In tal caso manca completamente il deposito metallico di oro; evidentemente l'elettrolisi si svolge con sviluppo di idrogeno al contatto fra la colonna della scarica e il liquido. Nè ciò è dovuto alla bassa pressione che domina sul liquido, poichè nelle stesse condizioni se il catodo è immerso, esso si copre regolarmente del deposito di oro.

Risulta da ciò che per la mancanza dell'elettrodo metallico non solo muta la forma del deposito catodico, che può assumere lo stato colloidale; ma anche il processo chimico dell'elettrolisi può subire variazioni, come quello constatato della liberazione di idrogeno anzichè del deposito ordinario di oro metallico, nel caso del bagno di doratura galvanica. Questo deposito, come è noto, è il risultato di una reazione secondaria, trovandosi l'oro incorporato nell'anione per la presenza del cianuro. La prova fatta dimostra che quella reazione secondaria non ha più luogo se il catodo non è immerso nella soluzione.

La elettrolisi con elettrodo fuori del liquido, come già si riconosce da questo esempio, può dare risultati degni di nota e merita perciò di formare oggetto di ricerche ulteriori.

Biologia. — *Accrescimento e moltiplicazione di amebe artificiali* [1]. Nota [2] del Socio straniero A. L. HERRERA.

A diverse riprese ho affermato [3] che le amebe artificiali mostrano con grande evidenza l'accrescimento e la moltiplicazione. In questa Nota comunico lo studio dettagliato di queste manifestazioni presso che vitali.

Già dalle prime esperienze [4] ho segnalato la segmentazione della goccia di soda aggiunta al miscuglio di gasolina e olio. Alcune nuove esperienze mi hanno permesso di fissare qualche dettaglio del fenomeno.

Esperienza n. 5344 (24 aprile 1926). Si aumenta la proporzione della gomma arabica, che ritarda i movimenti e la diffusione.

Soda caustica in cilindri	gr.	28
Acqua calda	»	100
Si fa sciogliere e dopo raffreddamento si aggiunge lentamente		
Gomma arabica polverizzata	»	6

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto degli Alti studi biologici del Messico.

(2) Presentata nella seduta del 20 febbraio 1927.

(3) A. L. HERRERA, *Suite des recherches sur les êtres artificiels*, « La vie Universelle », Bulletin trimestrel de l'Association Internationale Biocosmique. Vol. I, n. 2, p. 17. *Una nueva ciencia. La Plasmogenia.* Barcellona (ed. Maucci), 1926, p. 432 fig.

(4) A. L. HERRERA, *Sull'imitazione delle amebe in movimento*, « Memoria della R. Accademia dei Lincei, Classe di Scienze fisiche », 1926, serie sesta, vol. II, fasc. VII, p. 96.

Digitized by Google

La gomma si incorpora alla soluzione di soda stemperandola con forza in un mortaio per evitare la formazione dei grumi. Una goccia di questa soluzione si deposita nella soluzione di

Gasolina	cm³.	270
Olio d'oliva puro e recente (F. Betus e Fils, Bordeaux).	»	40

Le amebe mostrano l'accrescimento e la riproduzione (fig. 1).

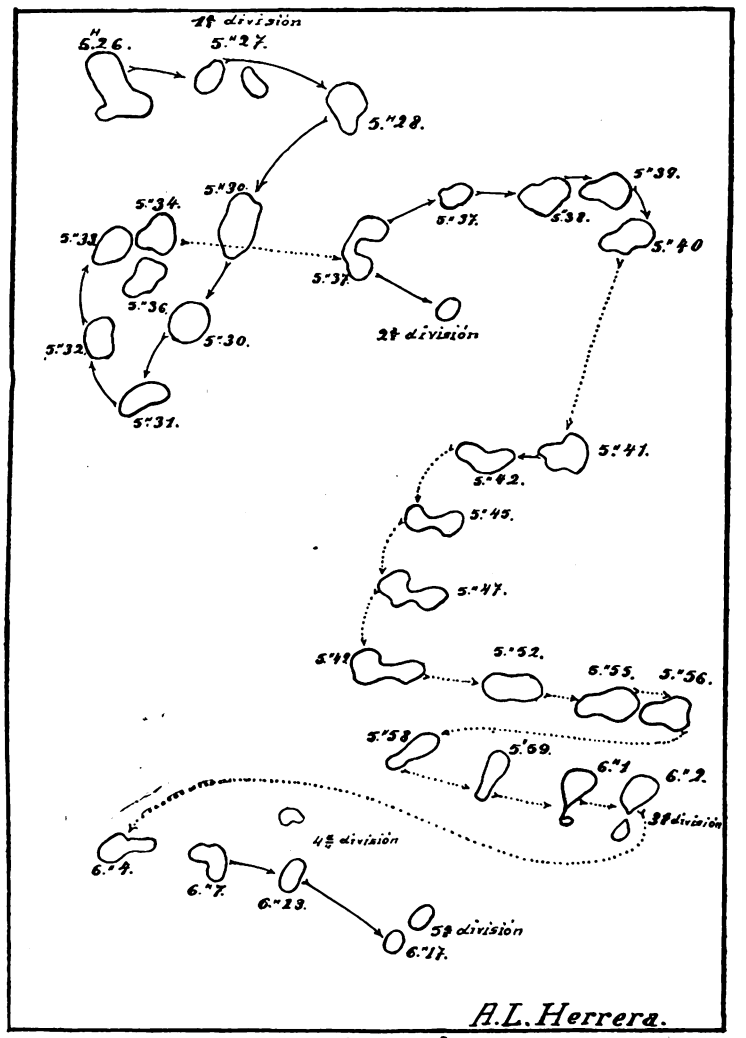
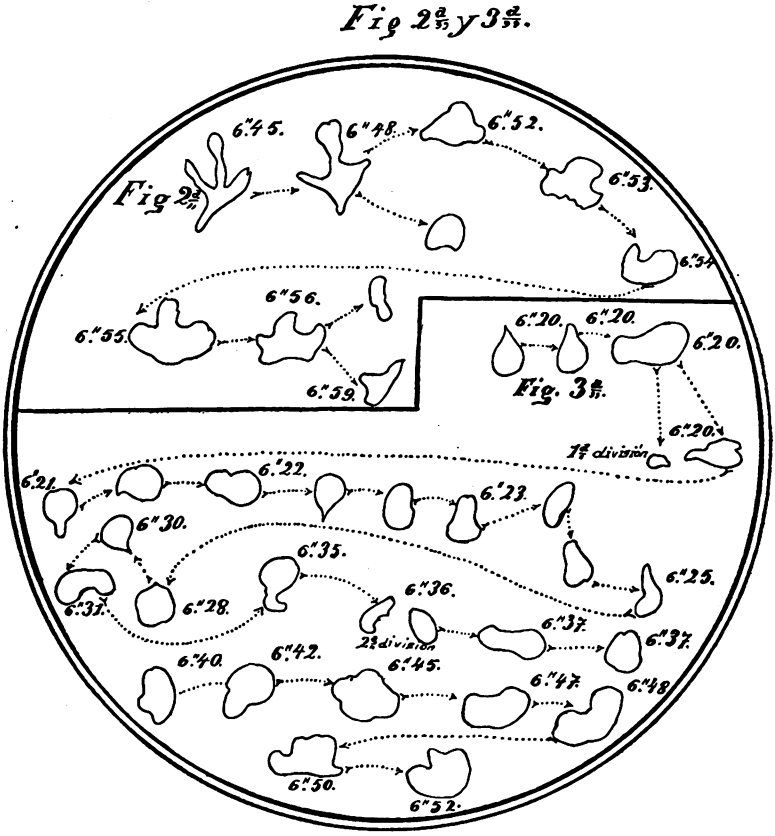


Fig. 1ª.

Digitized by Google

$5^h,26$ - $5^h,27$: prima divisione in due amebe; $5^h,28$ - $5^h,30$ - $5^h,37$: seconda divisione. L'ameba cambia incessantemente di forma e di luogo. $5^h,37$ - $5^h,45$. Il movimento rallenta. Sino alle $6^h,1$ non vi è alcuna divisione. $6^h,1$: terza divisione. $6^h,13$: quarta divisione. La piccola ameba prodotta ha movimenti più vivaci dell'ameba madre. $6^h,17$: quinta divisione. Non vi è alcun dubbio sull'accrescimento delle amebe figlie che hanno un diametro di un quarto di millimetro. La madre e la figlia della quinta di-



visione appaiono uguali. $6^h,25$ un'ora precisa dopo l'inizio di questa osservazione non si nota più alcun movimento.

Esperienza n. 5345 (26 aprile 1926). Medesima soluzione.

L'ameba osservata (fig. 2) si è deformata e contorta dalle $6^h,45$ fino alle $6^h,59$. In tale momento essa si è divisa in due piccole amebe, una più piccola dell'altra.

Esperienza n. 5346 (27 aprile 1926). Medesima soluzione. Alle $6^h,15$ vi sono 28 amebe. Alle $6^h,15$ ve ne sono più di 100. La segmentazione è per conseguenza un fatto evidente. L'ameba osservata (fig. 3) ha stri-

Digitized by Google

sciato dalle $6^h,20$ alle $6^h,52$ e si è moltiplicata due volte alle $6^h,20$ ed alle $6^h,36$. Il loro volume è aumentato, ed alle $7^h,35$ vi sono ancora delle amebe striscianti. Osservate coll'obbiettivo AA di Zeiss senza lente inferiore e oculare 2 di Zeiss. Ingrandimento 12 diametri. Il 29 aprile il disegnatore disegnò esattamente le amebe mediante la camera chiara allo scopo di conoscere con esattezza l'aumento della superficie della goccia in via di moltiplicazione, la direzione seguita ed i cambiamenti di volume. Si aumenta la gomma a gr. 10.

Tempo	N. di amebe	Superficie approssim.
$9^h,15$ a. m.	19	300 mm²
$11^h,15$ »	50	400 »
$12^h,20$ »	131	512 »

In altre parole, in $3^h,5$, l'aumento delle amebe è stato di 112.

L'aumento della superficie è stato di 212 mm²: tale aumento non è proporzionale a quello delle amebe, dato che quest'ultime sono di differente grandezza. Per determinare la superficie si è calcato il disegno e se ne è determinato la superficie riportandolo su carta quadrettata.

Aumento dettagliato del numero delle amebe.

$9^h,15$ . . .	19 amebe	$10^h,50$ . . .	59 amebe
$9^h,18$ . . .	26 »	$10^h,54$ . . .	54 »
$9^h,20$ . . .	31 »	$10^h,55$ . . .	64 »
$9^h,23$ . . .	37 »	$11^h,5$ . . .	50 »
$9^h,28$ . . .	38 »	$11^h,30$ . . .	58 »
$9^h,30$ . . .	36 »	$11^h,35$ . . .	59 »
$10^h,30$ . . .	43 »	$11^h,45$ . . .	114 »
$10^h,40$ . . .	42 »	$11^h,45$ . . .	114 »
		$12^h,20$ . . .	131 »

Le irregolarità e quindi gli errori son dovuti alle evoluzioni delle amebe che passano due o più volte nel campo del microscopio senza alcun contrassegno possibile che permetta di evitare una duplicazione nella numerazione di questi oggetti in movimento.

Concludendo. Le amebe artificiali mostrano per quanto limitatamente il fenomeno dell'accrescimento e della moltiplicazione, dovuto ad un aumento della pressione osmotica per assorbimento di nuove quantità di olio, sciolto in gasolina, attraverso la membrana di sapone che circonda le gocce alcaline. Questo accrescimento avviene per intussuscezione e non per deposito superficiale, poichè il liquido nutritizio esterno penetra attraverso la membrana per combinarsi colla soda e saponificarsi. La gomma ritarda

Digitized by Google

l'osmosi. Per conseguenza l'accrescimento e la moltiplicazione coincidono con combinazioni chimiche imitanti il metabolismo delle amebe naturali. Le cause fisiche e chimiche agiscono insieme, e la combinazione finisce per esaurimento della soda o dell'olio o di entrambi, oppure per spessimento ed impermeabilità della membrana di sapone; allora tutto si paralizza. Anche a distanza di alcuni giorni la puntura di queste *cisti* colla punta di uno spillo, ne fa uscire il contenuto alcalino, che inizia immediatamente il suo strisciamento come un'ameba che esce dalla sua cisti. È un fac-simile della *vita latente.*

Senza dimenticare che la struttura e la composizione chimica di queste amebe è meno complicata di quelle naturali, si può affermare che le amebe figlie sono eguali alle amebe madri, ciò che mostra *un'eredità rudimentale.* La divisione è diretta senza figure mitosiche visibili.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà.* Nota di E. Bompiani presentata[1] dal Socio G. Castelnuovo.

1. Espongo in questa Nota alcune idee per lo studio differenziale di enti geometrici. Mi riferirò in generale ad un modello proiettivo dell'ente o varietà in esame: ma è chiaro che in tutti i casi nei quali una conveniente rappresentazione iperspaziale può rincondurci dallo studio di un determinato gruppo a quello di un gruppo proiettivo (operante su un numero maggiore di variabili) dette idee troveranno campo d'applicazione. E anche, mi riferirò quasi sempre ad enti a due dimensioni o superficie di S_n per quanto la validità di quel che si dice rimanga in generale per le V_m con $m > 2$.

La geometria delle superficie di S_3 rispetto ai gruppi più noti (proiettivo, isometrico, conforme) consiste essenzialmente nello studio di alcuni sistemi di curve della superficie σ invarianti rispetto a ciascuno di quei gruppi (p. es. le asintotiche e le linee di Darboux e di Segre definite per mezzo delle quadriche osculatrici a σ; le geodetiche; le curve di Darboux aventi la sfera osculatrice in ogni punto ivi tangente a σ). Lo stesso carattere si rileva negli studi più recenti sui vari tipi di connessione, ove appunto si cercano *geodetiche* relative alla connessione. Insomma sono questi sistemi invarianti di curve che ci permettono di penetrare da un intorno

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

dato in uno di ordine più elevato e di renderci così conto della struttura della varietà rispetto ad un determinato gruppo.

Questi vari sistemi di curve si lasciano raccogliere da un unico punto di vista (al quale in parte avevo già accennato in lavori precedenti) quando si tenga presente il modello proiettivo dell'ente in esame (V_m in S_n), al quale modello conviene quindi riferirsi.

2. In una Nota del 1912 [1], premesse alcune osservazioni sulle proprietà proiettive delle curve tracciate sopra una V_m, scrivevo: « Nasce da questa osservazione una classe molto estesa di problemi. Ci si può infatti domandare se, in rapporto allo spazio che si considera come legato ad un punto generico della V_m e alla dimensione del suo ambiente d'immersione, esista qualche curva i cui spazi osculatori di dimensione convenientemente alta abbiano un'incidenza speciale con lo spazio sopra nominato ».

Lo spazio associato al punto generico della V_m sia quello r-osculatore $S(r)$, cioè l'ambiente cui appartengono gli S_r osculatori alle curve di V_m nel punto.

Una curva il cui spazio osculatore generico S_s ove $s > r$, abbia con lo $S(r)$ costruito nello stesso punto un'incidenza speciale (cioè superiore a quella che si avrebbe per una curva generica) dicesi *quasi-asintotica*; per ricordare gli ordini degli intorni della varietà e della curva che intervengono nella sua definizione si può indicare con $\gamma_{r,s}$.

Di queste curve ho dato allora e in seguito [2] varie proprietà proiettive e metriche, e mi son servito di esse per caratterizzare certe classi di enti algebrici [3]; di recente hanno formato oggetto di studio anche da parte di altri.

Supponiamo ora invece che lo spazio che si associa ad un punto di V_m non si vincoli ad esser definito da essa (nel caso precedente: dall'intorno d'ordine r del punto) ma si assuma ad arbitrio: la stessa condizione d'incidenza cui mi riferivo nella prima Nota citata dà luogo a nuovi sistemi di curve che propongo di chiamare *pluriassali*.

3. Precisiamo questa nozione nei casi più semplici possibili per una superficie σ.

Se σ appartiene ad S_3 si dia in ogni punto di essa una retta (non appartenente al piano ivi tangente): rimane definito su σ un *sistema assiale* ∞^2 di curve tali che i piani osculatori a quelle uscenti da un punto formano fascio intorno alla retta data (asse) [4].

(1) *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, « Atti Acc. Torino », 1912-13.

(2) *Alcune proprietà proiettivo-differenziali* ecc., « Circ. Mat. Palermo », 1914; *Sullo spazio d'immersione di superficie* ecc., « Rend. Ist. Lombardo », 1914; *Analisi metrica delle quasi-asintotiche* ecc., « Rend. Lincei », 1916; *Sur les courbes quasi-asymptotiques* ecc., « C. R. Acad. des Sciences de Paris », 1919.

(3) *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*, « Mem. Acc. Lincei », 1922.

(4) *Proprietà generali delle corrispondenze puntuali fra due superficie*, « Annali di Matematica », 1923.

Digitized by Google

Se σ appartiene ad S_4 o più in generale ha uno S_4 2-osculatore (cioè se possiede un doppio sistema coniugato o un sistema semplice di asintotiche) si può dare in ogni punto e nel relativo S_4 un piano (non incidente in una retta il piano ivi tangente a σ) e definire le ∞^2 curve i cui piani osculatori in un punto si appoggiano lungo rette al piano dato per esso (S_2 d'appoggio). Si hanno così i *sistemi planari* o *2-assiali* [1], la cui equazione differenziale, se u e v sono coordinate curvilinee su σ, è del tipo

$$(1) \qquad du\,d^2v - dv\,d^2u = A du^3 + B du^2 dv + C dv^2 du + D du^3,$$

con A, B, C, D funzioni di u e v [2]. È da notare che se σ è data e se possiede un doppio sistema coniugato qualunque sia l'equazione (1) si possono sempre interpretare u e v come variabili atte a rappresentare le linee del doppio sistema coniugato e la (1) determina in ogni punto un ben determinato piano d'appoggio; se invece σ possiede un sistema semplice di asintotiche rappresentate p. es. da $u = \text{cost.}$ allora, mentre ad ogni sistema planare corrisponde un'equazione del tipo (1), non è più vero che a qualsiasi equazione (1) corrisponda un sistema planare perchè, come si verifica facilmente, tre soli dei coefficienti A, B, C, D possono darsi ad arbitrio. Ciò è ben d'accordo col fatto che se la (1) rappresenta un sistema planare sopra una superficie della specie detta essa determina in ogni punto non *un* piano d'appoggio ma ∞^1 piani i quali sono piani generatori, di un sistema, di un cono quadrico V_3^2 con vertice nel punto.

Se infine σ non è proiettivamente specializzata fino all'intorno del 2° ordine cioè se in un suo punto generico $S(2) = S_5$, si dia in ogni punto e nel relativo S_5 un S_3 generico d'appoggio: le curve i cui S_2 osculatori in ogni punto tagliano in rette lo S_3 dato per esso costituiscono un sistema ∞^2, che dirò *3-assiale*, rappresentato pure da un'equazione del tipo (1). E viceversa ad ogni equazione di questo tipo corrisponde su σ un sistema 3-assiale.

Altri casi non possono presentarsi finchè si rimanga nell'intorno del 2° ordine di σ. Basta confrontare la (1) con l'equazione delle geodetiche di una connessione proiettiva secondo Cartan [3] per accorgersi che queste non sono altro che le linee appartenenti ai sistemi ora studiati.

(1) *Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari*, « Bollet. Unione Matem. Ital. », 1925.

(2) La (1) può interpretarsi anche sulle superficie di S_3: essa non rappresenta in generale un sistema assiale di curve, ma queste possono ancora caratterizzarsi geometricamente per mezzo delle loro quadriche asintotiche osculatrici; cfr.: *Ancora sulla geometria delle superficie nello spazio rigato*, « Rend. Lincei », 1926.

(3) *Sur les variétés à connexion projective*, « Bull. Soc. Math. de France », to. 52, 1924. Alle relazioni fra i vari tipi di connessione (proiettiva, affine...) e i sistemi pluriassiali, anche per le varietà, è dedicata una Nota (che verrà presentata insieme a questa)

Digitized by Google

4. Sistemi analoghi di curve, rappresentati da equazioni differenziali di ordine > 2, possono definirsi in relazione ad intorni di ordine più elevato dei punti di σ. In generale chiameremo *sistemi pluriassiali* quelli determinati da condizioni d'incidenza degli S_s osculatori in un punto alle curve del sistema che vi passano con un S_t *d'appoggio* fissato in modo generico per il punto entro lo spazio $S(s)$ osculatore in esso a σ. L'esistenza di tali sistemi dipende dai valori di s e di t (nei casi precedenti, $s = 2$, $t = 1, 2, 3$) e dalla dimensione di $S(s)$ cioè dalle equazioni a derivate parziali, d'ordine $\leq s$, soddisfatte dalle coordinate proiettive omogenee dei punti di σ; queste ultime equazioni, come già s'è visto nei casi precedenti, condizionano la generalità del tipo di equazione differenziale ordinaria d'ordine s rappresentante il sistema pluriassiale, corrispondente ai valori t ed s, su σ.

È chiaro che questi sistemi forniscono una connessione d'ordine più elevato cioè il modo di raccordare proiettivamente gli intorni dell'ordine $s - 1$ ($= 1$ nel caso di Cartan) di due punti infinitamente vicini su σ.

Considerazioni analoghe per le varietà.

5. Un'ulteriore estensione di queste considerazioni si ha sostituendo allo spazio d'appoggio S_t un *cono d'appoggio* in ogni punto di σ, o se si vuole assegnando, non più per ogni punto ma, per ogni S_{s-1} osculatore in un punto a curve di σ uno spazio cui debbano appoggiarsi, con incidenza superiore a quella che si avrebbe per una curva generica, gli S_s osculatori alle curve del sistema che si vuol definire.

Invece di presentare delle generalità su questi sistemi di curve preferisco precisare quanto precede su due esempi apparentemente di natura affatto diversa: la teoria della connessione proiettiva delle varietà d'elementi secondo Cartan, e la teoria delle deformazioni di specie superiore delle superficie o varietà.

6. Sia $x(u, v)$ un punto di coordinate proiettive omogenee $x_i(u, v)$ $(i = 1, \cdots, n+1)$ che descrive la superficie σ generale fino all'intorno del 2° ordine; lo $S(2)$ è lo S_5 dei punti $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}$. In questo S_5 il punto $\alpha_0 x + \alpha_1 x_u + \alpha_2 x_v + \alpha_3 x_{uu} + \alpha_4 x_{uv} + \alpha_5 x_{vv}$ abbia le coordinate locali α_0 e α_j $(j = 1, \cdots, 5)$. Un cono V_3 di vertice x entro S_5 può assegnarsi dando la sua sezione con lo S_4 $\alpha_0 = 0$, cioè ponendo $\alpha_j = \alpha_j(w, t)$; le α_j saranno anche funzioni di u e v: si è rappresentato così il sistema voluto ∞^2 di coni. Cerchiamo ora le curve i cui piani osculatori in x incidono il cono lungo generatrici.

Geometricamente: data una tangente d in x, i piani osculatori alle curve ivi tangenti a d formano fascio in uno $S_3 = S(2, 1)$ osculatore a σ

del prof. Enea Bortolotti, ove si trovano notevoli precisazioni geometriche e raffronti con le ricerche di Cartan, Berwald, Weyl, Schouten. V. anche la mia Nota: *L'intorno del 2° ordine e i sistemi pluriassiali sopra una superficie qualsiasi*, « Mem. Acc. di Bologna », 1927.

Digitized by Google

secondo d. Questo S_3 taglia il cono assegnato V_3 lungo rette che, insieme a d, definiscono i piani osculatori in x alle curve del sistema. Analiticamente l'incidenza voluta si traduce in

$$\begin{Vmatrix} d^2u & d^2v & du^2 & 2\,du\,dv & dv^2 \\ du & dv & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{Vmatrix} = 0$$

cioè conduce a porre

$$d^2u = \rho\,du + \sigma\alpha_1 \quad , \quad d^2v = \rho\,dv + \sigma\alpha_2 \quad , \quad du^2 = \sigma\alpha_3 \quad ,$$

$$2\,du\,dv = \sigma\alpha_4 \quad , \quad dv^2 = \sigma\alpha_5 .$$

Può farsi p. es. $\alpha_3 = 1$ e $v = v(u)$ sulle curve in esame; ne risulta $v'' = \alpha_2 - \alpha_1 v'$, $\alpha_4 = 2v'$, $\alpha_5 = v'^2$: l'eliminazione di w e t fra queste tre relazioni fornisce l'equazione differenziale $v'' = f(u, v, v')$ delle curve aventi la proprietà voluta.

Viceversa, sia data $v'' = f$; per ogni direzione d in x (appartenente a σ) è determinato, come s'è detto, un $S_3 = S(2, 1)$ osculatore contenente il piano tangente in x. Il luogo di questi S_3, variando d, è un cono quadrico V_4^2. L'equazione $v'' = f(u, v, v')$ determina, entro ciascun S_3, un S_2 osculatore ad una curva del sistema (tangente a d): è il luogo di questi piani che è determinato da f. Precisamente, riferendoci alle notazioni di prima, ove $\alpha_0, \cdots, \alpha_5$ indichino le coordinate locali di un punto generico di $S_5 = S(2)$, le equazioni parametriche del luogo sono $\alpha_2 - \alpha_1 v' = f\alpha_3$, $\alpha_4 = 2v'\alpha_3$, $\alpha_5 = v'^2\alpha_3$; l'equazione che si ottiene eliminando v' fra le ultime due, cioè $\alpha_4^2 = 4\alpha_3\alpha_5$, rappresenta il cono V_4^2 e insieme all'altra $\alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_4 = f\left(u, v, \frac{\alpha_4}{2\alpha_3}\right)\alpha_3^2$ rappresenta il luogo dei piani osculatori alle curve date.

Come si vede la $v'' = f$ determina questo luogo ma *non* il cono V_3 d'appoggio; ciò è naturale dal punto di vista geometrico perchè questo cono può esser sostituito da qualsiasi altro che dia luogo alla stessa varietà dei piani osculatori. In altri termini: si consideri un S_3 generico in S_5 relativo ad x; questo taglia V_4^2 in un cono quadrico (le cui generatrici sono in corrispondenza biunivoca con v'); è una curva su questo cono che determina f (ed è determinata da f); ogni cono V_3, di vertice x, contenente questa curva può servire come cono d'appoggio; in particolare se la curva è piana, proiettandone il piano da x si ha un S_3 d'appoggio e perciò un sistema 3-assiale.

Digitized by Google

L'equazione $v'' = f(u, v, v')$ individua le geodetiche di una connessione proiettiva di una varietà di elementi secondo Cartan [1]; sicchè:

Si parta da una qualsiasi superficie σ *con* $S(2) = S_5$ *e si assegni per ogni punto* x *di essa entro* S_5 *un cono* V_3 *di vertice* x: *le curve di* σ *i cui piani osculatori in ogni punto* x *tagliano* V_3 *lungo generatrici sono le geodetiche di una connessione proiettiva, secondo Cartan, della varietà di elementi aderente a* σ; *viceversa date queste si può (in infiniti modi) costruire in ciascun punto di* σ *un cono* V_3 *tagliato lungo generatrici dai piani osculatori a dette curve e il luogo di questi piani è, per ogni punto, determinato da* $v'' = f(u, v, v')$.

7. Vengo ora ad un altro esempio, di carattere metrico, relativo ai sistemi di curve indicati al n. 5.

Chiamo deformazioni di specie ν di una superficie (o varietà) quelle che conservano non solo l'elemento lineare ma le curvature fino alla $(\nu - 1)$-esima inclusa delle curve tracciate su di essa; per $\nu = 1$ si hanno le ordinarie applicabilità [2].

Consideriamo sopra una superficie σ di S_n (euclideo) un elemento E_k di curva (cioè punto, tangente, $\cdots$, S_k osculatore): domandiamo di costruire per esso un elemento E_{k+1}, cioè lo S_{k+1} osculatore in modo che la k-esima normal principale (ad S_k entro S_{k+1}) sia normale a σ; per $k = 1$ si hanno le ordinarie geodetiche; per $k > 1$ chiameremo le curve dotate in ogni punto di questa proprietà *k-geodetiche.*

Per costruire questo S_{k+1} osserviamo che il luogo degli S_{k+1} osculatori alle curve di σ aventi in comune l'elemento E_k è un S_{k+2} che riesce osculatore a σ d'ordine $k + 1$ secondo E_k e che perciò indico con $S(k + 1, k)$. La normale cercata (nel punto E_0 di E_k a S_k entro S_{k+1}) deve appartenere a questo S_{k+2} ed allo S_{n-k} normale in E_0 a S_k: inoltre per ipotesi deve appartenere allo S_{n-2} normale in E_0 a σ. L'intersezione dei tre spazi S_{n-2}, S_{n-k} ed S_{k+2} è proprio la normale cercata (perchè S_{k+2} contiene il piano tangente in E_0 a σ) che insieme con S_k individua l'elemento E_{k+1} della curva k-geodetica cui appartiene l'elemento E_k dato. Così procedendo si ha la curva k-geodetica individuata da E_k.

S'intende che questo può farsi finchè $n - k - 1 \geqq 1$, cioè finchè $k < n - 1$. Per $k = n - 1$, cioè se si cercano le curve la cui $(n - 1)$-esima normal principale riesce normale alla superficie, si hanno le quasi-asintotiche $\gamma_{1,n-1}$ definite da un E_{n-3}; lo S_{n-1} osculatore ad una di esse è quello $(n - 2)$-osculatore alla superficie secondo l'E_{n-3} assegnato.

Ritornando alle k-geodetiche, $k < n - 1$, è facile trovarne la rappresentazione analitica. Se le $x_i(u, v)$ sono le coordinate cartesiane ortogo-

(1) E. CARTAN, loc. cit., cap. VII.

(2) *Problemi nuovi di geometria* ecc., «Rend. Lincei», 1915; *Les hypersurfaces deformables* ecc., «C. R. Acad. des Sciences», 1917; *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni* ecc., «Rend. Lincei», 1916; *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie*, «Rend. Lincei», 1919 e 1920 (4 Note).

Digitized by Google

nali in S_n dei punti di σ e se si pone $(\xi, \eta) = \sum_1^n{}_i \xi_i \eta_i$ la loro equazione differenziale si scrive:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}, dx\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial v}, dx\right) & (d^2x, dx) & \cdots & (d^k x, dx) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}, d^2x\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial v}, d^2x\right) & (d^2x, d^2x) & \cdots & (d^k x, d^2x) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}, d^{k+1}x\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial v}, d^{k+1}x\right) & (d^2x, d^{k+1}x) & \cdots & (d^k x, d^{k+1}x) \end{vmatrix} = 0$$

e da essa seguono i seguenti teoremi:

In una deformazione di specie ν *di una superficie* σ *(qualunque sia il suo ambiente* S_n*) sono invarianti tutti i sistemi di k-geodetiche per* $k \leq \nu$.

Se la superficie possiede quasi-asintotiche singolari $\gamma_{1,k}$ *con* $k < n - 1$, *cioè il cui* S_k *osculatore in ciascun punto contenga il piano ivi tangente a* σ *queste sono certo k-geodetiche e si conservano quasi-asintotiche per ogni deformazione di specie* $\nu \geq k$.

Se invece la superficie possiede curve appartenenti ad S_k *con* $k < n - 1$ *queste sono pure k-geodetiche e per deformazioni di specie k si mutano ancora in k-geodetiche, ma non più appartenenti ad* S_k; *e non esistono deformazioni di specie* $> k$ *che non lascino rigide quelle curve.*

Anche sulle V_m $(m > 2)$ si possono definire curve k-geodetiche con la condizione che la loro k-esima normal principale in un punto sia ivi normale a V_m; si hanno per esse proprietà analoghe alle precedenti (p. es. invarianza per deformazioni di specie $\geq k$); e inoltre: *una k-geodetica di* V_m *è anche tale su ogni* V_p *che la contenga e sia immersa in* V_m $(m > p)$.

8. Altri sistemi di curve, pure interessanti le deformazioni di specie superiore, si ottengono sostituendo nella definizione delle k-geodetiche al piano o allo S_m tangente in un punto altri spazi collegati in modo invariante ad intorni d'ordine > 1 della superficie o varietà; per es. gli spazi r-osculatori. Tutto ciò richiede sviluppi non consentiti dai limiti di questa Nota.

Digitized by Google

Geometria. — *Sistemi assiali e connessioni nelle* V_m. Nota di E. BORTOLOTTI, presentata [1] dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Sia σ una varietà ad m dimensioni (V_m) di S_n ($2 \leq m < n$). Sia $m + t$ il numero delle dimensioni dello spazio 2-osculatore [2] a σ nel punto P generico. Fissiamo (con legge arbitraria, ma continua), per ogni punto P di σ, entro l'S_{m+t} 2-osculatore, un S_t (spazio d'appoggio) ω, non incidente (fuori di P) l'S_m tangente in P a σ. La congruenza $\{\omega\}$ di S_t così associata ai punti di σ determina sulla varietà un sistema $\infty^{2(m-1)}$ di linee, definito da questa proprietà: *i piani osculatori di ogni punto* P *di* σ *alle linee del sistema che ne escono incontrano* (lungo rette) *lo spazio* ω *associato a* P. Tali sistemi sono stati introdotti dal prof. Bompiani, che li ha denominati *sistemi assiali* o *pluriassiali* (*t-assiali* quando occorra tener presente la dimensione dello spazio d'appoggio). Il concetto generale, ancora più vasto di quello ora indicato, è già accennato in una Nota del 1912 [3]; i successivi sviluppi di esso per lo studio proiettivo-differenziale delle superficie e per le corrispondenze puntuali fra esse, insieme a nuovi risultati metrici si trovano riassunti in una Nota in questo numero dei « Rendiconti » [4].

Nella presente Nota io invece ho specialmente in vista le relazioni che lo studio dei sistemi assiali presenta con quello delle *connessioni* nelle varietà.

2. Per questo darò anzitutto la *rappresentazione analitica* dei sistemi t-assiali. Fissati, con legge arbitraria (ma continua al variare di P) entro l'S_{m+t} 2-osculatore in P a σ t punti $X^j_{(r)}$ ($r = 1, 2, \cdots, t$; $j = 0, 1, \cdots, n$; l'indice superiore verrà d'ora in poi generalmente sottinteso), indipendenti tra loro e dai punti $x, x_{(s)}$ $\left(\text{ove } x_{(s)} = \dfrac{\partial x}{\partial u_s};\ s = 1, 2, \cdots, m\right)$ riferiamo l'S_{m+t} ai punti $x, x_{(s)}, \cdots, x_{(m)}, X_{(s)}, \cdots, X_{(t)}$. I punti *derivati secondi* $x_{(ik)} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k}$ avranno in questo sistema certe coordinate $z^c = a^c_{(ik)}$, cioè si esprimeranno con relazioni del tipo

$$(1) \qquad x_{(ik)} = a^0_{ik}\, x + \sum_1^m{}_r\, a^r_{ik}\, x_{(r)} + \sum_1^t{}_s\, a^{m+s}_{ik}\, X_{(s)}.$$

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(2) BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, « Atti Accad. Torino », vol. 48, 1913.

(3) Loc. cit. n. 6.

(4) BOMPIANI, *Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà.*

Digitized by Google

Ciò posto: siano $v_t^{j_1, j_2, \cdots, j_t}$ (ove $j_1, j_2, \cdots, j_t$ è una combinazione della classe t di $1, 2, \cdots, m+t$) le coordinate di Grassmann, nell'S_{m+t-1} dei punti $x_{(r)}, X_{(s)}, (\bar{z}^0 = 0)$, di un S_{t-1} generico, cioè anche: le coordinate, nella stella P di S_{m+t}, di un S_t, assegnato come S_t d'appoggio; le equazioni differenziali del sistema t-assiale corrispondente si scrivono:

$$(2)\quad du_r\, d^2 u_m - du_m\, d^2 u_r = \sum_{1}^{m}{}_{i,k} A_{ik}^m\, du_i\, du_k\, du_r - \sum_{1}^{m}{}_{i,k} A_{ik}^r\, du_i\, du_k\, du_m$$

$$(r = 1, 2, \cdots, m-1)$$

cioè

$$(2)^*\quad du_r\, d^2 u_m - du_m\, d^2 u_r = \sum_{1}^{(m)}{}_{i,k} A_{ik}^m\, du_i\, du_k\, du_r - \sum_{1}^{(r)}{}_{i,k} A_{ik}^r\, du_i\, du_k\, du_m +$$

$$+ \sum_{1}^{m}{}_{i} \alpha_{ir}\, du_i\, du_r\, du_m, \qquad (r = 1, 2, \cdots, m-1)$$

ove $\sum_{1}^{(s)}{}_{i,k}$ indica sommazione da 1 ad m *con esclusione dell'indice* s, ed è

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha_{ir} = 2\left(A_{im}^m - A_{ir}^r\right) & (\text{per } i \neq r\ ,\ i \neq m), \\ \alpha_{rr} = 2 A_{rm}^m - A_{rr}^r\ , \quad \alpha_{mr} = A_{mm}^m - 2 A_{mr}^r; \end{cases}$$

e si ha poi

$$(4)\quad A_{ik}^l = \frac{\sum_{1}^{t}{}_{s} a_{ik}^{m+s}\, v^{m+1, \cdots, m+s-1,\ l,\ m+s+1, \cdots, m+t}}{v^{m+1, m+2, \cdots, m+t}} - a_{ik}^l$$

$$(i, t, l = 1, 2, \cdots, m).$$

3. Questo risultato resta valido anche se l'ambiente, anzichè uno *spazio proiettivo* (S_n) è una *varietà a connessione proiettiva*, $\mathfrak{P}_n$ [1], o in particolare, *una varietà a connessione affine*, A_n, o uno *spazio affine*, E_n.

Nel caso di una $\mathfrak{P}_n$, se x^λ ($\lambda, \mu, \nu, \omega = 1, 2, \cdots, n$, ora e nel seguito) sono cordinate curvilinee in $\mathfrak{P}_n$, ed y^a ($a, b, c = 0, 1, 2, \cdots, n$) sono coordinate proiettive omogenee nell'S_n proiettivo associato (per la connessione supposta) al punto x^λ – rispetto a un sistema di riferimento formato dagli $n+1$ punti indipendenti u_a^c; u_0^c essendo il punto x^λ stesso – si ha

$$(5)\quad \delta u_a^c = \sum_{\nu} \left(\Lambda_{a\nu}^b\, dx^\nu\right) u_b^c,$$

e quindi

$$(6)\quad \delta y^c = dy^c + \sum_{b} \left(\Lambda_{b\nu}^c\, dx^\nu\right) y^b;$$

(1) Ved. CARTAN, *Sur les variétés à connexion projective*, «Bull. Soc. Mat.», to. 52, 1924, pp. 205-241; SCHOUTEN, *Erlanger Programm und Uebertragungslehre...*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», to. 50, 1926, pp. 142-169. Le notazioni $\mathfrak{P}_n$, A_n, E_n sono quelle usate da SCHOUTEN.

Digitized by Google

(dove è esplicitamente indicata la sommazione (da o ad n) rispetto agli indici muti *latini*, e sottintesa quella relativa agli indici *greci* (da 1 ad n)). Le (5) definiscono la *connessione proiettiva* in $\mathfrak{P}_n$; le $\Lambda^b_{a\mu}$ sono le *componenti* della connessione proiettiva, e le supporremo qualunque, purchè legate dalle condizioni

$$(7)\qquad \mathfrak{P}^{\cdots c}_{\omega\mu\,o} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Lambda^c_{o\omega} - \frac{\partial}{\partial x^\omega}\Lambda^c_{o\mu} + \sum_b \left(\Lambda^c_{b\mu}\Lambda^b_{o\omega} - \Lambda^c_{b\omega}\Lambda^b_{o\mu}\right) = 0\,,$$

esprimenti che la connessione proiettiva è *simmetrica*, o, secondo Cartan, *senza torsione* (1).

Ora: si può verificare che basta sostituire,

$$\text{ad } x^j_{(r)},\ \Lambda^j_{o\mu}\,x^\mu_{(r)};\ \text{ad } x^j_{(rs)},\ \Lambda^j_{o\mu}\,x^\mu_{(rs)} + \left(\frac{\partial\Lambda^j_{s\mu}}{\partial x^\nu} + \sum_b \Lambda^j_{b\mu}\Lambda^b_{o\nu}\right)x^\mu_{(r)}\,x^\nu_{(s)}\ ,$$

perchè valga senz'altro inalterato, anche per una V_m in $\mathfrak{P}_n$, il precedente risultato, relativo ai sistemi t-assiali. Si osservi soltanto che t risulta ora dipendente anche dalla natura della connessione in $\mathfrak{P}_n$.

4. Il caso in cui lo spazio ambiente sia una varietà A_n a connessione affine può farsi rientrare nel precedente, come caso particolare (2): basta supporre

$$(8)\qquad \Lambda^o_{a\mu} = 0\quad,\quad \Lambda^\nu_{o\mu} = a^\nu_{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu = \mu \\ 0 & \text{se } \nu \neq \mu, \end{cases}$$

e nterpretare y^λ come coordinate cartesiane di un punto, o anche, come componenti di un vettore uscente da P, entro un E_n affine associato al punto generico P di A_n: rispetto agli assi che escono da P con le direzioni degli n vettori fondamentali μ^μ_ν. Si osservi che ciò equivale, in sostanza, ad assumere, entro l'S_n proiettivo associato al punto generico P di $\mathfrak{P}_n$, come *iperpiano improprio* l'S_{n-1} ($y^o = 0$) che contiene gli n punti μ^ϵ_ν, sì da farne uno spazio E_n *affine*: e insieme, nella trasformazione proiettiva infinitesima (5) tra l'S_n associato a P e l'S_n associato a un punto (di $\mathfrak{P}_n$) infinitamente vicino, imporre la corrispondenza tra gli S_{n-1} ora detti, sì da renderla una *trasformazione affine* (3). Posto $\Lambda^\omega_{\mu\nu} = \Gamma^\omega_{\mu\nu}$ (essendo sempre $a, b, c = 0, 1, \cdots, n$; $\lambda, \mu, \nu, \omega = 1, 2, \cdots, n$), le $\Gamma^\omega_{\mu\nu}$ risultano appunto le componenti di una *connessione affine*, nel senso di Weyl e Schouten, cioè, *simmetrica* (senza torsione), come si vede dalle (7), che dànno ora $\Gamma^\omega_{\nu\mu} = \Gamma^\omega_{\nu\mu}$. Le formule relative ai sistemi t-assiali restano valide, sostituito soltanto $x^\lambda_{(rs)} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,x^\mu_{(r)}\,x^\nu_{(s)}$ ad x^λ_{rs}.

(1) Ved., per quanto precede, SCHOUTEN, loc. cit. nota prec., pp. 153–155.
(2) Ved. SCHOUTEN, loc. cit., p. 150.
(3) Cfr. SCHOUTEN, loc. cit., ibid.

Digitized by Google

5. Riprendiamo le equazioni (2), che sotto le condizioni (4) rappresentano, in V_m, un sistema t-assiale. Se trascuriamo le (4), vediamo che i più generali sistemi (2), o (2)*, dipendono da $\nu = \frac{m(m-1)(m+2)}{2}$ parametri indipendenti: invece un sistema t-assiale è determinato dall'assegnare le $v^{j_1, j_2, \cdots, j_t}$. Ora queste sono in numero di $\binom{m+t}{t}$, (omogenee), e tra di esse sussistono $\binom{m+t}{t} - mt - 1$ relazioni quadratiche indipendenti [1]; cosicchè il numero delle $v^{j_1, j_2, \cdots, j_t}$ indipenendenti è mt. Ne segue che, *in generale:*

Se t ha il valore massimo $t = \frac{m(m+1)}{2}$, un qualunque sistema (2) *può interpretarsi in infiniti modi come un sistema t-assiale: per ogni punto, l'S_t d'appoggio può scegliersi a piacere entro una totalità ∞^m lineare* [2].

Se $t = \frac{m(m+1)}{2} - 1$, ogni sistema (2) può interpretarsi in un numero *generalmente* finito di modi, come un sistema t-assiale: se

$$t < \frac{m(m+1)}{2} - 1,$$

in generale un sistema (2) non è un sistema t-assiale [3].

6. Ma veniamo infine alla relazione con *connessioni.*

Le $m - 1$ equazioni (2), (considerate a sè, senza le condizioni (4)), coincidono con le equazioni delle *geodetiche* di una *connessione proiettiva* in V_m [4]. D'altra parte esse possono anche scriversi, con opportuna scelta del paremetro t,

$$\frac{d^2 u_l}{dt^2} = \sum_{1}^{m}{}_{i,k} A_{ik}^{l} \frac{du_i}{dt} \frac{du_k}{dt}. \tag{9}$$

(1) Ved. BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, SPOERRI, 1907, p. 39.

(2) In particolare per $m = 2, t = 3$ (sistemi 3-assiali sulle superficie) ogni sistema (2) può interpretarsi in ∞^2 modi come un sistema 3-assiale: gli S_3 d'appoggio in un punto P formano un cono del 3° ordine e di 3ª classe, che contiene anche gli ∞^1 piani osculatori in P alle linee del sistema che ne escono, ed è la figura duale in S_5 di una nota V_3^3, contenente ∞^1 piani e ∞^2 rette, studiata da SEGRE e da PERAZZO.

(3) Si tenga ben presente che in ipotesi *particolari* anche assai estese, le cose cambiano. Ad es., il prof. BOMPIANI dimostra (in uno studio di prossima pubblicazione, dedicato a un'estesa trattazione del caso $m = 2, t = 2$: *sistemi planari* sulle superficie) che su di una superficie a punti *planari parabolici* un sistema planare può interpretarsi in ∞^1 modi come tale: per quanto si sia proprio nel caso $t = \frac{m(m+1)}{2} - 1$.

(4) CARTAN, *Sur les variétés...*, già cit., p. 220.

Digitized by Google

e quindi vediamo che le (2) coincidono anche con le equazioni delle geodetiche di una *connessione affine* (secondo Weyl) in V_m, o (che è lo stesso), dei « paths » di una Geometria nel senso di Eisenhart, Veblen, Thomas [1]. Per $m = 2$, le (2) si riducono a una sola equazione del tipo

$$(10) \qquad du\,d^2u - du\,d^2u = A\,du^3 + B\,du^2\,du + C\,du\,du^2 + D\,du^3,$$

di cui recentemente il prof. Bompiani ha mostrato il significato geometrico e le importanti proprietà proiettive [2].

7. Ora: che cosa porta l'aggiunta delle condizioni (4)? cioè: *che cosa distingue i sistemi assiali, tra i sistemi di geodetiche di una connessione affine o proiettiva in* V_m?

Supponiamo in primo luogo che l'ambiente sia una A_n (o in particolare, un E_n affine). Rammentiamo qual'è la via seguita da Berwald [3] (per V_m in E_{m+1}), da Weyl [4] (per V_m in E_n) e poi, più in generale, da Schouten [5] (per V_m in A_n), per definire, su di una V_m immersa in una A_n, *una connessione affine, subordinata alla geometria dell'ambiente.* Viene scelto per ogni punto P di V_m (naturalmente, entro l'E_n affine associato a P in A_n per la connessione dell'ambiente) un E_{n-m} (cioè: un $(n-m)$ — — piano, o $(n-m)$ — vettore), $w^{j_1, j_2, \cdots, j_{n-m}}$, *pseudonormale*, e, detto ξ^λ un qualunque vettore di E_n appartenente all'E_m tangente in P a V_m, e $\delta\xi^\lambda$ il vettore ottenuto da ξ^λ per differenziazione tensoriale in A_n, si definisce $\delta'\xi^\lambda$ (differenziale tensoriale in V_m) come *proiezione di* $\delta\xi$, *fatto parallelamente a* $w^{j_1, j_2, \cdots, j_{n-m}}$, *sull'*$E_m$ *tangente in* P. Se l'A_n ambiente è uno spazio affine E_n, ciò equivale a trasformare l'E_m tangente in P nell'E_m tangente in un punto infinitamente vicino di V_m, con proiezione parallela a $w^{j_1, j_2, \cdots, j_{n-m}}$.

Ora si scorge agevolmente che: *il sistema t-assiale corrispondente, su* V_m, *a un'assegnata congruenza* $\{\omega\}$ *di* E_t, *coincide col sistema delle geodetiche della connessione affine subordinata, in* V_m, *da una congruenza di* E_{n-m} *associati ai punti di* V_m, *e contenenti gli* E_t *supposti (del resto arbitrari).*

(1) Ved. Veblen e Thomas, *The Geometry of Paths* (« Trans. Amer. Math. Soc. », vol. 25, 1923, pp. 551-608).

(2) Bompiani, *Sulla Geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* (« Rendiconti Lincei », ser. 6ª, vol. IV, 2° sem., 1926, pp. 262-267).

(3) Berwald, *Zur Geometrie einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit im* $(n+1)$ *- dimensionalen Euklidisch - affinen Raum* (« Jaresb. Deut. Mat. Ver. ». Bd. 31, 1922, pp. 162-170).

(4) Weyl, *Zur Infinitesimalgeometrie: p-dimensionale Fläche in n dimensionalen Raum* (« Math. Zeitschrift », Bd. 12, 1922, pp. 154-160).

(5) Schouten, *Ueber die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Uebertragungen* (« Math. Zeitschrift », Bd. 17, pp. 161-188; *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer 1923, pp. 128-166).

Digitized by Google

Dunque: le (2) dànno sempre le geodetiche di una connessione affine in V_m: ma soltanto se, per un valore di t convenientemente preso, esistono dei valori delle $w^{j_1, j_2, \cdots, j_t}$ soddisfacenti alle (4) tale connessione affine può considerarsi come subordinata a una geometria data in un opportuno spazio ambiente. Questo se lo spazio ambiente è uno spazio affine, o anche, uno spazio a *connessione affine* assegnata: se invece si dispone della scelta dei parametri della connessione affine nello spazio ambiente, quella subordinazione è sempre possibile, come è naturale; ma ciò non presenta interesse.

8. Considerazioni analoghe possono svolgersi pel caso in cui l'ambiente sia una $\mathfrak{P}_n$ a connessione proiettiva, o in particolare, uno spazio proiettivo S_n. Generalizzando un'osservazione fatta da Cartan [1] circa le V_2 in R_3, data una V_m in $\mathfrak{P}_n$ possiamo definire su V_m una connessione proiettiva, subordinata alla geometria di $\mathfrak{P}_n$, assegnando nell'S_n associato (per la connessione proiettiva dell'ambiente) al punto generico P di V_m in $\mathfrak{P}_n$, un S_{n-m-1} *non passante per* P (per $m = n - 1$, *un punto*; *il polo normale* di Cartan), e definendo $\delta' y^c$ (ove y^c è un qualunque punto dell'S_m tangente in P alla V_m supposta) come proiezione di δy^c, dall'S_{n-m-1} supposto, sull'S_m tangente. Ciò equivale, se la $\mathfrak{P}_n$ ambiente è un S_n, a trasformare l'S_m tangente in P a V_m nell'S_m tangente in un punto infinitamente vicino di V_m, con *proiezione* fatta dall'S_{n-m-1} supposto.

Ora: *le linee di un sistema t-assiale, corrispondente ad un'assegnata congruenza* $\{\omega\}$ *di* S_t *associati ai punti* P *di* V_m, *sono appunto le linee geodetiche, nel senso di Cartan* [2] *della connessione proiettiva subordinata in* V_m *da una congruenza di* S_{n-m-1} *associati ai punti di* V_m, *e proiettati dai corrispondenti punti di* V_m *secondo degli* S_{n-m} *che contengano gli* S_t *supposti* (*del resto arbitrari*).

(1) CARTAN, *Sur la connexion projective des surfaces* («Comptes Rendus», to. 178, 1° sem., 1924, pp. 750-752).

(2) CARTAN, *Sur les variétés à connexion projective* (già cit.), p. 219.

Digitized by Google

Geometria. — *Sull'elemento lineare di Liouville.* Nota di W. BLASCHKE, presentata [1] dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Com'è noto si dà questo nome al

$$ds^2 = \{ U(u) + V(v) \} \{ du^2 + dv^2 \} .$$

Nel 1846 Liouville nel volume 11° del suo giornale fondandosi sulle ricerche di Jacobi del 1838 sulle geodetiche dell'ellissoide ha dimostrato la proprietà principale di questo ds^2, che le geodetiche si possono determinare con quadrature. Da allora in poi molti si sono occupati di questo ds^2; basti ricordare, per esempio, i nomi di Ricci in Italia e di Stäckel in Germania. Negli ultimi anni la teoria di Liouville è divenuta importante anche per la fisica matematica, cioè per la teoria dei quanta. Ma forse manca ancora una questione geometrica conducente subito al ds^2 di Liouville, benchè U. Dini, nel 1869, e A. Voss, nel 1906, abbiano trovato significati geometrici del nostro ds^2 [2].

A un mio scolaro di nome Zwirner ho proposto di cercare tutti i ds^2 colla proprietà, *che in tutti i loro quadrangoli* $u_1 < u < u_2$, $v_1 < v < v_2$ *formati dalle linee* $u , v =$ cost. *le diagonali geodetiche abbiano la stessa lunghezza.* Lo Zwirner trovò: *La condizione necessaria e sufficiente è che il* ds^2 *abbia la forma di Liouville.* Ecco un significato semplice e soddisfacente del nostro ds^2! I calcoli dello Zwirner [3] sono assai faticosi. Perciò ho cercato una via più diretta al risultato dello Zwirner.

2. Cerchiamo dunque un elemento lineare $ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ colla proprietà delle diagonali eguali. Cominciamo a dimostrare: Le curve $u , v =$ const. devono essere ortogonali, cioè $f = 0$. Infatti siano $(u_0 v_0)$, (uv_0), (uv), $(u_0 v)$ quattro punti della nostra superficie, per $|u - u_0|$ e $|v - v_0|$ abbastanza piccoli gli angoli ed i rapporti delle distanze geodetiche di questa figura s'avvicinano a quelli di un parallelogramma euclideo. Dalla eguaglianza delle diagonali segue dunque la ortogonalità del parallelogramma.

3. Se un arco geodetico varia coll'origine fissa e colle variazioni $\delta u , \delta v$ del suo termine, la sua lunghezza aumenta di

$$\delta s = \frac{e\,du\,\delta u + g\,dv\,\delta v}{ds}$$

dove du , dv , ds si riferiscono all'ultimo elemento dell'arco geodetico.

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(2) « Annali di Mat. » (2), 3 (1870), p. 270; « Münchener Berichte », 36 (1906), p. 269.

(3) K. ZWIRNER, *Zur Riemannschen Geometrie I, Orthogonalsysteme, in denen Ivorys Theorem gilt.* « Hamburger Abhandlungen », 5 (1927).

Digitized by Google

Applicando questa formola ben nota alle diagonali del nostro quadrangolo, variando u_0 troviamo

$$\frac{\delta s}{\delta u_0} = \left[\frac{e\,du}{ds}\right]_{u_0 v_0} = \left[\frac{e\,du}{ds}\right]_{u_0 v}$$

e variando v_0 si ottiene nella stessa maniera

$$\frac{\delta s}{\delta v_0} = \left[\frac{g\,dv}{ds}\right]_{u_0 v_0} = \left[\frac{g\,dv}{ds}\right]_{u v_0};$$

e variando u e v segue

$$\left[\frac{e\,du}{ds}\right]_{u v_0} = \left[\frac{e\,du}{ds}\right]_{u v} \qquad , \qquad \left[\frac{g\,dv}{ds}\right]_{u_0 v} = \left[\frac{g\,dv}{ds}\right]_{u v} .$$

4. Dalla doppia infinità delle nostre geodetiche scindiamo ora una infinità dipendente da un solo parametro, che copra *doppiamente* la vicinanza della curva $u = u_0$, ponendo la condizione iniziale su questa linea

$$\pm \left[\frac{e\,du}{ds}\right]_{u_0 v} = \left[\frac{e\,du}{ds}\right]_{u_0 v_0} = c$$

identicamente in v e con $c \neq 0$, $c \neq \sqrt{e}$. Dalle considerazioni del § 2 segue, che questo sistema di geodetiche soddisfa a un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\pm \frac{e\,du}{ds} = \varphi(u) \qquad , \qquad \pm \frac{g\,dv}{ds} = \psi(v) .$$

Infatti il nostro sistema di geodetiche $(u_0 v)\,(u v_0)$, dipendenti dal parametro variabile v e soddisfacenti la condizione iniziale

$$\pm \left[e\,\frac{du}{ds}\right]_{u_0 v} = c$$

tagliano tutti la linea v_0 sotto lo stesso $g\,dv : ds$, perchè i quadrangoli corrispondenti hanno le diagonali $(u_0 v_0)\,(uv)$ su una delle due geodetiche fisse passanti per $(u_0 v_0)$ colla direzione $e\,du : ds = c$. Variando prima v_0 e poi u_0 si confermano per il nostro sistema le equazioni

$$\pm\, e\,du : ds = \varphi(u) \qquad , \qquad \pm\, g\,dv : ds = \psi(v) .$$

In queste equazioni è tutto contenuto.

5. Nel sistema di geodetiche considerato ora scegliamo una serie continua, che copra *semplicemente* una regione della nostra superficie, un « campo »

Digitized by Google

di geodetiche secondo la terminologia di Weierstrass. Se un campo di curve soddisfa le condizioni

$$e\,\frac{du}{ds} = \varphi(u) \qquad , \qquad g\,\frac{dv}{ds} = \psi(v)$$

le curve del campo sono certamente geodetiche, perchè l'integrale

$$H = \int e\,\frac{du}{ds}\,\delta u + g\,\frac{dv}{ds}\,\delta v = \int \varphi\,\delta u + \psi\,\delta v$$

si riduce alla lunghezza per le curve del campo ed è indipendente dalla curva d'integrazione. Si tratta dell' « integrale d'indipendenza » trovato nel 1868 da Beltrami e ritrovato nel 1900 da Hilbert. La funzione $H(u,v)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\nabla H = \frac{H_u^2}{e} + \frac{H_v^2}{g} = 1$$

col significato geometrico, che le curve $H = \text{const.}$ siano geodeticamente parallele. ∇ è il primo differenziatore di Beltrami. Nel nostro caso abbiamo dunque

$$\frac{\varphi(u,c)^2}{e} + \frac{\psi(v,c)^2}{g} = 1\,,$$

dove è messo in evidenza che le funzioni φ, ψ dipendono dalla costante c introdotta in § 4. Differenziando rispetto a c si ha

$$\frac{\varphi\,\varphi_c}{e} + \frac{\psi\,\psi_c}{g} = 0\,,$$

vuol dire: il rapporto $e:g$ ha la forma funzione di u : funzione di v. Mettendo invece di u e di v una conveniente funzione di u, rispettivamente di v, si ottiene $e = g$.

Dall'equazione penultima segue allora

$$e = g = \varphi(u)^2 + \psi(v)^2$$

e noi siamo arrivati al ds^2 di Liouville.

6. Ora resta a dimostrare viceversa: Le diagonali geodetiche dei quadrangoli formati dalle curve $u, v = \text{const.}$ di un elemento lineare di Liouville

$$ds^2 = \{\, U(u) + V(v) \,\}\,\{\, du^2 + dv^2 \,\}$$

sono eguali. La equazione $\nabla H = 1$ dà nel nostro caso

$$H_u^2 + H_v^2 = U + V$$

Digitized by Google

ed ha dunque fra altre le soluzioni

$$H = \int \sqrt{U + C} \cdot du + \int \sqrt{V - C} \cdot dv .$$

Le nostre funzioni φ , ψ hanno ora i valori

$$\varphi^2 = U + C \quad , \quad \psi^2 = V - C .$$

Invertendo le considerazioni del § 3 si vede, come la differenza delle diagonali $(u_0 v_0)(uv) - (u_0 v)(u v_0)$ sia indipendente, per esempio, da v. Se ammettiamo, che per $v = v_0$ le diagonali coincidano, la nostra affermazione è dimostrata.

7. Si vede specialmente dall'ultimo paragrafo, che per la giustezza delle nostre ricerche alcune restrizioni sono indispensabili.

Possiamo limitarci, per esempio, a una regione semplicemente connessa della nostra superficie di Liouville geodeticamente convessa, cosicchè per due punti qualsiasi della regione sia determinato un solo arco geodetico, che non esce dalla regione.

Nella regione le linee $u =$ cost. ed anche le linee $v =$ cost. devono formare un « campo » nel senso del § 5, e ciascuna di queste linee deve incontrare l'orlo della regione soltanto in due punti.

Come si vede già in casi semplici le diagonali non sono sempre contenute nei loro quadrangoli $u_0 < u < u_1 \quad , \quad v_0 < v < v_1$.

8. Ricerche analoghe, di cui alcune trattate nel lavoro dello Zwirner, possono farsi per i ds^2 a più variabili. Coi nostri metodi si ottiene il teorema che mi limito ad enunciare:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè in una V_3 *riemanniana in « ogni » corpo* $u_0 < u < u_1 \quad , \quad v_0 < v < v_1 \quad , \quad w_0 < w < w_1$ *le quattro coppie di vertici opposti abbiano distanze geodetiche eguali è, che l'elemento lineare della* V_3 *abbia la forma di Stäckel*

$$ds^2 = \begin{vmatrix} U & V & W \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} \left\{ \frac{du^2}{V_1 W_2 - V_2 W_1} + \frac{dv^2}{W_1 U_2 - W_2 U_1} + \frac{dw^2}{U_1 V_2 - U_2 V_1} \right\} ,$$

nella quale, per es., U , U_1 , U_2 sono funzioni indipendenti della sola variabile u .

Per questi spazi secondo Stäckel l'equazione differenziale

$$\nabla H = \frac{(V_1 W_2 - V_2 W_1) H_u^2 + (W_1 U_2 - W_2 U_1) H_v^2 + (U_1 V_2 - U_2 V_1) H_w^2}{\begin{vmatrix} U & V & W \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix}} = 1$$

Digitized by Google

ammette la soluzione « completa » e « separata »

$$H = \int \sqrt{U + \alpha U_1 + \beta U_2} \cdot du + \int \sqrt{V + \alpha V_1 + \beta V_2} \cdot dv +$$
$$+ \int \sqrt{W + \alpha W_1 + \beta W_2} \cdot dw$$

contenente le costanti α, β [1]. Analogamente per una V_n.

Abbiamo dunque trovato un significato geometrico per i ds^2 studiati e generalizzati in Italia specialmente da Levi-Civita e dall'Aqua.

9. È facile porre questioni analoghe a quella qui trattata, meno facile risolverle; riferirò un altro risultato in quest'ordine di ricerche.

Se si cercano tutti i $ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ con la proprietà, che le due diagonali geodetiche di ogni quadriangolo $u_0 < u < u_1$, $v_0 < v < v_1$ si seghino a metà, si trova che la curvatura gaussiana del ds^2 è necessariamente eguale a zero e ponendo $ds^2 = dx^2 + dy^2$ si ha

$$x = U_1(u) + V_1(v) \quad , \quad y = U_2(u) + V_2(v) .$$

Anche questa ricerca si estende allo spazio.

Matematica. — *Sulla curvatura e sul parallelismo in una superficie.* Nota di G. ANDREOLI, presentata [2] dal Socio R. MARCOLONGO.

§ 1. In alcune ricerche, il Cassina [3] si è occupato, seguendo il Minkowski, di definire alcune quantità, connesse ad una linea piana, ed altre connesse ad una superficie dello spazio ordinario: per questa, ad esempio, si ritrova il concetto di *curvatura totale o integra* e se ne trova uno nuovo che il Cassina chiama *lunghezza della superficie.*

Orbene tale ricerca si presta ad estensioni notevoli, inquantochè si ricollegano ai concetti di curvatura, di parallelismo in varietà non lineari, e così via.

In questa Nota, noi ci limiteremo esclusivamente allo studio delle linee tracciate su una superficie: e precisamente, data una linea chiusa priva di cappi, l, tracciata sulla superficie S, considereremo come elemento fonda-

(1) P. STÄCKEL, « Mathematische Annalen », 42 (1893), specialmente p. 594.

(2) Nella seduta del 6 febbraio 1927.

(3) U. CASSINA, *Volume, area*, ecc., « Atti R. Acc. Sc. », Torino, vol. LVII, 1922; *Area, lunghezza*, ecc., « Rend. R. Acc. Linc. », vol. XXXI, 1922; *Volume del solido*, ecc., « Rend. Ist. Lomb. », vol. LVI, 1923.

Digitized by Google

mentale (invece della operazione V(h) del Cassina) quella operazione che consiste nel considerare la striscia racchiusa fra la curva ed uno dei due rami dell'inviluppo dei cerchi geodetici di raggio h, aventi i loro centri sulla curva.

Dalla considerazione dell'area di questa striscia [1], infinitesima come h, e più precisamente del coefficiente di h^2 nello sviluppo dello infinitesimo stesso, si avrà la voluta connessione con il parallelismo lungo il circuito chiuso l.

Ne segue che nei punti della superficie privi di piano tangente e di curvatura occorre considerare altri tipi di curvatura: e precisamente una *curvatura angolare* lungo le linee angolose (lungo cui cioè la superficie ha due semipiani tangenti distinti); ed una *curvatura conica* nei punti conici della superficie.

Orbene, estendendo il notissimo teorema sul significato dell'eccesso geodetico, si ottiene la conosciuta relazione fra l'angolo di parallelismo ε attaccato al circuito l, e l'integrale della curvatura gaussiana su tutto il pezzo di superficie limitato da l.

Chiamando eccesso di parallelismo l'angolo $2\pi - \varepsilon$, con le nozioni ora indicate il teorema viene da noi ancora esteso, nel senso che:

L'eccesso di parallelismo, dà l'integrale della curvatura gaussiana, esteso al pezzo di superficie (escluse linee angolose e punti conici), *aumentato dell'integrale lineare della curvatura angolare lungo le linee angolose* (esclusi i punti conici), *aumentato ancora della somma delle curvature coniche nei punti conici.*

In sostanza tali concetti conducono ad osservare che, nel caso di superficie dotate di linee angolose e di punti conici, occorra, nell'integrale

$$\iint_{\sigma} K \, d\sigma \qquad (K = \text{curvatura gaussiana})$$

sostituire al concetto di integrale di Riemann quello di integrale di Stieltjes: come vedremo per due vie diverse. Daremo anche qualche esempio.

In questa Nota ci siamo limitati al solo caso di superficie, perchè esso si trova in relazione con altre nostre ricerche [2]: ci riserviamo però di sviluppare concetti analoghi per le curve gobbe, per le varietà multiple, ecc.

§ 2. Si abbia un pezzo di superficie S, privo di linee doppie, di linee di punti angolosi, di punti conici; sia inoltre dotato di piano tangente

(1) Se lungo l, nel verso delle tangenti positive, si portasse un segmento h, si otterrebbe un'altra striscia, infinitesima come h^2: ed il loro rapporto riconduce agli stessi concetti. Però mentre prima il procedimento si può generalizzare, il secondo non si può. D'altronde, altri invarianti intrinseci di l rispetto ad S sono tutti i coefficienti di $h^3, h^4, \cdots$

(2) G. ANDREOLI, *Sul moto di un punto abbandonato nell'interno di certe regioni.* Memória I. «Giorn. Mat. Batt.»; Napoli, 1926; ID., Mem. II. «Atti Acc. Gioienia», Catania, 1926.

Digitized by Google

in ogni suo punto e non presenti (questo per semplicità di discussione) buchi o tagli; infine *esso sia bilatero*.

Tracciamo sopra S una linea chiusa l, anch'essa dotata di tangente, e che non sia intrecciata.

Indichiamo con $\Omega[S, l; h]$ il numero che misura l'area racchiusa fra la curva stessa e quella che si ottiene portando verso destra (ove si percorra la curva in senso antiorario) un segmento geodetico di lunghezza h su tutte le geodetiche normali alla curva in ciascun suo punto. Beninteso h dovrà essere sufficientemente piccolo affinchè la seconda curva non risulti intrecciata. Tale seconda curva è anche uno dei due rami dell'inviluppo dei cerchi geodetici di raggio h con centro sulla curva primitiva [1].

Si intende che a valori negativi di h corrisponde la stessa costruzione, salvo che i segmenti geodetici sono staccati verso sinistra; e l'altra curva così ottenuta è il secondo ramo dell'inviluppo di cerchi geodetici.

Si può subito osservare quanto segue:

I. Il numero $\Omega[S, l; h]$ infinitesimo con h e dello stesso ordine, differisce dal numero $\Omega[\Sigma, l; h]$ per infinitesimi d'ordine maggiore o eguale ad h^3, ove Σ sia la sviluppabile circoscritta ad S lungo l.

II. Gli infinitesimi $\Omega[S, l; h]$; $-\Omega[S, l; -h]$ differiscono fra loro anch'essi per infinitesimi d'ordine maggiore o eguale ad h^2.

III. Posto $\Omega[S, l; h] = \alpha_1 h + \frac{\alpha_2}{2} h^2 + \varepsilon$ (con ε infinitesimo di almeno terz'ordine) si avrà che: α_1 è la lunghezza λ della curva l, α_2 è eguale all'angolo di parallelismo ottenuto per trasporto di una direzione lungo l su S (o su Σ).

IV. Due superficie, nelle stesse condizioni, tangenti lungo l sono tali che $\Omega[S, l; h]$; $\Omega[S', l; h]$ differiscono per infinitesimi d'ordine superiore al secondo.

La prima di queste si dimostra facilmente con i soliti procedimenti geometrici; e la seconda proprietà ne è una immediata conseguenza. In effetti, dopo aver distesa la sviluppabile Σ su un piano π, la curva l sarà diventata una curva l_1, aperta però; e le due quantità $\Omega[\Sigma, l; \pm h]$ saranno rispettivamente eguali alle $\Omega[\pi, l_1; \pm h]$, ove naturalmente si convenga di spezzare le due strisce curve di piano mediante le normali nei punti estremi P_1 e P_2 che sulla Σ e sulla S vengono a coincidere. Allora le tre curve, l_1 e quelle formate dagli estremi dei segmenti $\pm h$ staccati sulle sue normali, sono evolventi della medesima evoluta ed un semplice calcolo dimostra l'assunto.

Inoltre, tale calcolo mostra che α_2 è proprio eguale all'angolo θ formato dalle due normali estreme in P_1 e P_2 ad l_1 su π: ovverosia ancora

(1) Può anche essere conveniente, per le successive generalizzazioni, considerare il numero $\theta[S, l; h] = \Omega[S, l; h] + \Omega[S, l; -h] = \theta[S, l; -h]$ esprimente l'area racchiusa fra i due rami dell'inviluppo.

Digitized by Google

all'angolo delle due tangenti estreme (nel verso positivo) angolo che corrisponde a quello di parallelismo per trasporto lungo l su S o su Σ.

§ 3. Per poter completare la precedente ricerca, supponiamo ora che la curva l abbia punti angolosi; precisamente sia R uno di essi, e sia ω l'angolo concavo formato dalle due tangenti in R. Allorchè la linea l, considerata come appartenente alla sviluppabile circoscritta Σ, si sviluppa nella l_1 su π, al punto R corrisponderà R_1, anch'esso angoloso, con l'angolo delle tangenti ancora eguale ad ω.

Pertanto, se si percorre la l_1 in modo che il segmento h venga rivolto verso l'angolo concavo, giunti in R_1, le due normali distinte alla l_1 in tal punto, lasceranno fra loro un settore angolare di ampiezza $\omega - \pi$, che risulterà positivo; percorrendo invece l_1 in modo che i segmenti h restino nell'angolo convesso, allora le due normali determineranno nelle due strisce parziali un settore angolare di sovrapposizione di ampiezza $\pi - \omega$.

Se consideriamo (ciò per semplicità) il punto angoloso come sostituito da un piccolissimo raccordo circolare, allora si vede facilmente che nel definire la Ω bisogna, nel primo caso, aggiungere l'ampiezza di quel settore moltiplicata per h^2; nel secondo, invece, sottrarla.

In ogni caso, dunque, un punto angoloso apporta alla linea l_1 nel calcolo di Ω un contributo $(\pi - \omega)h^2$. Naturalmente, con le stesse considerazioni svolte dianzi, si vede che tale quantità è la parte infinitesima di cui bisogna tener conto (nel calcolo di $\Omega[S, l; h]$, ove si trascurino al solito gli infinitesimi (d'ordine superiore al secondo) a causa della presenza del punto angoloso R.

Resta ovvio che, se vi sono diversi di tali punti, bisognerà aggiungere la somma dei contributi arrecati da ciascuno.

Si osservi che i punti angolosi non influiscono affatto sul calcolo di α_1 (come doveva essere del resto a causa del suo significato di lunghezza di l) ma arrecano variazione solo ad α_2.

Infine resta perfettamente invariato il significato di α_2 come integrale della curvatura esteso alla superficie considerata: ed il caso più semplice è precisamente quello che si riferisce al triangolo geodetico, inquantochè le geodetiche sviluppandosi secondo rette, non recano alcun contributo al termine in h^2 nel calcolo di Ω; e per tale termine restano solo i contributi arrecati dagli angoli del triangolo geodetico (punti angolosi) ritrovandosi così il ben noto teorema dell'eccesso di un triangolo geodetico.

§ 4. Passiamo ora al caso di una superficie che soddisfi a tutte le condizioni dianzi dette, salvo che nell'interno della regione abbia un punto conico. Cominciamo dal caso più semplice, cioè proprio dal caso di una porzione K di superficie conica includente nel suo interno il vertice. Dap-

(1) E questo risulta giustificato nel caso dello inviluppo di cerchi; e si osservi inoltre che $\pi - \omega$ è il « salto » angolare fra le direzioni positive della tangente, dovuto ad R.

Digitized by Google

prima sia l un cerchio geodetico avente centro nel vertice: cioè una curva ottenuta portando lungo le generatrici a partire dal vertice, un segmento ρ costante. Riesce evidente allora che, nello sviluppo del cono su un piano, se θ è l'angolo di sviluppo, la linea l corrisponde ad un arco di cerchio di ampiezza θ ed avrà quindi lunghezza $\rho\theta$, d'altro lato si verifica subito che

$$\Omega[K, l; b] = \rho\theta b + \frac{\theta}{2} b^2 = \lambda b + \frac{\theta}{2} b^2$$

e che quindi ad α_1 ed α_2 resta conservato il significato precedentemente visto.

Si vede inoltre che sul cono l'angolo di parallelismo, ottenuto scegliendo come curva di trasporto quel cerchio geodetico, coincide con l'angolo di sviluppo del cono stesso.

Consideriamo adesso il caso più generale di una linea qualunque tracciata ancora su K. Allora (per semplicità di dimostrazione che pur tuttavia resterebbe quasi immutata) supponiamo che una delle generatrici di K sia normale ad l: se per sviluppare K lo tagliamo proprio lungo tale generatrice e ripetiamo le considerazioni svolte nel paragrafo precedente, troveremo proprio $\Omega[K, l; b] = \lambda b + \frac{\theta}{2} b^2 + \varepsilon$, inquantochè le normali estreme alla l_1 nei punti P_1 e P_2 provengono proprio da quelle generatrici scelte e quindi formano fra loro un angolo θ.

§ 5. Infine trattiamo il caso più generale di una superficie S includente il punto conico V, e segniamo un procedimento analogo a quello che si usa nella teoria delle funzioni di v. compl. per i residui.

Escludiamo cioè, il punto V mediante un cerchietto geodetico c, di raggio ρ, eseguiamo quindi un taglio non intrecciato a due bordi b^-, b^+ che congiunga il punto $P_1 \equiv P_2$ di l, con $Q_1 \equiv Q_2$ di c.

Operiamo [1] questa volta, per comodità, con b negativo e consideriamo la curva chiusa

$$m = P_1\, b^-\, Q_1\, c\, Q_2\, b^+\, P_2\, l\, P_1$$

Trascuriamo il calcolo di α_1 che non ci interessa; limitandoci al solo calcolo di α_2 ed indicando ordinatamente con γ_1, γ_2 gli angoli supplementari formati da b con l; e δ_1, δ_2 quelli di b con c, si vede facilmente [2] che:

$$\alpha_2[K, m] = \alpha_2[K, l] + \alpha_2[K, b^-] - \alpha_2[K, b^+] - \alpha_2[K, c] + \\ + (\pi - \gamma_1) + (\pi - \gamma_2) + (\pi - \delta_1) + (\pi - \delta_2) \cdot$$

(1) Si potrebbe anche operare con b positivo e con due tagli sufficientemente vicini, scegliendo $b < \rho$ e minore anche della larghezza minima compresa fra i due tagli b^-, b^+ funzionanti da bordi.

(2) Effettivamente, ciò deriva sempre dal considerare le aree racchiuse fra tre evolventi della stessa evoluta.

Digitized by Google

Per le stesse ragioni, $\alpha_2 [k , b^-] , \alpha_2 [k , b^+]$, a meno di infinitesimi di almeno terz'ordine, sono eguali ed inoltre $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi = \delta_1 + \delta_2$; dunque avremo semplicemente:

$$\alpha_2 [K , m] = \alpha_2 [K , l] + \{ \pi - \alpha_2 [K , c] \} .$$

Per interpretare questo risultato, osserviamo che il primo membro dell'eguaglianza, definisce, per quanto si è visto nel § 1, l'integrale della curvatura esteso a tutta S, escluso un cerchietto attorno al punto conico V; poichè, a causa della curvatura infinita in V, non potremmo attribuire alcun senso (se non con le attuali definizioni) all'integrale stesso, riferito a tutto il pezzo S.

Quindi, ammessa ora l'esistenza di più punti conici, il risultato ottenuto si enuncierà:

L'eccesso di parallelismo $2\pi - \varepsilon$, *ove nella regione vi sieno punti conici, è eguale all'integrale della curvatura esteso a* S (esclusi i punti conici) *aumentato della somma delle curvature coniche dei punti stessi.*

Beninteso, per *curvatura conica* - o per *eccesso conico* - intenderemo la differenza fra 2π e l'angolo di sviluppo del cono, cioè $2\pi - \theta$; esso è eguale anche a $(2\pi - \alpha_2)$.

Se la linea l passa per qualche punto conico, è chiaro che bisogna considerare solo la porzione di cono delle tangenti, incluso nell'interno della porzione S considerata e limitata da l.

Matematica. — *Sulla integrazione delle forme differenziali lineari.* Nota di S. CHERUBINO, presentata[1] dal Corrisp. G. SCORZA.

È ben noto che, dato un dominio A internamente connesso dello spazio S_n (non coincidente con S_n) ed in esso le funzioni $X_i (x_1 x_2 \cdots x_n)$, ivi definite e continue nonchè parzialmente derivabili in ogni punto interno di A, affinchè la forma differenziale lineare

$$(1) \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n$$

vi sia integrabile, cioè esista una $f(x_1 x_2 \cdots x_n)$, definita e continua in A, che in ogni punto interno ad A abbia come derivate parziali le $X_1 , X_2 , \cdots , X_n$, è necessario, ma non sempre sufficiente, che le X_i soddisfino identicamente alle condizioni

$$(I) \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_h} = \frac{\partial X_h}{\partial x_i} \qquad i , h = 1 , 2 , \cdots , n.$$

La sufficienza di queste condizioni dipende dalla connessione del dominio A, a meno che alle X_i non si impongano ulteriori condizioni.

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

La necessità di tener conto della connessione di A è stata messa in perspicua luce anche in una trattazione elementare dal prof. MAURO PICONE il quale, nel suo bel trattato di analisi [1], ha anche segnalato un caso in cui la integrabilità della (1) è assicurata dalle sole condizioni (I), quale che sia la forma di A: questo caso è quello in cui le X_i sono tutte omogenee di egual grado $m \neq -1$.

È dunque lecito domandarsi: esistono classi più generali di funzioni X_i che rendano integrabile la (1) sotto le sole condizioni (I), indipendentemente dalla connessione del dominio A di esistenza?

È questo l'oggetto di una mia ricerca di cui qui appresso riassumo i risultati, che mi sembrano tutti degni di rilievo.

Mi permetto di segnalare specialmente l'ultimo teorema poichè esso, oltre ad assegnare in modo semplice ed espressivo una importante classe di forme integrabili in un dominio A di connessione qualsiasi, dà anche una notevole condizione cui devono necessariamente soddisfare i coefficienti X_i, quando la (1) non è integrabile in A.

1. Nel dominio internamente connesso A dello spazio S_n le n funzioni $X_1, X_2, \cdots, X_n$ siano definite e continue ed in $A - FA$ [2] posseggano tutte le derivate parziali, sino a quelle di ordine $r+1$, con quest'ultime continue.

Detto $P_0(x_1^0 x_2^0 \cdots x_n^0)$ un punto fisso di A, $P(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n)$ un suo punto variabile, ed unendo P_0 con P mediante un arco di curva regolare C la cui lunghezza diciamo σ, si ha, per definizione:

$$(2) \qquad (C)\int_{P_0}^{P} \sum_i X_i\, dx_i = \int_0^{\sigma} \left[\sum_i X_i \frac{dx_i}{ds}\right] ds$$

dove $x_i = x_i(s)$ sono le coordinate parametriche della curva regolare C, descritta in un verso determinato, in funzione dell'arco s di essa avente per origine P_0.

Se la (1) è integrabile in A, il secondo membro della (2) ci dà la $f(\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n)$ che ha per derivate parziali le X_i.

Ponendo, simbolicamente

$$X_i^{(k)} = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k X_i\,;$$

$$X_{i(k)} = \left(x_1 \frac{\partial X_i}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial X_i}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial X_i}{\partial x_n}\right)^k$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)\ (k = 1, 2, \cdots, r+1)$$

(1) *Lezioni di Analisi infinitesimale*, «Circolo matematico di Catania», 1923, pagine 627 e 638.

(2) Adottando le stesse notazioni del citato trattato del prof. M. PICONE, con FA indico la frontiera di A.

Digitized by Google

ed

$$X_{i(0)} = X_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

si ottiene facilmente

$$(3) \qquad X^{(1)}_{i(k)} = k X_{i(k)} + X_{i(k+1)} \qquad k = 0, 1, \cdots, r+1.$$

Tenendo presenti queste posizioni, insieme alle (I) e alla (2), si ricavano le 2 relazioni fondamentali seguenti:

$$(II) \qquad \int_0^\sigma \left[\sum_i X_i \frac{dx_i}{ds}\right] ds = \left[\sum_i x_i X_i\right]_0^\sigma - \left[\sum_i x_i X_i^{(1)}\right]_0^\sigma + \cdots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \cdot \left[\sum_i x_i X_i^{(k-1)}\right]_0^\sigma + (-1)^k \cdot \int_0^\sigma \left[\sum_i X_i^{(k)} \frac{dx_i}{ds}\right] ds ;$$

$$(III) \qquad \int_0^\sigma \left[\sum_i X_i \frac{dx_i}{ds}\right] ds = \left[\sum_i x_i X_i\right]_0^\sigma - \frac{1}{\lfloor 2} \cdot \left[\sum_i x_i X_{i(1)}\right]_0^\sigma + \cdots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{\lfloor k} \cdot \left[\sum_i x_i X_{i(k-1)}\right]_0^\sigma + (-1)^k \cdot \frac{1}{\lfloor k} \cdot \int_0^\sigma \left[\sum_i X_{i(k)} \frac{dx_i}{ds}\right] ds$$

dove k può prendere i valori $1, 2, \cdots, r+1$.

2. Da queste relazioni si deducono immediatamente i seguenti teoremi:

La forma differenziale (1) *è integrabile in* A *qualunque sia la connessione di questo dominio se, oltre a verificarsi le* (I), *accade uno dei seguenti fatti:*

a) *le funzioni* X_i *verificano, per un certo* k, *le relazioni*

$$X_i^{(k)} = \alpha_k X_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

dove α_k *è un numero indipendente dall'indice* i *e diverso da* $(-1)^k$.

b) *sempre per un certo* k, *le* $X_i^{(k)}$ *sono funzioni omogenee di egual grado* m_k *indipendente da* i *e diverso da* -1.

c) *vi è un intiero* k *tale che le* X_i *verifichino le condizioni*

$$X_{i(k)} = \alpha_k X_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

con $\alpha_k \neq (-1)^k \cdot \lfloor k$ *e non dipendente dall'indice* i.

d) *per un certo* k *le* $X_{i(k)}$ *risultano funzioni omogenee di ugual grado* $m_k \neq -1$, *che non dipende da* i.

In ciascuno di questi 4 casi, come nei due seguenti, l'integrale della (1) è senz'altro esplicitamente ottenuto.

3. Tenendo conto che se è $X = UV$, può scriversi, simbolicamente:

$$X_{(k)} = [U + V]_{((k))} = \sum_h^{0 \cdots k} \binom{k}{h} U_{(h)} V_{(k-h)}$$

dalla (III) si deduce che:

Digitized by Google

La forma differenziale (1) *è integrabile in un dominio* A *internamente connesso, di connessione qualsiasi, qualora i suoi coefficienti* X_i, *oltre a verificare le* (I), *siano del tipo*

$$X_i = U_i V_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

con le U_i *funzioni omogenee di egual grado* m *indipendente da* i, *e se inoltre c'è un valore dell'intiero* k *tale che per le somme*

$$\sum_{h}^{0 \cdots k} \binom{k}{h} m (m-1) \cdots (m-h+1) V_{(k-h)}$$

accada uno dei seguenti due fatti:

a) *sono anch'esse omogenee di ugual grado* μ_k, *indipendente da* i, *con* $m + \mu_k \neq -1$;

b) *riproducono le* V_i *moltiplicate per un fattore numerico* α_k *che non dipende da* i *e diverso da* $(-1)^k \cdot \lfloor k$.

4. Se la curva regolare C è chiusa, i secondi membri delle (II) e (III) si riducono ciascuno all'ultimo termine.

Ne consegue il teorema:

Se, nell'interno del dominio internamente connesso A, *le funzioni* X_i, *oltre a soddisfare le* (I), *sono parzialmente derivabili un numero indefinito di volte e queste derivate parziali sono uniformemente limitate*(1) *in ogni porzione limitata di* A, *la forma differenziale* (1) *è integrabile qualunque sia la connessione di* A.

Questo teorema si completa aggiungendo che, sotto le ipotesi in esso enunciate, l'integrale della (1) è la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{\lfloor k} \cdot \left[\sum_i x_i X_{i(k-1)} \right]_0^{\sigma}$$

ed anche dell'altra

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor k+1} \cdot \left[\sum_i x_i X_{i(k)}^{(0)} \right]_0^{\sigma}.$$

In quest'ultima si è posto

$$X_{i(k)}^{(0)} = \left(x_1 \frac{\partial X_i^{(0)}}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial X_i^{(0)}}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial X_i^{(0)}}{\partial x_n} \right)^k$$

ove $\frac{\partial X_i^{(0)}}{\partial x_h}$ è il valore che prende $\frac{\partial X_i}{\partial x_h}$ nel punto $P_0(0, 0, \cdots, 0)$.

(1) Cioè costituiscono un insieme limitato.

Digitized by Google

Matematica. — *Sur le groupes d'holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions. (Cas d'un ds^2 einsteinien).* Nota di J. DUBOURDIEU, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Monsieur Cartan a exposé sa théorie des *groupes d'holonomie des espaces généralisés* dans un Mémoire des « Acta Mathematica » (tome 48), et a donné une classification des espaces de Riemann à 3 dimensions d'après leurs groupes d'holonomie. Sur la suggestion de Monsieur le professeur Levi-Civita, je me suis proposé de donner une classification analogue des espaces de Riemann à 4 dimensions. Je me bornerai dans cette Note à exposer les résultats relatifs au cas particulièrement important d'un ds^2 einsteinien, réservant pour une prochaine Note celui d'un ds^2 défini et positif. Dans l'un et l'autre cas nous classerons les différents groupes d'holonomie possibles [G] d'après le sous-groupe [γ] suivant lequel il transforment les vecteurs de l'espace.

CLASSIFICATION DES ds^2 EINSTEINIENS.

Dans le cas d'un ds^2 einsteinien (c.-à-d. réductible à la forme

$$-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2,$$

les ω_i étant des formes de Pfaff réelles), le groupe [γ] est soit le groupe de Lorentz général (c.-à-d. le groupe engendré par les transformations projectives réelles à 4 variables x_1, x_2, x_3, x_4, laissant invariante la forme $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$), soit un de ses sous-groupes réels. Les transformations infinitésimales du groupe de Lorentz sont:

$$\begin{cases} S_{12} = x_1 p_2 - x_2 p_1 \\ S_{13} = x_1 p_3 - x_3 p_1 \\ S_{23} = x_2 p_3 - x_3 p_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_{14} = x_1 p_4 + x_4 p_1 \\ S_{24} = x_2 p_4 + x_4 p_2 \\ S_{34} = x_3 p_4 + x_4 p_3 . \end{cases}$$

Pour en déterminer les différents types de sous-groupes réels, il suffit comme me l'a fait remarquer Monsieur Cartan, d'étudier la façon dont une transformation du groupe de Lorentz permute entre elles les génératrices de la quadrique Q: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ ($x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, étant alors considérés comme coordonnées homogènes d'un espace euclidien à 3 dimentions).

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

Les différents types ainsi obtenus sont caractérisés par leur ordre et le nombre de génératrices qu'ils laissent invariantes: ce sont les suivants:

$$\gamma_4 \equiv [S_{12}, S_{34}, S_{14} - S_{13}, S_{24} - S_{23}] \qquad \gamma_3 \equiv [S_{13}, S_{14}, S_{34}]$$

$$\gamma_3 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{24} - S_{23}, \alpha S_{12} + \beta S_{34}]$$

$$\gamma_2 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{34}] \qquad \gamma_2 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{24} - S_{23}] \qquad \gamma_2 \equiv [S_{13}, S_{34}]$$

$$\gamma_1 \equiv [S_{14} - S_{13}] \qquad \gamma_1 \equiv [\alpha S_{12} + \beta S_{34}] .$$

Les différents groupes $[\gamma]$ étant ainsi déterminés, à chacun d'eux correspond un certain nombre de groupes d'holonomie possibles qu'on obtient en adjoignant aux transformations infinitésimales de $[\gamma]$ des termes linéaires en $p_1 p_2 p_3 p_4$ et en s'appuyant sur les deux remarques suivantes:

1. *Tout groupe d'holonomie* G *doit admettre au moins une transformation infinitésimale non identiquement nulle laissant invariant un point arbitraire de l'espace.*

2. *Les transformations infinitésimales laissant fixe un point arbitraire ne peuvent pas toutes appartenir à une même sous-groupe g invariant dans* G.

Enfin à tout groupe d'holonomie correspond une forme canonique que l'on obtient en s'appuyant sur le théorème fondamental:

Si un espace de Riemann admet le groupe d'holonomie G, *on peut choisir en chacun de ses points un repère normal tel que la connexion de l'espace soit celle d'un espace à groupe fondamental* G.

Ce repère n'est d'ailleurs déterminé qu'à une transformation près du groupe d'holonomie, et c'est en profitant de cette indétermination pour particulariser les repères que l'on ramène le ds^2 à une forme canonique simple.

Nous conviendrons de représenter la forme différentielle quadratique réelle à 3 variables xyz la plus générale, par $d\sigma^2_{xyz}$ ou $d\tau^2_{xyz}$ suivant qu'elle est définie et positive, ou peut se ramener à la forme $\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2$. Enfin, nous exprimerons le fait qu'une fonction α dépend d'une manière quelconque des variables xyz en écrivant: $\alpha = \alpha(x, y, z)$.

Les résultats obtenus sont contenus dans le tableau suivant, dans lequel au dessous de chaque groupe d'holonomie nous avons indiqué la forme canonique à laquelle on peut réduire le ds^2 par une transformation *réelle*. Il peut d'ailleurs arriver qu'elle ne soit pas unique.

1. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_6 \equiv [S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34}] .$$

Deux types de groupes d'holonomie possibles:

I. $$G_{10} \equiv [S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34}, p_1, p_2, p_3, p_4] .$$

Digitized by Google

C'est le groupe le plus général des déplacements et il lui correspond évidemment un ds^2 absolument général.

II. $$G_6 \equiv [S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34}] .$$

Il lui correspond deux formes canoniques possibles

$$\begin{cases} ds^2 = dt^2 - t^2\, d\sigma^2_{uvw} \\ ds^2 = u^2\, d\tau^2_{vwt} - du^2 . \end{cases}$$

2. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_4 \equiv [S_{12}, S_{34}, S_{13} - S_{14}, S_{23} - S_{24}] .$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible:

III. $$G_8 \equiv [S_{12}, S_{34}, S_{13} - S_{14}, S_{23} - S_{24}, p_1, p_2, p_3, p_4]$$

avec:

$$\begin{cases} ds^2 = dw\,(dt + \beta\, du + \gamma\, dv + \mu\, dw) - \alpha^2\,(du^2 + dv^2) = \\ \quad = \frac{1}{2}[dt + \beta\, du + \gamma\, dv + (\mu + 1)\, dw]^2 - \frac{1}{2}[dt + \beta\, du + \gamma\, dv + \\ \quad + (\mu - 1)\, dw]^2 - \alpha^2\, du^2 - \alpha^2\, dv^2 \\ \qquad \text{où:} \\ \alpha = \alpha(u, v, w) \quad , \quad \beta = \beta(u, v, w) \quad , \quad \gamma = \gamma(u, v, w) \quad , \\ \quad \mu = \mu(u, v, w, t) . \end{cases}$$

3. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_1 \equiv [S_{13}, S_{14}, S_{34}]$$

Deux types de groupes d'holonomie possibles:

IV. $$G_6 \equiv [S_{13}, S_{14}, S_{34}, p_1, p_3, p_4]$$

avec:

$$ds^2 = d\tau^2_{t,v,w} - du^2 .$$

V. $$G_3 \equiv [S_{13}, S_{14}, S_{34}] .$$

Il lui correspond deux formes canoniques possibles:

$$\begin{cases} ds^2 = v^2\,\alpha^2\,(dt^2 - du^2) - dv^2 - dw^2 & \text{avec} \quad \alpha = \alpha(u, t) \\ ds^2 = dt^2 - du^2 - t^2\,\alpha^2\,(dv^2 + dw^2) & \text{avec} \quad \alpha = \alpha(v, w) . \end{cases}$$

Digitized by Google

4. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_3 \equiv [S_{14} - S_{13}\,,\, S_{24} - S_{23}\,,\, S_{12} + cS_{34}]\; c \neq 0\,.$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible:

VI. $$G_7 \equiv [S_{14} - S_{13}\,,\, S_{24} - S_{23}\,,\, S_{12} + cS_{34}\,,\, p_1\,,\, p_2\,,\, p_3\,,\, p_4]$$

avec:

$$\left\{\begin{array}{l} ds^2 = dw\,[dt + \alpha\,du + \beta\,dv + \gamma\,dw] - du^2 - dv^2 = \\ \quad = \frac{1}{2}[dt + \alpha\,du + \beta\,dv + (\gamma + 1)\,dw]^2 - \frac{1}{2}[dt + \alpha\,du + \beta\,dv + \\ \quad + (\gamma - 1)\,dw]^2 - du^2 - dv^2 \\ \qquad \text{où:} \\ \alpha = \alpha(u\,,v\,,w)\;,\; \beta = \beta(u\,,v\,,w)\;,\; \gamma = \frac{c}{4}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u}\right)t + \varphi(u\,,v\,,w). \end{array}\right.$$

5. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_3 \equiv [S_{14} - S_{13}\,,\, S_{24} - S_{23}\,,\, S_{12}]$$

Trois types de groupes d'holonomie possibles:

VII. $$G_6 \equiv [S_{14} - S_{13}\,,\, S_{24} - S_{23}\,,\, S_{12}\,,\, p_1\,,\, p_2\,,\, p_3 - p_4]$$

avec:

$$\left\{\begin{array}{l} ds^2 = dw\,[dt + \alpha\,du + \beta\,dv] - \gamma^2\,(du^2 + dv^2) = \\ \quad = \frac{1}{2}[dt + \alpha\,du + \beta\,dv + dw]^2 - \frac{1}{2}[dt + \alpha\,du + \beta\,dv - dw]^2 - \\ \quad - \gamma^2\,du^2 - \gamma^2\,dv^2 \\ \qquad \text{où:} \\ \alpha = \alpha(u\,,v\,,w) \qquad \beta = \beta(u\,,v\,,w) \qquad \gamma = \gamma(u\,,v\,,w)\,. \end{array}\right.$$

VIII. $$G_4 \equiv [S_{14} - S_{13} + cp_2\,,\, S_{24} - S_{23} - cp_1\,,\, S_{12}\,,\, p_3 - p_4]\; c \neq 0$$

avec:

$$\left\{\begin{array}{l} ds^2 = dw\,(dt + \beta\,du) - \alpha^2\,(c^2 + w^2)\,(du^2 + dv^2) = \\ \quad = \frac{1}{2}[dt + \beta\,du + dw]^2 - \frac{1}{2}[dt + \beta\,du - dw]^2 - \\ \quad - \alpha^2\,(c^2 + w^2)\,[du^2 + dv^2] \\ \qquad \text{où:} \\ \beta = \beta(u\,,v) \quad,\quad \alpha = \alpha(u\,,v) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial\beta}{\partial v} = 4\,c\alpha^2\,. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

IX. $$G_3 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{24} - S_{23}, S_{12}]$$

avec :

$$\begin{cases} ds^2 = dt^2 - du^2 - \alpha^2 (u + t)^2 (dv^2 + dw)^2 \\ \text{où :} \\ \alpha = \alpha (v, w) . \end{cases}$$

6. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_3 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{24} - S_{23}, S_{34}] .$$

Un seul groupe d'holonomie possible:

X. $$G_7 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{24} - S_{23}, S_{34}, p_1, p_2, p_3, p_4]$$

avec :

$$\begin{cases} ds^2 = dw [dt + \alpha\, dw] - du^2 - dv^2 = \\ \qquad = \frac{1}{2} [dt + (\alpha + 1)\, dw]^2 - \frac{1}{2} [dt + (\alpha - 1)\, dw]^2 - du^2 - dv^2 \\ \qquad \text{où :} \\ \alpha = \alpha (u, v, w, t) . \end{cases}$$

7. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_2 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{34}] .$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible:

XI. $$G_5 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{34}, p_1, p_3, p_4]$$

avec :

$$\begin{cases} ds^2 = dw [dt + \alpha\, dw] - du^2 - dv^2 = \\ \qquad = \frac{1}{2} [dt + (\alpha + 1)\, dw]^2 - \frac{1}{2} [dt + (\alpha - 1)\, dw]^2 - du^2 - dv^2 \\ \qquad \text{où :} \\ \alpha = \alpha (u, w, t) . \end{cases}$$

8. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_2 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{24} - S_{23}] .$$

Deux types de groupes d'holonomie possibles:

XII. $$G_6 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{24} - S_{23}, p_1, p_2, p_3 - p_4]$$

Digitized by Google

avec :

$$\begin{cases} ds^2 = dw\,(dt + \alpha\,dw) - du^2 - dv^2 = \\ \qquad = \frac{1}{2}[dt + (\alpha + 1)\,dw]^2 - \frac{1}{2}[dl + (\alpha - 1)\,dw]^2 - du^2 - dv^2 \\ \qquad\qquad \text{où :} \\ \alpha = \alpha(u, v, w). \end{cases}$$

XIII. $$G_4 \equiv [S_{14} - S_{13}, S_{24} - S_{23} + ap_1, p_2 + cp_1, p_3 - p_4]$$

avec :

$$\begin{cases} ds^2 = dw\,[dt + \alpha\,dw] - du^2 - dv^2 = \\ \qquad = \frac{1}{2}[dt + (\alpha + 1)\,dw]^2 - \frac{1}{2}[dt + (\alpha - 1)\,dw]^2 - du^2 - dv^2 \\ \qquad\qquad \text{où } \alpha \text{ est une fonction de } u, v, w \text{ de la forme :} \\ \alpha = u\varphi(w) + F[w, w(v + cu) - au]. \end{cases}$$

9. *Les vecteurs sont transformés par le groupe* :

$$\gamma_2 \equiv [S_{12}, S_{34}].$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible :

XIV. $$G_6 \equiv [S_{12}, S_{34}, p_1, p_2, p_3, p_4]$$

avec :

$$\begin{cases} ds^2 = \beta^2(dt^2 - du^2) - \alpha^2(dv^2 + dw^2) \\ \qquad\qquad \text{où :} \\ \beta = \beta(u, t) \quad , \quad \alpha = \alpha(v, w). \end{cases}$$

10. *Les vecteurs sont transformés par le groupe* :

$$\gamma_1 \equiv [S_{14} - S_{13}].$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible :

XV. $$G_3 \equiv [S_{14} - S_{13}, p_1, p_3 - p_4]$$

avec :

$$\begin{cases} ds^2 = dw\,(dt + \alpha\,dw) - du^2 - dv^2 = \\ \qquad = \frac{1}{2}[dt + (\alpha + 1)\,dw]^2 - \frac{1}{2}[dt + (\alpha - 1)\,dw] - du^2 - dv^2 \\ \qquad\qquad \text{où :} \\ \alpha = \alpha(u, w). \end{cases}$$

Digitized by Google

11. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_1 \equiv [S_{12}] .$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible:

XVI. $$G_8 \equiv [S_{12} , p_1 , p_2]$$

avec:

$$\begin{cases} ds^2 = dt^2 - du^2 - \alpha^2 (dv^2 + dw^2) \\ \text{où:} \\ \alpha = \alpha (v , w) . \end{cases}$$

12. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_1 \equiv [S_{34}] .$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible:

XVII. $$G_3 \equiv [S_{34} , p_3 , p_4]$$

avec:

$$\begin{cases} ds^2 = \beta^2 (dt^2 - du^2) - dv^2 - dw^2 \\ \text{où:} \\ \beta = \beta (u , t) . \end{cases}$$

Matematica. — *Contact de deux courbes dans une* V_n. Nota di V. Hlavatý, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Un théorème de MM. Levi-Civita et Ricci [2] nous apprend que les invariants intrinsèques dans l'espace n-fois étendu à connexion riemannienne V_n se réduisent à l'affineur $K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda}$ de Riemann-Christoffel et ses dérivées covariantes successives. Dans une Note précédente [3], j'ai tâché de réaliser les conséquences de ce théorème en trouvant un tel système de paramètres x^ν dans V_n (paramètres locaux) qui permet le développement du tenseur métrique $g_{\lambda\mu}$ de V_n et des coordonnées d'une courbe C de V_n dans le domaine d'un point régulier P ($x = 0$).

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(2) G. Ricci, T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu...*, « Math. Ann. », Bd. 54, p. 162.

(3) « Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », vol. IV, serie 6ª, 2° sem., fasc. 3-4.

Digitized by Google

J'obtins les séries

$$(1)\qquad g_{\lambda\mu} = e_{\lambda\mu} - \frac{1}{3} x^\alpha x^\beta K_{\alpha\mu\beta\lambda} - \frac{1}{3!} x^\alpha x^\beta x^\gamma \nabla_\alpha K_{\beta\mu\gamma\lambda} + \\ + \frac{1}{5!} x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\delta \left(-6 \nabla_\alpha \nabla_\beta K_{\gamma\mu\delta\lambda} + \frac{16}{3} K^{\cdots\rho}_{\alpha\mu\beta} K_{\gamma\lambda\delta\rho} \right) + \cdots$$

$$(2)\qquad x^\nu = \frac{s}{1!} i^\nu + \frac{s^2}{2!} \Theta i^\nu + \frac{s^3}{3!} \Theta^2 i^\nu + \frac{s^4}{4!} \left(\Theta^3 i^\nu + k_1 K^{\cdots\nu}_{121} \right) + \\ + \frac{s^5}{5!} \left(\Theta^4 i^\nu + 2 k_1 \nabla_1 K^{\cdots\nu}_{121} - 3 k_1^2 K^{\cdots\nu}_{212} + \frac{7}{3} K^{\cdots\nu}_{1\rho 1} \Theta^2 i^\rho \right) + \cdots$$

Ici $e_{\lambda\mu}$ désigne la valeur numérique de $g_{\lambda\mu}$ en P, ∇_μ le symbole de la dérivée covariante dans V_n, s l'arc de C, $i^\nu = \underset{1}{i}^\nu$ son vecteur-unité tangent, $\underset{p+1}{i}^\nu$ son p-ième vecteur-unité normal, k sa p-ième courbure, $\Theta = i^\mu \nabla_\mu$ et

$$K^{\cdots\nu}_{abc} = \underset{a}{i}^\omega \underset{b}{i}^\mu \underset{c}{i}^\lambda K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda} \qquad , \qquad \nabla_a K^{\cdots\nu}_{bcd} = \underset{a}{i}^\xi \underset{b}{i}^\omega \underset{c}{i}^\mu \underset{d}{i}^\lambda \nabla_\xi K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda} .$$

Nous nous proposons d'appliquer ces formules à l'étude 1° du contact de deux courbes dans V_n et 2° des invariants simultanés de C et V_n. Nous aurons besoin pour cet effet de quelques formules auxiliaires.

En tenant compte de (1) on trouve pour x^ν très petit dans la direction du développement

$$S^2 = g_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu = e_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu$$

à des infiniment petites près d'ordre $\geqq 7$ (par rapport à S). Cela nous permet d'après (1) de développer S en fonction de s d'où l'on déduit après un calcul assez long le développement

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} x^\nu = \dfrac{S}{1!} \underset{1}{a}^\nu + \dfrac{S^2}{2!} \underset{2}{a}^\nu + \cdots \qquad = \sum \dfrac{S^p}{p!} \underset{p}{a}^\nu \\ \qquad\qquad \left(i^\mu \nabla_\mu = \Theta \right), \\ \underset{1}{a}^\nu = i^\nu \quad , \quad \underset{2}{a}^\nu = \Theta i^\nu \quad , \quad \underset{3}{a}^\nu = \dfrac{1}{4} i^\nu k_1^2 + \Theta^2 i^\nu \quad , \quad \underset{4}{a}^\nu = i^\nu k_{11} \dot{k} + \\ \qquad\qquad + k_1^2 \Theta i^\nu + \Theta^3 i^\nu + k_1 K^{\cdots\nu}_{121} \\ \underset{5}{a}^\nu = i^\nu \left[\dfrac{9}{16} k_1^4 - \dfrac{1}{6} \left(k_1^2 k_2^2 - 8 \dot{k}_1^2 - 9 k_{11} \ddot{k} - 3 k_1^2 K_{1212} \right) \right] + 5 k_{11} \dot{k} \Theta i^\nu + \dfrac{5}{2} k_1^2 \Theta^2 i^\nu + \\ + \Theta^4 i^\nu + 2 k_1 \Theta K^{\cdots\nu}_{121} - 3 k_1^2 K^{\cdots\nu}_{212} + \dfrac{7}{3} K^{\cdots\nu}_{1\lambda 1} \Theta^2 i^\lambda \quad , \quad \underset{6}{a}^\nu = \cdots, \qquad \left(\dfrac{d(\,)}{ds} = (\dot{}) \right). \end{array} \right.$$

Digitized by Google

En tenant compte des équations de Frenet[1] pour C on parvient aux formules

$$(5)\qquad \Theta i^\nu = \underset{1\,2}{k} i^\nu \quad , \quad \Theta^2 i^\nu = \underset{1\,2\,3}{k\,k} i^\nu + \underset{1\,2}{\dot{k}} i^\nu - \underset{1\,1}{k^2} i^\nu \quad , \quad \Theta^3 i^\nu = \cdots \quad , \quad \Theta^4 i^\nu = \cdots \quad , \quad \cdots$$

1.

Supposons deux courbes C et $'C$ dans V_n ayant le point régulier $P\,(x = 0)$ en commun. Désignons par Q resp. $'Q$ le point infiniment voisin de P sur C resp. $'C$. Choisissons Q et $'Q$ de telle manière qu'il soit $PQ = P\,'Q = S$ et désignons par σ le module du vecteur $\overrightarrow{Q\,'Q}$. Nous disons que les courbes C et $'C$ ont le contact d'ordre r en P si la distance σ est infiniment petite d'ordre $r + 1$ par rapport à S, c'est-à-dire si

$$(6)\qquad \lim_{S \to 0} \frac{\sigma}{S^q} = 0 \quad , \quad \lim_{S \to 0} \frac{\sigma}{S^{r+1}} \neq 0 \quad , \quad q \leqq r .$$

Mais parce qu'on peut écrire d'après (4) pour les composantes $'x^\nu$ du vecteur infinitésimal $\overrightarrow{P\,'Q}$

$$(4')\qquad {}'x^\nu = \sum \frac{S^p}{p!}\, \underset{p}{'a^\nu}$$

on a aussi au lieu de (6)

$$(6')\qquad \lim_{S \to 0} \frac{x^\nu - {}'x^\nu}{S^q} = 0 \quad , \quad \lim_{S \to 0} \frac{x^\nu - {}'x^\nu}{S^{r+1}} \neq 0 .$$

On a donc pour le contact d'ordre r en P

$$(7)\qquad \underset{q}{a^\nu} = \underset{q}{'a^\nu} \quad , \quad \underset{r+1}{a^\nu} \neq \underset{r+1}{'a^\nu} \quad , \quad q \leqq r .$$

Si $r = 1$ on obtient d'après (7) et (4) en P

$$(8)\qquad \underset{1}{a^\nu} = \underset{1}{'a^\nu} \quad , \quad \text{ou} \quad \underset{1}{i^\nu} = \underset{1}{'i^\nu} .$$

Si $r = 2$ on obtient d'après (7), (8) et (5)

$$(9)\qquad \underset{2}{a^\nu} = \underset{2}{'a^\nu} \quad , \quad \text{ou} \quad \Theta i^\nu = {}'\Theta\, {}'i^\nu \qquad \left({}'i^\mu \nabla_\mu = {}'\Theta\right).$$

(1) $\underset{p}{\Theta i^\nu} = \underset{p+1\,p}{i^\nu\ k} - \underset{p-1\,p-1}{i^\nu\ k}$, $\left(p = 1, \cdots, n \ ; \ \underset{n}{k} = \underset{0}{k} = 0\right)$, voir STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie...*, Berlin, 1922, p. 76.

Digitized by Google

On a donc en P

$$(10) \qquad i^{\nu}_{1} = {}'i^{\nu}_{1} \quad , \quad i^{\nu}_{2} = {}'i^{\nu}_{2} \quad , \quad k_{1} = {}'k_{1}.$$

La condition (10) nous donne en P pour $a, b, c, d = 1, 2$

$$(11) \quad i^{\omega}_{a}\, i^{\mu}_{b}\, i^{\lambda}_{c}\, K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda} = {}'i^{\omega}_{a}\, {}'i^{\mu}_{b}\, {}'i^{\lambda}_{c}\, K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda} \quad ; \quad i^{\omega}_{a}\, i^{\mu}_{b}\, i^{\lambda}_{c}\, i^{\xi}_{d}\, \nabla_{\xi} K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda} = {}'i^{\omega}_{a}\, {}'i^{\mu}_{b}\, {}'i^{\lambda}_{c}\, {}'i^{\xi}_{d}\, \nabla_{\xi} K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda}.$$

En poursuivant ce procédé on vérifie le théorème général:

Si deux courbes dans V_n ont le contact d'ordre r en P, elles y possèdent le vecteur tangent, les premiers $r-1$ vecteurs normaux, les premières $r-1$ courbures et les premières u dérivations des premières $r-u-1$ courbures d'après l'arc en commun:

$$i^{\nu} = {}'i^{\nu} \quad , \quad i^{\nu}_{r} = {}'i^{\nu}_{r} \quad , \quad k_{r-1} = {}'k_{r-1} \quad , \quad \frac{d^u}{ds^u} k_{r-u-1} = \frac{d^u}{d's^u} {}'k_{r-u-1}.$$

Nos moyens (les séries (4) et (4')) ne nous permettent de démontrer ce théorème que pour $r \leqq 5$. Mais on peut facilement vérifier qu'il est juste aussi pour $r > 5$.

Remarque: Lipka [1] a défini la courbure rélative k_1 de deux courbes tangentes moyennant la formule

$$x_1 = \lim_{s \to 0} \frac{2\sigma}{S^2}.$$

On a donc d'après (4) et (4')

$$x^2_1 = \left(a^{\mu}_2 - {}'a^{\mu}_2\right)\left(a^{\lambda}_2 - {}'a^{\lambda}_2\right) g_{\lambda\mu} = \left(k^2_1 + {}'k^2_1 - 2\, k_1\, {}'k_1 \cos\left(j_2\, {}'j_2\right)\right).$$

Si les courbes en question ont le contact d'ordre 2, leur courbure rélative x_1 est nulle. Dans ce cas on pourrait définir la courbure rélative x_2 moyennant la formule

$$x_2 = \lim_{s \to 0} \frac{6\sigma}{S^3}$$

qui nous donne en raison de (4) et (4')

$$x^2_2 = \left(a^{\lambda}_3 - {}'a^{\lambda}_3\right)\left(a^{\mu}_3 - {}'a^{\mu}_3\right) g_{\lambda\mu} = \left(k_1 - {}'k_1\right)^2 + k^2_1 \left(k^2_2 + {}'k^2_2 - 2\, k_2\, {}'k_2 \cos\left(j^{\nu}_3\, {}'j^{\nu}_3\right)\right).$$

Si les courbes en question ont le contact d'ordre 3 on a $x_2 = 0$. Dans ce cas on pourrait définir analogiquement la courbure rélative x_3 et ainsi de suite.

(1) « Bull. Amer. Math. Soc. », 29, 1923, 345. Voir aussi J. L. SYNGE, « Phil. Transact. of the R. Society of London », série A, vol. 226, p. 31-106.

Digitized by Google

On a en général pour le contact d'ordre r

$$\underset{q}{k} = 0 \qquad q \leqq r - 1$$

ce qui met en évidence l'autorisation de l'existence des courbures de Lipka.

2.

Imaginons une variété n-fois étendue X_n et introduisons-y les connexions riemanniennes V_n, $'V_n$, $''V_n$, $\cdots$, admettant au point P le même système des paramètres locaux x^ν. Nous supposons de plus que *les valeurs numériques* des tenseurs métriques correspondants sont égales en P (1). Nous nous proposons de chercher les invariants d'une courbe passant par P par rapport aux V_n, $'V_n$, $''V_n$, $\cdots$

Il suffit naturellement de restreindre notre recherche à V_n et $'V_n$. Nous désignerons par accent affecté en haut à gauche les expressions de $'V_n$ pour les faire distinguer de celles de V_n. (P. e. C est la courbe examinée dans V_n, $'C$ est la même courbe examinée dans $'V_n$, $K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda}$ est l'affineur de Riemann-Christoffel de V_n, $'K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda}$ celui de $'V_n$). En tenant compte de ce que V_n et $'V_n$ admettent le même système des paramètres locaux, on peut développer les composantes du vecteur infinitésimal $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{'P\,'Q}$ d'après (4)

$$x^\nu = \sum \frac{S^p}{p!}\,\underset{p}{a^\nu} \qquad , \qquad 'x^\nu = \sum \frac{'S^p}{p!}\,\underset{p}{'a^\nu}.$$

En tenant compte de ce que $g_{\lambda\mu} = 'g_{\lambda\mu}$ en P on a aussi

$$S^2 = g_{\lambda\mu}\,x^\lambda\,x^\mu = e_{\lambda\mu}\,x^\lambda\,x^\mu = e_{\lambda\mu}\,'x^\lambda\,'x^\mu = 'S^2$$

c'est-à-dire

$$x^\nu = \sum \frac{S^p}{p!}\,\underset{p}{a^\nu} \quad , \quad 'x^\nu = \sum \frac{S^p}{p!}\,\underset{p}{'a^\nu} \quad , \quad \text{ou} \quad (12)\ x^\nu - 'x^\nu = 0 = \sum \frac{S^p}{p!}\left(\underset{p}{a^\nu} - \underset{p}{'a^\nu}\right).$$

Cette équation sera notre point de départ. Pour $p = 1, 2, 3$ le calcul s'effectue de la même manière comme dans § 1, parce que les affineurs $K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda}$ et $'K^{\cdots\nu}_{\omega\mu\lambda}$ n'interviennent pas dans $\underset{1}{a^\nu} = \underset{1}{'a^\nu}$, $\underset{2}{a^\nu} = \underset{2}{'a^\nu}$, $\underset{3}{a^\nu} = \underset{3}{'a^\nu}$. On obtient ainsi en P les invariants de C par rapport à V_n et $'V_n$

$$(13) \qquad i^\nu \ , \ \underset{2}{i^\nu} \ , \ \underset{3}{i^\nu} \ , \ \underset{1}{k} \ , \ \underset{2}{k} \ , \ \underset{1}{k}$$

(1) On peut démontrer que de telles connexions existent et qu'elles sont différentes en se servant du développement de x en fonction de y (système des paramètres généraux dans X_n). Pour ce développement voir ma Note publiéliée dans les « Annales de la Soc. polonaise des Math. », t. V, 1926.

Digitized by Google

Ces équations nous donnent pour $p = 4$ en P

$$\Theta^3 i^\nu + k_1 K_{121}^{\cdots\nu} = {}'\Theta^3\, {}'i^\nu + {}'k_1\, {}'K_{121}^{\cdots\nu}.$$

Il s'en suit d'après (5) que les expressions

$$(14) \qquad \ddot{k}_1 + k_1 K_{1212} \quad , \quad \dot{k}_2 + K_{1213} \quad , \quad k_{234} k i^\nu + K_{121}^{\cdots\nu}$$

sont invariantes en P. Si $i_4^\nu = {}'i_4^\nu$ on a de plus l'invariant $k_{23} k + K_{1214}$ en P.

En raison des équations déjà déduites on obtient pour $p = 5$

$$(15) \begin{cases} i^\nu \left(\frac{3}{2} k_{11} \ddot{k} + \frac{1}{2} k_1^2 K_{1212} \right) + \Theta^4 i^\nu + 2 k_1 \Theta K_{121}^{\cdots\nu} - 3 k_1^2 K_{212}^{\cdots\nu} + \frac{7}{3} K_{1\mu_1}^{\cdots\nu} \Theta^2 i^\mu = \\ i^\nu \left(\frac{3}{2} k_{11}\, {}'k'' + \frac{1}{2} k_1^2\, {}'K_{1212} \right) + {}'\Theta^4\, {}'i^\nu + 2 k_{11}\, {}'k\, {}'\Theta\, {}'K_{121}^{\cdots\nu} - 3 k_1^2\, {}'K_{212}^{\cdots\nu} + \frac{7}{3}\, {}'K_{1\mu_1}^{\cdots\nu} \Theta^2 i^\mu. \end{cases}$$

On en déduit (moyennant la multiplication par $i_{2\nu} = {}'i_{2\nu}$ resp. $i_{3\nu} = {}'i_{3\nu}$) que les expressions

$$(16) \begin{cases} \dddot{k}_1 + \frac{7}{3} \dot{k}_1 K_{1212} + \frac{16}{3} k_{12} k K_{1213} + 2 k_1 \Theta K_{1212}, \\ k_1 \left[\ddot{k}_2 - k_{23} k^2 - 3 k_2 K_{1212} + 2 \Theta K_{1213} - 3 k_1 K_{2123} + \frac{7}{3} k_2 K_{1313} \right] - \frac{2}{3} \dot{k}_1 K_{1213} \end{cases}$$

sont invariantes. La multiplication alternée par le trivecteur osculateur nous conduit à l'invariant

$$(17) \quad k_{12345} k k k i^\nu + \left(3 \dot{k}_{123} k k + 2 k \dot{k}_{123} k + k k \dot{k}_{123} \right) i_4^\nu + 2 k_1 \Theta K_{121}^{\cdots\nu} - 3 k_1^2 K_{212}^{\cdots\nu} + \frac{7}{3} K_{1\mu_1}^{\cdots\nu} \Theta^2 i^\mu.$$

Si l'on voulait trouver les invariants plus hauts, on devrait développer plus loin la série (4). Nous croyons avoir suffisamment démontré cette méthode de sorte que nous pouvons renoncer à la poursuivre plus loin.

Digitized by Google

Matematica. — *Sulla rappresentazione analitica in forma finita delle grandezze espresse da funzioni diverse in dominii del piano e dello spazio assegnati ad arbitrio.* Nota dell'ing. L. LABOCCETTA, presentata [1] dal Socio G. A. CROCCO.

In una precedente Nota ho indicato il modo di costruire delle funzioni che, in diversi intervalli del campo percorso dalla variabile da cui dipendono, hanno espressione analitica diversa.

Mi propongo in questa Nota di mostrare come il metodo stesso possa essere esteso al caso di funzioni di due o più variabili, che mutano forma in dominii diversi, indicando dei procedimenti generali per risolvere i problemi che si presentano per la sovrapposizione dei dominii considerati, l'esistenza o meno dei valori sul contorno, la variabilità dei dominii e per la costruzione delle funzioni ausiliarie adoperate in questi procedimenti.

1. Dati nel piano o, più generalmente, nello spazio un certo numero di dominii

$$D_1 , D_2 , \cdots D_i \cdots \tag{1}$$

di forma, dimensione e posizione arbitrariamente assegnate, e date corrispondentemente, anche ad arbitrio, altrettante funzioni delle coordinate (x , y) o (x , y , z)

$$F_1 , F_2 , \cdots F_i \cdots \tag{2}$$

si cerchi di esprimere analiticamente in forma finita una grandezza la quale nei diversi dominii (1) assume i valori dati dalle diverse funzioni (2) ed in ogni altra regione dello spazio ha il valore di zero.

Si formino a tale scopo, nel modo come si dirà in appresso, delle funzioni dei punti del campo, che saran dette *limitatrici* [2].

$$\varphi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \cdots \varphi_i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \cdots \tag{3}$$

le quali godano la proprietà che ognuna di esse prende il valore + 1 in tutti i punti del dominio ad essa corrispondente ed il valore zero in ogni altro punto del campo.

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(2) Questo termine viene qui usato nel senso ad esso attribuito nella precedente mia Nota R. C., vol. XXXI, fasc. 12, sed. 18 giugno 1922.

Digitized by Google

Ciò posto è chiaro che se si forma la funzione

$$(4) \qquad y_\sigma = F_1 \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + F_2 \varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + F_i \varphi_i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

questa nel primo dominio D_1 prenderà dei valori corrispondenti a quelli della funzione F_1, nel dominio D_2 prenderà i valori della funzione D_2, e così successivamente e perciò sarà l'espressione analitica della grandezza di cui si tratta.

Evidentemente, oltre che sotto forma di somma, una funzione avente analoghe proprietà potrebbe esser costruita sotto forma di prodotto, scrivendo

$$(5) \qquad y_\pi = F_1^{\varphi_1\binom{1}{0}} F_2^{\varphi_2\binom{1}{0}} \cdots F_i^{\varphi_i\binom{1}{0}} \cdots$$

ma è da osservare che questa funzione y_π nei punti dello spazio non compresi nei dominii (1), prenderebbe il valore + 1 invece di prendere il valore zero [1].

Tuttavia essa può essere usata lo stesso in due casi entrambi praticamente assai importanti e cioè:

a) quando i dominii (1) ricoprono completamente tutto lo spazio, cosicchè non restino punti esterni ad essi;

b) quando fra i dominii (1) se ne trova uno D, al quale corrisponda la funzione F, che si estende a tutto lo spazio. È chiaro che scrivendo in tal caso

$$(6) \qquad y'_\pi = \left(\frac{F_1}{F}\right)^{\varphi_1\binom{1}{0}} \left(\frac{F_2}{F}\right)^{\varphi_2\binom{1}{0}} \cdots \left(\frac{F_i}{F}\right)^{\varphi_1\binom{1}{0}} \cdots F$$

si avrà una funzione che nei dominii (1) prende i valori corrispondenti a quelli delle funzioni (2) ed in tutti i punti ad essi esterni i valori della funzione F.

Il campo gravitazionale di un punto materiale dà luogo alla considerazione di un dominio D e di una funzione F di questa specie.

2. Se i dominii considerati sono tutti distinti, la (4) o la (5), quest'ultima con le restrizioni indicate, costituiscono, ciascuna da sola, la soluzione completa del problema. Se invece vi sono sovrapposizioni, cioè regioni dello spazio facenti parte di più dominii, si rendono necessarii dei termini correttivi. In pratica sono importanti a considerare i due casi seguenti:

(1) Per ridurla a comportarsi come la (4) bisognerebbe completarla con l'aggiunta di un termine correttivo, per es.: $\left[1 - \varphi_1\binom{1}{0} - \varphi_2\binom{1}{0} - \cdots\right]$ che prenda il valore zero all'interno di ciascuno, dei dominii (1) ed il valore — 1 nei punti esterni ad essi.

Digitized by Google

a) Che vi siano dei dominii D_i, per es. p in tutto, non contenuti in altri dominii; che vi siano q dominii D_j ognuno dei quali sia completamente contenuto in uno dei p dominii D_i; che vi siano r dominii D_h ognuno dei quali sia completamente contenuto in uno dei q dominii D_j; e così via, essendo $p > q > r \cdots$ e $p + q + r + \cdots = n$. Qualora si voglia che nelle regioni sovrapposte la grandezza considerata prenda in ciascun punto il valore corrispondente alla funzione del dominio più interno fra quelli sovrapposti, le due equazioni (4) e (5) dovranno esser completate nel modo seguente:

$$(7) \qquad y_\sigma = \sum_i^{1 \cdots p} F_i \varphi_i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_j^{1 \cdots q} (F_{p+j} - F_j) \varphi_{p+j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_h^{1 \cdots r} (F_{(p+q)+h} - F_{p+h}) \varphi_{(p+q)+h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

e

$$(8) \qquad y_\pi = \prod_i^{1 \cdots p} F_i^{\varphi_i \binom{1}{0}} \prod_j^{1 \cdots q} \left[\frac{F_{p+j}}{F_j}\right]^{\varphi_{p+j} \binom{1}{0}} \prod_h^{1 \cdots r} \left[\frac{F_{(p+q)+h}}{F_{p+h}}\right]^{\varphi_{(p+q)+h} \binom{1}{0}}$$

nella seconda delle quali equazioni si è supposto che i p dominii D occupano tutto lo spazio senza lasciare punti esterni.

b) Che la sovrapposizione dei dominii sia parziale, essendovi in tutto: p dominii D_i che si considerano non sovrapposti ad altri; q dominii D_j ognuno dei quali dà luogo ad una sovrapposizione semplice sovrapponendosi in tutto o in parte ad uno dei primi p; r ognuno dei quali sovrapponendosi in tutto o in parte ad uno dei q dà luogo ad una sovrapposizione semplice su di questi e ad una sovrapposizione doppia sui p sottostanti. Si suppone pure, come nel caso precedente che $p > q > r \cdots$ e $p + q + r + \cdots = n$. Con queste ipotesi alle due equazioni (4) e (5) dovrà darsi la forma:

$$(9) \qquad y_\sigma = \sum_i^{1 \cdots n} F_i \varphi_i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_j^{1 \cdots q} F_j \varphi_j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_{p+j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \sum_h^{1 \cdots r} F_{p+h} \varphi_{p+h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \varphi_{(p+q)+h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \cdots$$

e

$$(10) \qquad y_\pi = \prod_i^{1 \cdots n} F^{\varphi_i \binom{1}{0}} \cdot \prod_j^{1 \cdots q} \left[\frac{1}{F_j}\right]^{\varphi_j \binom{1}{0} \varphi_{p+j} \binom{1}{0}} \cdot \prod_h^{1 \cdots r} \left[\frac{1}{F_{p+h}}\right]^{\varphi_{p+h} \binom{1}{0} \varphi_{(p+q)+h} \binom{1}{0}}.$$

Confrontando le due equazioni (7) e (8) con le due (9) e (10) si scorge che le due prime non sono che un caso particolare delle seconde.

È facile dopo ciò comprendere in qual modo bisognerebbe formare i termini o fattori correttivi in caso di altri meno regolari tipi di sovrapposizioni. In particolare la (6) è uno speciale caso della (10) nella ipotesi

Digitized by Google

che vi siano $n-1$ dominii D_j tutti distinti e tutti sovrapposti ad un unico dominio D_i, che è l'intiero spazio.

3. Un caso particolare importante della (9) è quello in cui tutte le funzioni F_i sono uguali fra loro, si ha cioè un'unica funzione F esistente in n dominii distinti oppure in tutto o in parte sovrapposti. La formola si può scrivere allora

$$(11) \qquad y = F\left[\sum_i^{1\cdot n} \varphi_i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \sum_j^{1\cdot q} \varphi_j\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\varphi_{p+j}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - \sum_h^{1\cdot r} \varphi_{p+h}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\varphi_{(p+q)+h}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \cdots\right]$$

relazione la quale dimostra che, dati i dominii (1), l'espressione in parentesi è la funzione limitatrice che prende il valore $+1$ in tutte le regioni del campo occupate dai detti dominii ed è nulla in tutto il resto del campo, composta questa funzione complessa per mezzo delle funzioni elementari (3).

Inoltre la (11) ha una notevole analogia con la formola che dà l'estensione degli insiemi somme di dominii rettangolari o di altra forma [1].

$$(12) \qquad \operatorname{mis}\sum_i^{1\cdot n} D_i = \sum_i^{1\cdot n} \operatorname{mis} D_i - \sum_{ik}^{1\cdot n} \operatorname{mis}(D_i \cdot D_k) -$$

$$- \sum_{i\cdot k\cdot 1}^{1\cdot n} \operatorname{mis}(D_i \cdot D_k \cdot D_1) - \cdots - \operatorname{mis}(D_1 \cdot D_2 \cdots D_n)$$

L'analogia non è soltanto formale perchè qualora nella (11) si supponga costante la funzione F, assegnando a questa costante il valore $+1$, e si prenda poi l'integrale del secondo membro esteso a tutti i valori reali delle variabili da $-\infty$ a $+\infty$, il risultato della integrazione così eseguita

$$(13) \qquad \iiint\left[\sum_i^{1\cdot n} \varphi_i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \sum_{ij}^{1\cdot n} \varphi_i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\varphi_j\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - \sum_{ijk}^{1\cdot n} \varphi_i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\varphi_j\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\varphi_b\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \cdots - \varphi_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\varphi_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdots\varphi_n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \operatorname{mis}\sum_i^{1\cdot n}(D_i)$$

è proprio la misura dell'insieme somma dei dominii dati (1) nella ipotesi più generale che vi siano sovrapposizioni di ordine n.

4. Mostrato il modo di adoperare le funzioni $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ bisogna far vedere come effettivamente vengano costruite. Indicherò qui due procedimenti generali i quali, in fondo, non differiscono che per la forma.

(1) Per il significato delle notazioni adottate nella (12) si vegga: M. Picone, *Lezioni di analisi infinitesimale*, vol. I, parte II, p. 351 e 358, Catania, 1923.

Digitized by Google

Supposto dunque che l'equazione del contorno del dominio di cui si tratta sia $G(xyz) = 0$ e che al primo membro di questa possa darsi la forma di una differenza

$$G(xyz) = F(xyz) - f(xyz) \tag{14}$$

uno dei termini della quale può anche ridursi ad una costante, e supposto inoltre che la differenza (14) mantenga sempre lo stesso segno per tutti i punti interni al contorno ed abbia invece sempre il segno opposto per i punti esterni, si può procedere secondo uno dei metodi seguenti:

a) Chiamando, al solito, con Ix il massimo intiero contenuto in x si formi la funzione

$$\varphi'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[I \frac{F(xyz)}{f(xyz)} \right]^{\left[I \frac{f(xyz)}{F(xyz)} \right]} \tag{15}$$

b) Od anche, più direttamente, avvalendosi della circostanza della diversità del segno della (14) dai due lati opposti del contorno, si formi la funzione

$$\varphi''\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn} G(xyz)] \tag{16}$$

Entrambe le funzioni (15), (16) avranno il valore + 1 per tutti i punti interni al contorno e il valore zero per tutti i punti esterni se $G(xyz)$ è positiva all'interno del contorno; viceversa avranno il valore zero per tutti i punti interni ed il valore + 1 per tutti i punti esterni se $G(xyz)$ assume valori positivi all'esterno del contorno.

Nell'uno e nell'altro caso il contorno fa parte del dominio nel quale la funzione prende il valore + 1 per la (15), ma per la (16) costituisce una singolarità particolare, poichè su di esso la funzione prende il valore $+\frac{1}{2}$. Seguendo la notazione usata in questi scritti, la (14) dovrebbe perciò a rigore, essere indicata col simbolo $\varphi''\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1, 0 \end{pmatrix}$.

5. Poichè il contorno è un insieme di dimensione nulla rispetto al dominio da esso limitato, la singolarità innanzi rilevata in molte questioni di fisica non ha alcuna importanza.

Essa però può essere eliminata e questa eliminazione conduce ad esaminare più generalmente la questione della inclusione nel dominio, od esclusione da esso, dei valori sul contorno.

Volendo eliminare i valori del contorno, quando esistono, si aggiunge una seconda funzione limitatrice che sul contorno prende il valore — 1 ed è nulla in ogni altro punto.

Digitized by Google

Volendo invece aggiungerli, quando mancano, si adopera una seconda funzione limitatrice che sul contorno prende il valore + 1 ed è nulla in ogni altro punto, ossia la stessa funzione di prima col segno cambiato.

Perciò se l'equazione del contorno è $f(xyz) = 0$, e k è il valore, diverso da 1 e da zero, che prende sul contorno la funzione limitatrice principale, la seconda funzione limitatrice è

$$\mp [1 - \{ \operatorname{sgn} f(xyz) \}^2] k^{-1}. \tag{17}$$

Osservazione 1ª. Dalla proprietà caratteristica delle funzioni limitatrici di avere un valore costante in tutti i punti di certi dominii, discende un metodo semplice e generale per scrivere le equazioni rappresentative di detti dominii. Infatti se $\varphi\binom{a}{b}$ è una funzione limitatrice a due valori che prende il valore a in un dominio D_1 e il valore b in un dominio D_2, è chiaro che le equazioni

$$\varphi\binom{a}{b} = a \qquad \varphi\binom{a}{b} = b \tag{18}$$

rappresenteranno rispettivamente il dominio D_1 e quello D_2. Lo stesso dicasi per una funzione a tre o più valori. Ma è da rilevare che se una funzione limitatrice prende lo stesso valore in più di un dominio, come, per esempio, una funzione del tipo $\varphi\binom{a}{b,b}$ scrivendo

$$\varphi\binom{a}{b,b} = b \tag{19}$$

si ha l'equazione che rappresenta il complesso dei due dominii nei quali la funzione prende il valore b.

Si ha con tal procedimento la possibilità di rappresentare con delle equazioni fra variabili reali tutti i dominii, come quelli quadrati, circolari, poligonali, poliedrali, sferici, ecc., finora definiti soltanto a mezzo di disuguaglianze o limitazioni.

Osservazione 2ª. Le equazioni ordinariamente adoperate a rappresentare luoghi, del piano o dello spazio, forniscono per una delle coordinate di un punto espressa in funzione delle altre, valori *reali* od *immaginarii* secondo che il punto appartiene o pur no al luogo. È notevole che nel metodo di rappresentazione qui esposto si presenta il caso in cui le equazioni invece di fornire valori immaginari indicano la *non esistenza* dei valori per i punti non appartenenti al luogo.

Digitized by Google

Si confrontino, ad es., l'equazione della sfera e l'equazione del tutto analoga dell'ottaedro

$$(20) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} y + z \operatorname{sgn} z = a$$

per i punti del piano x o y per i quali sia $x^2 + y^2 > R^2$, e $x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} z > a$.

6. I dominii D_i, ed anche le funzioni F_i, possono essere variabili col tempo, intendendosi con ciò, per quanto riguarda i dominii D_i, che essi possono variare tanto di dimensione, quanto di posizione e di forma. Il metodo di rappresentazione però non cambia, poichè basta, nelle equazioni già trovate, esprimere in funzione del tempo secondo le leggi assegnate i parametri e le coordinate variabili.

Come si scorge, si consegue in tal modo una notevole ed essenziale estensione della geometria analitica ristretta finora alla rappresentazione delle linee e delle superficie contenute nello spazio geometrico, cioè omogeneo, mentre i metodi ora esposti, eliminata anzitutto ogni limitazione imposta dalla variabilità della espressione analitica delle forme considerate e dalle loro discontinuità, consentono di rappresentare analiticamente lo spazio fisico con le sue proprietà, i corpi materiali che in esso si muovono e l'energia in esso distribuita.

Matematica. — *Ulteriori contributi alla Teoria generale delle Matrici di Riemann.* Nota di N. SPAMPINATO, presentata [1] dal Corrisp. G. SCORZA.

1. In una Nota preventiva [2], relativa ad una mia precedente Memoria [3], ho osservato che, volendo procedere alla classificazione sistematica delle matrici di Riemann *pure*, con l'indice di singolarità > 0, il primo problema che s'incontrava era quello della classificazione delle matrici di Riemann pure singolari, dotate di un solo gruppo fondamentale di pseudo-assi puri, problema risolto in tale Memoria.

Ora, appena si ammetta che una matrice riemanniana singolare, oltre ad un gruppo fondamentale di pseudoassi puri, certo esistente, sia dotata di un ulteriore pseudoasse puro, essa ne ammette almeno $\infty^{\nu-1}$, se è ν il numero fondamentale della matrice, costituenti gli spazi reali di una

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(2) N. SPAMPINATO, *Nuovi contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann*, « Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei », ser. VI, vol. V (1927).

(3) N. SPAMPINATO, *Nuovi contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LI, (1927).

Digitized by Google

schiera di una varietà di Segre. Ciò è stato dimostrato dallo Scorza [1] tenendo conto di un ragionamento usato dal Severi [2]. Il secondo problema che si presenta, dunque, volendo procedere oltre in quella classificazione, è il seguente:

Classificare tutte le matrici di Riemann pure, dotate di $\infty^{\nu-1}$ *pseudo-assi puri.*

Tale problema è risolto in un ulteriore mio lavoro che sarà pubblicato altrove. Per arrivare, però, alla risoluzione completa del problema in questione ho dovuto premettere due teoremi, di grande importanza per la teoria generale delle matrici di Riemann.

Il primo si riferisce alle matrici riemanniane pure singolari e si dimostra, con procedimenti analoghi a quelli da me usati nella Memoria citata, dopo aver introdotto il concetto di *spazio singolare di una matrice di Riemann*, indicando con tale denominazione ogni spazio dell'S_{2p-1} rappresentativo della matrice, se è p il suo genere, che sia asse di qualche suo sistema nullo degenere. Il teorema che dimostro è il seguente:

I. *Se* ω *è una matrice riemanniana pura singolare di genere* p *e*

$$S_r^{(1)}, S_r^{(2)}, \cdots, S_r^{(\nu)} \qquad \left(r = \frac{2p}{\nu} - 1\right)$$

ono ν *spazi indipendenti dell'* S_{2p-1} *rappresentativo di* ω *appoggiati alle immagini di* ω *secondo spazi di dimensione* $\frac{r-1}{2}$ *e costituenti un gruppo fondamentale di spazi singolari di* ω, *l'insieme di tutte le omografie di* ω *aventi per spazi uniti gli spazi* $S_r^{(j)}$ *coincide*

1) *o col sistema lineare* $\infty^{\nu-1}$ *di tutte le omografie dell'* S_{2p-1} *aventi per spazi di punti uniti gli spazi* $S_r^{(j)}$,

2) *o col sistema lineare* $\infty^{2\nu-1}$ *di tutte le omografie dell'* S_{2p-1} *aventi per spazi di punti uniti i* 2ν *spazi secondo cui gli spazi* $S_r^{(j)}$ *s'appoggiano alle immagini della matrice.*

Nel secondo teorema, a cui ho alluso, dò una proprietà caratteristica per le matrici riemanniane pure a rango massimo. Il risultato a cui pervengo è il seguente:

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice riemanniana pura sia a rango massimo, è che sia dotata di una omografia riemanniana avente gli spazi fondamentali coincidenti con gli spazi fondamentali delle omografie che questa subordina nelle immagini della matrice.*

(1) G. Scorza, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. XLV (1921), n. 62.

(2) F. Severi, *Sugl'integrali abeliani riducibili*, «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», ser. V, vol. XXIII (1914).

Digitized by Google

Ogni tale matrice è isomorfa ad una matrice del tipo:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{2p-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^{2p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \xi_p & \xi_p^2 & \cdots & \xi_p^{2p-1} \end{Vmatrix}$$

dove $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$ *sono* p *numeri algebrici coniugati di grado* $2p$, *immaginari e a due a due non coniugati.*

Il teorema fondamentale, che risolve il problema proposto, si dimostra tenendo conto dei teoremi I e II e della teoria degli spazi singolari delle matrici riemanniane, che è analoga alla teoria degli pseudoassi. Esso si enuncia così:

III. *Se una matrice di Riemann pura singolare, col numero fondamentale* ν, *è dotata di* $\infty^{\nu-1}$ *pseudo-assi puri, i suoi caratteri* k, h *e* ρ *sono dati da:*

$$k = \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{2} \quad , \quad h = \nu^2 - 1 \quad , \quad \rho = \nu$$

Le omografie della matrice sono tutte e sole le omografie che trasformano in sè la schiera della varietà di Segre contenente i pseudoassi puri della matrice e tenente fermo ogni spazio dell'altra schiera della varietà.

Si osservi che, per quanto ha dimostrato lo Scorza, allorchè ρ è un numero primo dispari, il tipo di matrice assegnata da questo teorema, è l'unico tipo di matrice pura, singolare, a rango ρ, con infiniti spazi singolari.

2. L'importanza dei contributi da me apportati alla teoria generale delle matrici di Riemann con la risoluzione del problema della classificazione di tutte le matrici pure singolari dotate di un sol gruppo fondamentale di pseudoassi puri o di $\infty^{\nu-1}$ pseudoassi puri, è resa ancor più manifesta dalle seguenti considerazioni.

È noto che la teoria degli assi di una matrice riemanniana impura, svolta dallo Scorza [1], riconduce la risoluzione del problema:

A) *Classificare le matrici di Riemann di dato genere* p,

alla risoluzione del problema:

B) *Classificare le matrici di Riemann pure di genere* $\leq p$.

Lo Scorza ha classificato pure le matrici non singolari, quindi, per risolvere i problemi B) e A) basta risolvere il problema:

C) *Classificare le matrici di Riemann pure singolari di genere* $\leq p$.

(1) Loc. cit.

Digitized by Google

Il problema A) è stato risolto per $p = 1, 2, 3$ (il caso $p = 2$ è stato risolto dal Rosati [1], il caso $p = 3$, dallo Scorza [2]). Ebbene, servendomi delle classificazioni da me fatte, sopra ricordate, *ho risolto il problema* C) *per* $p \leq 14$ e quindi: *è risolto il problema* A) *per* $p \leq 14$.

Questi nuovi contributi sulla classificazione delle matrici di Riemann saranno pubblicati in un'altra nota, nella quale dimostro, inoltre, i seguenti teoremi, che enuncio riferendomi ai corpi di funzioni abeliane:

a) *Un corpo puro di funzioni abeliane a p variabili e col numero fondamentale* $\nu = 2$ *ha l'indice di singolarità* k, *l'indice di moltiplicabilità* h *e il rango* ρ *dati da*:

$$k = 1 \quad , \quad h = 1 \quad , \quad \rho = 2$$

o da:

$$k = 2 \quad , \quad h = 3 \quad , \quad \rho = 2$$

qualunque sia p. *Se è poi* $p = 2$ *si ha una terza alternativa*:

$$k = 1 \quad , \quad h = 3 \quad , \quad \rho = 4$$

b) *Un corpo puro di funzioni abeliane a p variabili e col numero fondamentale* $\nu = p$ *ha i caratteri* k, h *e* ρ *dati da*:

$$k = p - 1 \quad , \quad h = p - 1 \quad , \quad \rho = p$$

o da:

$$k = p - 1 \quad , \quad h = 2p - 1 \quad , \quad \rho = 2p;$$

se è poi $p = 2$ *si ha la terza alternativa*:

$$k = 2 \quad , \quad h = 3 \quad , \quad \rho = 2.$$

c) *Un corpo puro di funzioni abeliane a p variabili e col numero fondamentale eguale al rango, ha i caratteri dati da*:

$$k = \rho - 1 \quad , \quad h = \rho - 1 \quad , \quad \rho = \nu$$

o da:

$$k = \frac{(\rho - 1)(\rho + 2)}{2} \quad , \quad h = \rho^2 - 1 \quad , \quad \rho = \nu.$$

(1) C. Rosati, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due*, « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. III, vol. XXV.

(2) G. Scorza, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, to. XL (1916).

(3) Loc. cit. (1), parte II, n. 60.

Digitized by Google

Matematica. — *Démonstration nouvelle d'une inegalité relative aux polinomes trigonométriques.* Nota di S. BERNSTEIN, pres. dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto a un asse.* Nota di U. CRUDELI, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Aeromeccanica. — *Curve per la spinta massima (o minima).* Nota di M. PASCAL, presentata [1] dal Socio R. MARCOLONGO.

Nelle formole che, in dipendenza del teorema di Kutta-Joukowski, dànno la forza di spinta, il suo braccio rispetto all'origine, ecc., compaiono, oltre all'angolo β (angolo di attacco) che definisce la posizione del profilo rispetto alla direzione della velocità limite della corrente che lo investe, anche altri parametri dai quali dipende la *forma geometrica* del profilo in esame. Fra questi parametri è per esempio l'angolo φ che è l'inclinazione del *1° asse del profilo* [2] sull'asse delle x, e la cui importanza risulta subito dal fatto che la forza sostentatrice

$$(1) \qquad P = KR \operatorname{sen}(\varphi + \beta) \qquad (K = 4\pi\rho V_\infty^2)$$

assume il suo massimo valore per $\beta = 90^\circ - \varphi$.

Riferendoci ora alle curve connesse col profilo (cerchio delle spinte, parabola delle spinte, strofoide dei bracci) che dànno modo di trovare, per quel profilo e per ogni β, la grandezza, la direzione e il braccio della spinta ci proponiamo di costruire altre curve per mezzo delle quali rimanga individuata la posizione delle curve fondamentali per ogni valore di φ. È notevole che gli inviluppi che troveremo rappresentano sempre anche i luoghi corrispondenti al valor massimo (o minimo) della spinta.

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1927.

(2) Il MISES ha chiamato *1° asse del profilo* il diametro del cerchio sul quale è conformemente rappresentato il profilo, che passa per il punto che corrisponde al punto angoloso (unico) del profilo. V. v. MISES, *Zur Theorie des Tragflächenauftriebs.* « Zeitschr. f. Flugtech. u. Motorluftsch. », 1917, 1920; W. MÜLLER, *Ueber ebene Profilströmung mit Zirkulation.* « Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. », Bd. 3, 1923; M. PASCAL, *La teoria piana delle superficie portanti.* « Boll. Un. Mat. It. », a. IV, 1925; M. PASCAL, *Sulle curve che compaiono nello studio della corrente circuito-traslatoria.* « Rend. R. Acc. Lincei ».

Digitized by Google

1. L'inviluppo del cerchio delle spinte

$$x^2 + y^2 - KR(x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi) = 0 \tag{2}$$

al variare di φ è, come si vede subito, il cerchio

$$x^2 + y^2 = K^2 R^2 \tag{3}$$

col centro nell'origine e di raggio KR. Il punto in cui il cerchio delle spinte per un determinato φ tocca il proprio inviluppo, è dunque quello che corrisponde alla spinta massima (o minima) per quel φ.

Una cosa analoga accade per quel che riguarda la direzione della spinta. È noto che la direzione della spinta massima (o minima) per un dato φ è quella della tangente al vertice della parabola delle spinte (perchè tale tangente corrisponde ad un angolo $\beta = 90^\circ - \varphi$). L'equazione di tale tangente è

$$x\cos\varphi + y\operatorname{sen}\varphi = f\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \tag{4}$$

e l'inviluppo al variare di φ è l'astroide di parametro f

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = f^{\frac{2}{3}} . \tag{5}$$

D'altra parte le coordinate del vertice della parabola delle spinte per un dato φ sono

$$x = f\cos^3\varphi \quad , \quad y = -f\operatorname{sen}^3\varphi \tag{6}$$

di guisa che il luogo di tale vertice al variare di φ è lo stesso astroide (5): quando varia φ la parabola delle spinte si sposta dunque in modo da esser sempre tangente all'astroide (5) nel vertice.

Dato l'astroide si ha subito la parabola delle spinte per qualunque φ. Basta infatti condurre quella tangente all'astroide che faccia con l'asse x l'angolo φ: la normale nel punto di contatto è l'asse della parabola; l'intersezione di tale asse col cerchio (di raggio f) circoscritto all'astroide fornisce il fuoco F della parabola.

L'astroide (5) dunque non è soltanto il luogo del vertice della parabola delle spinte al variare di φ, ma è anche *l'inviluppo delle direzioni per cui la spinta è massima (o minima).*

Il luogo del punto di tangenza con la parabola, della retta di spinta corrispondente ad un arbitrario angolo β, il luogo cioè del punto di coordinate

$$x = \frac{f\cos\varphi\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}^2(\varphi+\beta)} \quad , \quad y = -\frac{f\operatorname{sen}\varphi\cos^2\beta}{\operatorname{sen}^2(\varphi+\beta)}$$

è la quartica

$$(x\cos\beta - y\operatorname{sen}\beta)^4 = f^2(x^2\cos^4\beta + y^2\operatorname{sen}^4\beta) . \tag{7}$$

Digitized by Google

2. Anche per quel che riguarda la strofoide dei bracci della spinta

$$(8) \qquad (x^2 + y^2)(x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi) = f x y$$

si ha che l'inviluppo al variare di φ coincide con la curva luogo dei punti tali che *la loro distanza dall'origine rappresenta il braccio corrispondente alla spinta massima (o minima).*

L'inviluppo della (8) è infatti la rosacea quadrifoglia

$$(9) \qquad (x^2 + y^2)^3 = f x^2 y^2 ;$$

il punto della strofoide (8) che corrisponde a $\beta = 90^\circ - \varphi$ è

$$x = \frac{1}{2} f \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad y = -\frac{1}{2} f \operatorname{sen} 2\varphi \cos \varphi .$$

Eliminando φ tra queste si ottiene la (9), come è naturale essendo il quadrifoglio la podaria centrale dell'astroide.

È anche non inutile notare che il luogo dei punti la cui distanza dall'origine rappresenta il momento della spinta massima (o minima) al variare di φ coincide col luogo dei punti la cui distanza dall'origine dà il momento della spinta al variare di β: è cioè la rosacea quadrifoglia

$$(10) \qquad (x^2 + y^2)^3 = K^2 R^2 f^2 x^2 y^2 .$$

3. Non è senza interesse aggiungere qualche cosa sul modo di variare del centro della circuitazione al variare di φ, tanto più che tale centro può essere assunto come punto di applicazione della forza di spinta.

È noto che il centro della circuitazione è definito da

$$x_0 = \frac{m_x}{C} \quad , \quad y_0 = \frac{m_y}{C}$$

dove m_x e m_y sono i momenti statici della circuitazione C. Il centro della circuitazione è sempre sulla linea d'azione della spinta ed al variare di β descrive una retta che è anche tangente alla parabola delle spinte e che il Mises (loc. cit.) ha chiamato *3° asse*. Al variare di φ il 3° asse che ha per equazione

$$2 x \cos \varphi (R - f) + 2 y \operatorname{sen} \varphi (R + f) = R^2 - f^2$$

descrive l'ellisse

$$(11) \qquad \frac{x^2}{\left(\frac{R+f}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R-f}{2}\right)^2} = 1 .$$

Digitized by Google

Questa ellisse è anche *il luogo al variare di* φ *dei centri della circuitazione corrispondenti alle spinte massime.* Infatti le coordinate del centro della circuitazione per $\beta = 90° - \varphi$ sono

$$x = \frac{R + f}{2} \cos\varphi \quad , \quad y = \frac{R - f}{2} \operatorname{sen}\varphi \, .$$

Eliminando φ tra queste si riottiene la (11).

La eliminazione di φ fra le coordinate del centro della circuitazione per un qualunque β

$$(12) \qquad x = \frac{(R + f) \operatorname{sen}\beta}{2 \operatorname{sen}(\varphi + \beta)} \quad , \quad y = \frac{(R - f) \cos\beta}{2 \operatorname{sen}(\varphi + \beta)}$$

porge invece

$$(13) \qquad x(R - f)\cos\beta - y(R + f)\operatorname{sen}\beta = 0$$

che è una retta passante per l'origine. È ben evidente però che il punto (12) non raggiunge l'origine se non in casi degeneri, ma giunge al più fino al punto d'intersezione della (13) con l'ellisse (11).

Fisica. — *Ricerche sulla termoelettricità accidentale del bismuto.* Nota del dott. G. Todesco, presentata [1] dal Socio Q. Majorana.

Le ricerche di cui rendo conto nella presente Nota, sono state originate da una esperienza eseguita di recente dal prof. Majorana, con un amplificatore a valvole termojoniche [2]. Questa esperienza ha mostrato la possibilità di ottenere un suono in un telefono connesso all'amplificatore, se i serrafili di entrata di quest'ultimo son collegati coi capi di una bobina piatta di elevata resistenza avente come nucleo un dischetto o meglio un anello di bismuto, una delle cui faccie venga colpita da una radiazione luminosa periodicamente interrotta. Il numero di queste interruzioni nell'unità di tempo, corrisponde esattamente all'altezza del suono reso dal telefono. L'Autore ha attribuito il fenomeno all'azione calorifica pulsante del raggio luminoso la quale genera nell'anello una corrente elettrica pulsante con egual ritmo e ciò in seguito al manifestarsi di speciali f. e. m. termoelettriche dovute a dissimetrie nella struttura interna dell'anello di bismuto, create probabilmente dal processo di cristallizzazione del metallo conseguente alla fusione.

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(2) Q. Majorana, *Due nuove esperienze con l'audion.* «Nuovo Cimento», n. 5, Nuova Serie, 1926.

Digitized by Google

*
* *

Col cortese assentimento del prof. Majorana, ho ripreso in esame il descritto fenomeno termoelettrico, nell'intento di aver qualche maggior ragguaglio sulla sua causa intima.

Noto anzitutto che si ha a che fare qui con correnti termoelettriche che prendono origine in un metallo unico indipendentemente da ogni azione meccanica o fisica artificialmente esercitata in precedenza sulle sue varie parti: le dissimetrie che causano il fenomeno debbono quindi preesistere nella massa del metallo ed essersi plausibilmente formate durante il processo di fusione e conseguente solidificazione del metallo stesso (1).

Poichè l'amplificatore precedentemente menzionato, mette soltanto in rilievo l'esistenza della corrente termoelettrica accidentale, attraverso il suono reso dal telefono, ma non consente di precisarne il senso e non si presta, almeno in modo semplice, a misurarne l'intensità, ho pensato di mettere in evidenza la corrente in parola sospendendo l'anello di bismuto in cui essa si manifesta, in un campo magnetico di conveniente intensità.

Ho costruito perciò, con un buon magnete permanente, una specie di galvanometro D'Arsonval in cui alla bobina mobile è sostituito l'anello di bismuto sorretto da un filo metallico di torsione e munito di uno smorzatore a liquido.

Con questo semplice dispositivo ho ottenuto notevoli deviazioni permanenti dell'indice luminoso sulla scala, concentrando sui vari punti della periferia dell'anello, la luce di una sorgente anche modesta (lampada elettrica da 100 candele).

Variando le modalità dell'esperienza, ho facilmente constatato che:

a) l'effetto è presentato, oltre che dal bismuto e dallo zinco (come già aveva notato il prof. Majorana), anche dall'antimonio, dal cadmio e dallo stagno; non danno invece alcun effetto l'alluminio, il piombo, il rame e il selenio;

b) il senso e l'intensità della corrente termoelettrica ottenuta, dipendono dalla particolar regione dell'anello che si illumina. Se mediante la lente che concentra la luce, si fa scorrere il puntino luminoso sulla periferia dell'anello, si trovano regioni di esso che danno deviazione in un senso o nell'altro, e regioni intermedie di deviazione nulla. La distribuzione di queste regioni

(1) Correnti termoelettriche di questa natura - che chiamerò *accidentali* per distinguerle da quelle che si possono provocare in un metallo unico agendo predeterminatamente in qualche modo sulle sue varie parti (note esperienze del Magnus, del Barus, del Wiedemann, ecc.) - sono state riscontrate in precedenza da numerosi sperimentatori, essendosi manifestate come una delle cause perturbatrici più notevoli, nelle ricerche tendenti a mettere in rilievo fenomeni termoelettrici o termomagnetici, specialmente nel bismuto. A questo proposito, vedasi, ad es.: F. P. Le Roux, « Ann. de Ch. et de Phys. », tomo X, p. 201, 1867; O. M. Corbino, Questi « Rendiconti », vol. XX, pp. 569, 746, 1911; L. Tieri, Questi « Rendiconti », vol. XXIV, p. 814, 1915.

Digitized by Google

di azione massima in un senso o nell'altro, sembra puramente accidentale. Per certi anelli, le due regioni da ritenersi termoelettricamente diverse, sono quasi ad immediato contatto, per altri più lontane o addirittura diametralmente opposte. Qualche anello mostra anche più di due regioni di dissimetria.

c) per un dato anello (diametro 11 mm., spessore 3 mm., foro centrale di 5 mm.), illuminato in un certo punto della sua periferia, la corrente termoelettrica ottenuta è di circa 1,5 milliampères: tale è infatti la intensità della corrente che si deve inviare dall'esterno, in senso contrario alla precedente, in una spira di filo circolare opportunamente fissata all'anello, e mobile con questo, per compensare, a parità di ogni altra condizione, la deviazione ottenuta per effetto termico.

Le constatazioni sperimentali surriferite, stanno a provare che il fenomeno termoelettrico in esame è intimamente legato alla struttura fisica delle varie parti dell'anello su cui si sperimenta; perciò mi è sembrato di un certo interesse verificare sperimentalmente se la distribuzione delle regioni di dissimetria di cui più sopra è cenno, vada cambiando, per uno stesso anello, al variare dello spessore, o se pure si mantenga pressochè costante approfondendosi nella sua massa.

A questo scopo, servendomi di una sorgente luminosa di intensità costante e sensibilmente puntiforme (lampada Philips ad arco fra sferette di tungsteno), ho tracciato dei diagrammi riportando in ordinata l'intensità della corrente termoelettrica osservata e in ascissa le posizioni angolari delle varie regioni periferiche dell'anello, illuminate. Certi accorgimenti sperimentali facilmente immaginabili, mi hanno permesso di ottenere diagrammi sensibilmente identici anche se ripetuti a vari giorni di distanza, dopo aver tolto e rimesso in posto l'anello. Questi diagrammi forniscono, per ogni determinato anello, una specie di pianta che mette in rilievo le posizioni reciproche delle regioni da ritenersi termoelettricamente diverse; essi hanno un andamento genericamente sinusoidale con qualche deformazione, e in generale presentano un solo massimo e un solo minimo. Ottenuto, per un dato anello, il diagramma relativo ad un certo spessore, ho tracciato successivamente quelli riferentisi a spessori via via decrescenti realizzati limando una delle faccie dell'anello sino allo spessore voluto. Ho confrontato poi i vari diagrammi relativi ad uno stesso anello e constatato così che il loro andamento si mantiene pressochè uniforme, salvo la graduale diminuzione dell'intensità di corrente ottenibile, al decrescere dello spessore.

Le dissimetrie che causano la termoelettricità accidentale negli anelli di bismuto considerati, vanno dunque approfondendosi nella massa di questi, senza cambiare sensibilmente la loro distribuzione. L'anello equivale quindi, in tutta la sua massa, ad una coppia bimetallica fittizia le cui saldature sono assimilabili alle due regioni di esso che illuminate, danno massima corrente in un senso o nell'altro. Ma come debbono ritenersi fisicamente costituite queste due regioni? Tenuto presente che le dissimetrie più volte

Digitized by Google

menzionate si formano plausibilmente durante la solidificazione del bismuto conseguente alla fusione e che notoriamente questo metallo presenta una spiccata tendenza a cristallizzare, mi sembra che la causa intima della termoelettricità accidentale del bismuto, vada ricercata appunto nella sua struttura cristallina (1). D'altra parte è noto che in un cristallo uniasse, la f. e. m. termoelettrica è diversa nelle diverse direzioni ed è espressa, per una direzione che faccia un angolo α con quella dell'asse ottico, dalla relazione:

$$E = E_1 \cos^2 \alpha + E_2 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Per quanto riguarda il bismuto, è pure noto che la f. e. m. termoelettrica in direzione parallela dell'asse, è circa tre volte maggiore di quella in direzione perpendicolare.

Si può pensare allora, in via di ipotesi, che:

Le dissimetrie che causano la termoelettricità accidentale del bismuto, sian dovute semplicemente al fatto che nel processo di cristallizzazione conseguente alla fusione del metallo, i cristalli elementari vadano disponendosi nella massa di questo con orientamento diverso, per modo che vengano a trovarsi a contatto e funzionino quindi da coppia termoelettrica, regioni di esso nelle quali i cristalli siano diversamente inclinati rispetto ad una direzione fissa di riferimento.

Per sottoporre questa ipotesi a controllo sperimentale, occorrerebbe poter disporre di un frammento metallico di bismuto in cui i cristalli elementari potessero ritenersi tutti orientati nello stesso senso: un anello ricavato da questo frammento non dovrebbe allora presentare più traccia di termoelettricità accidentale. A questo resultato sono pervenuto infatti nel modo che indicherò fra poco, ma intanto voglio notare che la presenza nella massa di bismuto, di regioni attigue costituite da cristalli diversamente orientati, può dar luogo alla manifestazione di f. e. m. termoelettriche di intensità relativamente notevole, in accordo con le esperienze descritte più sopra. A convincersi di ciò basta eseguire un semplice calcolo il quale mostra che la f. e. m. termoelettrica che si desterebbe fra due pezzi di bismuto supposti costituiti l'uno di cristalli orientati tutti parallelamente e l'altro di cristalli orientati tutti perpendicolarmente all'asse, è dello stesso ordine di grandezza, a parità di ogni altra condizione, di quella che si manifesta fra bismuto fuso (cristalli orientati in tutti i sensi) e rame (2).

Naturalmente la f. e. m. sopra calcolata, per le due varietà di bismuto, rappresenterà un massimo difficilmente raggiungibile nel caso concreto degli anelli esaminati. In essi, infatti, i cristalli non saranno disposti, in regioni

(1) Sulla struttura cristallina del bismuto, determinata mediante l'analisi coi raggi X, vedi ad es.: H. KAHLER, *The Crystalline Structure of Antimony and Bismuth.* « Phil. Mag. », vol. XLII, p. 163, 1921.

(2) Utilizzando i dati forniti dalle tabelle della Società Francese di Fisica, e per un intervallo di temperatura di 1°, si trova:

$$Bi_{\perp}/Bi_{\parallel}^{1^\circ}{}_{0^\circ} = 89.10^{-6} \text{ volts} \quad ; \quad Bi_{\parallel}/Cu_{0^\circ}^{1^\circ} = 77.10^{-6} \text{ volts.}$$

Digitized by Google

contigue, proprio perpendicolarmente fra loro, e si avranno invece i valori intermedi della f. e. m., dati dalla formula più sopra riportata.

Ciò posto, per verificare l'ipotesi formulata, ho cercato di agire predeterminatamente sul processo di cristallizzazione della massa di bismuto fusa, in modo da influire in qualche guisa sull'orientamento dei cristalli elementari. Ricercata dapprima, con esito negativo, l'eventuale influenza di un intenso campo magnetico agente durante la solidificazione del metallo, ho pensato di preparare vari anelli ricavandoli da masse di bismuto fuso e raffreddato, alcune bruscamente, altre invece con grande lentezza. Ho tracciato poi per i vari anelli così ottenuti, i soliti diagrammi. Come era da attendersi, ho trovato per gli anelli provenienti da bismuto raffreddato bruscamente, dei diagrammi complicati presentanti diversi massimi e minimi e notevoli deformazioni, indicanti una variazione discontinua e capricciosa nell'orientamento dei cristalli elementari. Gli anelli provenienti da bismuto raffreddato lentamente han fornito invece dei diagrammi regolarissimi, di andamento quasi perfettamente sinusoidale con un solo massimo e un solo minimo, indicanti plausibilmente una struttura più uniforme della massa metallica ed una variazione lenta e graduale nell'orientamento dei cristalli.

Tali resultati mi hanno indotto a operare la fusione di una notevole quantità di bismuto (ho adoprato all'uopo 250 gr. di metallo puro di Kahlbaum) che ho lasciata raffreddare lentissimamente in una stufa opportunamente protetta. Ho ottenuto così un largo e spesso cilindro di bismuto del quale ho provocato meccanicamente la rottura in vari pezzi. Questi, presentano superfici di rottura di vario aspetto a seconda che la frattura è avvenuta oppure no secondo i piani naturali di sfaldatura del metallo nel quale si sono formati, in seguito al lento raffreddamento, dei cristalli piuttosto grossi. Ho scelto, fra i vari pezzi così ottenuti, quelli che presentavano una identica sfaldatura per ambedue le faccie e con essi ho preparato degli anelli delle stesse dimensioni di quelli prima adoprati. Ho verificato agevolmente che – in accordo con l'ipotesi posta e col fatto che nei frammenti di metallo adoprati, i cristalli sono plausibilmente orientati tutti nello stesso senso - tali anelli non presentano più traccia sensibile di termoelettricità accidentale. Ho ottenuto infatti con essi, una deviazione di sole due o tre divisioni della scala, in confronto alle due o trecento divisioni ottenute, nelle identiche condizioni, con la maggior parte degli anelli prima adoprati.

Noterò da ultimo che la ipotesi proposta si applica facilmente anche agli altri metalli pei quali ho precedentemente messa in rilievo l'attitudine a fornire correnti termoelettriche accidentali. Si tratta infatti di metalli che hanno tutti spiccata tendenza a cristallizzare nel solidificarsi e per due di essi, antimonio e zinco è stato sperimentalmente verificato (1) che presentano potere termoelettrico nelle diverse direzioni.

(1) E. G. Linder, *Thermo-electric Effect in Single Crystal Zinc Wires.* « Phys. Rew. », XXVI, p. 486, 1925.

Digitized by Google

Fisica. — *Sulla dispersione rifrattiva e rotatoria naturale delle soluzioni acquose di aspartato monoetilico.* Nota di M. L. PAGLIARULO, pres. dal Socio M. CANTONE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-Fisica. — *Isotopia, peso eccedente e struttura atomica.* Nota [1] di G. PICCARDI, presentata [2] dal Corrisp. L. ROLLA.

In una Nota precedente [3], noi abbiamo emesso l'ipotesi che una specie atomica, di numero d'ordine N e di peso atomico P, debba possedere $P - 2 \cdot N$ elettroni positivi e $P - 2 \cdot N$ elettroni negativi esterni al nucleo atomico, disposti in modo da formare un insieme elettricamente neutro.

Ai dati, sperimentali e di osservazione, che già citammo, a conferma di questa ipotesi, noi aggiungeremo ora alcune nostre osservazioni sull'isotopia, in relazione al peso eccedente ed alla struttura atomica, nelle quali considereremo, in funzione del numero atomico:

1. la differenza fra il peso dell'isotopo più alto ed il peso dell'isotopo più basso, ossia il *campo di variabilità degli isotopi*, di ciascun elemento;
2. il massimo peso eccedente presentato da ogni gruppo di isotopi.

Noi non abbiamo potuto estendere le nostre considerazioni a tutti i gruppi del sistema periodico non essendo noti gli isotopi per tutti gli elementi.

Considerando il campo di variabilità degli isotopi in funzione del numero atomico, si notano facilmente i fatti che qui sotto elenchiamo:

1. nessuna relazione generale sembra passare fra campo di variabilità e numero atomico; questo fatto è notissimo da gran tempo;
2. il campo di variabilità presenta, invece, andamenti ben definiti nei vari gruppi di elementi omologhi; questi andamenti sono in generale diversi a seconda dei diversi gruppi di elementi considerati;
3. gli elementi radioattivi hanno un comportamento completamente discordante rispetto a quello dei presunti omologhi non radioattivi (questa discordanza è evidentemente da mettere in relazione con la particolarissima natura di questi elementi; nelle tabelle seguenti, il campo di variabilità degli isotopi radioattivi è segnato in numeri romani);

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale ed inorganica della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 20 marzo 1927.

(3) Questi « Rendiconti ».

Digitized by Google

4. gli elementi che seguono il gruppo delle terre rare sembrano risentire della diversità della loro struttura atomica interna; nelle tabelle seguenti noi abbiamo separato questi elementi con una linea verticale.

Riportiamo qui gli andamenti presentati da alcuni gruppi di elementi omologhi:

Per i gas nobili ed il gruppo del carbonio, il campo di variabilità cresce al crescere del numero atomico:

He	Ne	A	Kr	Xe	:	Em		C	Si	Ge	Sn	:	Pb
0	2	4	8	12	:	IV		0	2	4	8	:	VIII

mentre, per i metalli alcalini e per gli alogeni, segue una legge in parte simmetrica per gli alcalini, simmetrica per gli alogeni [1]:

Li	Na	K	Rb	Cs	:	87		F	Cl	Br	J	:	85
1	0	2	2	0	:	?		0	2	2	0	:	?

Anche per i metalli alcalino terrosi il campo di variabilità segue una legge simmetrica:

Be	Mg	Ca	Sr	Ba	:	Ra
0	2	4	2	0	:	VI

ma per i metalli trivalenti boro, alluminio, gallio, indio e tallio la legge è simile a quella dei metalli alcalini:

B	Al	Ga	In	:	Tl
1	0	2	0	:	VI

Per i metalli nobili, per i metalli bivalenti zinco, cadmio, mercurio e per i metalli trivalenti scandio, ittrio, lantanio, il campo di variabilità rimane costante fino al gruppo delle terre rare:

Cu	Ag	:	Au		Zn	Cd	:	Hg		Sc	Y	La
2	2	:	?		4	4	:	6		0	0	0

Questi esempi sembrano dimostrare in modo abbastanza chiaro che il *campo di variabilità degli isotopi dipende dalla particolare natura dei gruppi di elementi considerati, ossia, in definitiva, dalla loro struttura atomica.*

(1) È notevole il fatto che l'alogeno, che precede, ed il metallo alcalino, che segue un dato gas nobile, abbiano lo stesso campo di variabilità.

Digitized by Google

Consideriamo ora il peso eccedente del massimo isotopo di ciascun elemento, quale funzione del numero atomico; noi troviamo ancora delle regolarità che ci dimostrano come questo peso eccedente possa esser considerato funzione della struttura atomica.

Prendiamo anzitutto in esame i primi venti elementi del sistema periodico; questi elementi, che posseggono delle strutture atomiche relativamente semplici, possono mostrare con buona evidenza, l'esistenza di una eventuale relazione fra $P - 2 \cdot N$ max. e la struttura atomica.

Effettivamente, come mostra l'unita tabella, questa relazione esiste; $P - 2 \cdot N$ max. ha un comportamento nettamente distinto in ogni periodo.

H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
	0	1	1	1	0	0	0	1	2
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	A	K	Ca
1	2	1	2	1	2	3	4	3	4

Le massime variazioni di $P - 2 \cdot N$ max., che avvengono in corrispondenza del neo e dell'argo, coincidono colla chiusura di anelli periferici di 8 elettroni.

Anche questa coincidenza non può essere casuale, ma va attribuita ad una effettiva dipendenza del peso eccedente dalla struttura atomica.

Che ciò sia verosimile è avvalorato da altri fatti, veramente notevoli, che qui riportiamo.

Per i gas nobili, $P - 2 \cdot N$ max. segue questa legge:

	$P - 2 \cdot N$ max.	
He	0	periodo di 8 elementi
Ne	2	periodo di 8 elementi
A	4	periodo di 18 elementi
Kr	14	periodo di 18 elementi
Xe	28	periodo di 32 elementi
Em	50	

È evidente che il valore di $P - 2 \cdot N$ max. raddoppia ogni volta che si ripete una data configurazione atomica; infatti il neo, che chiude un primo periodo di 8 elementi, ha un peso eccedente massimo 2; l'argo, che chiude un secondo periodo di 8 elementi, ha un peso eccedente massimo 4;

Digitized by Google

il kripto e lo xeno, che chiudono rispettivamente un primo ed un secondo periodo di 18 elementi, hanno un peso eccedente di 14 e 28, rispettivamente; l'emanazione, che chiude invece un periodo di 32 elementi, ha un peso eccedente massimo di 50.

Anche i metalli bivalenti zinco, cadmio, mercurio presentano la stessa proprietà; infatti si osserva:

	Zn	Cd	Hg
P — 2·N max.	10	20	44

(anche in questo caso è evidente l'influenza del gruppo delle terre rare).

Gli altri gruppi di elementi seguono andamenti diversi dalla legge che potremmo chiamare « del raddoppiamento »; per esempio:

Per i metalli alcalini ed i metalli trivalenti il peso eccedente massimo rimane costante nei due primi periodi di 8 elementi:

	Li	Na		B	Al
P — 2·N max.	1	1		1	1

ma per i metalli appartenenti a questi gruppi, che precedono i grandi periodi, la legge diviene lineare:

	K	Rb	Cs		Al	Ga	In
P — 2·N max.	3	13	23		1	9	17
aumento		10	10			8	8

Anche per gli elementi del gruppo dell'ossigeno che precedono i grandi periodi la legge è lineare:

	S	Se	Te
P — 2·N max.	2	14	26
aumento		12	12

Gli altri gruppi di elementi seguono leggi ancora diverse: per esempio:

	C	Si	Ge	Sn		Al	Sc	Y	La
P — 2·N max.	0	2	10	24		1	3	11	25
aumento		2	8	14			2	8	14

	Mg	Ca	Sr	Ba
P — 2·N max.	2	4	12	26
aumento		2	8	14

Digitized by Google

Riguardo a due gruppi di elementi omologhi, che noi abbiamo ora considerato, si può far notare una coincidenza interessante e cioè:

I gas nobili ed i metalli bivalenti, zinco, cadmio, mercurio, che seguono la legge del raddoppiamento, occupano sulla curva dei potenziali di ionizzazione delle posizioni di massimo e corrispondono, come altrove mostrammo [1], ad una completa saturazione delle zone elettroniche: esterne nel caso dei gas nobili; interne ad un anello di due elettroni, nel caso dei metalli bivalenti.

Anche questo fatto non è privo di significato, ma dimostra che la variazione del peso eccedente non è puramente casuale ma dipende anche dalle particolari configurazioni atomiche.

La sistematica variazione di $P - 2 \cdot N$ max. di periodo in periodo, non avviene che per i primi venti elementi; dopo il calcio, avvengono dei profondi mutamenti nella struttura atomica e $P - 2 \cdot N$ max. segue leggi diverse secondo i vari gruppi di elementi omologhi.

In complesso si osserva che passando dagli elementi del secondo piccolo periodo agli omologhi del primo grande periodo, il peso eccedente massimo aumenta da 8 a 12 unità e che passando dagli elementi del primo grande periodo agli omologhi del secondo grande periodo, il peso eccedente massimo aumenta da 8 a 14 unità.

Ora, nel caso di strutture atomiche che vanno sempre più complicandosi, quali sono quelle degli elementi che seguono il calcio, è più utile considerare il peso eccedente calcolato sul semplice peso atomico, che rappresenta fra tutti i pesi possibili quello più probabile, che non il peso eccedente del massimo isotopo (restano così eliminate le non poche lacune, e le incertezze, che ancora oggi presenta la conoscenza degli isotopi).

La variazione di questo peso eccedente probabile, in funzione del numero atomico, è rappresentata dal diagramma riportato nella precedente Nota; la periodicità di questo diagramma ci assicura che il peso eccedente probabile varia in modo uniforme per tutti i gruppi di elementi omologhi.

L'esistenza di relazioni, sia pure incompletamente osservate, fra campo di variabilità degli isotopi, peso eccedente massimo, peso eccedente probabile e struttura atomica, porta ad ammettere l'esistenza di una relazione del tutto generale fra il peso eccedente e la struttura atomica; ciò conferma pienamente la nostra ipotesi.

(1) L. Rolla e G. Piccardi, «Gazz. chim. it.», *56*, 1926, p. 524.

Digitized by Google

Chimica. — *Relazioni fra nitroderivati aromatici e azossicomposti.* Nota di D. Bigiavi, presentata [1] dal Socio A. Angeli.

Secondo quanto è stato messo in rilievo dalle considerazioni del prof. Angeli, l'atomo di ossigeno protegge dall'azione sostituente dei reattivi, come alogeni, acido nitrico, quel residuo aromatico degli azossicomposti che è direttamente unito all'atomo di azoto legato all'ossigeno:

$$C_6H_5 \cdot \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N - \ .$$

Questa influenza protettrice dell'ossigeno azoico viene attenuata o del tutto annullata dalla presenza nel nucleo aromatico di altri aggruppamenti, e fu trovato che l'ossigeno dell'ossidrile o dell'ossialchile (o forse nel loro complesso tali aggruppamenti) può favorire per conto suo l'entrata dei gruppi $-NO_2$, $-Br$, in orto, nella molecola degli azossifenoli, per modo che entrambi i residui:

$$(1) \qquad HO \cdot C_6H_4 \cdot N = \qquad\qquad (2) \qquad HO \cdot C_6H_4 \cdot \underset{\underset{O}{\|}}{N} =$$

a differenza dall'altro:

$$C_6H_5 \cdot \underset{\underset{O}{\|}}{N} = \ ,$$

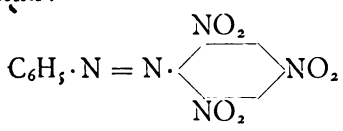
reagiscono con bromo e con acido nitrico. L'acido nitroso, invece, può differenziare i residui (1) e (2) per il fatto che, mentre il (1) reagisce, in quanto che introduce nel suo nucleo un gruppo $-NO_2$ in orto all'ossidrile, il (2) rimane inalterato e in questo caso si comporta come l'o- e il p- nitrofenolo.

Dalle poche esperienze in proposito si può rilevare che se da una parte si constata l'inerzia alla sostituzione del nucleo aromatico contiguo all'azoto pentavalente dell'azossicomposto, dall'altra si può osservare che in genere *i sostituenti* $-NO_2$ *(in para o in orto all'aggruppamento azoico) nell'anello aromatico di un azoderivato rendono difficile l'addizione dell'ossigeno ad un azoto dell'azogruppo*, mediante l'acido peracetico, cioè il passaggio ad azossicomposto: così il p-p'-dinitroazobenzolo viene solo con grande lentezza ossidato

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

a binitroazossiderivato; il trinitroazobenzolo e il p-bromo-p'-nitroazobenzolo seguenti:

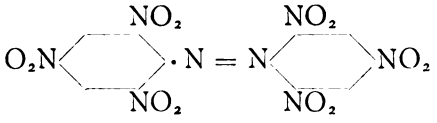


$$Br \cdot C_6H_4 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot NO_2$$

forniscono con acido peracetico, anzichè le rispettive coppie di azossi-isomeri in miscuglio, i soli azossiderivati che hanno l'ossigeno azoico lontano dal nucleo contenente i gruppi NO_2 [1]:

$$C_6H_5 \cdot N(:O) = N \cdot C_6H_2(NO_2)_3 \qquad Br \cdot C_6H_4 \cdot N(:O) = N \cdot C_6H_4 \cdot NO_2$$

Molto probabilmente l'esanitroazobenzolo:



con tale reattivo non fornisce l'azossiderivato corrispondente come lo confermano le proprietà di quella sostanza [2].

Anche la trasformazione di un isomero nell'altro di una stessa coppia di azossicomposti sotto l'azione di acido cromico o solforico concentrato, sta a provare l'azione repulsiva che esercitano i sostituenti di un nucleo per l'ossigeno azoico: la isomerizzazione avviene da una forma β ad una α e mai si verifica il contrario [3]:

$$\beta)\ C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot NO_2 \quad \rightarrowtail \quad \alpha)\ C_6H_5 \cdot \overset{\displaystyle O}{N} = N \cdot C_6H_4 \cdot NO_2$$

Esiste dunque una relazione reciproca tra sostituenti nell'anello aromatico e azoto pentavalente dell'azossigruppo: $-N=N-$; si può anche

$$\overset{\displaystyle O}{}$$

in vari casi constatare che *i nitroderivati aromatici hanno un comportamento simile a quello degli azossicomposti*, che da essi si possono immaginare derivati per sostituzione di un $=O$, con $=N \cdot C_6H_5$. Così per esempio:

(1) Angeli, Valori, «R. A. L.», *22*, I, 132. Anche dall'o-nitroazobenzolo e dal 2-4-dibromoazobenzolo con acido peracetico si ottiene un solo azossiderivato, quello che ha l'aggruppamento $C_6H_5 \cdot N(:O) =$. L'ossigeno azoico in questo 2° caso rifugge anche dal nucleo aromatico in cui due idrogeni sono sostituiti da Br . Non altrettanto può dirsi del comportamento a quel reattivo del p-nitroazobenzolo: da esso, contrariamente alla regola, si ottiene operando a bassa temperatura il p-nitroazossibenzolo: $C_6H_5 \cdot N{=}N(:O)C_6H_4 \cdot NO_2$; l'ossigeno azoico questa volta si è portato vicino al nucleo sostituito.

(2) Leemann e Grandmougin, B. *41*, 1298 (1908).

(3) Angeli, G. *46*, II, 79 (1916).

Digitized by Google

1. p- ed o- nitrofenolo, p- nitroanilina, vengono difficilmente ossidati dal permanganato in soluzione alcalina: in modo analogo si comportano [1]:

(I) $(C_6H_5\cdot N)=N\cdot C_6H_4\cdot OH$ (II) $(C_6H_5\cdot N)=N\cdot C_6H_4\cdot OH$

(III) $(C_6H_5\cdot N)=N\cdot C_6H_3(OH)(CH_3)$ (IV) $(C_6H_5\cdot N)=N\cdot C_6H_4\cdot NH_2$

mentre i 4 rispettivi isomeri α sono tutti molto più sensibili a questo ossidante. L'ossigeno azoico protegge dunque l'anello aromatico vicino dall'azione ossidante del permanganato.

2. p- nitrofenolo, nitro- p- cresolo (3- nitro 4- ossi 1- metilbenzolo), monobenzoilderivato del nitroidrochinone: $(HO\cdot C_6H_3(NO_2)\cdot OCOC_6H_5)$ non reagiscono con acido nitroso (soluzione acetica del fenolo ed aggiunta di 1-2 molecole di nitrito sodico). Inerti allo stesso reattivo, perchè l'ossigeno azoico contiguo esplica l'azione repulsiva come fa anche $-NO_2$, risultano corrispondentemente gli ossiazossiderivati (I), (III) e [2]:

$C_6H_5\cdot N=N\cdot C_6H_3(OH)(OCOC_6H_5)$ (V)

$C_6H_5\cdot COO\cdot C_6H_3\cdot N=N\cdot C_6H_3\cdot OH$ (VI)

mentre nelle stesse condizioni, con un rendimento quasi quantitativo, dai rispettivi isomeri α (i quali, ad eccezione dell'isomero del VI contengono l'aggruppamento $C_6H_5\cdot N=$) si hanno mononitroderivati con il gruppo $-NO_2$ in orto all' $-OH$.

3. Il β-p-aminoazossibenzolo (IV) si condensa col nitrosobenzolo:

$$C_6H_5\cdot N=N\cdot C_6H_4\cdot N=N\cdot C_6H_5 + H_2O$$

(1) Angeli, G. *51*, 35 (1921); Bigiavi, Poggi, G. *54*, 119 (1924); Bigiavi, Albanese, G. *57*, (1927).

(2) Angeli, Bigiavi, Carrara, «R. A. L.», *31*, I, 412 (1922); Bigiavi, Poggi, «R. A. L.», *32*, II, 170 (1923); Bigiavi, Debenedetti, G. *54*, 365 (1924); Bigiavi, Guarducci, G. *57*, 178 (1927).

Digitized by Google

in modo assai più lento che non l'isomero α. Tale comportamento del (IV) ricorda quello della p-nitroanilina con lo stesso nitrosoderivato [1]:

$$(O) = \underset{\underset{O}{\|}}{N}\cdot C_6H_4\cdot N\boxed{H_2 + O}N\cdot C_6H_5\ ;$$

Entrambe queste sostanze reagiscono fra di loro pure difficilmente.

4. I sali di diazonio della p-nitroanilina e del β-p-amino-azossibenzolo (IV) versati in alcali generano gli isodiazotati e non i diazotati normali. Tale comportamento ha però anche l'α-p-aminoazossibenzolo e altre amine aromatiche con sostituenti in o- e p- all'azoto, ciò che potrebbe far vedere la tendenza di certi gruppi ad allontanare l'ossigeno del diazogruppo dal proprio nucleo aromatico, considerando per i diazotati le formule di Angeli:

diazotato normale: $\underset{\underset{O}{|}}{R\cdot N} = NK$ isodiazotato: $R\cdot N = N\cdot OK$

5. Il p-nitrotoluolo si condensa con nitrito di etile in presenza di etilato dando l'ossima della p-nitrobenzaldeide [2]. Reazione analoga dà, sebbene in grado piccolissimo, il β-p-benzolazossitoluolo [3] (p. f. 65°):

$$C_6H_5\cdot N = \underset{\underset{O}{\|}}{N}\cdot C_6H_4\cdot CH_3\ .$$

6. Il nitrobenzolo reagisce con il nitrossile (NOH), che si ottiene dal sale sodico dell'acido nitroidrossilamminico, e fornisce la nitrosofenilidrossilammina, riducendosi probabilmente in un primo tempo a nitrosobenzolo [4]. L'azossibenzolo ha un comportamento simile, perchè da esso si ottiene azobenzolo e un sale non ancora bene studiato che può forse avere la struttura seguente:

$$(O) = \underset{\underset{O}{\|}}{N}\cdot C_6H_5 \qquad (C_6H_5\cdot N) = \underset{\underset{O}{\|}}{N}\cdot C_6H_5$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$[O = N\cdot C_6H_5] \qquad C_6H_5\cdot N = N\cdot C_6H_5$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$O = \underset{\underset{NOH}{|}}{N}\cdot C_6H_5 \qquad [C_6H_5\cdot N = \underset{\underset{NOH}{|}}{N}\cdot C_6H_5]\ (?)$$

(1) Angeli, Alessandri, «R. A. L.», 20, II, 170 (1911); Angeli, «R. A. L.», 5 450 (1926).

(2) Angeli, «R. A. L.», 8, II, 32 (1899).

(3) Bigiavi, Sabatelli, G. 57 (1927).

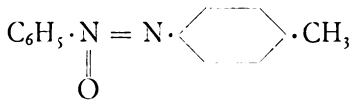
(4) Bigiavi, «R. A. L.», 4, 458 (1926).

Digitized by Google

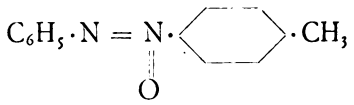
7. Condensazioni intramolecolari avvengono tanto fra il gruppo $-N=O$ (con O) e l'idrazoico (in orto) quanto fra il $-N=N-$ (con O) e l'idrossilamminico (in orto); in entrambi i casi ne risultano az-nitrosobenzoli [1].

8. Mobilità dell'ossigeno sia del nitro- che dell'azossigruppo si riscontra sotto l'azione della luce con la formazione di anilina, p-aminofenolo, ecc., dal nitrobenzolo [2], di o-ossiazobenzolo dall'azossibenzolo [3]. Anche i nitroni, sotto l'azione della luce, mostrano una grande mobilità del loro ossigeno.

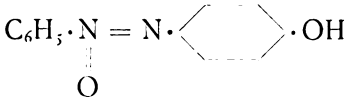
9. La riduzione con stannito alcalino degli azossicomposti a temperatura ordinaria conduce lentamente agli azo- e successivamente (in alcuni casi) a idrazoderivati. In generale, delle coppie di azossicomposti misti, vengono più facilmente ridotti gli isomeri che risultarono più difficilmente ossidabili del permanganato [4], come per es.:



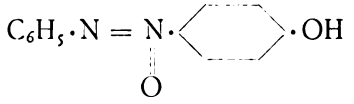
Si ossida facilmente ad acido α-fenil-azossicarbonico; si riduce lentamente a benzolazotoluolo.



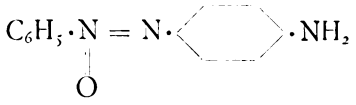
Si ossida difficilmente ad acido β-fenil-azossicarbonico; si riduce meno lentamente a benzolazotoluolo.



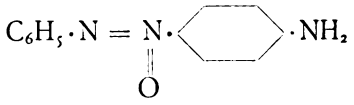
Si ossida facilmente: isodiazotato. Non si riduce.



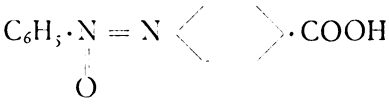
Si ossida difficilmente: isodiazotato. Si riduce, lentamente, a benzolazofenolo.



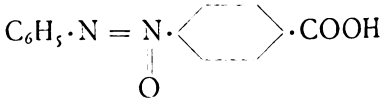
Si ossida facilmente. Non si riduce.



Si ossida lentamente. Si riduce ad aminoazobenzolo.



Si riduce ad acido azobenzolcarbonico.



Si riduce facilmente.

Mobilità molto maggiore presenta l'ossigeno dei nitroderivati, che si riducono facilmente.

(1) Cusmano, G. *51*, 72 (1921).
(2) Ciamician, Silber, G. *36*, II, 177 (1906); Baudisch, E. Mayer, B. *45*, 1773 (1912).
(3) Knipscheer, «Centr.», 1903, I, 1082.
(4) Bigiavi, Albanese, G. *57* (1927).

Digitized by Google

Anche con la riduzione catalitica è il nitrogruppo più facilmente riducibile dell'azossigruppo: così, secondo Cusmano [1], da una miscela di azossibenzolo e p–nitrotoluolo si riottiene il primo inalterato insieme a p- toluidina; con altri riducenti (solfuro ammonico, stagno ed acido cloridrico) nei polinitroazossicomposti è il gruppo ossazoico più facilmente riducibile.

La potassa alcoolica, come è noto, trasforma i nitroderivati in azossicomposti, i quali risultano quindi stabili a questo riducente; esistono però alcuni azossicomposti, che, se pure lentamente, vengono ridotti ad azoderivati [2].

(1) $O = N \cdot C_6H_5$ (O si stacca)

Si forma azossibenzolo. Probabilmente in un primo tempo il nitrobenzolo) si riduce a nitrosobenzolo, il quale con potassa subisce azione simultanea di ossidazione (nitrobenzolo e riduzione (azossibenzolo da fenilidrossilammina + nitrosobenzolo). (Cfr. ANGELI, «R. A. L.», *1900*, II, 181).

(2) $C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_5$ (O non si stacca)

(3) $C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot N = N \cdot C_6H_5$ (O si stacca)

Si forma trisazobenzolo.

In modo simile al monoazossibisazobenzolo si comporta il trisazossibenzolo seguente:

$C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot N = N \cdot C_6H_5$ (O si stacca, O si stacca, O si stacca)

e sembra l'o-o'-, il p-p'- dicloro-azossibenzolo [3],

Si può pensare che, come nei nitroderivati, p. es. in (1), l'ossigeno che può facilmente staccarsi, viene a trovarsi sotto l'influenza repulsiva energica di un altro ossigeno, così in (2) è sotto l'influenza del gruppo $C_6H_5 \cdot N =$, che è di azione meno repulsiva; nell'ultimo caso questa relativamente debole influenza repulsiva dei gruppi $C_6H_5 \cdot N =$, viene aumentata dall'azione dei

(1) CUSMAMO, «Ann. Chim. Appl.», *12*, 123 (1918); CUSMANO, DELLA NAVE, G. *51*, 65 (1921).

(2) BIGIAVI, FRANCESCHI, G. *57* (1927).

(3) B. *15*, 1004 (1882).

Digitized by Google

sostituenti in para e allora gli atomi di ossigeno si staccano; così pure se in para (o in orto) si trovano altri sostituenti negativi (Cl).

10. In ambiente acido è l'ossigeno azoico che risulta più mobile dell'ossigeno nitrico. È nota la trasformazione degli azossicomposti in p- ed in o- ossiazocomposti (isomerizzazione) o in azoderivati (riduzione) per azione dell'acido solforico concentrato; in tale comportamento gli azossicomposti assomigliano più alle arilidrossilammine o agli ossidi delle ammine terziarie che non ai nitroderivati.

Non estranea alla mobilità dell'ossigeno azoico in ambiente acido deve essere la presenza nell'azossicomposto del gruppo:

$$-\overset{\text{V}}{\underset{\displaystyle O}{\overset{\displaystyle \|}{N}}}=\overset{\text{III}}{N}-$$

in cui l'azoto trivalente ha facoltà additive [1].

11. Il colore può in alcuni casi servire a distinguere due isomeri fra di loro:

$$C_6H_5\cdot\underset{\displaystyle O}{\overset{\displaystyle \|}{N}}=N\cdot C_6H_4\cdot N=N\cdot C_6H_4\cdot OH\,[4] \quad \text{p. f. } 203^\circ \text{ rosso-rubino}$$

$$C_6H_5\cdot N=\underset{\displaystyle O}{\overset{\displaystyle \|}{N}}\cdot C_6H_4\cdot N=N\cdot C_6H_4\cdot OH\,[4] \quad \text{p. f. } 176^\circ \text{ giallo-marrone.}$$

Il secondo isomero, così differente per le sue proprietà fisiche dal primo [2] ha appunto un colore che assomiglia a quello del:

$$O=\underset{\displaystyle O}{\overset{\displaystyle \|}{N}}\cdot C_6H_4\cdot N=N\cdot C_6H_4\cdot OH\,[4]$$

Il β- o-ossiazossibenzolo (II), come l'o-nitrofenolo, non possiede le proprietà tintorie [3] di cui invece è dotato il suo isomero α. Anche nei due isomeri p-aminoazossibenzoli si nota, sebbene non molto accentuata, una differenza nello stesso senso.

(1) È da ricordare che anche dai nitrocomposti si possono ottenere in certe condizioni dei sali. Vedi p. es. un solfato acido del nitrobenzolo. (Cherbuliez, *Helv.*, *6*, 283 (1923)).

(2) Bigiavi, Albanese, G. *57* (1927).

(3) Baudisch, B. *50*, 333 (1917).

Digitized by Google

Chimica. — *Il sistema* $Al(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$ *a 25°*. Nota I di G. MALQUORI [1] presentata [2] dal Socio N. PARRAVANO.

G. A. Blanc ha descritto due processi di utilizzazione della leucite, uno fondato sull'attacco del minerale con acido cloridrico e l'altro con acido nitrico [3]. Questi processi sono protetti da brevetti [4] e funzionano già presso grossi impianti industriali.

La possibilità economica dei due processi è fondata, fra l'altro, sul fatto che i prodotti che si ricavano, sali di potassio e allumina, sono di elevata purezza; l'allumina Blanc infatti, si è dimostrata adatta in modo speciale alla fabbricazione dell'alluminio.

A chiarire il chimismo delle operazioni che costituiscono i due processi sono state iniziate e sono attualmente in corso varie ricerche presso questo Istituto.

In questa Nota riferisco sullo studio dell'isoterma a 25° del sistema $Al(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$. Farò noti in seguito i risultati ottenuti ad altre temperature ed in presenza di ferro. Ricerche analoghe sono pure in corso per i cloruri.

Le composizioni delle soluzioni sature e dei resti sono riportate nella tabella e rappresentate nel diagramma.

SISTEMA $Al(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$ A 25°

Composizione della soluzione			Composizione del resto			Fasi solide
$Al(NO_3)_3$ %	KNO_3 %	H_2O %	$Al(NO_3)_3$ %	KNO_3 %	H_2O %	
—	27.31	72.69	—	—	—	KNO_3
8.75	26.89	64 31	—	—	—	»
11.43	25.91	62.66	3.98	78.81	17.21	»
20 05	22.12	57.83	—	—	—	»
25.19	20.73	54.08	—	—	—	»
29.81	18.97	51.22	6.78	80.11	13.11	»
35.23	13.94	50.83	—	—	—	$KNO_3Al(NO_3)_39H_2O$
36.15	9.41	54.44	47.87	3.99	48.14	$Al(NO_3)_39H_2O$
37.93	4.83	57.24	—	—	—	»
39.25	—	60.75	—	—	—	»

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Roma.
(2) Nella seduta del 6 marzo 1927.
(3) « G. Chim. Ind. Appl. », 7, 3, (1925).
(4) Brev. Blanc, Reg. Verb. 310/56 - Reg. Gen. 196.060 - 558.26 - 199.439.

Digitized by Google

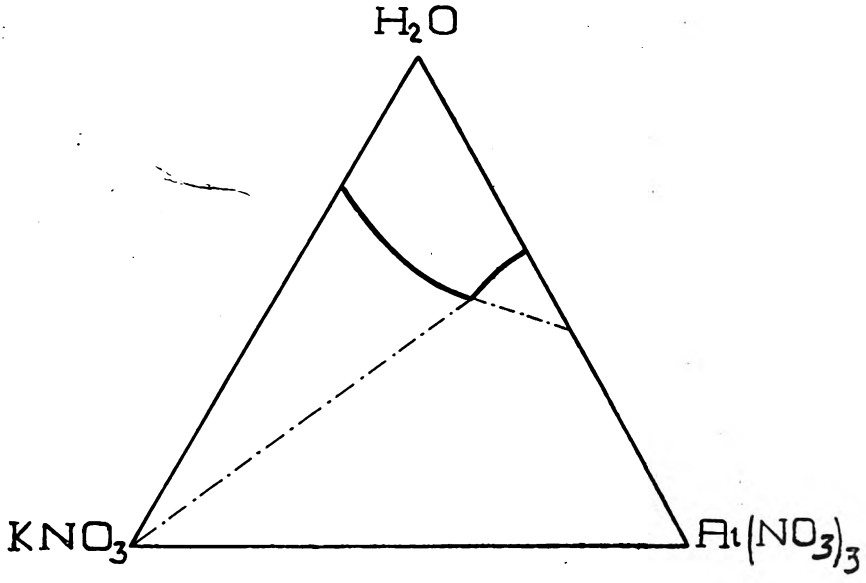


Diagramma 1.

Nella letteratura si trova riportato un brevetto di N. H. La Porte[1] riguardante la preparazione di un nitrato doppio di alluminio e potassio di formula: $Al(NO_3)_2 \cdot 3KNO_3 \cdot 10H_2O$.

Queste ricerche provano che a 25° non si forma nessun prodotto di addizione fra il nitrato di alluminio e nitrato di potassio. La soluzione satura dei due sali contiene:

$Al(NO_3)_3$ 35.23 % ; KNO_3 13.94 % ; H_2O 50.83 %.

Chimica. — *La struttura cristallina dell'iodio.* Nota di A. Ferrari, pres. dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Determinazione approssimativa di 2V nelle sezioni sottili dei minerali.* Nota di P. Aloisi, pres. dal Socio Corrisp. G. D'Achiardi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Ottica cristallografica. — *Sopra due recenti Note della Sig. Philibert.* Nota di C. Perrier, pres. dal Socio F. Zambonini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) U. S. P. 1377081. « J. Chem. Soc. Abstr. », 120, 699, (1921).

Digitized by Google

Embriologia sperimentale. — *Trapianti omeoplastici degli abbozzi oculari negli embrioni di Pleurodeles Waltli* [1]. Nota di P. PASQUINI presentata [2] dal Corrisp. F. RAFFAELE.

È noto per le numerose ricerche di embriologia sperimentale che alcuni organi sono, durante lo sviluppo e nella loro sede di origine, intimamente correlati ad altri organi che ne regolano, anzi ne determinano la differenziazione e l'accrescimento.

Altri, invece, durante l'embriogenesi, sono assolutamente indipendenti da quelle influenze, la cui natura ci sfugge, prodotte dalla presenza, alcune volte dal contatto di altri organi in via di sviluppo. Sembrerebbe in questo caso che negli abbozzi di questi organi capaci di autodifferenziamento (*selfdifferentiation* degli Aa. americani = *Selbstdifferenzierung* di Roux), risiedessero delle facoltà potenziali che, esplicandosi durante i processi morfogenetici, condurrebbero l'abbozzo a tradurre in effetto quelle energie che lo fanno sviluppare in quel tale determinato organo.

Così mentre la formazione della cornea dipende dal calice ottico come ha dimostrato il Lewis [3]; gli abbozzi degli arti sono capaci di autodifferenziamento sia nei trapianti omeoplastici, che in quelli eteroplastici: così dalle ricerche di Harrison [4].

Una letteratura ricchissima, che mi riservo di elencare a lavoro ultimato, ci fa vedere che oggi il metodo sperimentale dei trapianti di abbozzi degli organi i più diversi (fegato, pancreas, otocisti, ipofisi, lente cristallina, vescicola olfattiva, ecc.) è un metodo fecondo per indagare sperimentalmente come un organo si sviluppi durante l'embriogenesi.

Le ricerche di Lewis [5] su *Rana palustris* e le ormai classiche esperienze di Spemann [6] su altri anfibi, hanno dimostrato che, in questi vertebrati, la vescicola ottica è capace di differenziarsi da sè quando, rimossa dalla sua sede normale, viene trapiantata nelle diverse regioni del corpo dell'embrione. Essa si sviluppa in un calice ottico; si differenzia egualmente in retina e epitelio pigmentoso, originando un occhio completo.

Le ricerche di Detwiler [7] hanno dimostrato che così si comporta la vescicola ottica trapiantata in sede dell'otocisti e, nei trapianti eteroplastici

(1) Ricerche eseguite nell'Osborn Zoological Laboratory diretto dal Prof. Ross Harrison, nella Yale University di New Haven, S.-U. d'America.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(3) « Journ. Exp. Zool. », vol. 2, 1905.

(4) « Journ. Exp. Zool. », vol. 25, 1918.

(5) « Americ. Jour. Anat. », vol. 7, 1907.

(6) « Zool. Jahrb. », 32, 1912.

(7) « Journ. Exp. Zool. », vol. 43, 1925.

Digitized by Google

dell'occhio in *Amblystoma,* l'Harrison [1] mise in evidenza, in questi casi, un'azione dell'individuo porta innesto sull'abbozzo oculare trapiantato dall'altra specie, nei riguardi della velocità di accrescimento e della grandezza dell'organo.

In embrioni di Anfibi urodeli del gen. *Pleurodeles* (*P. Waltli*), in stadî seguenti alla chiusura della doccia midollare, riferibili agli stadî 23 e 24 di Harrison per *Amblystoma punctatum,* ho condotto esperimenti di trapianto della vescicola ottica con o senza l'ectoderma che la ricuopre e che rappresenta il placode del cristallino.

Ho usato la tecnica degli innesti di Harrison attuata da lui nei trapianti degli arti e in quelli eteroplastici dell'occhio di *Amblystoma.*

Tralasciando per ora di enumerare i dettagli di tecnica di cui mi avvalsi per ottenere le migliori condizioni a che il trapianto attecchisse, mi limiterò a esporre il problema succintamente comunicandone i risultati principali che mi riservo discutere ampiamente in un esteso lavoro.

Ho inteso studiare la possibilità di determinare la fusione di due occhi in uno solo, dall'unione provocata con l'esperimento, di due abbozzi oculari dello stesso stadio e sullo stesso lato dell'embrione.

Per raggiungere tale scopo ho operato, in ogni esperienza, su due embrioni della stessa età, di cui uno, l'innesto, preventivamente colorato con il solfato di blu Nilo [2]. Da questo individuo ho rimosso l'intera vescicola ottica, a questo stadio unita al cervello con un cortissimo e largo peduncolo e separata dall'ectoderma da mesenchima, nella maggior parte dei casi asportando insieme ad essa l'ectoderma che lo ricopriva. Ho trapiantato quindi questa vescicola ottica accanto alla vescicola ottica del porta innesto della quale avevo rimosso la parte (meno della metà) anteriore o la posteriore, la dorsale o la ventrale o la porzione esterna. Questa asportazione era necessaria, in primo luogo per ottenere la sede adatta dove il tessuto potesse allignare, secondariamente per determinare la crescita insieme dei due abbozzi degli organi simili.

La colorazione blu dell'innesto mi dava il modo di seguire il destino e l'evoluzione del tessuto trapiantato sull'individuo porta innesto.

Grazie alla tecnica perfezionata di Harrison, seguita integralmente nei miei esperimenti, in una minima percentuale (10 %) di trapianti, il tessuto innestato non continuò il suo sviluppo e fu assorbito dall'ospite senza lasciare alcuna traccia di sè. Nella quasi totalità dei casi, invece, il tessuto innestato attecchì, susseguentemente evolvendosi e subendo il processo di differenziamento.

(1) « Anat. Rec. », 31, 1925.

(2) Per seguire la terminologia in uso presso gli AA. che si occupano di ricerche sui trapianti, ho chiamato *innesto* o *donatore* (« donnar » degli AA. americani) l'embrione da cui prelevavo il tessuto da trapiantare e *porta innesti* (« host » degli AA. americani), l'embrione sul quale operavo il trapianto.

Digitized by Google

Il trapianto fu fatto o sul lato destro o sul sinistro degli embrioni, avendo molta cura di non interessare in ambo i casi il lato opposto che insieme con l'individuo innesto era utilizzato come controllo.

Le esperienze preliminari mi dimostrarono che trapiantando l'abbozzo della vescicola ottica e relativo placode ectodermico nella regione immediatamente posteriore (caudale) della vescicola del porta innesto, tangenzialmente a essa che non è stata lesa, o a breve distanza, la vescicola ottica innestata segue un processo di sviluppo indipendente, si evolve e si differenzia da sè in un completo calice ottico che possiede una lente derivante dalla porzione dell'ectoderma trapiantata insieme con l'abbozzo oculare.

Anche in *Pleurodeles* la vescicola ottica è capace quindi, rimossa dalla sua sede e portata su un altro individuo, di svilupparsi regolarmente con differenti orientazioni a seconda della direzione secondo la quale si effettuò il trapianto. In molti di questi casi si osserva, nelle larve, come l'occhio derivato dal trapianto, pur essendo completo e normale si pigmenti parzialmente o non si pigmenti affatto.

Nei casi di concrescita degli abbozzi delle due vescicole ottiche dello stesso lato, l'una derivata dall'innesto, l'altra, la normale del porta innesti, si ottengono vari gradi di fusione dei calici ottici che ne derivano e quindi la fusione parziale o totale degli occhi.

Quando si ha una fusione parziale, le vescicole si introflettono contemporaneamente o quasi, per la formazione dei calici ottici e il differenziamento sia nel foglietto retinico del calice, che in quello dell'epitelio pigmentoso procedono di pari passo. Si forma perciò un bulbo doppio con due pupille e due lenti o la pupilla è unica e due sono le lenti; il tapetum è continuo ai due occhi nella porzione mediana e così le retine si continuano l'una nell'altra.

Quando la fusione delle due vescicole riesce completa, le dimensioni dell'occhio che ne risulta sono presso a poco doppie di quelle dell'occhio normale dell'altro lato, sia nell'individuo porta innesti che nel donatore e generalmente la parte del bulbo derivata dal trapianto mostra difetti di pigmentazione.

Un'esatta misurazione dei tre diametri degli occhi derivati da fusione di due vescicole mi ha permesso di conoscere precisamente le proporzioni che corrono fra essi e gli occhi normali e la misurazione nei diversi momenti dello sviluppo, mi ha fatto rilevare, come molto singolare, che queste dimensioni del bulbo doppio derivato dal trapianto decrescono sensibilmente con il crescere della larva. L'occhio diminuisce cioè gradatamente di grandezza senza però mai raggiungere quella dell'occhio normale, palesando un vero processo regolativo che si determina a fusione avvenuta degli abbozzi dell'organo.

Possiamo concludere che: *gli abbozzi oculari del prosencefalo, già differenziati come tali, sono capaci, qualora messi a contatto, – uno di essi pur es-*

Digitized by Google

sendo proveniente da un altro individuo - di differenziarsi ulteriormente fondendosi; si sviluppano cioè in correlazione l'uno dell'altro e si ha la formazione di un solo cristallino come se gli stimoli delle due vescicole sull'ectoderma si fossero sommati prima ancora della formazione dell'unico calice ottico.

Si avrebbe cioè anche in *Pleurodeles* - come Lewis (1904), Ekmann (1914), le Cron (1906), Jenkinson (1906) stabilirono avvenire in altri anfibi (*Rana fusca, temporaria, palustris, sylvatica*; *Hyla arborea, Bufo vulgaris, Amblystoma punctatum*) ed il Cotronei (1915-1921) in altro senso riscontrò su larve di *Bufo* al litio nelle sue ricerche sulla morfologia causale dello sviluppo oculare - un differenziamento dipendente dell'ectoderma per lo sviluppo della lente, che probabilmente potrebbe a sua volta influire sullo sviluppo normale del calice. Fatto molto singolare è che in altre specie anche molto vicine a quelle già enumerate, come la *Rana exculenta*, a quanto conducono con certezza le classiche ricerche dello Spemann (1907) e nei pesci quelle di Stockard (1907-10), la lente è capace di autodifferenziarsi anche se viene abolito, con l'asportazione, lo stimolo della vescicola ottica.

Nel nostro caso particolare dovremmo parlare anche, per il *Pleurodeles*, di una spiccata influenza della vescicola ottica sulla formazione della lente, tanto più che in tutte le esperienze, quando fu rimossa, la vescicola ottica senza l'ectoderma, non si ebbe mai autodifferenziazione del placode della lente. Come pure, mentre comunemente nell'individuo che servì da controllo, sul lato dove era stata operata l'asportazione della vescicola, non si verificò la formazione di un occhio, in due casi tuttavia vi riscontrai lo sviluppo di un piccolo occhio incompleto ed atrofico senza lente originato da porzione di tessuto residuata nell'operazione, che fu capace di svilupparsi in una vescicola ottica di dimensioni assai ridotte.

La vescicola ottica incospicua non raggiungeva l'ectoderma che, per altra via, si dimostra incapace di provvedere da solo, o meglio non a contatto con la vescicola, alla formazione della lente che di conseguenza resta inibita nello sviluppo.

Digitized by Google

Genetica. — *Mancata conferma delle « leggi razionali » del Giglio-Tos sull'ibridismo.* Nota di R. SAVELLI, presentata [1] dal Socio B. LONGO.

Riferisco su esperienze cominciate a Perugia nel 1917, riprese e concluse a Roma. Può essere che nel frattempo alcuni particolari risultati di esse abbiano perduto valore; ma l'interesse della loro conclusione generale resta, perchè - fino ad oggi - si era rimasti allo stesso punto del 1915, anno in cui Ermanno Giglio-Tos poteva scrivere queste parole: « Nel campo biologico stanno ora in contrasto due sorta di leggi: quelle di Mendel e le mie », e soggiungeva che le ulteriori ricerche « eseguite con giusto criterio e rigore » avrebbero dovuto dire « quale delle due sorta di leggi abbia valore generale » [2]. Difatti sarebbero numerosissime le ibridazioni che, rintracciate nella letteratura, potrebbero invocarsi a testimoniare *pro* o *contra* le leggi del Giglio-Tos; ma riunendole tutte si avrebbe un complesso informe di documenti non coordinati fra loro nè con lo speciale scopo propostosi.

Bisogna riconoscere che la migliore via era quella di impiantare una ricerca *ad hoc*; soltanto in tal modo si poteva scegliere il materiale più opportuno per condurre le prove con quel *giusto criterio* che appunto sin'ora era mancato, secondo il parere di Giglio-Tos. Il quale, giova avvertire, non ha pubblicato mai nessun esperimento suo proprio in appoggio delle sue leggi, che pertanto sono state, tra le sue mani, anche un po' troppo « razionali » cioè troppo poco empiriche, troppo limitate ad una zona astratta del pensiero.

Non riproduco le leggi del Giglio-Tos che hanno una dizione troppo lunga e rimando agli scritti dell'Autore [3].

L'idea di impiantare una prova che avesse valore di *experimentum crucis* per queste leggi mi venne esaminando i prodotti in F_1 del mio incrocio fra *Nicotiana chinensis* Fischer e *Nicotiana silvestris* Speg. et Comes. Materiale migliore, difatti, non avrei potuto desiderare: esso presenta tutti i requisiti per cui le leggi di Giglio-Tos dovrebbero funzionare in pieno se fossero giuste le premesse su cui si basa il congegno logico donde sono state dedotte.

L'illustre Autore, a proposito appunto delle sue leggi, mi faceva notare: *conviene tuttavia tener sempre presente che io parlo di specie, non di va-*

(1) Nella seduta del 20 marzo 1927.

(2) E. GIGLIO-TOS, *A proposito delle mie leggi sull'ibridismo*, Cagliari 1915, Tipografia Giua-Falconi, estratto di 16 pagine.

(3) E. GIGLIO-TOS, *L'eredità e le leggi razionali dell'ibridismo*, « Biologica », vol. 2, 1908; e *Les problèmes de la vie*, vol. 4, 1910.

Digitized by Google

rietà e che perciò esse (leggi) *valgono per i caratteri specifici solamente* (comunicazione epistolare del 27 novembre 1920). Ora, le due specie da me scelte hanno caratteri che non potrebbero essere più specificamente distintivi, compatibilmente con la necessità che il prodotto dell' ibridazione non sia tanto sterile da negare qualunque possibilità di discendenza. Io mi sono tanto uniformato all'avvertenza del Giglio-Tos, che non ho avuto paura di dover sacrificare la diretta verifica di qualche secondario corollario giglio–tossiano (verifica resa impossibile della sterilità di alcune unioni), pur di sentirmi pienamente in regola circa la verifica delle linee maestre, che doveva sottrarsi a qualsiasi obbiezione e doveva perciò eseguirsi con specie il più possibilmente lontane. Su questa via io mi sono spinto sino al limite estremo consentitomi da quel fattore limitante che è la sterilità dei prodotti di specie troppo lontane.

Un'altra condizione che molto insistentemente è stata richiesta dal Giglio–Tos a quegli esperimentatori che volessero verificare le sue leggi, è la « purezza dei gameti » delle stirpi elaborate. Che valore reale abbia questa frase « purezza dei gameti » e se essa non faccia sorgere quelli che il Mach chiamerebbe volontieri « problemi apparenti » non può discutersi qui, perchè ci si dovrebbe elevare ad argomentazioni teoretiche che potrebbero sembrare nebulose; e sarebbero comunque lontane dai termini pratici del nostro esperimento, operato con stirpi sulla cui purezza non può esserci questione. *Nicotiana chinensis*, in dieci anni di pratica ibridologica sul genere *Nicotiana*, è da me preferita per la nettezza e la costanza dei suoi caratteri; sull'assoluta purezza di *Nicotiana silvestris* non posso poi far nulla di meglio che ricordare il giudizio datone dal Setchel e dal Klebs competentissimi.

Dunque, tanto per la purezza delle due specie quanto per la loro distanza tassonomica e la nettezza dei caratteri distintivi, esse appaiono, singolarmente e comparativamente considerate, come rispondenti appieno alle prime due condizioni fissate dal Giglio-Tos. Per queste due specie, certo non si potrebbe ripetere l'avvertenza con la quale il Giglio-Tos sembra voler mettere le mani avanti per ripararsi da certe sconcordanze verificate negli incroci fra le *Oenotherae* di de-Vries, circa le quali egli fa osservare che sono « forme o varietà ottenute per mutazione da alcune specie », « forme, dunque, che certamente lasciano assai a dubitare sulla purezza dei loro gameti per quanto siano somaticamente costanti ». Queste da me adoprate non sono piccole forme affini, separabili soltanto con il vaglio eccessivamente sottile dell'odierna analisi genetica: sono forme di grado specifico linneano, separate da uno *hiatus* morfologico e fisiologico amplissimo.

L' idea del Giglio–Tos che le sue leggi debbano valere solo per i caratteri specifici e non per quelli varietali, è tale che sembra stabilire la possibilità di una netta differenza nel comportamento ereditario delle due categorie di caratteri, e – perciò – una netta differenza tra i caratteri stessi. Molti biologi non vorranno accettare un tale punto di vista, contro il quale

Digitized by Google

del resto si è pronunciato anche il Correns; ma questo asserto del Giglio-Tos è poi in fondo molto simile a quello del de-Vries il quale ha creduto di poter attribuire la scarsa influenza delle leggi di Mendel sul pensiero dei suoi contemporanei non ad una impreparazione di questi, ma bensì ad una sostanziale deficienza del Mendel stesso, il quale, secondo lui, « n'entrevoyait pas la relation entre les résultats de ses croisements et la nature des caractères choisis » (de-Vries, *Sur la rélation entre les caractéres de' hybrides et ceux des leurs Parents* « Rev. Gén. de Bot. », vol. XV). Il de-Vries stesso ha creduto di vedere ben chiaro queste relazioni, secondo lui sfuggite al Mendel, e vi ha basato il suo schema di distinzione tra incroci *equilibrati* e *non equilibrati* (detti anche, meno felicemente, *bisessuali* o *unisessuali*), i primi dei quali soltanto dovrebbero obbedire alle leggi di Mendel perchè « la loi de Mendel s'applique donc aux cas où le croisement oppose des couples d'unité, mais elle n'a aucun rapport, quel qu'il soit, avec les qualités qui ne peuvent s'opposer deux à deux dans les parents » e questa sarebbe la ragione per cui, secondo il de-Vries, « dans les croisements les caractères spécifiques donnent des particularitées stables » (*Exèpces et varietés*, trad. par Blaringhem. Paris 1909, pp. 192-193). Chi si proponga di controllare le leggi di Giglio-Tos, anche se non concorda con questo modo di vedere, deve tuttavia appagare a puntino - come io ho fatto - le condizioni stabilite dal Giglio-Tos e che, in fondo, scaturiscono appunto da questa convinzione, che l'eredità dei caratteri specifici segua leggi diverse da quelle dell'eredità dei caratteri varietali.

Se fosse vero quello che è stato affermato dal de-Vries (che delle leggi di Mendel è stato pure il principalissimo valorizzatore), ch'esse valgono per gli incroci varietali e non per quelli specifici, si potrebbe appunto pensare che proprio per questi ultimi valessero le leggi di Giglio-Tos. Ma intanto è interessante, ed anche un po' ameno, notare che mentre Giglio-Tos afferma che dove si verificano le leggi di Mendel « trattasi di caratteri contenuti *in un solo dei gameti*, di caratteri per così dire rappresentati da una particella impari », il de-Vries, come si è visto, afferma al contrario che si ha schietto e tipico comportamento mendeliano proprio dove i determinanti dei caratteri sono equilibrati, cioè contenuti in ambedue i gameti, e che soltanto quando i caratteri sono rappresentati da particelle impari le leggi di Mendel sono in difetto. Per Giglio-Tos « tutti gli esperimenti favorevoli alle leggi di Mendel si riducono di fatto a questo tipo in cui c'è la « particella impari », per de-Vries viceversa si riducono tutti a questo caso proprio gli incroci che sfuggono alle leggi di Mendel [1]. Basterebbe un tale contrasto di valutazione, includente una mutua incomprensione dei

(1) Si potrà notare, passando, quanto suoni strana quella frase della « particella impari » in bocca del Giglio-Tos che è stato forse l'avversario più illustre, certo il più eloquente, di quelle vedute troppo strettamente morfologiche, micromeristiche, preformistiche, le quali, in eredità, trovano la loro espressione nelle teorie pangenetiche.

Digitized by Google

due biologi, per mostrare la necessità di un esperimento che, per essere ben fatto, deve innanzi tutto fondarsi sopra una retta valutazione dei termini teorici della controversia.

L'ultima condizione da soddisfare per questa retta impostazione dell'esperimento cruciale è quella dell'*isogamia*.

È perfettamente noto, difatti, come « numerosi e rigorosi esperimenti del de-Vries » abbiano dato risultati che « corrispondono con una matematica precisione a quelli teoretici » previsti e predetti dal Giglio-Tos. Ora questa può esser bene una « éclatante confirmation » (vedasi Giglio-Tos in « Biologischen Centralblatt ». Bd. XXXI, nn. 14, 15 juli 1911) delle leggi come esse suonano in qualche parte della loro espressione verbale, ma può non avere proprio nessun valore per quello che è lo spirito delle leggi medesime, cioè per la verità dei *primi principi* da cui furon dedotte. Il loro valore razionale, che al Giglio-Tos molto importava, sarebbe del tutto perduto quando i fatti che parvero confermarle si vedessero scaturire da ragioni particolari molto diverse da quelle generali donde si deducono le leggi esaminate. E il vero nodo della questione era stato ben visto e chiaramente proclamato dal Giglio-Tos stesso il quale ha energicamente rifiutato l'idea del de-Vries che le sue leggi potessero valere solo per il caso di specie « eterogame » (nel senso genetico della parola) ed ha chiarissimamente detto che le sue leggi dovevano valere anche per le specie « isogame » (nel senso genetico della parola) cioè anche per quelle che danno ibridi reciproci uguali, che sono poi la grande maggioranza. Difatti, ammettendo la validità delle leggi giglio-tossiane solo per le specie eterogame, questa validità si troverebbe in fondo ridotta ad un caso eccezionale: ma questo importerebbe ancora poco di fronte alla conseguenza ben più grave, che per tal modo crollerebbero tutte le premesse da cui il Giglio-Tos è partito nel suo ragionamento e si dimostrerebbero mal tracciate le vie logiche di questa deduzione. Il Giglio-Tos nutriva fiducia che qualora gli esperimenti fossero stati estesi a specie isogame essi non avrebbero potuto far altro che seguitare a confermare quanto si era cominciato a vedere negli esperimenti di de-Vries sulle specie eterogame. Ma intanto, tuttavia, si sarebbe potuto notare questo: le esperienze di de-Vries erano fatte indipendentemente da ogni suggestione partente dalle leggi giglio-tossiane (dal de-Vries, se pur conosciute, non tenute presenti), ma se invece fossero state fatte in vista di una tale conferma, si sarebbero potute senz'altro ritenere come esperienze eseguite su forme male scelte, appunto perchè eterogame. E perciò esse riescono poco persuasive allo scopo di una convalida delle leggi di Giglio-Tos.

La premessa teorica delle leggi di Giglio-Tos si basa su una particolare concezione della sessualità: per lui (a prescindere dalla sua particolare terminologia e traducendo nei termini correnti) le *gene* maschili, appunto in quanto maschili, hanno un valore ed una funzione ereditaria sempre diversa dalle corrispondenti *gene* femminili, e tutta la deduzione delle sue leggi si

Digitized by Google

basa in primo luogo su questa premessa. È ben chiaro perciò che esse devono essere pienamente valide (se sono soddisfatte le altre condizioni dette in precedenza: specificità dei caratteri e purezza gametica) in tutti i casi di sessualità, cioè in tutti i casi considerati dalla genetica. Ed è un grande pregio di sincerità scientifica del Giglio-Tos l'aver proclamato ben chiaro che si doveva esigere la conferma delle sue leggi anche nel caso delle specie isogame. Difatti il *punctum saliens* delle sue leggi, si trova nel duplice fatto della *assenza di disgiunzione* e del *differente valore genetico degli ibridi reciproci* ANCHE QUANDO QUESTI HANNO ASPETTO SOMATICO UGUALE. Chi voglia porre a cimento queste leggi non nella loro lettera bensì nel loro spirito e nel valore dei principî donde scaturirono, deve porre in primo piano quest'ultimo punto, chè se esse fossero vere solo per le specie eterogame potrebbe per quel *caso speciale* ritenersi valida la loro dizione, ma il principio da cui furon dedotte cadrebbe irrimediabilmente.

E appunto questo è quello che mi ha rivelato l'adatta scelta di due specie lontane e pure, ma ISOGAME. In esse, e *per tutti i caratteri considerabili*, si ha in piena efficienza la disgiunzione mendeliana; non solo, ma il valore genetico dei due ibridi reciproci è perfettamente uguale. Dunque non è vero che le differenze genetiche fra i due reciproci, differenze scaturienti come conseguenza necessaria dai principî giglio-tossiani, possano verificarsi per via genetica anche laddove l'aspetto somatico degli ibridi reciproci non le indichi.

Ho coltivato circa 2000 individui di F_2 derivati dai due reciproci ed essi mi hanno mostrato in modo non dubbio l'identico valore genetico degli ibridi reciproci stessi.

L'assenza della disgiunzione e la differenza genetica dei reciproci costituiscono un contrasto assoluto tra i principî di Giglio-Tos e quelli di Mendel sebbene molte e vane parole sieno state spese per tentare di conciliare le due vedute, o ancora peggio, per tentare di far passare le leggi di Mendel come un caso speciale delle leggi di Giglio-Tos che avrebbero dovuto presentare un quadro più completo dell'eredità.

La verità è questa: il valore *razionale* delle leggi di Giglio-Tos si sarebbe potuto sostenere soltanto sulla base della loro *generalità*. Dedotte da una particolare concezione della sessualità, se questo principio e la via logica di deduzione fossero state giuste, esse avrebbero dovuto essere una conseguenza *necessaria* dell'unione di due gameti diversi di *sesso* e di *specie*: avrebbero cioè dovuto valere *per tutti gli incroci interspecifici*; e difatti il Giglio-Tos confidava che così fosse. Con la dimostrazione che esse sono valide solo per casi speciali cade la interpretazione su cui si basano; e siccome per la spiegazione di quei casi speciali esiste una particolare interpretazione di de-Vries, questa va accolta e non quella di Giglio-Tos che implicherebbe una validità generale insussistente.

Confesserò volentieri che la scelta delle specie da incrociare fu fatta dapprima principalmente per la ragione che molto mi aveva colpito il fatto

Digitized by Google

di avere visto in F_1 una dominanza quasi assoluta di una delle due specie incrociate (*N. chinensis*) sull'altra specie che risultava, per così dire, quasi del tutto sommersa: ciò pareva indicare una forte tendenza dei caratteri delle specie antagoniste a rimanere uniti: quelli recessivi tutti da un lato, quelli dominanti tutti dall'altro, tanto che si sarebbe potuto parlare non già di una dominanza o recessività di questo o quel carattere, ma invece di una dominanza o recessività della specie in blocco. Ma questa, dirò così, *coerenza* dei caratteri, questo loro uniforme comportamento (del resto già noto anche a Mendel per il Fagiolo) non autorizza a fare nessuna presupposizione antimendelliana su quel che sarà la F_2, perchè in questa vien subito meno quella apparenza di infrangibilità del complesso specifico manifestatasi in F_1; e questi casi possono servire tutt'al più a confermare ancora una volta che la disgiunzione e la segregazione - veri principî basilari del mendelismo - sono affatto indipendenti dal grado di dominanza in F_1. Ed in *N. chinensis* × *N. silvestris* la segregazione dei caratteri produce la più meravigliosa varietà di forme che io abbia mai visto: ma esse sono perfettamente corrispondenti nei due gruppi derivati dai due reciproci mediante reincrocio con una delle specie genitrici; operazione che secondo Giglio-Tos avrebbe dovuto segnare invece la più netta differenza.

È un fatto, che sempre più si viene affermando la validità generale dei principî mendeliani.

Concludo dicendo che il pensiero del Giglio-Tos ha elaborato un sistema di interpretazione dei fatti della vita la cui costruzione è veramente mirabile, ma il suo punto più debole è proprio quella parte genetica che - per un momento - servì ad attrarre su quest'opera l'attenzione dei biologi di tutto il mondo.

Genetica. — *Sul valore genetico dei prodotti di Nicotiana rustica.* Nota di R. Savelli presentata dal Socio B. Longo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

G. C.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomi XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). — Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV, V, VI, VII, VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII, Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. (1892-1924).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI. (1904-1924).

Serie 6ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I.-VI. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-II. (1925-1927).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-III. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I. (1925-1927).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-III. (1925-1927).

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti Adunanze Solenni. Vol. I-III. (1892-1927.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. 12 Volumi.
» » » » » 3 Bollettini.
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.

Annuario 1882-1927.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXXI.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-IV.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia. (1908).
Indice degli Atti Accademici (alfabetico per nomi autori) dall'inizio al 1910.

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1927

SERIE 6ª

Rendiconti Scienze fisiche, ecc. Vol. V (1° semestre 1927) in fascicoli bimensili . . .	L.	54 —
» » » » Vol. VI (2° » 1927) » » . . .	»	54 —
Memorie » » » Vol. II (continuazione) in fascicoli progressivi		prezzi vari
Rendiconti Scienze morali, ecc. Vol. II, in fascicoli trimestrali	L.	54 —
Memorie » » » Vol. I (continuazione) in fascicoli progressivi		prezzi vari
Notizie degli Scavi, Vol. III (52° dall'inizio) in fascicoli trimestrali	L.	120 —

Rendiconto adunanza solenne, Vol. III, fascicolo 13	L.	8 —
Annuario	»	4 —
Monumenti antichi, Vol. XXX, ecc.		prezzi vari

N. B. - Le pubblicazioni dell'Accademia sono in vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (104) e presso le principali Librerie. I prezzi sono franco Roma. È concesso uno sconto ai Librai.

Nelle richieste indicare sempre: la pubblicazione, la serie, il volume e il fascicolo. Le richieste precise e scritte in italiano o in francese potranno essere esaurite più sollecitamente delle altre.

Digitized by Google

RENDICONTI - Marzo 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Fascicolo del 20 marzo 1927 (Anno V)

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

VOLTERRA V. - Sulle periodicità delle fluttuazioni biologiche . . . . . Pag. 373
FUBINI G. - Sulla geometria di una superficie nel gruppo proiettivo e nel gruppo conforme . . . . . »
CORBINO O. M. – L'elettrolisi senza elettrodi 377
HERRERA A. L. - Accrescimento e moltiplicazione di amebe artificiali 379

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

BOMPIANI E. – Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà (presentata dal Socio *G. Castelnuovo*) 383
BORTOLOTTI E. – Sistemi assiali e connessioni nelle V_m (pres. *Id.*) 390
BLASCHKE W. – Sull'elemento lineare di Liouville (pres. *Id.*) 396
ANDREOLI G. – Sulla curvatura e sul parallelismo in una superficie (pres. dal Socio *R. Marcolongo*) 400
CHERUBINO S. - Sulla integrazione delle forme differenziali lineari (pres. dal Corrispondente *G. Scorza*) 405
DUBOURDIEU J. – Sur les groupes d'holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions (cas d'un ds^2 einsteinien) (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 409
HLAVATÝ V. – Contact de deux courbes dans une V_n (pres. *Id.*) 415
LABOCCETTA L. – Sulla rappresentazione analitica in forma finita delle grandezze espresse da funzioni diverse in dominii del piano e dello spazio assegnati ad arbitrio (pres. dal Corrisp. *G. A. Crocco*) 421
SPAMPINATO N. – Ulteriori contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann (pres. dal Corrisp. *G. Scorza*) 427
BERNSTEIN S. - Démonstration nouvelle d'une inegalité relative aux polinomes trigonométriques (pres. dal Socio *V. Volterra*) 431
CRUDELI U. – Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto a un asse (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) . . . . . »
PASCAL M. – Curve per la spinta massima (o minima) (pres. dal Socio *R. Marcolongo*) »
TODESCO G. - Ricerche sulla termoelettricità accidentale del bismuto (pres. dal Socio *Q. Majorana*) 434
PAGLIARULO M. L. - Sulla dispersione rifrattiva e rotatoria naturale delle soluzioni acquose di aspartato monoetilico (pres. dal Socio *M. Cantone*) 439
PICCARDI G. – Isotopia, peso eccedente e struttura atomica (pres. dal Corrisp. *L. Rolla*) »
BIGIAVI D. – Relazioni fra nitroderivati aromatici e azossicomposti (pres. dal Socio *A. Angeli*) 444
MALQUORI G. - Il sistema $Al(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$ a 25° (presentata dal Socio *N. Parravano*) 451
FERRARI A. - La struttura cristallina dell'iodio (pres. dal Socio *G. Bruni*) . . . 452
ALOISI P. - Determinazione approssimativa di 2V nelle sezioni sottili dei minerali (pres. dal Corrisp. *G. D'Achiardi*) . . . . . »
PERRIER C. – Sopra due recenti Note della sig. Philibert (pres. dal Socio *F. Zambonini*) »
PASQUINI P. – Trapianti omeoplastici degli abbozzi oculari negli embrioni di Pleurodeles Waltli (pres. dal Corrisp. *F. Raffaele*) 453
SAVELLI R. - Mancata conferma delle «leggi razionali» del Giglio-Tos sull'ibridismo (pres. dal Socio *B. Longo*) 457
ID. – Sul valore genetico dei prodotti di Nicotiana rustica (pres. *Id.*) 462

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 aprile 1927 (Anno V)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Biologia matematica. — *Sulla periodicità delle fluttuazioni biologiche.* Nota[1] del Socio V. VOLTERRA.

1. In due Note pubblicate in questi « Rendiconti »[2] ho esteso al caso ereditario le tre leggi delle fluttuazioni biologiche (che avevo già date nel caso non ereditario) mettendo in luce le modificazioni che esse subiscono.

Mentre nel caso non ereditario la prima legge asserisce che si hanno infinite fluttuazioni intorno allo stato stazionario e che queste sono periodiche, nel caso ereditario la prima legge si limita a riconoscere la esistenza (col proseguire indefinito del tempo) d'infinite fluttuazioni attorno allo stato stazionario.

Nella presente Nota mi propongo di dimostrare che *nel caso ereditario non possono sussistere piccole fluttuazioni periodiche intorno allo stato stazionario.*

2. Riprendiamo le equazioni fondamentali sotto la forma (A'), (B')[3]

$$(A') \quad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, N_2(t-\tau)\, d\tau\right)$$

$$(B') \quad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, N_1(t-\tau)\, d\tau\right).$$

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1927.
(2) Vol. V, serie 6ª, 1° sem., fasc. 1 e fasc. 2.
(3) Vedi la 2ª nota citata § 2.

Digitized by Google

Lo stato stazionario corrisponde a

$$N_1 = K_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2} \quad , \quad N_2 = K_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1}$$

$$\Gamma_1 = \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, d\tau \quad , \quad \Gamma_2 = \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, d\tau.$$

Poniamo in generale

$$N_1 = K_1 + n_1 \quad , \quad N_2 = K_2 + n_2.$$

Le (A′) e (B′) si scriveranno

$$\frac{dn_1}{dt} = -(K_1 + n_1)\left(\gamma_1 n_2(t) + \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, n_2(t-\tau)\, d\tau\right)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = (K_2 + n_2)\left(\gamma_2 n_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, n_1(t-\tau)\, d\tau\right).$$

Posto

$$\frac{n_1}{K_1} = \nu_1 \quad , \quad \frac{n_2}{K_2} = \nu_2 \quad , \quad \gamma_1 \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1} = \alpha_1 \quad , \quad \gamma_2 \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2} = \alpha_2$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1} F_1(t) = \Phi_1(t) \quad , \quad \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2} F_2(t) = \Phi_2(t),$$

se i termini di secondo grado in ν_1 e ν_2 sono trascurabili le equazioni precedenti divengono

$$(1) \qquad \frac{d\nu_1}{dt} + \alpha_1 \nu_2(t) + \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\, \nu_2(t-\tau)\, d\tau = 0$$

$$(2) \qquad \frac{d\nu_2}{dt} - \alpha_2 \nu_1(t) - \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\, \nu_1(t-\tau)\, d\tau = 0.$$

3. Supponiamo ora che le equazioni precedenti ammettano soluzioni periodiche rispetto al tempo collo stesso periodo. Sviluppandole in serie di Fourier, potremo scrivere [1]

$$\nu_1 = \sum_1^{\infty}{}_m \left(a'_m \operatorname{sen} m\lambda t + b'_m \cos m\lambda t\right)$$

$$\nu_2 = \sum_1^{\infty}{}_m \left(a''_m \operatorname{sen} m\lambda t + b''_m \cos m\lambda t\right).$$

(1) I termini corrispondenti a $m = 0$ debbono mancare.

Digitized by Google

Ammettendo di potere applicare a queste serie la derivazione termine a termine, eseguendola e sostituendo nelle precedenti equazioni, si otterrà

$$\sum_0^\infty{}_m \left\{ \left[a'_m m\lambda + \alpha_1 b''_m - a''_m \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau + b''_m \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \cos m\lambda\tau d\tau \right] \cos m\lambda t + \right.$$

$$\left. + \left[-b'_m m\lambda + \alpha_1 a''_m + a''_m \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \cos m\lambda\tau d\tau + b''_m \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau \right] \operatorname{sen} m\lambda t \right\} = 0$$

$$\sum_0^\infty{}_m \left\{ \left[a''_m m\lambda - \alpha_2 b'_m + a'_m \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau - b'_m \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \cos m\lambda\tau d\tau \right] \cos m\lambda t + \right.$$

$$\left. + \left[-b''_m m\lambda - \alpha_2 a'_m - a'_m \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \cos m\lambda\tau d\tau - b'_m \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau \right] \operatorname{sen} m\lambda t \right\} = 0.$$

Da queste equazioni si ricava

$$\begin{aligned}
a'_m m\lambda \qquad & - a''_m M_{11}^{(m)} + b''_m \left(\alpha_1 + M_{12}^{(m)}\right) = 0, \\
- b'_m m\lambda \qquad & + a''_m \left(\alpha_1 + M_{12}^{(m)}\right) + b''_m M_{11}^{(m)} = 0, \\
a'_m M_{21}^{(m)} \qquad & - b'_m \left(\alpha_2 + M_{22}^{(m)}\right) + a''_m m\lambda = 0, \\
- a'_m \left(\alpha_2 + M_{22}^{(m)}\right) \qquad & - b'_m M_{21}^{(m)} - b''_m m\lambda = 0,
\end{aligned}$$

ove si è posto

$$M_{11}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau \quad , \quad M_{12}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \cos m\lambda\tau d\tau$$

$$M_{21}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau \quad , \quad M_{22}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \cos m\lambda\tau d\tau.$$

Eliminando fra le quattro equazioni lineari precedenti, a'_m, b'_m, a''_m, b''_m, si trova, se queste non sono tutte eguali a zero,

$$(C) \quad \begin{vmatrix} m\lambda & , & 0 & , & -M_{11}^{(m)} & , & \alpha_1 + M_{12}^{(m)} \\ 0 & , & -m\lambda & , & \alpha_1 + M_{12}^{(m)} & , & M_{11}^{(m)} \\ M_{21}^{(m)} & , & -\left(\alpha_2 + M_{22}^{(m)}\right) & , & m\lambda & , & 0 \\ -\left(\alpha_2 + M_{22}^{(m)}\right) & , & -M_{21}^{(m)} & , & 0 & , & -m\lambda \end{vmatrix} = 0$$

e, sviluppando questo determinante, si ottiene

$$(C') \quad \left[m^2\lambda^2 - \left(\alpha_1 + M_{12}^{(m)}\right)\left(\alpha_2 + M_{22}^{(m)}\right)\right]^2 + M_{11}^2 \left(\alpha_2 + M_{22}^{(m)}\right)^2 +$$

$$+ M_{21}^2 \left(\alpha_1 + M_{12}^{(m)}\right)^2 + M_{11}^{(m)2} M_{21}^{(m)2} + 2m^2\lambda^2 M_{11}^{(m)} M_{21}^{(m)} = 0.$$

Digitized by Google

Ora, con un'analisi che abbiamo già impiegata in altra occasione per questioni ereditarie [1], si può riconoscere che $M_{11}^{(m)}$ e $M_{21}^{(m)}$ sono quantità positive, se $\Phi_1(\tau)$ e $\Phi_2(\tau)$ sono funzioni positive decrescenti per $0 \leqq \tau < T_0$.

Supponiamo infatti

$$\frac{2(h-1)\pi}{m\lambda} < T_0 \leqq \frac{2h\pi}{m\lambda}$$

ove h è un numero intero e positivo, e poniamo $\frac{2\pi}{m\lambda} = \omega$. Avremo

$$\int_0^{\omega} \Phi_i(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau > 0 \quad , \quad \int_{\omega}^{2\omega} \Phi_i(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau > 0 \, , \cdots \int_{(h-1)\omega}^{T_0} \Phi_i(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau > 0$$

essendo $i = 1, 2$. Di qui segue:

$$M_{11}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau > 0 \quad , \quad M^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau d\tau > 0.$$

Basterà dunque che sia soddisfatta una delle tre condizioni seguenti

$$\left.\begin{array}{l} \text{(I)} \quad \Phi_1(\tau) > 0 \text{ e decrescente} \quad , \quad \Phi_2(\tau) > 0 \text{ e decrescente} \\ \text{(II)} \quad \Phi_1(\tau) = 0 \quad , \quad \Phi_2(\tau) > 0 \text{ e decrescente} \quad , \quad \alpha_1 \gtrless 0 \\ \text{(III)} \quad \Phi_2(\tau) = 0 \quad , \quad \Phi_1(\tau) > 0 \text{ e decrescente} \quad , \quad \alpha_2 \gtrless 0 \end{array}\right\} 0 \leqq \tau < T_0,$$

perchè il primo membro della equazione (C'), ossia il determinante che costituisce il primo membro della (C) sia positivo. In questi tre casi le equazioni (C) e (C'), non possono essere soddisfatte, ed in conseguenza a'_m, b'_m, a''_m, b''_m debbono esser tutte nulle, ossia soluzioni periodiche non posson sussistere.

Le equazioni che regolano le fluttuazioni biologiche sono le equazioni (I) e (II) della nota citata, le quali si possono ricavare dalle (A') e (B') (vedi il § 2 della presente Nota) facendo $F_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, mentre $\gamma_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, e, se si ammette che l'azione ereditaria vada continuamente decrescendo di intensità, $F_2 > 0$ e decrescente.

È dunque verificata la condizione precedente (II) che *esclude l'esistenza nel caso ereditario di piccole fluttuazioni periodiche.*

4. Noi possiamo dimostrare il teorema per altra via senza ricorrere allo sviluppo in serie di Fourier.

Dalle equazioni (1) e (2) segue

$$\left(\alpha_2 v_1(t) + \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) v_1(t-\tau) d\tau\right) \frac{dv_1}{dt} + \left(\alpha_1 v_2(t) + \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) v_2(t-\tau) d\tau\right) \frac{dv_2}{dt} = 0,$$

(1) *Vibrazioni elastiche nel caso delle eredità*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. XXI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 1°, luglio 1912.

Digitized by Google

equazione che si può scrivere

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\alpha_2 v_1^2(t) + v_1(t)\int_0^{T_0}\Phi_2(\tau)\,v_1(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\alpha_1 v_2^2(t) + v_2(t)\int_0^{T_0}\Phi_1(\tau)\,v_2(t-\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= v_1(t)\int_0^{T_0}\Phi_2(\tau)\frac{d}{dt}v_1(t-\tau)\,d\tau + v_2(t)\int_0^{T_0}\Phi_1(\tau)\frac{d}{dt}v_2(t-\tau)\,dt =$$

$$= -v_1(t)\int_0^{T_0}\Phi_2(\tau)\frac{d}{d\tau}[v_1(t-\tau)-v_1(t)]\,d\tau - v_2(t)\int_0^{T_0}\Phi_1(\tau)\frac{d}{d\tau}[v_2(t-\tau)-v_2(t)]\,d\tau.$$

Mediante una integrazione per parti, tenendo conto che [1]

$$\Phi_2(T_0) = \Phi_1(T_0) = 0,$$

l'ultimo membro diverrà

$$v_1(t)\int_0^{T_0}\Phi_2'(\tau)[v_1(t-\tau)-v_1(t)]\,d\tau + v_2(t)\int_0^{T_0}\Phi_1'(\tau)[v_2(t-\tau)-v_2(t)]\,d\tau,$$

onde l'equazione precedente si scriverà

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\alpha_2 v_1^2(t) + v_1(t)\int_0^{T_0}\Phi_2(\tau)\,v_1(t-\tau)\,d\tau + \right.\\ &\qquad\left. + \frac{1}{2}\alpha_1 v_2^2(t) + v_2(t)\int_0^{T_0}\Phi_1(\tau)\,v_2(t-\tau)\,d\tau\right)\\ &= \int_0^{T_0}\Phi_2'(\tau)[v_1(t)\,v_1(t-\tau) - v_1^2(t)]\,d\tau + \int_0^{T_0}\Phi_1'(\tau)[v_2(t)\,v_2(t-\tau) - v_2^2(t)]\,d\tau.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Osserviamo ora che

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^{T_0}\Phi_2(\tau)\,v_1^2(t-\tau)\,d\tau + \int_0^{T_0}\Phi_1(\tau)\,v_2^2(t-\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi_2(\tau)\frac{d}{d\tau}[v_1^2(t-\tau)-v_1^2(t)]\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi_1(\tau)\frac{d}{d\tau}[v_2^2(t-\tau)-v_2^2(t)]\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi_2'(\tau)[v_1^2(t-\tau)-v_1^2(t)]\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi_1'(\tau)[v_2^2(t-\tau)-v_2^2(t)]\,d\tau.$$

Sottraendo membro a membro l'equazione precedente dall'equazione (3), si trova

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\alpha_2 v_1^2 + \alpha_1 v_2^2 + \int_0^{T_0}\left[\Phi_2(\tau)\,v_1(t-\tau)\,(2v_1(t) - v_1(t-\tau)) + \right.\right.\\ &\qquad\left.\left. + \Phi_1(\tau)\,v_2(t-\tau)\,(2v_2(t) - v_2(t-\tau))\right]d\tau\right\} =\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\left[\Phi_2'(\tau)\,(v_1(t-\tau) - v_1(t))^2 + \Phi_1'(\tau)\,(v_2(t-\tau) - v_2(t))^2\right]d\tau.\end{aligned}\right.$$

(1) Cfr. 1ª Nota citata § 3.

Digitized by Google

Poniamo

$$A_1 = \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\, d\tau \quad , \quad A_2 = \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\, d\tau,$$

$$H = (\alpha_2 + A_2)\, \nu_1^2(t) + (\alpha_1 + A_1)\, \nu_2^2(t) - \int_0^{T_0} \left[\Phi_2(\tau)\,(\nu_1(t) - \nu_1(t-\tau))^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_1(\tau)\,(\nu_2(t) - \nu_2(t-\tau))^2\right] d\tau.$$

L'equazione precedente potrà scriversi

$$\frac{dH}{dt} = -\int_0^{T_0} \left[\Phi_2'(\tau)\,(\nu_1(t) - \nu_1(t-\tau))^2 + \Phi_1'(\tau)\,(\nu_2(t) - \nu_2(t-\tau))^2\right] d\tau.$$

Se una delle funzioni Φ_1, Φ_2 è decrescente e l'altra è pure decrescente o nulla, il secondo membro dell'ultima equazione sarà positivo, quindi H *sarà una funzione sempre crescente.* Ma se ν_1 e ν_2 fossero funzioni periodiche collo stesso periodo anche H dovrebbe essere periodica e quindi non potrebbe crescere sempre; dunque *resta esclusa la periodicità di* ν_1 *e* ν_2 *collo stesso periodo*, e perciò viene dimostrata la proposizione enunciata alla fine del § 1.

5. Applicando i resultati dei teoremi VI, VII, VIII, della prima Nota citata, oppure direttamente applicando alle equazioni (1) e (2) i procedimenti usati per dimostrare quei teoremi, e tenendo inoltre conto di quanto adesso è stato ottenuto, si può giungere al

Teorema I. - *Gli integrali* $\nu_1(t)$ *e* $\nu_2(t)$ *delle equazioni* (1) *e* (2), *col crescere indefinito del tempo, oscillano attorno al valore zero attraversandolo infinite volte e passando per infiniti massimi e minimi; nondimeno se una delle due funzioni* Φ_1 *e* Φ_2 *è decrescente e l'altra è pure decrescente o nulla, la espressione* H *formata con* ν_1 *e* ν_2 *varierà sempre nello stesso senso, cioè crescerà continuamente.*

Abbiamo poi l'altra proposizione:

Teorema II. - *Se in un istante* H *è positivo le oscillazioni di* ν_1 *e* ν_2 *non potranno entrambi smorzarsi.*

Infatti se $\nu_1(t)$ e $\nu_2(t)$ tendessero a zero col crescere indefinito di t, anche H dovrebbe tendere a zero, mentre esso deve continuamente crescere a partire dal valore positivo assunto.

Digitized by Google

Matematica. — *Riflessioni sull'area di una superficie curva.* Nota [1] del Socio F. SEVERI.

Il mio scopo non è di cercare le ipotesi meno restrittive da imporre ad una superficie curva, perchè si possa, in qualche modo, parlare della sua area. Di tale questione si è occupato l'anno scorso, nei nostri Atti, in modo esauriente, il Tonelli, il quale, movendo dalla definizione proposta da Lebesgue (area della superficie è il limite minimo delle aree delle superficie poliedriche tendenti a quella), ha dimostrato che, se una superficie continua possiede un'area finita S, esiste il consueto integrale doppio (risultato del dott. Lampariello) e che il suo valore è $\leq S$; che infine, vale il segno $=$ allora e solo allora che la superficie sia « assolutamente » continua. Io desidero invece d'analizzar la questione dal punto di vista intuitivo, per eliminare, se mi è possibile, il disagio che coglie ove si approfondiscano, con intenti intuitivi, le varie definizioni di area.

A prescinder dalla pregevole definizione di Lebesgue, avente però carattere e scopo critico, e dalla vecchia definizione di Serret (limite delle superficie poliedriche inscritte, quando impiccoliscono le facce), caduta sotto la critica acuta di Peano e di Schwarz, ed il cui errore fondamentale era di creder che la posizione limite del piano per tre punti di una superficie, quando questi tendono, con legge arbitraria, ad un medesimo P, sia determinata, e coincida col piano tangente in P; le definizioni moderne si raggruppano, con lievi varianti, attorno a quattro tipi di Sturm-Dini, di Hermite, di Peano e di Minkowski.

Sturm-Dini aggiungono alla definizione di Serret la condizione che le facce della superficie poliedrica inscritta, tendano uniformemente a divenire tangenti. Il concetto di Hermite, variamente attuato dai vari Autori (Jordan, De La Vallée Poussin, Goursat, ecc.), sopratutto collo scopo di render la definizione a priori indipendente dagli assi, è di associare ad ogni pezzo σ, della data superficie S, un pezzo σ' di superficie piana, situata sul piano tangente in un punto di σ (p. es. la proiezione ortogonale, su questo piano, del pezzo σ). Il limite dell'area della somma dei pezzi σ', quando tende a zero la loro massima corda, è *per definizione* l'area di S. Peano (Lincei, 1890) divide S in pezzi σ e immagina di trasportarli rigidamente nello spazio, ciascuno per proprio conto. L'estremo superiore della somma delle aree delle proiezioni ortogonali di quei pezzi, sopra un piano qualunque, si *definisce* come area di S. Minkowski definisce l'area mediante il volume.

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1927.

Digitized by Google

Immagina di fare scorrere su S il centro di una sfera di raggio dato r e considera il volume V del solido generato dalla sfera. L'area di S si *definisce* come il limite di $V : 2r$, per r tendente a zero.

Ora le definizioni del tipo Hermite presentano anzitutto l'inconveniente che la superficie somma dei σ' è di pezzi fra loro disgiunti e pare strano che occorra ricorrere ad un ente disgregato, per arrivare alla misura di un ente continuo.

La definizione di Peano sembra a prima vista ancor più artificiosa; ma nel fatto essa mi è riuscita utilissima ai fini intuitivi, che mi sono proposto. Del resto, con opportuni richiami vettoriali, Peano l'ha resa simile alla definizione di lunghezza di un arco, come estremo superiore delle poligonali inscritte.

La definizione di Minkowski è seducente. Ma il suo valore psicologico sta nel concepire il volume V approssimativamente uguale al prodotto di $2r$ per l'area di S e nel reputare che l'approssimazione migliori all'impiccolire di r. Ora siffatta concezione è possibile solo se si pensa al solido come insieme di cilindretti aventi le loro basi in faccette piane di S, il che equivale a concepire S come somma di queste faccette infinitesime. La rispondenza alla realtà fisica è tutt'altro che immediata, perchè se p. es. si riempie, colla stessa sostanza, lo strato solido di Minkowski attorno ad una superficie sferica e attorno alla superficie di un cerchio, che le equivalga, lo strato sferico pesa più dello strato piano. La definizione in tanto è legittima, in quanto la differenza tra i due pesi (cioè fra i due volumi) sia infinitesima d'ordine superiore rispetto ad r. Analoga *ammissione* va fatta in generale. E dico ammissione, perchè la definizione può esser quella che si vuole, ma, ad un certo punto, affinchè essa acquisti senso, rispetto all'oggetto fisico che si vuol misurare, occorre postulare qualcosa. Tacere il postulato può esser comodo, specie se quel che si ammette riguarda l'infinitesimo, dove la visione nostra è spesso fallace; può esser comodo ed anche lecito, poichè, dal punto di vista logico formale, definizione e postulato adempiono alla stessa funzione. Ma ciò non toglie che il sistema di definire, invece che postulare, noi matematici lo usiamo soltanto quando il postulare sarebbe pretender troppo dall'intuizione. E, comunque, il postulato è implicito in ognuno che dia od accetti una definizione tendente ad identificare un oggetto reale.

Nelle definizioni che precedono quella di Minkowski, compresa quella di Sturm-Dini, il postulato si nasconde laddove ai pezzi di superficie curva si sostituiscono pezzi di piano. Perchè le definizioni abbiano senso fisico occorre invero *ammettere* che questi pezzi differiscano dai corrispondenti pezzi della superficie per infinitesimi d'ordine superiore. Ed occorre inoltre, in ogni caso, ammettere nota, come *idea primitiva*, la nozione di estensione di una superficie curva, così che possa istituirsi il confronto con una superficie piana. Bisogna dunque, in una trattazione che non voglia nulla tacere:

Digitized by Google

1° Assumere come primitivo il concetto di estensione d'una superficie (piana o curva).

2° Postulare qualcosa circa il confronto fra superficie.

E quando ci si abbandona a confessare quel che si postula, nasce spontaneo il bisogno di cercare gli aspetti più prossimi all'intuizione. Così facevano gli antichi, con Archimede alla testa. A loro però bastava il noto postulato archimedeo, giacchè non conoscevano le moleste superficie concavo-convesse. Le quali son moleste perchè se si riesce, con postulati di assoluta evidenza, ad associare ad una superficie concavo-convessa una superficie piana di essa minore, non altrettanto facile riesce l'associarvi una superficie piana maggiore, che svanisca colla superficie data. Il nocciolo del problema è qui.

Io ho cercato di risolvere la questione in due modi *diversi*:

a) Postulando che, se due superficie S, S′ sono in corrispondenza biunivoca continua siffatta, che a due fasci di linee (coordinate) di S, rispondano due fasci analoghi di S′, e due archi coordinati corrispondenti siano sempre uguali, mentre l'angolo di due linee coordinate della prima sia non minore dell'angolo corrispondente dell'altra, la prima superficie è non minore della seconda.

Ecco il contenuto intuitivo del postulato: Se un pezzo di tela S, di forma qualunque, tessuta con due serie di fili, si deforma in guisa che le mutue inclinazioni dei fili diminuiscano, i fili si raccostano; la tela, nella nuova condizione S′, è più densa, e siccome pesa lo stesso, la sua superficie diminuisce.

b) Postulando che fra le superficie poliedriche aventi un piccolo scarto (totale) dalla superficie S, ve ne sono di quelle che differiscono di pochissimo, in estensione, da S.

Il significato intuitivo è questo: Se s'imagina S come parte del contorno di un corpo solido, la S può sfaccettarsi con una lima piana, cominciando a resecare un piccolo intorno di un punto di S, poi un piccolo intorno di un altro punto prossimo alla resezione precedente, in guisa che i piani delle due resezioni si taglino; ecc. È chiaro che le resezioni possono farsi in modo che sia rispettato il post. *b*). Se S è convessa, la lima può esser comunque larga; se S è concavo-convessa, la larghezza della lima deve esser proporzionata alla prefissata piccolezza delle resezioni.

Movendo da *a*) oppure da *b*), *dimostro* che l'area di S è misurata dal solito integrale doppio; e ne deduco nuove espressive definizioni dell'area (n. 9).

1. Per illustrare meglio il mio pensiero, tratto prima rapidamente il problema della lunghezza λ di una linea piana. Si definisce λ come limite delle lunghezze delle poligonali inscritte quando tende a zero il massimo lato ovvero come l'estremo superiore di tali lunghezze. Che si ottenga così la lunghezza della linea quale verrebbe misurata da un filo flessibile che vi

Digitized by Google

si adattasse, anche se non lo si dice, è implicito. Ma sulla base di quale evidente ammissione? Per le linee non occorre discostarsi da Archimede, il quale postulava che di due linee, l'una contenuta nell'altra, aventi gli stessi estremi, e volgenti la concavità dalla stessa parte, la più lunga è l'esterna. Infatti, dal postulato segue intanto che la linea è maggiore di ogni poligonale iscritta. Divisa poi la linea in parti, che sieno tagliate in un sol punto dalle parallele ad una delle normali nei rispettivi estremi, ed in ciascuna delle quali la curvatura mantenga segno costante (pel che si richiede che la curvatura si annulli un numero finito di volte in tratti non rettilinei), ognuno degli archi parziali, pel postulato, è minore della somma della sua proiezione ortogonale sulla tangente in un estremo e del segmento proiettante ortogonalmente l'altro estremo. Si trova subito che la differenza fra questa somma e la corda sottesa dall'arco è infinitesima d'ordine superiore rispetto alla corda, sicchè si conclude che la lunghezza « fisica » della linea è proprio il limite testè ricordato.

È appena necessario rammentare che la definizione « matematica » della lunghezza d'una linea vale sotto ipotesi molto più generali di quelle che danno senso geometrico alla definizione analitica. In quel che sopra si è detto è occorsa per es. la derivata seconda (attraverso la curvatura). Ma la lunghezza matematica va intesa come un puro funzionale additivo della linea. Pertanto il problema della linea di minima lunghezza fra due punti, ha senso puramente matematico, come proprietà analitica di questo funzionale. Dal punto di vista strettamente geometrico il problema diventa una petizione di principio, perchè, per identificare il concetto geometrico coll'analitico, occorre un postulato che involge la proprietà di minimo della retta.

2. Passo a calcolare l'area d'una superficie S sulla base del postulato *a*). La S sia descritta da un punto $P(u, v)$ funzione continua del punto (u, v) mobile entro una superficie piana chiusa R, in corrispondenza *biunivoca* con S, al contorno di R corrispondendo il contorno di S. Ed esistano i vettori derivati parziali, primi e secondi, di P, sieno continui in S (o in R), contorno incluso, e inoltre sia sempre $P'_u \wedge P'_v \neq 0$. In tali ipotesi nulla ci vieta di supporre altresì, per brevità, che le lince coordinate u, v costituiscano su S una rete di Tchebychef, sicchè i moduli dei vettori P'_u, P'_v saranno uguali ad 1, ed il modulo del loro prodotto vettoriale sarà $\sin\omega$, in cui ω denota l'angolo delle linee coordinate nel punto ove si considerano le derivate.

Limitiamoci dapprima al caso in cui S è un quadrilatero curvilineo di Tchebychef, corrispondente ad un rettangolo piano R; e, diviso R in rettangoletti colle rette coordinate, sia σ il quadrilatero di S, corrispondente al rettangoletto $\Delta u\, \Delta v$. Siano inoltre $\sin\omega_1$, $\sin\omega_2$ il massimo ed il minimo di $\sin\omega$ in σ.

Costruito in un piano cartesiano, con assi aventi l'inclinazione ω_1 (od ω_2), il parallelogrammo σ_1 (o σ_2) descritto dal punto che ha le stesse

Digitized by Google

coordinate (u, v) del punto P, mobile in σ, le superficie σ e σ_1 (o σ_2) si trovano nelle condizioni enunciate in *a*), epperò $\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_1$ e quindi $\Sigma\sigma_2 \leq S \leq \Sigma\sigma_1$. Ora, denotate le aree colle stesse lettere delle corrispondenti superficie, sussistono le relazioni:

$$\sigma_1 = \sin\omega_1 \cdot \Delta u\,\Delta v \quad , \quad \sigma_2 = \sin\omega_2 \cdot \Delta u\,\Delta v ,$$

e quindi:

$$\Sigma \sin\omega_2 \cdot \Delta u\,\Delta v \leq S \leq \Sigma \sin\omega_1 \cdot \Delta u\,\Delta v ;$$

e poichè, per essere $\sin\omega$ continuo in S, al tendere a zero della massima diagonale dei rettangoletti $\Delta u\,\Delta v$ di R, i due sommatori tendono allo stesso limite $\iint_R \sin\omega\, du\, dv$, si conclude che S è uguale a quest'integrale, cioè in forma invariantiva, rispetto ai cangiamenti delle coordinate curvilinee u, v:

$$S = \iint_R |P'_u \wedge P'_v|\, du\, dv .$$

L'estensione della formula al caso di una superficie qualunque S contenuta in una più ampia T, che soddisfaccia alle ipotesi analoghe, si fa subito osservando che, coperta T con una rete di Tchebychef, S risulta compresa fra la somma dei quadrangoletti della rete interni a S e la somma di questi e dei quadrangoletti attraversati dal contorno, e che le due somme tendono allo stesso limite. Quanto ad una superficie che sia interna a T, ma abbia in comune con T una parte del contorno, l'estensione si farà prendendo questa parte del contorno come linea d'una rete di Tchebychef, che rivesta T, il che è notoriamente possibile. Così la formula resta dimostrata in ogni caso.

Matematica. — *Ancora sull'area di una superficie curva.* Nota [1] del Socio F. Severi.

3. Prima di procedere al calcolo dell'area di S, sulla base del postulato *b*), occorre premettere un richiamo, talune definizioni ed un lemma. Il richiamo riferiscesi a un elegante teorema di Peano.

Fissata nello spazio una linea chiusa orientata qualunque c, che sia descritta da un punto P, funzione continua, derivabile (a derivata continua) di un parametro t, l'integrale $\int_c (P - O) \wedge P'_t\, dt$, è un vettore indipendente dal punto arbitrario O, e si può assumere come *indice* di una superficie piana C, la quale è definita in grandezza, giacitura e verso (bivettore).

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1927.

Digitized by Google

Quando c sia piana, la superficie C è quella contornata da c. In ogni caso essa gode della proprietà che, mediante una proiezione parallela sopra un piano qualunque, la superficie racchiusa dalla proiezione di c equivale alla proiezione di C. La massima superficie contornata dalla proiezione ortogonale di c si ha proiettando (ortogonalmente) sopra un piano avente quella tale giacitura. Orbene l'area di una siffatta superficie piana, che considereremo in valore assoluto, la chiameremo l'area della *faccia* piana *racchiusa* da c.

Se si ha un reticolato di curve c, adiacenti a guisa delle maglie di una rete, la somma delle facce piane definite da quelle maglie, la diremo una *superficie poliedrale*. Si avrà in particolare una superficie poliedrica quando le maglie sieno perimetri di poligoni piani.

Osservazione. Se una rete di maglie termina ad una curva chiusa γ, la proiezione ortogonale della rete sul piano della faccia racchiusa da γ è $\leq$ alla somma delle facce della rete e quindi *in una superficie poliedrale chiusa una faccia non supera la somma delle altre.*

4. Le definizioni cui s'è alluso sono le seguenti:

Distanza di un punto d'una superficie S (a piano tangente variabile con continuità) è la minima distanza del punto dai punti della superficie. *Scarto lineare* λ di una superficie S_1 da S è la massima fra le distanze dei punti di S_1 da S. Considerato poi un punto qualunque Q di S_1 ed uno P dei punti di S aventi da Q distanza $\leq \lambda$, il seno dell'angolo delle normali a S_1, S in Q, P, ha un massimo sin θ, che chiameremo *scarto angolare* di S_1 da S. *Scarto totale* è la somma degli scarti lineare e angolare. Con tali definizioni il postulato *b*) enunciasi precisamente così:

Data una superficie S *e fissati due numeri positivi arbitrari* ε, δ, *esiste qualche superficie poliedrica il cui scarto totale da* S *è minore di* δ *e la cui area differisce dall'area di* S *meno di* ε.

5. Passo infine a dimostrare il lemma:

Ogni superficie S *è maggiore o uguale alla sua proiezione ortogonale sopra un piano qualunque.*

Considero, in primo luogo, una superficie poliedrica S_1, il cui scarto lineare da S sia minore di un dato λ e chiamo R, R_1 le proiezioni ortogonali di S, S_1 sopra un medesimo piano π. Poichè la distanza obiettiva di due punti è non minore della distanza delle loro proiezioni ortogonali, lo scarto di R_1 da R è minore di λ. Perciò R_1 è contenuta nella superficie R' ottenuta da R aggiungendovi i *nuovi* punti situati in un cerchio di raggio λ, che scorra col suo centro lungo il contorno di R. E siccome, impiccolendo λ, R' — R può rendersi minore di un numero prima assegnato, si conclude intanto che le superficie poliedriche aventi da S scarto lineare minore di λ, hanno *tutte* quante le loro proiezioni ortogonali differenti da R meno di un numero prefissato.

Ciò premesso, suppongasi, per assurda ipotesi, $S < R$. Si determini un ε tale che $S < R - \varepsilon < R$. Allora, scelto comunque un $\delta > 0$, fra le

Digitized by Google

superficie poliedriche S_1 aventi da S scarto totale $< \delta$ ve ne sono di quelle per cui $|S_1 - S| < R - S - \varepsilon$. Esiste dunque qualche $S_1 < R - \varepsilon$. Impiccolendo, se occorre, δ, la proiezione R_1 di *ogni* S_1 inerente ad uno scarto totale (e quindi lineare) $< \delta$, può farsi differire da R meno di ε, onde $R_1 > R - \varepsilon$. Dunque $R_1 > S_1$, mentre per una superficie poliedrica è sempre $R_1 \leq S_1$. Pertanto dovrà essere $S \geq R$.

6. Corollario immediato del lemma è che *una superficie* σ *avente un contorno qualunque* c *è non minore della faccia definita da questo contorno,* perchè la proiezione ortogonale di σ sul piano della faccia è $\leq \sigma$ ed è d'altronde $\geq$ all'area circondata dalla proiezione di c. Pertanto la faccia definita del contorno c è analoga alla corda di un arco di curva.

7. Premesso tutto ciò dividiamo la superficie S descritta dal punto $P(u, v)$ soddisfacente alle ipotesi del n. 2 (salvo l'esistenza delle derivate seconde, che per ora è superflua), in pezzi σ; e, considerati i contorni c di questi pezzi, sia S_1 la superficie poliedrale da essa definita. Essa dicesi *inscritta* in S, perchè i contorni delle sue facce giacciono su S. La definizione data da Peano di area di S ed il calcolo relativo si traducono allora nel teorema:

L'estremo superiore delle aree delle superficie poliedrali inscritte in S *è espresso da* $\bar{S} = \iint_R |P'_u \wedge P'_v| \, du\, dv$.

Poichè (n. 6) S è non minore delle superficie poliedrali inscritte, ne segue che l'area di S è $\geq \bar{S}$.

Questi risultati, atteso il modo come sono ottenuti, sono validi anche se P'_u, P'_v subiscono brusche variazioni soltanto lungo un numero finito di linee di S, come avviene quando S è una superficie poliedrica. E siccome fra le superficie poliedrali inscritte in S, havvi in tal caso la S stessa, si conclude che:

L'area di una superficie poliedrica è espressa da $\iint_R (P'_u \wedge P'_v) \, du\, dv$.

8. Aggiungiamo l'ipotesi dell'esistenza e delle continuità delle derivate seconde di P. I fochi della congruenza delle normali di S situati sulla normale nel punto P, mobile in S, hanno da P una distanza che, nelle nostre ipotesi, scende ad un minimo non nullo; sicchè il punto $Q(u, v)$ ove una superficie S_1, il cui scarto lineare da S sia abbastanza piccolo, è segata dalla normale ad S in P, è in corrispondenza biunivoca con P. Sia $x(u, v)$ la distanza dei punti corrispondenti P, Q. Posto $\boldsymbol{k} = P'_u \wedge P'_v$, $\mathbf{N} = \boldsymbol{k} : k$ (essendo, al solito, k il modulo di $\boldsymbol{k}$), valgono le relazioni:

$$Q = P + x\mathbf{N} \quad , \quad Q'_u = P'_u + x\mathbf{N}'_u + \mathbf{N}x'_u \quad , \quad Q'_v = P'_v + x\mathbf{N}'_v + \mathbf{N}x'_v ,$$

$$Q'_u \wedge Q'_v = P'_u \wedge P'_v + x(P'_u \wedge \mathbf{N}'_v - P'_v \wedge \mathbf{N}'_u) + x^2 \mathbf{N}'_u \wedge \mathbf{N}'_v +$$

$$+ x[x'_v(\mathbf{N}'_u \wedge \mathbf{N}) - x'_u(\mathbf{N}'_v \wedge \mathbf{N})] + [x'_u(\mathbf{N} \wedge P'_v) - x'_v(\mathbf{N} \wedge P'_u)] .$$

Digitized by Google

Moltiplichiamo scalarmente l'ultima di queste per **N** e teniamo conto delle note espressioni vettoriali della curvatura media H e della curvatura totale K di S in P [1], nonchè della circostanza che il vettore **N** è normale ad S. Si ottiene allora, in definitiva, la relazione:

$$(1) \qquad l\cos\theta = k\,(1 + xH + x^2K),$$

ove l è il modulo del vettore $\boldsymbol{l} = Q'_u \wedge Q'_v$ e θ l'angolo dei vettori normali ad S, S_1 nei punti corrispondenti P, Q.

9. Sia infine S_1 una superficie poliedrica avente da S uno scarto totale minore d'un ε prefissato. Si può scegliere un pezzo σ così piccolo di S ed ε pure talmente piccolo, che risultino piccoli a piacere x, θ. Allora, in virtù della (1), $l : k$ differirà da 1 meno di una quantità prefissata δ. E, attesa la continuità (uniforme) delle funzioni in giuoco, potrà supporsi S frazionata in pezzi σ tali che in ognuno di essi sia soddisfatta la condizione

$$|\, l : k - 1 \,| < \delta .$$

D'altronde:

$$\left| \iint_\sigma l\,du\,dv - \int_\sigma k\,du\,dv \right| \leq |\, l_0 : k_0 - 1 \,| \iint_\sigma k\,du\,dv$$

in cui l_0, k_0 sono i valori di l, k in un punto conveniente di σ.

Sommando per tutti i pezzi σ, se ne deduce:

$$|\, S_1 - \overline{S} \,| < \delta \overline{S} .$$

In conclusione l'area di ogni superficie poliedrica S_1 avente da S uno scarto totale sufficientemente piccolo, differisce da $\overline{S}$ meno di una quantità prefissata. E poichè esiste, pel postulato *b*), qualche S_1 la cui area differisce da S tanto poco quanto si vuole, si conclude che $S = \overline{S}$. Dunque:

L'area di una superficie S *è espressa da* $\iint_R |\, P'_u \wedge P'_v \,|\, du\,dv$. *Essa coincide coll'estremo superiore delle aree delle superficie poliedrali inscritte.*

Se ne deduce altresì che *l'area di* S *coincide col limite delle aree delle superficie poliedrali inscritte quando tende a zero la massima corda dei contorni delle facce.*

Invero, dato $\varepsilon > 0$, si può determinare una superficie poliedrale inscritta $S_0 > S - \varepsilon$. Sia S_1 un'altra qualunque poliedrale inscritta, μ la massima corda delle sue maglie; S_2 la poliedrale inscritta risultante dalla sovrappo-

(1) Burali-Forti e Marcolongo, *Calcolo vettoriale*, (Zanichelli, 1921), p. 144. L'elemento lineare di S è $dP = P'_u\,du + P'_v\,dv$, onde i coefficienti del ds^2 di S sono $E = P'^2_u$, $F = P'_u \times P'_v$, $G = P'^2_v$ ed è $k^2 = EG - F^2$.

Digitized by Google

sizione delle maglie di S_0, S_1. Dall'osservazione del n. 3 segue che S_2 è non minore di S_0, S_1. Soppresse in S_1, S_2 le facce comuni, restano in S_1 le maglie m_1 traversate da maglie di S_0 e in S_2 le maglie m_2, che S_0 distende fra le m_1. Però la zona Σ di S compresa entro le m_1 o le m_2 è la stessa. Poichè le somme S'_1, S'_2 delle facce contornate dalle m_1, m_2 sono entrambi non maggiori di Σ, sarà $S_2 - S_1 = S'_2 - S'_1 \leq \Sigma$. Ora per $\mu \to 0$ la zona Σ si assottiglia attorno ai contorni delle maglie di S_0, tendendo a zero. Pertanto potrà determinarsi un $\sigma > 0$ tale che per ogni $\mu < \sigma$, sia $\Sigma < \varepsilon$. Ricordando che $S_2 \geqq S_0$, ne segue $S_1 > S - 2\varepsilon$. Ciò significa che $\lim_{\mu \to 0} S_1 = S$.

Risulta pure da quanto precede che:

L'area di S *è il limite delle superficie poliedriche il cui scarto totale da* S *sia minore di* ε, *quando tende a zero* ε.

Qualora questo teorema si assuma come definizione di S, il n. 9 fornisce la formula pel calcolo di S. In particolare l'area di S è il limite delle superficie *poliedriche* inscritte, quando simultaneamente la massima corda delle facce tende a zero e le facce tendono a diventare tangenti ad S. È la definizione di Sturm-Dini.

10. La (1) è in sostanza la relazione che serve per lo studio delle superficie di area minima; relazione compatta, ottenuta in modo semplice, per la concisione dello strumento vettoriale usato.

Considerando una superficie S_2, vicinissima ad S, il cui punto variabile Q_1 stia sulla normale ad S in P alla stessa distanza x da P del punto Q considerato nel n. 8, ma in verso opposto ad $\mathbf{N}$, vale la relazione:

$$l_1 \cos\theta_1 = k(1 - xH + x^2K). \tag{2}$$

In particolare, se S_1, S_2 sono superficie parallele ad S, sicchè sia $\theta = \theta_1 = 0$, viene:

$$\frac{1}{2}(l + l_1) = k(1 + x^2K),$$

ossia:

$$\frac{1}{2}(S_1 + S_2) = S + x^2 \iint_R k\,K\,du\,dv.$$

Pertanto, *se una superficie è soltanto a punti iperbolici, ellittici o parabolici, la media aritmetica delle aree di due superficie ad essa parallele, aventi da* S *la medesima distanza abbastanza piccola, da una parte e dall'altra di* S, *è rispettivamente minore, maggiore o uguale rispetto all'area di* S.

Si deduce altresì dalle (1), (2) che, se la superficie S è a curvatura media $H \neq 0$, una delle S_1, S_2 è maggiore e l'altra minore di S; mentre se $H = 0$ le S_1, S_2 sono uguali. Donde il teorema di Steiner che una superficie d'area minima è la massima fra le superficie parallele abbastanza prossime, ecc.

Digitized by Google

Matematica. — *Una proprietà delle funzioni integrali.* Nota del Socio Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulle caratteristiche dei triodi a tensioni di griglia saturanti.* Nota del Socio Corrisp. A. LO SURDO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-Fisica. — *Sul potenziale di elettroaffinità dell'anidride molibdica.* Nota del Socio Corrisp. L. ROLLA e G. PICCARDI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Determinazione della concentrazione in idrogenjoni attivi in acque minerali italiane.* Nota del Socio R. NASINI e C. PORLEZZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Azioni catalitiche nelle acque minerali. Reazione della benzidina in acque minerali italiane.* Nota del Socio R. NASINI e C. PORLEZZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Sulle conclusioni di una mia Memoria.* Nota del Socio Corrisp. S. FRANCHI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul teorema fondamentale della base per la totalità delle curve d'una superficie algebrica.* Nota di G. ALBANESE, presentata [1] dal Socio F. SEVERI.

In questa Nota espongo una dimostrazione algebrico-topologica del teorema fondamentale della teoria della base per la totalità delle curve appartenenti ad una superficie algebrica.

Sopra una superficie algebrica irriducibile F *è possibile fissare* ρ *curve* $C_1, C_2, \cdots, C_\rho$ (fra loro indipendenti) *tali che, detta* C *una qualunque altra curva algebrica di* F, *fra le* C *e le* C_i *si abbia una relazione del tipo:*

$$\lambda C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\rho C_\rho ,$$

λ *essendo un numero intero positivo e* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\rho$ *numeri interi non tutti nulli.*

Il teorema è stato dimostrato nel 1905 dal Severi [2] e nel 1910 è stato ritrovato per altra via dal Poincaré [3] (sistemi di curve primitive). Nel 1921 il procedimento del Poincaré, profondamente semplificato, è stato messo in nuova luce dal Severi stesso [4]. Infine il Lefschetz nel 1924 [5] ha posto importanti legami fra la teoria della base e l'*Analysis situs* della riemanniana W annessa alla superficie; dai quali legami risulta una nuova dimostrazione del teorema della base, poggiata in sostanza sul fatto che la connessione superficiale di W è un numero finito. Ma la dimostrazione del Lefschetz non è del tutto libera dall'uso degl'integrali semplici (di 1ª specie) appartenenti alla superficie. E a questi integrali (rispettivamente di 3ª o di 1ª specie) ricorre sia la dimostrazione originaria del Severi, come quella

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(2) La teoria della base è stata costruita dal SEVERI in tre brillanti Memorie: *a) Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, « Math. Ann. », B. 62, 1906; *b) La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, « Annales de l'Ecole normale », 3ª série, t. XXV, 1908; *c) Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, « Rend. Circolo mat. di Palermo », t. XXX, 1910. Per altri complementi vedasi anche ALBANESE, *Intorno ad alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve di una superficie algebrica*, « Ann. di mat. », t. XXIV, serie III, 1915.

(3) POINCARÉ, *Sur les courbes tracées sur une surface algébrique*, « Ann. de l'Ecole Normale », III série, vol. XXVII, 1910.

(4) SEVERI, *Sulla teoria degli integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica*, sette Note dei « Rend. della R. Acc. dei Lincei », 5ª serie, V, 1921.

(5) LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la géometrie algébrique* (colletion Borel) Gauthier Villars, 1924.

Digitized by Google

successiva del Poincaré. Ora io mi propongo di mostrare come il procedimento del Lefschetz si possa, usufruendo opportunamente del metodo del Severi, liberare del tutto dell'uso degl' integrali, contenendo così la dimostrazione nel solo dominio algebrico-topologico.

Ne conseguono nuove vie per pervenire sia a un noto teorema di Picard sulle curve logaritmiche di un integrale di 3ª specie [1], sia mercè i risultati del Severi sulle corrispondenze [2], al teorema di Hurwitz, che assegna la base per la totalità delle corrispondenze sopra una curva algebrica [3].

1. Per bene intendere quanto andiamo a dire converrà richiamare alcune note proprietà sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica. Ci limiteremo alle considerazioni strettamente necessarie. Ricordiamo perciò:

Sopra una superficie algebrica F irriducibile, una curva A (effettiva o virtuale [4], che supporremo sempre priva di punti multipli assegnati) individua un sistema lineare completo $|A|$, di dimensione

$$r \geqq \rho = n - \pi + p_a - i + 1 ,$$

n, π ed i indicando i soliti caratteri grado, genere (virtuali) ed indice di specialità di A e p_a il genere aritmetico di F.

Quando ρ (*dimensione virtuale*) è positivo il sistema $|A|$ è costituito di curve effettive e si dice a caratteri generali. Quando poi è $r = \rho$ ed $i = 0$, $|A|$ si dice regolare.

Per indicare che due curve A e B appartengono ad uno stesso sistema lineare si dice che A e B sono linearmente equivalenti e si scrive $A \equiv B$ oppure $A - B \equiv 0$.

Se F è irregolare, esistono su essa sistemi continui di curve non appartenenti (totalmente) ad uno stesso sistema lineare. Un tale sistema Σ si può pensare come totalità dei suoi sistemi lineari e come totalità delle sue curve, si possono cioè considerare come elementi di Σ, una volta i suoi sistemi lineari ed un'altra le sue curve.

Un sistema Σ completo si compone di un numero finito ($\geqq 1$) di sistemi S completi irriducibili come insieme di sistemi lineari. E a sua volta ogni sistema come S si compone di un numero finito di sistemi S′ completi ed irriducibili come insieme di curve.

(1) PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, p. 241.

(2) SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie*, « Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino » (2), t. LIV, 1903.

(3) La prima dimostrazione algebrico-topologica di questo teorema è del CHISINI, « Rend. Istituto Lombardo », 1921.

(4) SEVERI, *Sulle curve virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, « Rend. Istituto Lombardo », t. 38, 1905.

Digitized by Google

Per indicare che due curve A e B appartengono ad uno stesso sistema del tipo S, si dice che A e B sono algebricamente equivalenti (in senso largo) e si scrive $A \equiv B$ oppure $A - B \equiv 0$.

Per indicare invece che A e B appartengono ad uno stesso sistema del tipo S', si dice che A e B sono algebricamente equivalenti *in senso stretto* e si scrive $A \equiv\!\equiv B$ oppure $A - B \equiv\!\equiv 0$.

Ricordiamo infine che dato sopra F un qualunque sistema S è possibile fissare un sistema lineare $|E|$, per es.: un multiplo sufficientemente alto del sistema delle sezioni iperpiane di F, tale che i sistemi lineari $|E + A|$ al variare comunque di A in S siano tutti regolari e perciò della stessa dimensione, sicchè mentre A descrive S, il sistema $|E + A|$ descrive un sistema S' irriducibile anche come totalità di curve [1].

2. Ciò detto, ricordiamo un importante criterio di equivalenza, dovuto al Severi [2].

Se sopra una superficie F *due curve* A *e* B *dello stesso ordine, hanno lo stesso grado virtuale n e questo numero è uguale al numero dei punti che esse hanno a comune*:

$$(1) \qquad [A^2] = [A\,B] = [B^2] = n\,,$$

è possibile determinare una curva E *di* F *ed un numero intero positivo* λ, *tale che sia*

$$(2) \qquad \lambda A + E \equiv \lambda B + E\,.$$

Il criterio vale anche per $n < 0$ (ipotesi che può verificarsi soltanto se le curve A, B son virtuali) e serve la stessa dimostrazione del Severi [3].

3. Consideriamo la varietà W a quattro dimensioni i cui punti (reali) rappresentano biunivocamente i punti complessi della superficie F.

Ogni curva algebrica A di F sarà rappresentata in W da un ciclo algebrico a a due dimensioni.

Sui cicli a *due dimensioni* di W ricordiamo: due cicli a e b si dicono omologhi (Poincaré) e si scrive $a \sim b$, quando è possibile senza uscire da W, deformare con continuità a fino a portarlo a cadere in b. Un ciclo a è nullo $a \sim 0$, quando per deformazione continua si può ridurlo ad una linea o ad un punto.

Un ciclo a può non essere nullo ed un suo multiplo λa essere nullo. In tal caso si dice che a è un divisore dello zero.

(1) Albanese, loc. cit. (2), p. 42.

(2) Severi, loc. cit. (1), Memoria *a*), n. 2.

(3) Quando nella (1) è $n > 0$ il Severi completa la dimostrazione facendo vedere che in tal caso per valori λ opportuni si ha proprio $\lambda A \equiv \lambda B$. Quando però è $n \leq 0$, nella (2) non si può prescindere dalla curva E. Per quel che segue a noi basta il criterio nella forma enunciata.

Digitized by Google

Se un ciclo a è nullo od un divisore dello zero, il *numero algebrico* $(a\,b)$ dei punti comuni ad a e ad un qualunque altro ciclo b appartenente a W, è nullo.

Ricordiamo infine che allorquando a e b sono due cicli algebrici, corrispondenti cioè a due curve algebriche A e B di F, *il numero* (a, b) *coincide col numero dei punti comuni ad* A *e* B, si ha cioè $(a\,b) = [A\,B]$ [1].

Ciò detto dimostriamo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due curve A *e* B *di* F *siano legate da una relazione del tipo* (2)

$$\lambda A + E \equiv \lambda B + E,$$

è che in W *i cicli* a *e* b *corrispondenti ad* A *e* B, *siano omologhi o differiscano per un divisore dello zero,* $a - b$ *sia,* cioè, *un ciclo nullo oppure un divisore dello zero.*

La condizione è necessaria. Infatti se le due curve $\lambda A + E$ e $\lambda B + E$ di F, appartengono ad uno stesso sistema S irriducibile di sistemi lineari, è possibile senza uscire da F, portare con continuità la curva $\lambda A + E$ a coincidere con la curva $\lambda B + E$. Seguendo il movimento coi corrispondenti cicli su W, si vede che il ciclo $\lambda a + e$, corrispondente a $\lambda A + E$, si può portare con continuità a cadere sopra il ciclo $\lambda b + e$ che rappresenta $\lambda B + E$, e perciò:

$$\lambda a + e \sim \lambda b + e \qquad \text{ossia} \qquad \lambda (a - b) \sim 0.$$

La condizione è sufficiente. Supponiamo che in W sia $\lambda (a - b) \sim 0$. Allora per il teorema ricordato il numero algebrico dei punti ove il ciclo $a - b$ incontra un qualunque altro ciclo di W sarà nullo e perciò i due cicli a e b incontrano nello stesso numero di punti qualunque ciclo c a due dimensioni di W.

Supponendo che c sia un ciclo algebrico, corrispondente cioè ad una curva C di F otteniamo che: *sopra* F *le due curve* A *e* B *incontrano nello stesso numero di punti qualunque curva* C *di* F.

Facendo coincidere C con una sezione iperpiana di F si trova intanto che le due curve A e B sono dello stesso ordine.

D'altra parte se $|E|$ è un multiplo sufficientemente alto del sistema delle sezioni iperpiane di F i sistemi $|E + A|$ ed $|E + B|$ sono irriducibili, qualunque siano A e B (*anche a grado virtuale negativo*). Facendo allora coincidere la curva C una volta con una curva generica di $|E + A|$ ed un'altra con una curva generica di $|E + B|$, per la definizione generale di grado virtuale di una curva quale è stata data dal Severi, si ricava che in ogni caso è:

$$[A^2] = [A\,B] = [B^2],$$

(1) Per questi richiami vedasi LEFSCHETZ, loc. cit. (4), p. 19.

Digitized by Google

e da questa, per il criterio di Severi:

$$\lambda A + E \equiv \lambda B + E . \qquad \text{C. V. D.}$$

Sotto forma leggermente diversa il teorema è stato dimostrato dal Lefschetz con l'uso però delle somme abeliane relative agli integrali semplici di prima specie appartenenti alla superficie F.

4. Scegliamo ora in W il *massimo numero possibile di cicli algebrici fra loro indipendenti* e siano $C_1, C_2, \cdots, C_\rho$.

Il numero ρ sarà minore o uguale dell'indice di connessione superficiale di W e perciò sarà finito.

Essendo $c_1, c_2, \cdots, c_\rho$ indipendenti, fra essi non può aver luogo alcuna omologia del tipo:

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_\rho c_\rho \sim 0 \tag{4}$$

per valori non tutti nulli dei coefficienti λ_i.

Essendo poi ρ il massimo numero possibile di cicli algebrici indipendenti di W, detto c un qualunque altro ciclo algebrico di W, fra c e c_i si avrà una omologia del tipo:

$$\mu c \sim \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \cdots + \mu_\rho c_\rho , \tag{5}$$

con μ intero positivo e $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\rho$ interi non tutti nulli.

Indichiamo su F con $C_1, C_2, \cdots, C_\rho$ le curve algebriche corrispondenti ai cicli $c_1, c_2, \cdots, c_\rho$; fra esse non può esistere alcuna relazione della forma:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\rho C_\rho + E \equiv E$$

per valori non tutti nulli dei coefficienti λ_i, altrimenti varrebbe la (4) per valori non tutti nulli delle λ_i, contro il supposto. Le curve $C_1, C_2, \cdots, C_\rho$ sono perciò *algebricamente indipendenti* fra di loro.

Sia ora C una qualunque curva algebrica di F, fra il ciclo c che rappresenta C e i cicli c_i esisterà una omologia (5) e perciò detto ν un numero intero positivo conveniente ed E una curva opportuna di F, si dovrà avere:

$$\nu \mu C + E \equiv \nu \mu_1 C_1 + \nu \mu_2 C_2 + \cdots + \nu \mu_\rho C_\rho + E$$

e posto $\nu \mu = \lambda$ e $\nu \mu_i = \lambda_i$

$$\lambda C + E \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\rho C_\rho + E . \tag{6}$$

con λ intero positivo e $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\rho$ interi non tutti nulli.

5. La (6) in fondo esprime il teorema fondamentale della base nella sua forma primitiva come è stato stabilito dal Severi, Poincaré e Lefschetz.

Digitized by Google

Ma per avere il teorema nella forma enunciata in principio, occorre liberare la (6) dalla curva ausiliaria E. La quale appare per ora variabile con C e con $C_1, C_2, \cdots, C_\rho$. Altrove ho però dimostrato [1]:

1° per una scelta arbitraria della base $(C_1, C_2, \cdots, C_\rho)$ non è sempre possibile liberare la (6) dalla curva E; ma la curva E si può scegliere una volta per tutte indipendentemente dalla base $(C_1, C_2, \cdots, C_\rho)$ e dalla curva C;

2° è possibile - e *senza alterare il numero base* ρ - scegliere in F, ρ curve indipendenti $D_1, D_2, \cdots, D_\rho$ in maniera che, detta D una *qualunque curva* di F, fra D e le D_i si abbia una relazione del tipo:

$$\lambda D \equiv \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \cdots + \lambda_\rho D_\rho , \tag{7}$$

senza alcun intervento di curve ausiliarie.

È possibile anzi scegliere delle basi $(\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_\rho)$ tali che, per qualunque curva Δ di F si abbia una equivalenza algebrica in senso stretto:

$$\lambda \Delta \mid\mid\mid \lambda_1 \Delta_1 + \lambda_2 \Delta_2 + \cdots + \lambda_\rho \Delta_\rho . \tag{8}$$

Per dimostrare queste proprietà mi son però servito del teorema che afferma l'esistenza in F, di sistemi continui composti di ∞^q sistemi lineari distinti, q essendo l'irregolarità di F $(q = p_g - p_a)$. Ora a rigore questo teorema si dimostra per via trascendente, ma non è difficile liberare la dimostrazione delle proprietà (1) e (2) anche da questa considerazione. Ed ecco come:

Sia S un sistema completo irriducibile come totalità di sistemi lineari. Per un noto teorema di Castelnuovo [2] la dimensione d dei sistemi lineari di S, sarà minore o uguale a q e perciò d ammette un massimo $p \leq q$.

Sia allora H un sistema continuo completo di F composto di ∞^p sistemi lineari distinti. Possiamo senz'altro supporre che tutti i sistemi lineari $|G|$ di H siano a caratteri generali.

Fissiamo in H *una curva* G *non appartenente ad alcun altro sistema continuo completo all'infuori di* H (sia cioè G generica in H).

Sia S un qualunque sistema continuo di curve di F; A una curva fissa di S, A′ una curva variabile in S. I sistemi lineari $|G + A - A'|$ sono effettivi e al variare di A′ descrivono un sistema continuo contenente G e perciò contenuto totalmente in H. Per ogni posizione di A′ in S, dovrà allora trovarsi in H una curva G′ tale che sia $G + A - A' \equiv G'$, ossia $A' \equiv A + G - G'$. Si può perciò dire che se A ed A′ sono due curve algebricamente equivalenti di F, è possibile trovare due curve G e G′ di H tale che sia $A' \equiv A + G - G'$.

(1) ALBANESE, loc. cit., p. 46 e sg.

(2) CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie algebrica*, n. 29, « Ann. di mat. », serie II, t. XXV, 1897.

Digitized by Google

Ciò detto portiamo nella (6) al primo membro gli eventuali termini negativi del secondo membro, si avrà una relazione del tipo

$$\lambda C + E + \mu_1 C_1 + \cdots + \mu_\sigma C_\sigma \equiv \mu_{\sigma+1} C_{\sigma+1} + \cdots + \mu_\rho C_\rho + E,$$

ed applicando l'osservazione precedente:

$$\lambda C + E + \mu_1 C_1 + \cdots + \mu_\sigma C_\sigma + G - G' \equiv \mu_{\sigma+1} C_{\sigma+1} + \cdots + \mu_\rho C_\rho + E,$$

ossia

$$\lambda C + \mu_1 C_1 + \cdots + \mu_\sigma C_\sigma + G \equiv \mu_{\sigma+1} C_{\sigma+1} + \cdots + \mu_\rho C_\rho + G'$$

e da questa

$$\lambda C + \mu_1 C_1 + \cdots + \mu_\sigma C_\sigma + G \equiv \mu_{\sigma+1} C_{\sigma+1} + \cdots + \mu_\rho C_\rho + G$$

e infine

$$\lambda C + G \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_\rho C_\rho + G,$$

la quale prova appunto che la curva ausiliaria E che compare nella (6) si può fissare una volta per tutte nella curva G, indipendentemente da C e da $C_1, C_2, \cdots, C_\rho$.

La (7) si dimostra analogamente, scegliendo come curve basi, ρ curve $D_1, D_2, \cdots, D_\rho$ variabili in sistemi $\{D_1\}, \{D_2\}, \cdots, \{D_\rho\}$ composti di ∞^p sistemi lineari distinti, il che, come è facile vedere, è sempre possibile.

Ora da una relazione del tipo

$$\lambda D + G \equiv \lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_\rho D_\rho + G$$

supposto per es.: λ_1 non nullo, per una posizione opportuna – diciamo D_1' – della curva $\lambda_1 D$ nel proprio sistema $\{\lambda_1 D_1\}$, si avrà

$$\lambda D + G \equiv D_1' + \lambda_2 D_2 + \cdots + \lambda_\rho D_\rho + G,$$

ossia

$$\lambda D \equiv D_1' + \lambda_2 D_2 + \cdots + \lambda_\rho D_\rho,$$

e da questa

$$\lambda D \equiv \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \cdots \lambda_\rho D_\rho,$$

che coincide appunto con la (7).

Per arrivare infine alla (8) basta scegliere come curve base ρ curve $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_\rho$ variabili in ρ sistemi $\{\Delta_1\}, \{\Delta_2\}, \cdots, \{\Delta_\rho\}$ composti di ∞^p sistemi lineari aventi la stessa dimensione e perciò irriducibili anche come totalità di curve. Tale scelta è sempre possibile in virtù del teorema ricordato alla fine del n. 1.

Digitized by Google

Ora in queste condizioni ogni relazione del tipo.

$$\lambda \Delta \equiv \lambda_1 \Delta_1 , + \cdots + \lambda_\rho \Delta_\rho$$

si riduce, *qualunque sia* Δ, ad una relazione di equivalenza algebrica in senso stretto:

$$\lambda \Delta \mid\mid\mid \lambda_1 \Delta_1 + \lambda_2 \Delta_2 + \cdots + \lambda_\rho \Delta_\rho .$$

E così il teorema d'esistenza di una base per la totalità delle curve algebriche di F rimane dimostrato per via puramente algebrica in tutte e tre le sue forme più importanti (6), (7) ed (8).

Matematica. — *Sur les groupes d'holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions. (Cas d'un ds^2 défini et positif).* Nota di G. Dubourdieu, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

J'ai exposé dans une Note précédente la classification, d'après leurs groupes d'holonomie, des espaces de Riemann à 4 dimensions dans le cas d'un ds^2 einsteinien. Je me propose de traiter ici le cas d'un ds^2 défini et positif. Dans ce cas les vecteurs sont transformés par le groupe des rotations d'un espace euclidien à 4 dimentions ou par un de ses sous-groupes réels.

Les transformations infinitésimales sont:

$$S_{ik} = x_i p_k - x_k p_i \qquad (i , k = 1 , 2 , 3 , 4) .$$

La détermination des groupes d'holonomie et des formes canoniques s'effectue comme dans le cas d'un ds^2 einsteinien. Ici, par contre, il y a deux cas où la méthode conduit à une forme canonique dans laquelle figurent des fonctions assujetties à vérifier un système d'équations aux dérivées partielles, de telle sorte qu'il est impossible de mettre explicitement en évidence les éléments arbitraires dont dépend le ds^2. Ce sont le cas III et V dont je m'abstiendrai par suite d'indiquer la forme canonique.

Les résultats trouvés sont les suivants.

1. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_6 \equiv [S_{12} , S_{13} , S_{14} , S_{23} , S_{24} , S_{34}] .$$

Deux types de groupes d'holonomie possibles:

I. $$G_{10} \equiv [S_{12} , S_{13} , S_{14} , S_{23} , S_{24} , S_{34} , p_1 , p_2 , p_3 , p_4] .$$

(1) Nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

C'est le groupe le plus général des déplacements et il lui correspond évidemment un ds^2 absolument général.

II. $$G_6 \equiv [S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{23}, S_{24}, S_{34}]$$

avec :

$$ds^2 = du^2 + u^2 d\sigma^2_{v,w,t}.$$

2. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_4 \equiv [S_{12}, S_{34}, S_{13} - S_{24}, S_{14} + S_{23}].$$

Deux types de groupes d'holonomie possibles :

III. $$G_8 \equiv [S_{12}, S_{34}, S_{13} - S_{24}, S_{14} + S_{23}, p_1, p_2, p_3, p_4]$$

sans forme canonique explicite pour le ds^2.

IV. $$G_4 \equiv [S_{12}, S_{34}, S_{13} - S_{24}, S_{14} + S_{23}]$$

avec :

$$\begin{cases} ds^2 = du^2 + u^2 [(dv + \alpha\, dw)^2 + \beta^2 (dw^2 + dt^2)] \\ \text{où :} \\ \alpha = \alpha(w, t) \quad , \quad \beta = \beta(w, t) \quad , \quad \text{avec } \beta^2(w, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(w, t)}{\partial t}. \end{cases}$$

3. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_3 \equiv [S_{12} + S_{34}, S_{13} - S_{24}, S_{14} + S_{23}].$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible :

V. $$G_7 \equiv [S_{12} + S_{34}, S_{13} - S_{24}, S_{14} + S_{23}, p_1, p_2, p_3, p_4].$$

sans forme canonique explicite pour le ds^2.

4. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_3 \equiv [S_{12}, S_{13}, S_{23}].$$

Deux types de groupes d'holonomie possibles :

VI. $$G_6 \equiv [S_{12}, S_{13}, S_{23}, p_1, p_2, p_3]$$

avec :

$$ds^2 = du^2 + d\sigma^2_{v,w,t}.$$

VII. $$G_3 \equiv [S_{12}, S_{13}, S_{23}]$$

avec :

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + v^2 \alpha^2 (dw^2 + dt^2) \quad , \quad \text{avec } \alpha = \alpha(w, t).$$

Digitized by Google

5. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_2 \equiv [S_{12}, S_{34}].$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible:

VIII. $$G_6 \equiv [S_{12}, S_{34}, p_1, p_2, p_3, p_4]$$

avec:

$$\begin{cases} ds^2 = d\sigma^2_{u,v} + d\sigma^2_{w,t} = \alpha^2 (du^2 + dw^2) + \beta^2 (dw^2 + dt^2) \\ \text{où:} \\ \alpha = \alpha(u, v) \quad , \quad \beta = \beta(w, t). \end{cases}$$

6. *Les vecteurs sont transformés par le groupe*:

$$\gamma_2 \equiv [S_{12}].$$

Un seul type de groupes d'holonomie possible:

IX. $$G_3 \equiv [S_{12}, p_1, p_2]$$

avec:

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + \alpha^2 (dw^2 + dt^2) \quad , \quad \text{où } \alpha = \alpha(w, t).$$

Remarque. Cette Note comme la précédente sur les ds^2 einsteiniens n'étant qu'un résumé, je n'ai fait aucune remarque sur les ds^2 obtenus. Je me contenterai ici d'indiquer que dans la plupart des cas le tenseur de courbure s'exprime sous une forme simple et que l'on peut trouver immédiatement dans plusieurs cas, une limite supérieure de la classe inférieure à 6. C'est ainsi que les ds^2 définis et positifs auxquels correspond une forme canonique explicite sont réalisables par des variétés à 4 dimensions de l'espace euclidien à 7 dimensions dans les cas II, IV, VI, à 6 dimensions dans le cas VIII, à 5 dimensions dans les cas VII et IX. Dans chacun de ces cas le théorème de Schouten d'après lequel la classe est au plus égale à l'ordre du groupe $[\gamma]$ suivant lequel le groupe d'holonomie transforme les vecteurs, est vérifié.

Digitized by Google

Matematica. — *Sulla curvatura e sul parallelismo su una superficie.* Nota di G. ANDREOLI, presentata [1] dal Socio R. MARCOLONGO.

In questa seconda Nota, proseguendo le ricerche iniziate nella prima, trattiamo il caso che nella regione S vi siano linee angolose, e diamo infine [2] il teorema sull'eccesso geodetico sostituendo all'integrale doppio di Riemann già indicato, quello di Stieltjes.

§ 6. Sia dunque in S una (o più) linea angolosa lungo la quale la superficie sia dotata di due piani tangenti. Si possono presentare i seguenti casi elementari: o la linea angolosa è chiusa; oppure parte dal bordo l e ritorna al bordo stesso; oppure parte da un punto conico e si arresta al bordo; oppure parte da un punto conico e si arresta ad un altro punto conico.

Naturalmente si possono presentare anche casi misti: ad esempio, di punti conici inseriti su linee angolose e così via; di linee angolose aventi cappi, ecc.

È ovvio che potremo ripetere parola per parola il procedimento seguito nel caso dei punti conici, salvo che occorre escludere una striscetta di ampiezza ε dai due lati della linea angolosa stessa.

Ed allora osserviamo che nell'esclusione di queste striscette si viene in sostanza a considerare (quasi fosse un «doppio strato») la differenza dei valori di parallelismo lungo la linea formante un bordo della striscetta, e l'altra formante l'altro bordo.

Se, similmente, sulla linea angolosa è inserito un punto conico, si provvederà ad escludere dalla striscetta il punto conico stesso ed a calcolare a parte l'angolo che ad esso compete per la porzione così staccata: e ciò tanto nel caso che il punto conico sia terminale della linea, tanto che sia inserito nella linea stessa.

Pertanto, la proprietà IV va così espressa nel caso generale:

La quantità α_2 che compete alla linea l, diminuita di tutte quelle che competono alle strisce elementari attorno alle linee angolose, e di tutte quelle che competono ai punti conici, rappresenta l'integrale della curvatura esteso a tutto il campo residuo.

Stabilendo opportune convenzioni, potremo dare forma più perspicua a tale enunciato, e precisamente potremo dire:

(1) Nella seduta del 20 febbraio 1927.

(2) Illustreremo ciò con due esempi nel § 8.

Digitized by Google

L'integrale superficiale della curvatura ordinaria, aumentato degli integrali lineari della curvatura angolare (lungo le linee angolose) *e della somma delle curvature coniche* (nei punti conici) *dà la quantità* α_2 *collegata all'angolo di parallelismo* ξ *lungo la linea* l, dalla formula $\xi = (2\pi - \alpha_2)$.

§ 7. Le convenzioni occorrenti per dare questo enunciato sono le seguenti, che ora applicheremo:

I. Si considera un punto ordinario della superficie come limite di un punto conico: allora il limite di $\frac{2\xi}{h^2}$ tende alla *curvatura gaussiana* in quel punto.

II. Si considera un punto di una linea angolosa, come limite di un punto conico: allora il limite di $\frac{\xi}{h}$ tende alla *curvatura angolare* in quel punto.

III. In un punto conico ξ è proprio la *curvatura conica.*

Ciò si può dire in altro modo:

Consideriamo un punto P; per questo punto una retta r; e poi due piani ortogonali passanti per essa. In ognuno dei due piani consideriamo un angolo avente r per bisettrice; e su ognuno dei due lati stacchiamo segmenti eguali a δ.

Sieno Q_1, Q_2 gli estremi di tali segmenti in un piano; R_1, R_2 degli altri segmenti nell'altro.

Consideriamo allora la figura composta dai quattro triangoli $P\,Q_1\,R_1$, $P\,R_1\,Q_2$, $P\,Q_2\,R_2$, $P\,R_2\,Q_1$.

Orbene indicando rispettivamente con γ', γ'' gli angoli formati da $P\,Q_1$ (o $P\,Q_2$), e da $P\,R_1$ (o $P\,R_2$) con il piano normale ad r per P, riesce facile vedere che l'angolo di sviluppo è corrispondente al quadruplo di $\theta = Q_1\,P\,R_1$ dati da

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}\gamma'}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\gamma'}}\,\frac{\operatorname{sen}\gamma''}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\gamma''}}\,.$$

Pertanto se consideriamo P, R_1, R_2, Q_1, Q_2 su una superficie e facciamo tendere δ a zero (beninteso sostituendo a punti della superficie punti da essi distanti per infinitesimi d'ordine superiore) si vede che $\operatorname{sen}\theta$, diviso per l'area dei quattro settori di centro P e raggio δ tracciati sulle facce della piramide di vertice P, tende proprio alla quantità: *curvatura gaussiana* in P (cfr. Levi-Civita, *Calc. differenziale assoluto*) e resta così collegata la curvatura gaussiana a quella conica.

Per definire invece la curvatura angolare, si consideri il punto P della linea angolosa; in esso il piano osculatore alla curva, π; e i due semipiani π', π'' tangenti alla superficie in P.

Digitized by Google

Se si conviene di sostituire alla curva, in P, una poligonale $P_0 P P_1$ di lato δ, e si ripete lo stesso ragionamento, si ritrova quanto è asserito nella prop. II.

Come *misura della curvatura angolare*, si avrà la quantità

$$\frac{\cos\gamma' + \cos\gamma''}{R}$$

ove γ' sia l'angolo di π' col semipiano di π volto verso il centro di flessione; e γ'' quello di π'' con lo stesso semipiano; ed R il raggio di flessione della curva in P.

Tale calcolo viene confermato considerando lo spigolo come limite di un raccordo fra i due semipiani tangenti con porzioni di tori, raccordati fra loro ortogonalmente al piano osculatore.

§ 8. *Esempi* (1). Consideriamo una porzione retta di cilindro circolare retto. La curvatura delle basi e della superficie laterale è nulla. Resta solo la curvatura angolare ai due spigoli delle basi.

È ovvio che tali spigoli sono cerchi, e quindi il piano osculatore è il piano base; inoltre un semipiano tangente è tale piano stesso, per cui $\gamma' = 0$; l'altro è il piano tangente al cilindro, per cui $\gamma'' = \frac{\pi}{2}$. Quindi, per uno spigolo l'integrale della curvatura angolare è

$$\int \frac{1}{R}\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \cdot R\, d\varphi = 2\pi$$

e per i due spigoli si avrà 4π: che in effetti è la *curvatura totale*.

Se invece consideriamo un disco circolare piano - *a due facce* - sarà $\gamma' = \gamma'' = 0$, quindi in un punto del bordo la curvatura angolare è $\frac{2}{R}$ ed il suo integrale è ancora 4π.

Infine se consideriamo due porzioni rette di coni circolari retti, simmetriche rispetto alla base comune, la curvatura totale si riduce all'integrale lineare della curvatura angolare lungo lo spigolo, aumentato del doppio della curvatura conica in un vertice (sono eguali nei due vertici opposti, le curvature coniche).

Se α è il semiangolo di apertura, si vede subito che $\gamma' = \gamma'' = \frac{\pi}{2} - \alpha$; mentre l'angolo di sviluppo θ è dato da $\theta = 2\pi \operatorname{sen}\alpha$.

(1) Trascuriamo il caso ovvio di un cubo. In esso sono nulle e curvatura gaussiana e curvatura angolare. Restano solo le curvature coniche degli otto vertici, ciascuna eguale a $\frac{\pi}{2}$; sicchè la curvatura totale risulta ancora 4π.

Digitized by Google

Quindi la curvatura angolare è data da $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{R}$, ed il suo integrale da

$$\int \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{R} ds = \int_0^{2\pi} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{R} R \, d\varphi = 4\pi \operatorname{sen} \alpha .$$

La curvatura conica in un vertice è $2\pi(1 - \operatorname{sen} \alpha)$; quindi la curvatura totale ritorna

$$4\pi \operatorname{sen} \alpha + 2\pi(1 - \operatorname{sen} \alpha) + 2\pi(1 - \operatorname{sen} \alpha) = 4\pi$$

come doveva essere.

§ 9. Infine passiamo all'integrale di Stieltjes. Vale la relazione:

$$\text{eccesso di parallelismo} = \iint_S dC = \iint K \, d\sigma + \sum_r \int A_r \, ds_r + \sum C_r \text{ (1)}$$

ove il simbolo scritto si deve intendere come segue:

Tracciamo sulla superficie S un qualunque reticolato, quadrettandola. In ogni quadretto scegliamo un punto interno P_{ij} e congiungiamolo con i vertici. Indichiamo con $(\Delta C)_{ij}$ la curvatura conica spettante a P come vertice della piramide. Formiamo la somma

$$\sum_{ij} (\Delta C)_{ij}$$

e facciamo tendere a zero i lati della quadrettatura.

Il limite di quella somma sarà il valore del simbolo

$$\iint_S dC$$

analogo ad un integrale di Stieltjes.

Tale integrale ammette anche altra interpretazione non intrinseca. Avendo costruita su S la quadrettatura suddetta (ortogonale se si vuole) si fissi per parallelismo di normali una corrispondenza fra i vertici della quadrettatura e punti della sfera. Si avrà così, per ogni stadio successivo Q della quadrettatura, uno stadio analogo $\bar{Q}$ di quadrettatura sulla sfera (di raggio 1).

Al tendere simultaneo dei lati di Q a zero, mediante inserzioni di nuove linee e nuovi vertici nel reticolo (2), $\bar{Q}$ tenderà ad un limite.

(1) Qui K è la curvatura gaussiana, A quella angolare, C quella conica; $d\sigma$ l'elemento d'area, ds quello d'arco delle linee angolose.

(2) Si vede ovviamente che ad intorni infinitesimi di P, corrispondono sulla sfera intorni infinitesimi di $\bar{P}$ se esso P è un punto regolare a curvatura gaussiana; all'intorno - striscetta - infinitesima di una linea angolosa corrisponde una striscia finita sulla sfera, all'intorno di un punto conico un'area finita.

Così, nel caso del cilindro, alla superficie laterale corrisponde l'equatore; a quella delle basi, i poli; alle linee angolose tutta la sfera, salvo equatore e poli.

Digitized by Google

L'area sferica di $\bar{Q}$, al limite, è proprio l'integrale dato.

Infine, se si « raccordano » nel modo anzidetto le due falde della superficie lungo una linea angolosa, e si tronca un punto conico raccordando poi la sezione ottenuta; indicando con $S(\xi)$ la superficie così modificata; e se al tendere di ξ a zero la superficie modificata tende alla primitiva, in modo che i piani tangenti tendono ai piani tangenti di S (salvo sulle linee angolose e sui punti conici, si intende), allora avremo

$$\lim_{\xi=0} \iint_{S(\xi)} K(\xi)\, d\sigma(\xi) = \iint_{S} d\,C$$

ciò che dà una terza interpretazione.

Calcolo funzionale. — *I funzionali analitici delle funzioni di due variabili complesse.* Nota di L. FANTAPPIÈ presentata[1] dal Socio F. SEVERI.

1. In questa Nota, e in una successiva, mi propongo di riassumere gli elementi di una teoria dei funzionali analitici delle funzioni di due variabili complesse, analoga in parte a quella dei funzionali delle funzioni di una sola variabile[2], sostanzialmente diversa, però, per ciò che riguarda le proprietà qualitative. Debbo al prof. Severi di avermi spinto a studiare i funzionali nel campo complesso, e di avermi dato gli opportuni consigli per ciò che concerne le necessarie interpretazioni di *Analysis situs*.

Diremo che un numero variabile f è un *funzionale* di una funzione $y(t_1, t_2)$, quando è data una legge che a ogni funzione $y(t_1, t_2)$, variabile indipendente in un certo campo, fa corrispondere uno, o più, valori di f (valori del funzionale), e scriveremo

$$f = F[y(t_1, t_2)].$$

Se la y è funzione, oltre che di t_1 e t_2, anche di altri parametri $\alpha, \beta, \cdots$, il valore f del funzionale risulterà una funzione ordinaria $f(\alpha, \beta, \cdots)$ di questi parametri, cioè

$$F_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \alpha, \beta, \cdots)] = f(\alpha, \beta, \cdots)$$

(1) Nella seduta del 3 aprile 1927.

(2) Cfr. *Le funzionali lineari analitiche e le loro singolarità*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. I, s. 6ª, 1925.

I funzionali analitici, conferenza pubblicata nei « Rend. del Seminario matematico della R. Università di Roma », s. 2ª, vol. IV, 1925-26.

Digitized by Google

ove t_1, t_2 al piede del simbolo F del funzionale indicano che questo va applicato alla y, considerata solo come funzione di t_1, t_2, e pensando $\alpha, \beta, \cdots$ come costanti.

2. Dovendo considerare, nel seguito, la $y(t_1, t_2)$ variabile in campi di *funzioni analitiche* e monodrome, premettiamo alcune definizioni concernenti queste funzioni. Potremo intanto rappresentare le coppie di numeri complessi t_1, t_2, inclusi i valori ∞, mediante le coppie di punti (reali) delle due sfere complesse t_1, t_2. L'insieme di queste coppie costituisce una molteplicità chiusa M_4 a 4 dimensioni, che può porsi anche in corrispondenza biunivoca (eccettuate le coppie per cui t_1 o t_2 sono ∞) coi punti reali di un S_4 euclideo.

Le *curve* definite da un'equazione $\varphi(t_1, t_2) = 0$, con φ analitica, saranno rappresentate da varietà M_2 di M_4, immagini di una corrispondenza, in generale non degenere, fra gli ∞^2 punti delle due sfere. Quando si ha una corrispondenza degenere che a tutti i valori di t_1 fa corrispondere sempre lo stesso valore $t_2 = \bar{t}_2$ (non escluso $\bar{t}_2 = \infty$) diremo che essa rappresenta la *retta* $t_2 = \bar{t}_2$ del *piano* t_1, t_2, *parallela all'asse* t_1; analogamente per la retta $t_1 = \bar{t}_1$. Altre varietà Γ, chiuse e a due dimensioni di M_4, che chiameremo *cicli speciali*, si avranno considerando le ∞^2 coppie di punti t_1, t_2, tali che t_1 si trova su una linea chiusa di una sfera, t_2 su un'altra linea chiusa dell'altra, e tutte le varietà che se ne ottengono per deformazione continua. Questi cicli, potendosi porre in corrispondenza biunivoca e continua coi punti di un toro, saranno tutti *doppiamente connessi.*

Sia ora $y_0(t_1, t_2)$ una funzione monodroma delle due variabili complesse t_1, t_2, e consideriamo tutte le coppie $\bar{t}_1, \bar{t}_2$, per cui la funzione diventa *singolare*, comprendendo con questo nome anche le coppie per cui la y non è definita, *e le coppie del tipo* $t_1 = \infty, t_2 = \bar{t}_2$, o $t_1 = \bar{t}_1, t_2 = \infty$, *se, pur essendo la* y *regolare per queste coppie, essa è però* $\neq 0$. Dato un numero r positivo, abbastanza piccolo, supponiamo poi che esistano coppie di valori t_1, t_2 per cui *le distanze sferiche* $t_1, \bar{t}_1$ *e* $t_2, \bar{t}_2$ siano sempre $> r$, qualunque sia la coppia singolare $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ della funzione y_0, e l'insieme $A(r)$ di queste coppie t_1, t_2 costituisca ancora una varietà a 4 dimensioni.

Diremo allora intorno (r) della funzione $y_0(t_1, t_2)$ *l'insieme di tutte le funzioni monodrome* $y(t_1, t_2)$, *olomorfe nel campo* $A(r)$ *delle coppie* t_1, t_2, *precedentemente definite.*

Chiameremo poi *linea analitica* dello spazio funzionale l'insieme delle funzioni $y = y(t_1, t_2; \alpha)$, individuate dai valori di un parametro complesso α, che entri pure analiticamente nella y. Presa una funzione $y_0 = y(t_1, t_2; \alpha_0)$ della linea, potremo trovare, in generale, data la dipendenza continua dal parametro α della $y(t_1, t_2)$ e quindi delle sue coppie singolari, un intorno di α_0 tale che per α in questo intorno la $y(t_1, t_2; \alpha)$ si mantenga entro un intorno (r) della y_0, prefissato ad arbitrio. Le eventuali funzioni della linea,

Digitized by Google

per cui ciò non fosse possibile, si diranno *funzioni eccezionali per la linea*, e i valori di α, a cui corrispondono, *valori eccezionali*.

3. Dato un funzionale $F[y(t_1, t_2)]$ (anche polidromo), supponiamo che per ogni funzione y di un intorno (r) di $y_0(t_1, t_2)$ si possa fissare una determinazione $\bar{F}[y(t_1, t_2)]$ del funzionale, che goda della seguente proprietà: data una qualunque linea analitica $y = y(t_1, t_2; \alpha)$ che contenga funzioni di quell'intorno, e determinato di conseguenza un campo B, semplicemente connesso, di valori di α, per cui y è olomorfa e interna a quell'intorno, *la funzione* $f(\alpha) = \bar{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \alpha)]$ *risulti sempre una funzione olomorfa nel campo* B, *qualunque sia la linea prescelta. Diremo allora che la determinazione* $\bar{F}$ *del funzionale* F *è regolare nell'intorno* (r) *della funzione* y_0, *o che* y_0 *è una funzione regolare per quella determinazione.*

Se ogni funzione $y(t_1, t_2)$ del campo, in cui è definito il funzionale F, è regolare per tutte le determinazioni di $F[y(t_1, t_2)]$, il funzionale si dirà *analitico localmente*, o anche *analitico in senso lato.*

In questo caso, se è possibile trovare una linea analitica $y = y(t_1, t_2; \alpha)$ tale che, fissato un percorso L, congiungente due valori α_0, α_1, lungo il quale y sia olomorfa e *non eccezionale*, una determinazione $\bar{F}$ del funzionale sia regolare nell'intorno di tutte le funzionali y, corrispondenti ai valori di α su L, la funzione $f(\alpha) = \bar{F}_{t_1 t_2}[y(t_1, t_2; \alpha)]$ risulterà olomorfa per ogni valore di α su L, cioè sarà olomorfa in un campo (semplicemente connesso), contenente L nel suo interno. Quando α varia con continuità su L da α_0 ad α_1 la y varierà con continuità da $y_0 = y(t_1, t_2; \alpha_0)$ a $y_1 = y(t_1, t_2; \alpha_1)$, mentre il valore della determinazione $\bar{F}$ del funzionale varierà pure con continuità da $f(\alpha_0) = \bar{F}[y_0(t_1, t_2)]$ a $f(\alpha_1) = \bar{F}[y_1(t_1, t_2)]$; si dirà più brevemente che *si è passati con continuità* dalla determinazione $f(\alpha_0)$ di F in y_0 alla determinazione $f(\alpha_1)$ di F in y_1, lungo il *percorso* costituito dalla semplice infinità di funzioni $y(t_1, t_2; \alpha)$, corrispondenti ai valori di α su L. Se si passa con continuità da una determinazione di F in y_0 a una determinazione di F in y_1, da questa a un'altra in y_2, ecc., e si esegue questa operazione un numero finito n di volte, arrivando infine a una certa determinazione di F in y_n, si dirà ancora che *si è passati con continuità* dalla determinazione iniziale di F in y_0 a quella finale di F in y_n. In particolare, potrà darsi il caso che y_n coincida con y_0, nel qual caso diremo che si è passati con continuità da una determinazione all'altra di $F[y_0(t_1, t_2)]$.

4. Se si può sempre passare con continuità da una qualunque determinazione di un funzionale F (analitico localmente) per $y = y_0$ a un'altra qualunque determinazione per $y = y_1$, essendo y_0 e y_1 due funzioni arbitrarie del campo di definizione del funzionale, si dirà che questo campo è *connesso*. In questa ipotesi *basterà la conoscenza di una determinazione* $\bar{F}$ *di* F *nell'intorno* (r), *in cui* $\bar{F}$ *sia regolare, di una qualunque funzione* y_0 *del campo*

Digitized by Google

(la conoscenza di un *elemento del funzionale di centro* y_0, come diremo in seguito) *per calcolare tutte le altre determinazioni del funzionale per un'altra qualsiasi funzione* y_1 (e anche le altre determinazioni di F nell'intorno (r) di y_0). Basterà infatti considerare una o più linee analitiche lungo le quali si possa passare con continuità dalla determinazione data in y_0 a quella cercata in y_1; p. es., nel caso più semplice che basti una sola linea analitica $y = y(t_1, t_2; \alpha)$ (v. numero precedente), in cui si faccia variare α da α_0 ad α_1 su una linea L, basterà considerare la funzione $f(\alpha) = \bar{F}[y(t_1, t_2; \alpha)]$ che è olomorfa in tutto un intorno della linea L stessa; essendo essa conosciuta nell'intorno di α_0, si otterrà la determinazione cercata $\bar{F}[y_1(t_1, t_2)] = f(\alpha_1)$ *prolungando analiticamente* la $f(\alpha)$, nota inizialmente nell'intorno di α_0, lungo la linea L.

Vediamo così che, nel caso che il campo di definizione del funzionale F, analitico localmente, sia *connesso*, si ha una proprietà che fa riscontro perfetto alla proprietà fondamentale delle *funzioni analitiche* di essere perfettamente definite in tutto il loro campo d'esistenza (connesso) quando siano note nell'intorno di un *punto* regolare.

5. Cerchiamo allora di estendere anche ai funzionali analitici il concetto di *campo naturale di esistenza*. Sia data perciò una determinazione $\bar{F}$ di un funzionale analitico $F[y(t_1, t_2)]$, regolare per ogni y di un campo *connesso*, p. es., nell'intorno (r) di una funzione y_0 del tipo

$$y_0 = \frac{1}{(t_1 - \alpha_0)(t_2 - \beta_0)},$$

che è certo connesso. Per una funzione y_1 di questo campo potrà determinarsi, per la definizione di regolarità data al n. 3, un intorno (r_1) tale che la $f(\alpha) = \bar{F}[y(t_1, t_2; \alpha)]$ è olomorfa, colle solite condizioni, finchè la $y(t_1, t_2; \alpha)$ resta in quell'intorno. Ma potrà accadere che, qualunque sia la linea analitica $y = y(t_1, t_2; \alpha)$, contenente funzioni di questo intorno, la $f(\alpha)$ sia sempre olomorfa per ogni α di un campo semplicemente connesso B, per cui la y sia interna a un intorno più vasto (r_1') di y_1 $(r_1' > r_1)$, anche se questo intorno comprende funzioni $y_2 = y(t_1, t_2; \alpha_2)$ della linea, (α_2 in B) esterne al campo primitivo in cui $\bar{F}$ è data. Prolungando analiticamente la $f(\alpha)$ a tutto il campo B, potremo allora definire una determinazione $\bar{F}$ del funzionale F anche per queste funzioni y_2, ponendo $F[y(t_1, t_2; \alpha_2)] = f(\alpha_2)$, e se il valore di questa determinazione è sempre lo stesso qualunque sia la linea analitica adoperata per congiungere y_1 con y_2 diremo che la determinazione $\bar{F}$, regolare nell'intorno iniziale (r_1) di y_1, è stata *prolungata analiticamente* a tutto l'intorno (r_1') di y_1, in cui essa è ancora regolare. Se immaginiamo di eseguire successivamente tutti i possibili prolungamenti analitici partendo da intorni di funzioni in cui le

Digitized by Google

varie determinazioni del funzionale che via via si ottengono sono regolari, arriveremo infine a un campo D di funzioni, per ognuna delle quali saranno definite, in generale, più determinazioni di F, differenti secondo il percorso seguito per arrivarvi con continuità da una funzione del campo iniziale.

Questo campo D sarà ancora *connesso*, ma non sarà ulteriormente ampliabile con prolungamenti analitici; esso si dirà il *campo naturale di definizione o di esistenza* del funzionale F, di cui era data inizialmente, in un campo parziale, la sola determinazione $\overline{F}$, e questo funzionale si dirà *analitico in senso stretto* (1). Per questi funzionali analitici in senso stretto si hanno dunque proprietà che ricordano molto da vicino quelle delle ordinarie *funzioni analitiche*. In particolare, se si ha un funzionale, analitico in senso lato, definito in un campo *connesso*, esso è sempre analitico in senso stretto, o si può prolungare analiticamente in un funzionale analitico in senso stretto, che coincide con quello dato nel campo iniziale di definizione.

Matematica. — *Sugli integrali superficiali delle forme differenziali quadratiche.* Nota di S. CHERUBINO presentata dal Socio G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur les orbites périodiques et les lignes géodèsiques fermées.* Nota di N. MUSCHELISVILI presentata dal Socio Corrisp. L. TONELLI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Scostamento geodetico, stabilità e problema di Whittaker.* Nota di O. ONICESCU presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geometria. — *Intorno a una trasformazione delle congruenze rettilinee W.* Nota di R. CALAPSO presentata dal Socio Corrisp. G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Debbo ad alcune osservazioni dei proff. Severi e Bagnera, riguardanti lavori precedenti sui funzionali analitici, la precisazione dei concetti fondamentali e la distinzione, ora introdotta, tra i funzionali *analitici localmente* (in senso lato) e quelli *analitici in senso stretto*, definiti in tutta la loro individualità da un loro qualunque elemento. Naturalmente tutte le considerazioni ora esposte possono trasportarsi senz'altro, con piccole modificazioni, ai funzionali analitici delle funzioni *di una sola variabile*.

Digitized by Google

Idromeccanica. — *Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto ad un asse.* Nota di U. CRUDELI, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Assumendo coordinate cilindriche, r, φ, z, con l'ipotesi che l'asse dei cilindri coordinati coincida con quello di simmetria del movimento (movimento che viene supposto avvenire secondo piani passanti per cotesto asse ed in egual modo in ognuno di essi piani), l'angolo φ non interviene nella trattazione; per cui frattanto, se in corrispondenza ad un generico punto dello spazio occupato dal liquido e ad un generico istante denotiamo con v_r la componente radiale della velocità e con v_z la componente assiale, l'equazione della incompressibilità diventa notoriamente

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0.$$

Ne segue, com'anche è ben noto, la esistenza di una funzione ψ (detta *funzione di corrente*, mediante la quale possono esprimersi gli elementi del moto) tale che

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad , \quad v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

La equazione alle derivate parziali del quarto ordine, alla quale soddisfa cotesta funzione di corrente, equazione già complicata nel caso in cui si tratti di moto lento [2], si complica ulteriormente nei riguardi del moto non lento [3]. Ad una forma compendiosa di equazione caratteristica si giunge, intanto nel caso del moto lento, ponendo [4]

$$\psi = r\frac{\partial F}{\partial r}. \tag{1}$$

Precisamente (nella ipotesi di forze di massa conservative) si ottiene, nei riguardi della funzione F (*funzione delle sole variabili* r, z, t), la equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r}\right) = \nu \frac{\partial \Delta_4 F}{\partial r}, \tag{2}$$

(1) Nella seduta del 20 marzo 1927.

(2) Cfr. E. ZONDADARI in « Rend. della R. Accad. dei Lincei », 1° sem., 1911, p. 341.

(3) Cfr. B. CALDONAZZO in « Rend. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », 1924, p. 781.

(4) Cfr. U. CRUDELI in « Rend. della R. Accad. dei Lincei », 2° sem., 1916, p. 102. La suddetta forma di equazione caratteristica fu poi da me sfruttata per un metodo di determinazione del moto (lento) subordinato (di un liquido viscoso) a quello traslatorio (rettilineo) di un solido sferico (« Rend. della R. Accad. dei Lincei », 2° sem., 1916, p. 151).

Digitized by Google

in cui la costante ν designa il rapporto fra viscosità e densità del liquido. Dalla (2) segue poi

$$\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial t} = \nu \Delta_4 F + f(t, z);$$

quindi, supponendo che $h(t, z)$ sia, delle sole variabili t e z, funzione tale che

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right) = \nu \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} - f(t, z),$$

viene

$$\frac{\partial \Delta_2 (F + h)}{\partial t} = \nu \Delta_4 (F + h).$$

Ma, stante la (1), l'aggiungere alla F una funzione delle sole variabili t e z non altera i caratteri del moto, per cui, in definitiva, nel caso del moto lento, può scriversi l'equazione

$$\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial t} = \nu \Delta_4 F.$$

Nel *caso del moto non lento* potremo pervenire ad una forma compendiosa di equazione caratteristica pure mediante la posizione (1). Vedremo che l'equazione caratteristica in discorso si ottiene dalla (2) cambiando in essa il simbolo di derivata parziale rispetto al tempo in simbolo di derivata totale ed aggiungendo al primo membro il prodotto $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r}$; viene così l'equazione

$$(3) \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z}\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r}\right) = \nu \frac{\partial \Delta_4 F}{\partial r}$$

che, in altra Nota, sfrutteremo nella presentazione di una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi viscosi pesanti (omogenei) in tubi cilindrici (rotondi) verticali.

*
* *

Useremo intanto un procedimento dimostrativo che ci consente di riprendere *ab initio* la trattazione generale dei moti che avvengono secondo piani passanti per un asse, simmetricamente rispetto all'asse medesimo e con eguale comportamento in ognuno di essi piani.

Denotando della velocità $\boldsymbol{v}$ di una generica particella del liquido con v_x, v_y, v_z le componenti in un sistema di assi cartesiani, del quale l'asse delle z sia il supposto asse di simmetria, si ha

$$v_x = \frac{x}{r} v_r \quad , \quad v_y = \frac{y}{r} v_r;$$

Digitized by Google

talchè, essendo per noi v_r funzione soltanto delle r, z, t, potremo scrivere

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

dove $\varphi = -\int v_r\, dr$. Introduciamo la funzione F (delle variabili r, z, t) ponendo

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial z};$$

allora la div $\boldsymbol{v} = 0$ porge $\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$, quindi

$$v_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \chi(x, y, t).$$

Ma v_z e $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$ sono funzioni soltanto delle r, z, t; ne segue che $\chi(x, y, t)$ va pensata funzione delle sole r, t. Ne segue inoltre che potremo scrivere

$$\chi = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

con manifesto significato della lettera f; per cui conglobando poi (com'è ovviamente lecito) la f nella F, avremo

$$v_x = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \quad , \quad v_y = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad , \quad v_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

Ciò premesso, si consideri l'equazione (vettoriale) del movimento

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \nu \Delta_2' \boldsymbol{v} + \operatorname{grad}\left(U - \frac{p}{\rho}\right),$$

col significato consueto dei simboli. Com'è noto, tenendo presente che la divergenza di rot $\boldsymbol{v}$ e quella di $\boldsymbol{v}$ sono nulle, se ne deducono le equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}) = (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \times \operatorname{grad}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}) + \nu \Delta_2 (\boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \end{cases}$$

essendo $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ la nota terna di vettori fissi unitari. Ora, poichè rot $\boldsymbol{v}$ ha, com'è chiaro, componente nulla secondo l'asse di simmetria, la terza delle (4), assumendo $\boldsymbol{k}$ secondo l'asse medesimo, diventa

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \times \operatorname{grad}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}) = 0;$$

Digitized by Google

la quale risulta senz'altro soddisfatta osservando che, in corrispondenza ad un generico punto, il vettore grad $(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v})$ è naturalmente contenuto nel piano passante per il punto stesso e per l'asse predetto, mentre la rot $\boldsymbol{v}$ è perpendicolare al piano in discorso. Le due prime delle (4), tenendo presente la circostanza di avere la rot $\boldsymbol{v}$ componente nulla secondo l'asse di simmetria, diventano

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega_x}{dt} = \omega_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \omega_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \nu \Delta_2 \omega_x \\ \dfrac{d\omega_y}{dt} = \omega_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + \omega_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \nu \Delta_2 \omega_y , \end{cases}$$

dove

$$\omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial \Delta_2 F}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r}$$

$$\omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = - \frac{\partial \Delta_2 F}{\partial x} = - \frac{x}{r} \frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r} .$$

Ma, per noi,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial z} = \frac{1}{r} \left(\frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - \frac{x^2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{xy}{r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{r} \left(\frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - \frac{y^2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^2 \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} \right),$$

quindi

$$\omega_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{y}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} \quad , \quad \omega_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{x}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} ;$$

d'altra parte, qui, le derivate, anche totali, prese rispetto al tempo, dei rapporti $\frac{x}{r}$ ed $\frac{y}{r}$ (anche prese, cioè, seguendo la generica particella del liquido) sono nulle; dunque le (5) equivalgono per noi all'unica equazione (3).

La funzione di corrente risulta espressa mediante $\psi = r \frac{\partial F}{\partial r}$; invero

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right) = v_r \quad , \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = v_z .$$

* * *

Il caso che si presenta subito alla nostra attenzione si ottiene considerando i particolari moti stazionari, per i quali si abbia $\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} = 0$; allora scriveremo intanto $F = F_1(r) + F_2(z)$.

Digitized by Google

Non si ometta di osservare che, essendo $\frac{dr}{dt} = v_r = -\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial r}$, risulta ora $\frac{dr}{dt} = 0$; nel caso in discorso, la (3) diventa $\frac{\partial \Delta_4 F}{\partial r} = 0$; per cui, tenendo presente che l'aggiunta alla F di un'arbitraria funzione della sola z non altera i caratteri del moto, avremo

$$\Delta_4 F = 0 \quad \text{ovvero, volendo,} \quad \Delta_4 F_1 = 0.$$

Allora, poichè $v_z = \Delta_2 F_1$, potremo scrivere $\frac{d\Delta_2 v_z}{dr} = 0$; quindi

$$\Delta_2 v_z = 4\alpha \qquad \text{cioè} \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = 4\alpha,$$

denotando α una costante. Ne segue, con la condizione che la v_z sia ovunque regolare al finito,

$$v_z = \alpha r^2 + \beta,$$

dove β rappresenta una ulteriore costante. In questo caso, considerando il problema del moto del liquido nell'interno di un tubo cilindrico (rotondo) verticale, supposto il liquido stesso soggetto alla semplice azione della gravità, azione tuttavia da supporre che venga poi trascurata, si perviene (teoricamente) al *regime del Poiseuille* con la nota formula della portata assumendo, se R designa il raggio del cilindro, la costante $\beta = -\alpha R^2$ (valore che corrisponde alla *completa aderenza* fra liquido e parete del tubo). Denotando con 2Ω la proiezione della rot $\boldsymbol{v}$ sopra un asse opportunamente orientato, ad essa parallelo, potremo scrivere

$$\omega_x = -2\frac{y}{r}\Omega \quad , \quad \omega_y = 2\frac{x}{r}\Omega ;$$

per cui

$$2\Omega = \frac{x}{r}\omega_y - \frac{y}{r}\omega_x = -\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r} ;$$

quindi ora $\Omega = -\alpha r$.

Però i moti stazionari con traiettorie parallele all'asse di simmetria non sono gli unici che conducono ad Ω proporzionale ad r [1]. In altra Nota vedremo (una volta impostato il problema dei moti simmetrici del liquido con rotazione di misura proporzionale ad r) come si possa presentare, entro tubi cilindrici (rotondi) verticali, una categoria di movimenti stazionari simmetrici di un liquido viscoso (pesante), i quali *senza corrispondere al regime del Poiseuille nei riguardi dei filetti liquidi* (teoricamente rettilinei in codesto regime) conducono ad una *portata* suscettibile di ridursi a quella di Poiseuille.

(1) Cfr. B. CALDONAZZO nella citata sua Nota (p. 786), in cui può vedersi come la risoluzione *indefinita* del problema in discorso, nei riguardi della funzione di corrente, si riduce alla integrazione *indefinita* di una certa equazione alle derivate parziali del secondo ordine, di tipo ben noto nella teoria delle ordinarie funzioni cilindriche.

Digitized by Google

Idromeccanica. — *Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali.* Nota di U. CRUDELI, pres. dal Socio LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Del confronto dei cataloghi calorimetrici di Hagen, Sestini, Hosthoff e Kruger.* Nota di G. ARMELLINI-CONTI, pres. dal Socio A. DI LEGGE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla dispersione rifrattiva e rotatoria naturale delle soluzioni acquose di aspartato monoetilico.* Nota di M. L. PAGLIARULO, presentata [1] dal Socio M. CANTONE.

Per continuare la ricerca di una possibile relazione fra le leggi di dispersione rotatoria naturale e rifrattiva di una determinata sostanza, ricerca da me stessa iniziata con lo studio delle soluzioni acquose dei due isomeri ottici dell'asparagina [2] e dell'acido tartarico destrogiro [3], per consiglio del prof. Cantone ho voluto anche esaminare una soluzione acquosa di un derivato dell'asparagina: l'aspartato monoetilico.

Questa sostanza è stata preparata nel R. Istituto di Chimica Organica di Napoli e fu cortesemente ceduta dal prof. Piutti all'Istituto di Fisica per la ricerca di carattere puramente fisico, a cui fui indotta dal fatto che dalle esperienze eseguite, presso l'Istituto di Chimica Organica, dai sigg. dottori Mazza e Dello Jojo, risultavano per le soluzioni acquose di aspartato interessanti anomalie di dispersione rotatoria.

Per la mia ricerca ho adoperata una soluzione di concentrazione 0.748 %; di questa soluzione la stessa parte ha servito prima per l'esame polarimetrico e poi per lo studio della dispersione rifrattiva.

Le esperienze sono state eseguite in tempo relativamente breve, e si è avuta ogni cura per evitare alterazioni di qualsiasi natura nella soluzione,

(1) Nella seduta del 20 marzo 1927.

(2) M. L. PAGLIARULO, *Sulle leggi di variazione del potere rotatorio*, ecc. «Nuovo Cimento», N. S., anno III, n. 1-2.

(3) M. L. PAGLIARULO, *Sulla dispersione ordinaria e rifrattiva delle soluzioni acquose di acido tartarico destrogiro*, «R. della R. Accad. Naz. dei Lincei», vol. IV, ser. 6ª, 2° sem.

Digitized by Google

senza però adoperare nessuna delle sostanze atte ad impedire le muffe, per non far intervenire nella soluzione sostanze estranee, che con la loro presenza avrebbero eventualmente potuto influire sulle leggi da studiare.

Per l'esame del potere rotatorio, come pure per quello dell'indice di rifrazione, mi sono attenuta essenzialmente al metodo stesso seguìto nei due lavori precedenti ed esposto nelle suindicate Note. Ma ho cercato naturalmente di migliorare i dettagli sperimentali, anche perchè la concentrazione molto piccola della soluzione ha richiesto speciale accuratezza ed attenzione nelle determinazioni. Soprattutto poi (mirando allo scopo di individuare gli andamenti delle due curve di dispersione con approssimazione migliore di quella raggiunta le altre volte) mi sono adoperata per ottenere valori della rotazione α del piano di polarizzazione e dell'indice di rifrazione n in corrispondenza a lunghezze d'onda in numero maggiore di quelle adoperate nei lavori precedenti e meglio distribuite nello spettro visibile; e perciò, oltre che dei tubi Geissler ad elio e ad idrogeno, della lampada a mercurio e della fiamma di sodio, mi sono anche servita della riga rossa del litio (spettro di fiamma) e di alcune righe dello spettro di arco del rame.

L'angolo α qui non raggiunge che valori molto bassi; infatti, come si può leggere nella tabella n. 1, in cui sono raccolti tutti i miei risultati numerici sperimentali, esso varia da un minimo di circa 2′ a un massimo di circa 8′.

La dispersione rotatoria naturale dell'aspartato monoetilico risulta, anche dall'attuale studio, nettamente anomala, come si rileva dalla figura, nella quale si vede che la curva corrispondente (cioè quella contrassegnata con R) presenta in modo evidentissimo, nell'intervallo di lunghezza d'onda 5300-6300, un flesso analogo a quelli caratteristici che si presentano nelle curve di dispersione rifrattiva quando vi sono delle bande di assorbimento.

Non deve far meraviglia se, nonostante la scala molto grande che si è creduto opportuno di tenere nella costruzione, questa curva presenta un andamento molto regolare, in quanto che i punti dai quali essa è individuata sono dati da valori numerici risultanti dalla media di un numero grandissimo di determinazioni.

Con gli stessi accorgimenti è stato eseguito lo studio della dispersione rifrattiva, e perciò si può assicurare di essere riusciti ad ottenere, dalle medie delle numerose letture fatte, valori degli angoli di cui si può garantire l'esattezza fino al secondo.

La curva di dispersione, corrispondente alla temperatura di 20° C, è riportata in figura accanto a quella per l'acqua distillata, rirerita alla stessa temperatura [1]. (Ho contrassegnato con n (sol.) la curva di dispersione della

(1) Le temperature nel tempo in cui sono durate le esperienze oscillavano fra un massimo di 20°.5 e un minimo di 19°.4, e quindi, per poter ottenere i valori di n corri-

Digitized by Google

TABELLA N. 1

λ	α	n a 20° C	
		Soluzione	H_2O distillata
6708	4′ 1	1.33176	1.33077
6678	—	1.33181	1.33082
6562	5′ 0	1.33209	1.33110
6266	6′ 6	1.33281	1.33182
5893	8′ 2	1.33393	1.33298
5875	8′ 0	1.33397	1.33302
5780	4′ 6	1.33427	1.33332
5460	2′ 1	1.33538	1.33439
5218	3′ 6	1.33639	1.33542
5105	4′ 2	1.33684	1.33587
5015	4′ 6	1.33722	1.33623
4916	5′ 0	1.33780	1.33681
4861	5′ 2	1.33810	1.33701
4651	5′ 7	1.33922	1.33823
4471	6′ 0	1.34036	1.33937
4358	6′ 0	1.34114	1.34015
4046	6′ 0	1.34380	1.34281

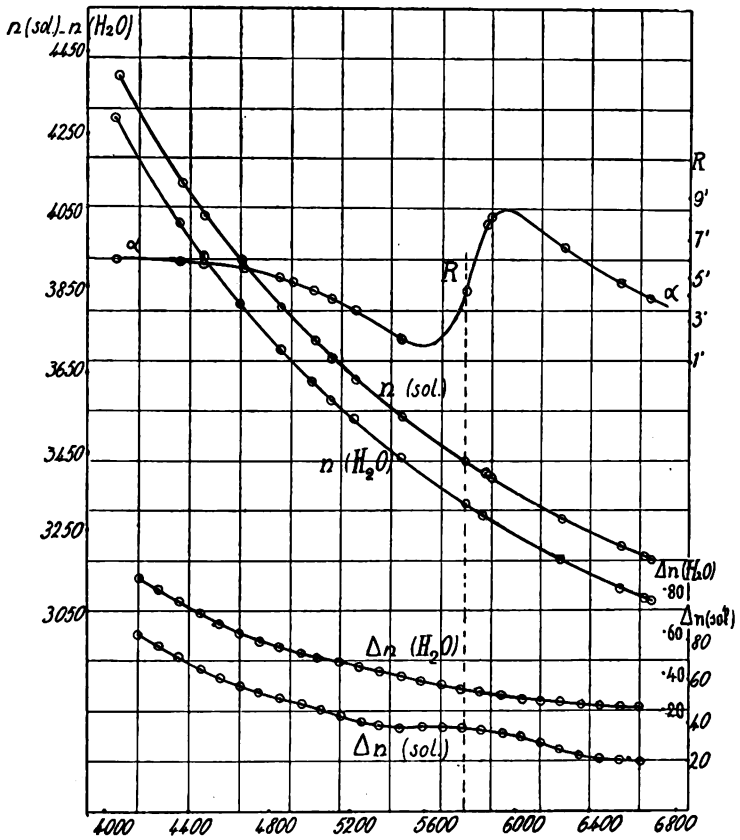
TABELLA N. 2

λ	n		$\frac{\Delta n}{\Delta t}$
	a 15°	a 20°	
6678	1.33126	1.35082	— 0.000088
5893	1.33343	1.33298	— 0.000090
5875	1.33347	1.33302	— 0.000090
5780	1.33377	1.33332	— 0.000090
5460	1.33481	1.33439	— 0.000084
5015	1.33664	1.33623	— 0.000082
4471	1.33980	1.33937	— 0.000086
4358	1.34057	1.34015	— 0.000084

Digitized by Google

soluzione e con $n\,(H_2O)$ l'altra relativa all'acqua, avvertendo che i numeri riportati al margine sinistro della figura devono intendersi come le ultime quattro cifre aggiunte alla parte comune 1.3 per i valori dell'indice di rifrazione n).

Dall'esame diretto di questi due diagrammi non risulta che vi sia fra di essi alcuna differenza di andamento: appaiono perfettamente paralleli.



Ma calcolando col solito sistema i rapporti incrementali, in corrispondenza ad intervalli successivi di lunghezze d'onda per un ammontare di 100 Å, e costruendo le grafiche relative si vede che esse, per un buon tratto, a partire dalle lunghezze d'onda più piccole, sono sensibilmente parallele, ma poi, mentre la curva dell'acqua conserva sino alla fine andamento regolare, in quella della soluzione si delinea ad un certo punto un piccolissimo av-

spondenti esattamente a 20°, si è tenuto strettamente conto della temperatura durante ogni determinazione e poi si sono riportati tutti i valori a 20° servendosi del coefficiente termico dell'acqua nell'intorno di 20°, cioè $\frac{\Delta n}{\Delta t} = -0.000090$.

Digitized by Google

vallamento, poi un tratto quasi rettilineo a lieve gradiente, seguìto da una caduta tendente a ristabilire il parallelismo fra le due curve.

Questa singolarità si presenta nell'intervallo di lunghezza d'onda 5300–6300, cioè in quello stesso campo in cui si ha il flesso della curva di dispersione rotatoria, e il punto medio del flesso coincide esattamente, o quasi, col punto medio del tratto rettilineo della curva delle differenze finite relativa alla soluzione.

La presenza e la forma della singolarità nella dispersione rotatoria e la coincidenza suddetta fanno pensare che la sostanza di cui presentemente ci occupiamo abbia un centro di assorbimento, presenti cioè un vibratore la cui frequenza caratteristica sarebbe quella corrispondente alla lunghezza d'onda 5780.

Ho ancora da osservare che, traendo profitto dal fatto che la curva di dispersione dell'acqua, servita qui per il confronto, risulta da una serie di determinazioni eseguite alla temperatura di 20°, mentre l'altra costruita allo stesso scopo nel lavoro sulle soluzioni di asparagina deriva da un'altra serie di determinazioni alla temperatura di 15°, ho ricalcolato il $\frac{\Delta n}{\Delta t}$, cioè il coefficiente termico dell'acqua, fra 15° e 20°. I valori ottenuti in corrispondenza a varie lunghezze d'onda si leggono nella tabella n. 2 e dànno come valor medio $\frac{\Delta n}{\Delta t} = -0.000087$. Noto che questo concorda molto bene con i valori riportati nelle « Tables annuelles internationales », ecc. in cui si ha, per $t = 20° \frac{\Delta n}{\Delta t} = -0.000090$, e, per $t = 15°$, $\frac{\Delta n}{\Delta t} = -0.000080$.

Concludendo, da questo lavoro risulterebbe che, in corrispondenza dell'anomalia del potere rotatorio si ha un centro di assorbimento, il quale si metterebbe in rilievo per mezzo degli elementi che riguardano la dispersione rifrattiva, quando si proceda fino allo studio delle differenze prime, ricavate dalla curva di dispersione.

Leggo sul Bollettino della « Societé française de physique », che il signor Pfleiderer, in collaborazione col sig. Hagenbach, ha pubblicato recentemente un importante lavoro sperimentale sulle dispersioni rotatorie, naturale e magnetica, di certi corpi assorbenti, chimicamente ben definiti; e che risulta essenzialmente, dalle misure dei due sperimentatori, l'esistenza, nell'intorno della banda, di una correlazione fra le anomalie della dispersione naturale e quelle della dispersione magnetica, mentre la dispersione rifrattiva sarebbe assolutamente normale.

Ora dall'esame dei diagrammi da me ottenuti deriva che in corrispondenza del centro di assorbimento anche la curva di dispersione rifrattiva presenta qualche particolarità, ma è impossibile poterla rilevare direttamente, occorre considerare le curve delle differenze prime.

Digitized by Google

Il presente metodo di studio apparirebbe dunque molto opportuno per questo tipo di ricerche, quando le esperienze siano fatte in condizioni tali da potersi garantire dall'andamento delle curve la legge del fenomeno.

Ringrazio vivamente il prof. Cantone per i numerosi consigli ed aiuti di cui mi ha favorito durante tutto il lavoro.

Fisica. — *Una misura del rapporto h/k per mezzo della dispersione anormale del Tallio.* Nota di E. Fermi e F. Rasetti, pres. dal Socio O. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il sistema* $AlCl_3 — KCl — H_2O$ *a 25°.* Nota di G. Malquori [1], presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Le presenti ricerche sono dirette agli stessi scopi indicati nella Nota precedente sul sistema $Al(NO_3)_3 — KNO_3 — H_2O$ [3].

A differenza del nitrato, il cloruro di alluminio anidro può formare una numerosa serie di composti di addizione con ammoniaca, idrogeno solforato, anidride solforosa, cloruro di zolfo e diversi cloruri metallici [4].

Non si conoscono invece prodotti di addizione di $AlCl_3 \cdot 6H_2O$.

*
* *

Nella tabella sono riportate le composizioni delle soluzioni sature e nel diagramma sono riassunti i risultati delle esperienze.

Sistema $KCl — AlCl_3 — H_2O$ a 25°

Composizione della soluzione			Composizione del resto			Fasi solide
$AlCl_3$ %	KCl %	H_2O %	$AlCl_3$ %	KCl %	H_2O %	
—	26.31	73.69	—	—	—	KCl
4.07	17.93	78.00	—	—	—	»
7.93	13.98	78 09	1.87	81.60	16.53	»
12.28	10.51	67.21	—	—	—	»
19.81	9.03	71.16	—	—	—	»
24.09	7.80	68.11	7.08	79.81	13.11	»
30.15	3.91	65.94	—	—	—	»
33.18	2.15	64.67	48.22	1.90	49.88	$KCl + AlCl_3 \cdot 6H_2O$
34.08	—	65.92	—	—	—	$AlCl_3 \cdot 6H_2O$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(3) Questi « Rend. », vol. V, serie 6ª, aprile, 1927, p. 451.

(4) « Baud. Ann. Chim. Phys. » [8], *1*, 46 (1904).

Digitized by Google

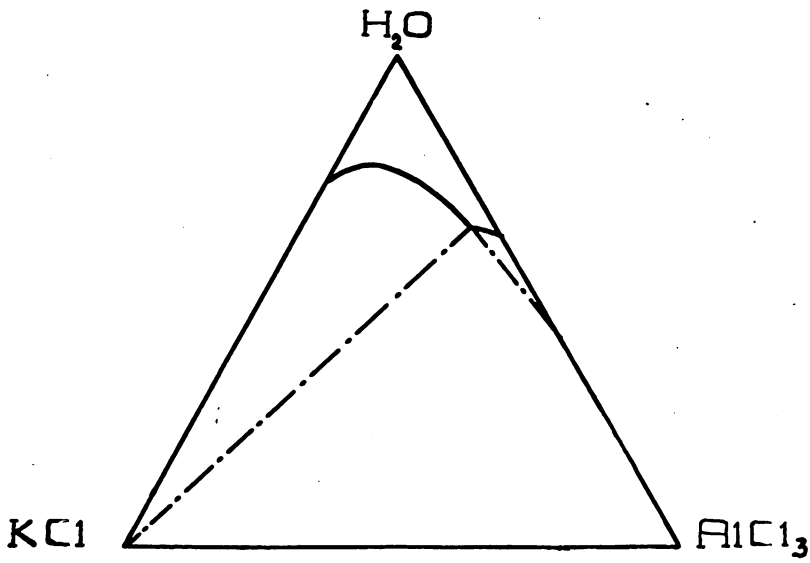


Diagramma 2.

Come si vede, a 25°, i due sali solidi che esistono a contatto con le soluzioni sono $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ e KCl. Sali doppi non si formano. Rimane pertanto molto stridente il contrasto fra l'attitudine del cloruro di alluminio anidro a sommare con facilità altre sostanze e quello idrato che si dimostra privo di qualunque tendenza a dare composti doppi.

Si può forse spiegare questa netta diversità di comportamento tenendo presente che il piccolo raggio atomico dell'Al, la forte carica elettrica e la struttura relativamente semplice (in relazione agli altri metalli trivalenti) lo rendono particolarmente atto a formare composti di addizione, mentre, se si ammette che l'esaidrato del cloruro di alluminio sia un idrato cationico puro $[Al(H_2O)6]Cl_3$ [1], data la forza con cui è trattenuta l'acqua - come è provato dal fortissimo calore di idratazione del sale - sarà molto improbabile l'esistenza di composti di addizione con Al come atomo coordinante.

Chimica. — *Sulla identitá di struttura cristallina dei composti* Fe_3S_4 *e* FeS. Nota di C. Fontana presentata dal Socio G. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose.* Nota di U. Sborgi presentata dal Socio R. Nasini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Lembert, «Zeit. Phys. Chem.», *104*, 101 (1923).

Digitized by Google

Chimica. — *Sulla struttura cristallina dei cloruri dei metalli trivalenti.* Nota di G. NATTA presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Azione dell'acido peracetico sopra gli acetilderivati delle ammine aromatiche.* Nota di D. BIGIAVI presentata dal Socio A. ANGELI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Determinazione approssimativa di* 2 V *nelle sezioni sottili dei minerali.* Nota [1] di P. ALOISI, presentata [2] dal Corrisp. G. D'ACHIARDI.

Per calcolare l'angolo vero degli assi ottici con le formule approssimate di Mallard bisogna conoscere due valori di potenza birifrattiva; per ogni potenza birifrattiva occorre fare una determinazione di ritardo ed una di grossezza. Ora se la prima non offre in generale nessuna difficoltà, l'altra invece, quando si tratti di minerali in sezioni sottili, è operazione molto delicata e di risultato assai incerto. Quando però le due sezioni nelle quali è stato determinato il ritardo sieno ugualmente spesse, si possono senz'altro introdurre nelle formule i ritardi al posto delle corrispondenti potenze birifrattive.

Approfittano di questo fatto, che io sappia, due metodi di determinazione di 2 V: uno, dovuto ad Uhlig [3], si fonda sulla osservazione dei colori di interferenza e sull'uso della tavola colorata di Michel Levy; esso non è applicabile ai minerali con colorazione propria. Nell'altro, del Berek [4], i due ritardi sono determinati, per mezzo del compensatore, in uno stesso individuo, portando successivamente, con opportune rotazioni della piattaforma di Fedorow, due sezioni principali dell'indicatrice normali all'asse del microscopio.

Il metodo che propongo e che ho già usato con buoni risultati, fonde, in certo modo, i due precedenti, nel senso che le determinazioni dei ritardi si fanno con il compensatore, in due individui diversi in uno stesso preparato il più possibile uniforme. Esso non richiede quindi l'uso della piat-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 20 marzo 1927.

(3) *Ueber eine neue Methode, den wahren optischen Achsenwinkel im Dünnschliff zu bestimmen*, «Ctbl. f. Min. ecc.», 1911, p. 305, Stuttgart, 1911.

(4) *Mikroskopische Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaldrehtischmethoden*, p. 101, Berlin, 1924.

Digitized by Google

taforma di Fedorow e, d'altra parte, evita, o riduce molto, il fattore soggettivo che, mi sembra, deve influire parecchio nelle determinazioni secondo Uhlig.

Si può usare un compensatore qualsiasi, ma ritengo debba preferirsi quello di Berek, di uso semplicissimo, di grande precisione, e che permette di ridurre quasi sempre al minimo i calcoli necessari.

Si cerca, prima di tutto, una lamina tagliata normalmente ad uno dei tre assi principali dell'indicatrice; per mezzo del compensatore di Berek si determina l'angolo i e poi nell'apposita tabella si cerca il $\log f(i)$; la stessa operazione si ripete per una seconda lamina normale ad un altro asse dell'indicatrice. È inutile, in generale, trovare il valore dei ritardi e si può prescindere anche dal logaritmo della costante dell'apparecchio, visto che dei due valori si deve fare il rapporto [1]; è pure inutile cercare i numeri che esprimono $f(i)$ giacchè nel calcolo se ne usano solo i logaritmi.

Si avrà, se le due sezioni erano normali ad α e β, ad α e γ, a β e γ, rispettivamente:

$$\log \cos V = \frac{1}{2}(\log f(i)_{\perp \alpha} - \log f(i)_{\perp \beta}),$$

$$\log \tan V = \frac{1}{2}(\log f(i)_{\perp \gamma} - \log f(i)_{\perp \alpha}).$$

$$\log \operatorname{sen} V = \frac{1}{2}(\log f(i)_{\perp \gamma} - \log f(i)_{\perp \beta}).$$

Naturalmente si otterranno per V valori minori di 45° se il minerale è positivo, maggiori se è negativo, e questo potrà senz'altro farci conoscere il segno della birifrazione.

Vediamo ora l'approssimazione che si può raggiungere. Sono da considerarsi tre cause di errori, una inevitabile e due eventuali. Esse sono: 1) errore dovuto alla sensibilità del compensatore; 2) errore dovuto a differenza di grossezza delle due lamine; 3) errore dovuto a non esatta orientazione delle due lamine. Consideriamoli separatamente.

1. Chiamiamo R ed R_1 i ritardi, esatti, delle due lamine, σ e σ_1, gli errori commessi nelle due determinazioni. Le formule del Mallard, facendo astrazione delle grossezze, sono del tipo $\sqrt{\frac{R}{R_1}}$.

Invece del valore esatto $\sqrt{\frac{R}{R_1}}$ noi otterremo quello, errato, $\sqrt{\frac{R+\sigma}{R_1+\sigma_1}}$; possiamo allora porre:

$$\sqrt{\frac{R+\sigma}{R_1+\sigma_1}} = \sqrt{\frac{R}{R_1}} \sqrt{\frac{1+\frac{\sigma}{R}}{1+\frac{\sigma_1}{R_1}}}.$$

(1) Berek, op. cit., p. 101.

Digitized by Google

$\frac{\sigma}{R}$ e $\frac{\sigma_1}{R_1}$ sono tali che se ne possono trascurare le potenze di grado superiore al primo ed i prodotti; avremo quindi:

$$\sqrt{\frac{R+\sigma}{R_1+\sigma_1}} = \sqrt{\frac{R}{R_1}}\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{R}-\frac{\sigma_1}{R_1}\right)}.$$

Sviluppando con la serie binominale il secondo radicale del secondo membro, si ottiene:

$$\sqrt{\frac{R+\sigma}{R_1+\sigma_1}} = \sqrt{\frac{R}{R_1}}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{R}-\frac{\sigma_1}{R_1}\right)\right] = \sqrt{\frac{R}{R_1}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{R_1}}\left(\frac{\sigma}{R}-\frac{\sigma_1}{R_1}\right).$$

L'errore, Ω, sarà:

$$(I) \qquad \Omega \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{R_1}}\left(\frac{|\sigma|}{R}+\frac{|\sigma_1|}{R_1}\right).$$

Il termine $\sqrt{\frac{R}{R_1}}$ è minore o uguale ad 1 [1], e perciò l'errore sarà, al massimo, $\frac{1}{2}\left(\frac{|\sigma|}{R}+\frac{|\sigma_1|}{R_1}\right)$.

Questo avverrà per $2V = 90°$ usando la formula che dà tg V, per $2V = 0°$ e birifrazione negativa, se si usi quella che dà sen V, per $2V = 0°$ e birifrazione positiva, se si usi quella che dà cos V. Questi ultimi due casi non possono darsi, ma, quando si adoperino le formule sen V e cos V, l'errore sarà tanto più grande quanto più piccolo è 2V.

È chiaro poi che l'errore dipende dai valori relativi di σ e σ_1; il Berek [2] ha calcolato l'errore medio che si commette con il suo apparecchio e dai suoi risultati si vede che mentre l'errore assoluto cresce con i ritardi, quello relativo invece è massimo per i ritardi piccoli. Prescindendo perciò dal rapporto fra i due ritardi, l'errore sarà maggiore per potenze birifrattive basse, che non per potenze birifrattive elevate.

Riguardo alla grandezza di tali errori possiamo facilmente farcene un'idea con un esempio numerico. In pratica sarà estremamente raro aver a che fare con due ritardi notevolmente minori di 100 $\mu\mu$; supponiamo perciò che i ritardi esatti siano $R = 98\ \mu\mu$, $R_1 = 100\ \mu\mu$; i valori esatti saranno allora $V_1 = 44°\,42'\,38''$, $V_2 = 81°\,52'\,11''$, $V_3 = 8°\,7'\,49''$, a se-

(1) Nel caso di birifrazione negativa e di uso della formula tg V, invece di prendere $\operatorname{tg} V_o = \sqrt{\frac{R+\gamma}{R_1+\alpha}}$, nel qual caso $V_o > 45°$, si può porre $\operatorname{tg} V_a = \sqrt{\frac{R_1+\alpha}{R+\gamma}}$ ed allora sarà $V_a < 45°$.

(2) *Zur Messung der Doppelbrechung hauptsächlich mit Hilfe des Polarisations mikroskops*, « Ctbl. f. Min. ecc. », 1913, p. 423, Stuttgart, 1913, e *Mikr. Mineralbest.* ecc., p. 46.

Digitized by Google

conda, rispettivamente, che si sia usata la formula della tangente, del seno o del coseno.

Dal diagramma di Berek si deduce che per 100 $\mu\mu$, $\sigma_1 = 2{,}4\ \mu\mu$; per 98 $\mu\mu$ il valore di σ sarà praticamente uguale a quello di σ_1 in valore assoluto; le peggiori condizioni si hanno quando i due errori sono di segno contrario; poniamo $\sigma = -2{,}4\ \mu\mu$, $\sigma_1 = +2{,}4\ \mu\mu$. I valori che otterremo saranno allora rispettivamente:

$$\tan V_1 = \sqrt{\frac{98 - 2{,}4}{100 + 2{,}4}} \quad , \quad \operatorname{sen} V_2 = \sqrt{\frac{98 - 2{,}4}{100 + 2{,}4}} \quad , \quad \cos V_3 = \sqrt{\frac{98 - 2{,}4}{100 + 2{,}4}} .$$

Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$V_1 = 44^\circ\, 0'\, 57'' \quad , \quad V_2 = 75^\circ\, 4' \quad , \quad V_3 = 14^\circ\, 56' .$$

Le differenze dai valori esatti sono:

$$d_1 = 0^\circ\, 41'\, 41'' \quad , \quad d_2 = 6^\circ\, 48'\, 11'' \quad , \quad d_3 = 6^\circ\, 48'\, 11'' .$$

Da questo risulta che mentre l'errore massimo per il calcolo a mezzo della formula tg V è assai piccolo, quelli che si commettono con le altre due formule sono invece molto grandi. Per valori di 2 V piccoli converrà quindi evitare di usar formule sen V e cos V [1].

In conclusione, sotto questo punto di vista, il metodo permetterà sempre (dato che le determinazioni dei due ritardi sieno fatte con le cautele opportune, per le quali rimando ai citati lavori del Berek) una notevolissima approssimazione ai valori esatti.

2. Chiamiamo σ l'errore introdotto dalla differenza di grossezza in una delle due misure; allora invece del valore esatto $\sqrt{\frac{R}{R_1}}$ otterremo quello errato $\sqrt{\frac{R + \sigma}{R_1}}$. Con procedimento analogo a quello usato per ottenere la (I) si ha che l'errore è:

$$\Omega \leq \frac{\sigma}{2R} \sqrt{\frac{R}{R_1}} . \qquad \text{(II)}$$

Anche qui l'errore massimo si verificherà per $\sqrt{\frac{R}{R_1}} = 1$ e sarà $\frac{\sigma}{2R}$.

Il valore $\frac{\sigma}{R}$ e, per conseguenza, anche quello $\frac{\sigma}{2R}$ dipende solo da g e g_1, indicando con tali lettere le due grossezze: così, per esempio, per

(1) Quando si conoscano due soli ritardi si può subito calcolare il terzo; se chiamiamo R_1 il ritardo della sez. $\perp \beta$, R_2 quello $\perp \gamma$, R_3 quello $\perp \alpha$, fra i tre esiste, evidentemente, la relazione $R_1 = R_2 + R_3$.

Digitized by Google

$g_1 - g = 10\ \mu\mu$, $\frac{\sigma}{2R} = \frac{1}{4}$ se $g_1 = 30\ \mu$, diviene $\frac{1}{6}$ se $g_1 = 40\ \mu$, $\frac{1}{8}$ se $g_1 = 50\ \mu$, cioè l'errore, per differenza costante, diminuisce con l'aumentare della grossezza. Naturalmente col diminuire di $g_1 - g$, l'errore si riduce ma, ad ogni modo, in pratica può esser tanto grande da rendere addirittura inservibili i risultati.

Fortunatamente questo errore può facilmente essere evitato. Intanto in preparati ben fatti le differenze di grossezza fra punto e punto di uno stesso preparato sono molto piccole. Sarà poi da evitare di usare insieme risultati di misure ottenute in preparati diversi ed anche, eventualmente, sull'orlo e nella parte centrale di una sezione, dove in generale le differenze sono più notevoli. Finalmente è da osservare che quando si debbano usare insieme valori ottenuti in due individui di grossezza manifestamente diversa, è quasi sempre possibile sapere in qual verso si verifica l'errore e, in alcuni casi, anche la sua presumibile grandezza.

3. Non credo che il problema possa facilmente trattarsi da un punto di vista generale, ma sempre che l'obliquità sia piccola, gli errori dovuti a non esatta orientazione non saranno certo molto notevoli, dato che, come è noto, la potenza birifrattiva, in vicinanza delle sezioni principali, varia in generale molto lentamente.

In conclusione ritengo che il metodo possa spesso dare utili risultati; certo non si deve pretendere da esso una esattezza assoluta, ma l'approssimazione dovrebbe, nel massimo numero dei casi, esser sufficiente. Un pregio non piccolo è, a mio modo di vedere, la rapidità e semplicità delle operazioni necessarie, fra le quali la più lunga è la ricerca delle sezioni normali agli assi dell'indicatrice, ricerca che non dovrebbe peraltro offrire nessuna difficoltà ad un petrografo un po' esperto.

Riporto alcuni esempi di determinazioni fatte con questo metodo.

1° *Plagioclasio di un granito di Bur Acaba* (*Somalia*). In sezioni della zona simmetrica di geminati albite si misura un massimo di 5°; una sezione normale a un asse ottico mostra β un po' minore di ω del quarzo: si tratta quindi di oligoclasio con circa 15 % An.

In un preparato si misura:

Sez $\perp \gamma$, media $i = 5.72$, $\log f(i) = 7.998$
Sez $\perp \alpha$, media $i = 6.35$, $\log f(i) = 8.0885$

$\log \text{ tg } V = \frac{1}{2}(7.998 - 8.0885)$, $V_a = 42°$, carattere +.

In un altro preparato:

Sez $\perp \gamma$, media $i = 6$, $\log f(i) = 8.039$
Sez $\perp \alpha$, media $i = 6.3$, $\log f(i) = 8.082$

Digitized by Google

$\log \text{ tg } V = \frac{1}{2}(8.039 - 8.082)$, $V_a = 43° 30'$ e carattere + .

In media $2V = 85° 30'$; per 15 °/₀ An , $2V = 86°$ (1).

2° *Muscovite di uno gneiss di Scec Asceriò* (*Somalia*).

Sez $\perp \gamma$, media $i = 21.95$, $\log f(i) = 9.158$
Sez $\perp \alpha$, media $i = 8.25$, $\log f(i) = 8.3155$

$\log \text{ tg } V = \frac{1}{2}(9.158 - 8.3155)$, $V_o = 69° 14'$, carattere — .

Con $V_a = 20° 46'$ e $\beta = 1.595$ si calcola $E = 34° 25'$; una determinazione col metodo di Mallard mi ha dato $E = 35°$ circa.

3° *Anidrite–Mühlberg, Harz.*

Sez $\perp \gamma$, media $i = 9.01$, $\log f(i) = 8.3919$
Sez $\perp \alpha$, media $i = 22.1$, $\log f(i) = 9.164$

$\log \text{ tg } V = \frac{1}{2}(8.3919 - 9.164)$, $V_a = 22° 21'$, carattere + .

Il valore di $2V$ per l'anidrite è dato di $43° 20'$ per la linea B , $44° 24'$ per la F (2).

4° *Gesso–Osterode, Harz.*

Sez $\perp \gamma$, media $i = 5.22$, $\log f(i) = 7.9184$
Sez $\perp \beta$, media $i = 10.7$, $\log f(i) = 8.541$

$\log \text{ sen } V = \frac{1}{2}(7.9184 - 8.541)$, $V_a = 29° 14'$, carattere + .

Il valore di $2V$ per la luce del sodio è stato trovato di $58° 5'$ (3).

(1) Berek, op. cit., tav. 2.

(2) Groth, *Chemische Krystallographie*, II, p. 387, Leipzig, 1908.

(3) Dufet, *Constantes optiques du gypse de Montmartre*, « Bull. soc. fr. de Min. », XI, p. 128, Paris, 1888.

Digitized by Google

Genetica. — *Sul valore genetico dei prodotti di « Nicotiana rustica » ∞ « Nicotiana Tabacum ».* Nota di R. SAVELLI, presentata [1] dal Socio B. LONGO.

Dalla autogamia di un centinaio di fiori di *N. rustica* potrebbero aversi almeno 300.000 semi ed altrettante piantine; se invece un ugual numero di fiori - previa emasculazione - si tratta con polline di *N. Tabacum* si ottengono appena poche centinaia di semi da cui possono allevarsi - nel caso più fortunato - poche decine di piante. Ma il piccolo gruppo di piante con lunga pazienza ottenuto, compensa largamente della fatica se riesce a comprendere ambedue i tipi, nettamente contrastanti, caratteristici di questa F_1.

Si tratta di un fenomeno meraviglioso per nettezza ed appariscenza, poichè la disuguaglianza tra i prodotti « fratelli » è tale e tanta che basterebbero i fiori grandi e rosei di un tipo in contrasto con quelli piccoli e gialli dell'altro, per rendere la differenza visibile anche a molta distanza, e per rendere quasi incredibile che si tratti di piante venute dalla stessa madre - o persino dalla stessa cassula - fecondata da una sola specie di polline.

In diversi incroci si constata un eccezionale dimorfismo in F_1, ma spesso tuttavia esso può stabilirsi soltanto sulla base di distinzioni sottilmente analitiche quali sono state introdotte anche nell'odierna sistematica e quali possono venir precisate dagli esatti metodi della biometria, dopo essere state intuite dall'occhio esercitato dello specialista.

Qui invece si ha un dimorfismo segnato da differenze così ampie e da caratteri così netti come quelli che potrebbero separare morfologicamente due buone e lontane specie linneane, sicchè l'elemento puramente quantitativo del grado di differenza tra i prodotti è già sufficiente perchè questo caso emerga distintamente da qualunque altro a me noto in qualsiasi campo della genetica, nonchè in quello speciale delle ibridazioni fra *Nicotianae*, pur così ricco di fatti consimili, ai quali anch'io recentemente ne ho aggiunto uno nuovo studiando *N. longiflora* ♀ × *silvestris* ♂ [2].

Vedendo in essiccato i prodotti di *N. rustica* ∞ *N. Tabacum*, nessun sistematico esita a classificarli rispettivamente nei cicli, lontani e distinti, di *Nicotiana rustica* e di *Nicotiana Tabacum*: le specie appunto da cui questa F_1 fu generata.

Non è però a credersi che i due tipi filiali rappresentino il prodotto di un *incrocio anficlino*, come si avrebbe con la riproduzione pura e semplice

(1) Nella seduta del 20 marzo 1927.

(2) R. SAVELLI, *Un ibrido di « tipo eccezionale » nella* F_1 *di « Nicotiana longiflora » Cav.* ♀ × *« Nicotiana silvestris »* ♂ *Speg et Comes.* « Archivio Botanico del prof. BÉGUINOT, vol. II, fasc. 4, pp. 228-240.

Digitized by Google

dei due genitori. E neppure che sieno *ibridi gemelli*, in cui i due tipi hanno caratteri più o meno *interposti* tra quelli dei genitori e perciò sono ambedue chiaramente anfimittici, ma l'uno assai più somigliante alla madre e l'altro assai più somigliante al padre.

Qui c'è qualcosa di diverso, benchè sulla stessa base di quel *dimorfismo in* F_1 che apre tanta serie di problemi assolutamente extra-mendeliani. Lo scopo di questa nota è di contribuire alla interpretazione del fenomeno, mediante fatti nuovi apparsi nei miei esperimenti, i quali costringono a dichiarare insufficiente l'interpretazione più semplice che io stesso avevo accarezzato in base ai più ristretti esperimenti di cui avevo reso conto finora in altra mia nota (1).

Qui non c'è luogo per una estesa letteratura della questione; ma la mia antecedente nota, unitamente a quanto si trova riassunto a pp. 171-173 del libro del Winkler (*Verbreitung und Ursache der Parthenogenesis im Pflanzen-und Tierreiche*, Jena 1920), bastano a chiarire perfettamente il precedente stato della questione.

Fatta la prima grossolana distinzione in piante di tipo a fior rosso, e piante di tipo *rustica* a fior giallo, si può dire intanto che queste ultime non sono sempre presenti neppur quando si sia riusciti ad ottenere un gruppo relativamente cospicuo di 10 o 12 individui. In qualche anno le piante di tipo *rustica* si ottengono, e se ne può trovare qualcuna anche fra 4 o 5 individui soltanto; in altri anni non si riesce ad ottenerne, e forse influisce su ciò la terra od il clima. Una simile incostanza di comportamento fu vista da altri autori in *N. Tabacum* × *N. alata* e del resto anche de Vries, a proposito dell'incrocio anficlino fra *Oenothera Lamarckiana* e la sua mutazione *nanella*, rileva che la proporzione numerica dei due gruppi antagonisti costituenti la F_1 dipende dalle *condizioni di coltura* dei genitori. Forse tutto si compendia nella nutrizione degli embrioni che si stanno sviluppando, fattore questo al quale ho sempre dato molta importanza. Secondo me, quando da un lotto di seme non si ottengono individui di tipo *rustica*, l'interpretazione più corretta non è quella di credere che essi non si siano formati, ma piuttosto quella che il loro sviluppo ontogenetico non abbia trovato condizioni favorevoli e siano morti in una qualunque fase della loro vita intraseminale.

Io ho ottenuto a Perugia gli individui di tipo *rustica* sempre in minor numero di quelli di tipo a fior rosso, complessivamente in proporzione di circa un quarto del numero totale; e non ne ho ottenuti affatto in Roma, dove ebbi soltanto molti individui di tipo a fiore rosso.

Se dunque la prolificità complessiva di questa impollinazione può valutarsi di qualche migliaio di volte inferiore alla prolificità di un comune

(1) R. Savelli, *Apomissia ed ibridazioni difficili in « Nicotiana »*. « Bull. Soc. Bot. It. », 1920, nn. 4-9, pp. 22-30.

Digitized by Google

incrocio varietale, ciò non vuol dire tuttavia che la fecondazione sia avvenuta in misura così scarsa. Per il risultato genetico non basta che avvenga fecondazione, cioè fusione di gameti, bensì occorre che lo zigoto risultante possa iniziare e proseguire le divisioni costruttrici dell'embrione, che questo superi la fase critica costituita dal periodo di riposo entro il seme, che la piantina non presenti difetti organici (per es. albicatura, atrofia radicale, formazioni ascidiali in posizione terminale) più comuni tra i discendenti ibridi che non fra quelli legittimi; che insomma possa svilupparsi normalmente sino a fiore.

Tutto ciò non è richiesto per una ricerca citologica che si limitasse intanto a portare il potente ausilio del microscopio nell'analisi di quel che avviene entro il gineceo di *Nicotiana rustica* impollinato da *N. Tabacum*. Il còmpito del citologo è, in questo caso, più facile di quello del genetico, Ed uno degli scopi della presente nota è appunto quello di invogliare ad una simile ricerca citologica che potrà prevedere ben promettente di reperti inopinati chiunque mi segua nell'ulteriore esposizione.

Che cosa sono i prodotti di tipo a fior rosso?

Ho detto che qualunque sistematico cui se ne mostri l'essiccato, non esita a porli fra *Nicotiana Tabacum*, ma questo avviene perchè *N. Tabacum* è una grande sinspecie che occupa da sola tutta una sezione del genere *Nicotiana* ed abbraccia grande varietà di forme e sottoforme che vanno da quelle a fiore esile, elegante, pallidamente roseo, a quelle a fiore tozzo intensamente rosso, da quelle con foglia picciolata a quelle con foglia affatto sessile. Perciò le piante a *fior rosso* ottenibili da questo incrocio non escono visibilmente dall'ámbito morfologico di *Tabacum*, esse tuttavia si rivelano subito per ibridi a chi tenga presenti i particolari caratteri di quella data forma di *Nicotiana Tabacum* utilizzata nell'incrocio. Allora, qualunque sia questa forma paterna, il prodotto ibrido ottenuto segna in confronto di essa una modificazione generale di caratteri, che è costituita da un piccolo ma chiaro ravvicinamento ai caratteri di *Nicotiana rustica*. Così le foglie hanno una impaginatura più larga; e soprattutto modificati appaiono i fiori, sempre di un colore più chiaro, in cui l'elemento giallo–verdastro si vede intensificato ed esteso in confronto a quello antocianico, la corolla è accorciata e più tozza, il pistillo più breve. Io non voglio infarcire questa nota con dati numerici; ma dico in conclusione che queste piante sono tutte - per quanto ho visto - prodotti veramente ibridi, anfimittici, nei quali si può notare un altissimo grado di preponderanza dei caratteri di *N. Tabacum*; ma in cui nondimeno è riconoscibile l'influenza dei fattori recessivi di *N. rustica*. Perciò siamo ben lungi dal poter parlare di una dominanza assoluta. Anzi aggiungo che questo non è neanche uno degli ibridi di *N. Tabacum* in cui tale specie sia più dominante: negli ibridi fra *N. Tabacum* forma *chinensis* e *N. silvestris* la prima specie appare ben più chiaramente dominante

Digitized by Google

in tutti i caratteri, salvo in un piccolo particolare della cassula (che nell'ibrido è deiscente come in *N. silvestris*), e nondimeno si tratta di un vero ibrido come rivela l'ampia disgiunzione in F_2.

Nelle forme a fior rosso ottenute dall'incrocio *N. rustica* × *N. Tabacum*, io non sono mai riuscito a comprovare una disgiunzione per il semplice fatto che non sono riuscito ad ottenere discendenza. La sterilità avendo colpito a fondo anche gli ovuli, non è neanche possibile girare lo scoglio impollinando col polline normale delle specie paterna o materna.

Concludendo, le forme a fiore rosso furono sempre veri ibridi ed in ciò i miei esperimenti concordano appieno con quelli degli autori stranieri, mentre non ho ancora potuto confermare l'ottenimento di forme fertili riproducenti la specie funzionante da maschio (*Tabacum*), risultato questo asserito da Splendore (1915), ma che non può accogliersi senza conferma, avendo io già mostrato quali errori sperimentali infirmano il lavoro di Splendore [1].

Che cosa sono i prodotti di tipo rustica?

Questo il punto in cui i miei nuovi reperti segnano un progresso nella questione e complicano i risultati e le interpretazioni precedenti.

Finchè io non avevo ottenuto altro che piante di *Nicotiana rustica* strettamente riproducenti la forma materna e *fertili* (in accordo su questo ultimo punto sperimentale con lo Splendore), l'interpretazione più semplice ed ovvia, trasparente abbastanza tra le righe della mia precedente nota, sarebbe stata quella di ritenerle come prodotte da una banale forma di apomissia, forse senz'altro come prodotte da una *embrionia nucellare*. In tal caso il nuovo individuo, provenendo da una cellula somatica, diploide, dello sporofito, non ha nessuna ragione di presentare una costituzione genetica diversa da quella della pianta madre. Ed io non escludo neppur oggi che in *N. rustica* impollinata da *N. Tabacum* vi siano fatti di *agamospermia* (Tackolm) favoriti, se non indotti, dalla irritazione e stimolazione prodotta dal polline straniero. Nella discussione sui fatti consimili trovati nel genere *Nicotiana* e nel contrasto tra la possibilità di embrionia nucellare e quella di altre forme di apomissia, non contribuisce a risolver niente la parola « partenogenesi » usata dal Goodspeed (1916) e da altri per designare la formazione verginale di seme in una speciale stirpe di tabacco, poichè il Goodspeed ha usato tale parola nel senso latissimo di apomissia, e manca qualsiasi prova che non si tratti appunto anche in questo caso di embrionia nucellare.

Ma nell'ultimo anno dei miei esperimenti in Perugia mi nacque una pianta riconosciuta fin dalle prime fasi di sviluppo di puro tipo morfologico

(1) R. SAVELLI, *Ulteriori notizie sulla pretesa efficacia del polline di « Verbascum » come catalizzatore fecondativo.* « Bull. Soc. Bot. It., febbraio 1926, pp. 43-57.

Digitized by Google

della *N. rustica*, var. *Brasilia*, forma « Erbasanta » ; ma che in confronto della « Erbasanta » madre rivelò sin dalle prime fasi uno sviluppo insolitamente rigoglioso, tanto che quando aprì il primo fiore aveva cm. 109 di altezza benchè crescesse in un vaso piccolo mentre una pianta normale della stessa età aveva raggiunto appena gli 80 cm. La differenza si accentuò dopo l'antesi del primo fiore ed il rigoglio della pianta si manifestò anche con una maggiore e più precoce tendenza alla formazione di germogli ascellari che, del resto, potrebbe essere anche soltanto un fatto correlativo dipendente dal fenomeno più importante: la *sterilità* della pianta. È probabile infatti che questa, non producendo frutti, impieghi più presto gli assimilati a vantaggio dello sviluppo degli assi laterali. Ma un'altra diffferenza negli organi vegetativi, che presentandosi già nella pianta giovanissima, non può essere un effetto secondario della sterilità, sta nella maggiore ampiezza delle foglie che appaiono anche di un verde un po' più chiaro e di un tessuto più sottile, più floscio del normale: in complesso quello che i pratici chiamerebbero una maggiore « gentilezza » della foglia. Queste sono appunto *variazioni* rispetto alla « Erbasanta » di partenza; ma in esse, anche attraverso analisi biometriche, io non trovo tuttavia alcun indizio di caratteri *Tabacum*. Tenendo conto dei soli attributi morfologici, la pianta ha puri caratteri di *rustica*; e per una prova *ad abundantiam* io dirò che anche nei suoi caratteri teratologici essa presentava tutto il quadro della « Erbasanta ». Per questa forma difatti il presentare anomalie fiorali è condizione abituale: non c'è individuo che non ne produca, talvolta in proporzione del 20 %. Io feci passare sotto i miei occhi, nel 1916, molte decine di migliaia di fiori di *rustica* e ne esaminai partitamente ben 20.000 anomali: credo perciò di possedere ben chiaro e facilmente riconoscibile il quadro teratologico di questa specie, che coincideva appieno con quello della pianta in questione. La quale, dunque, benchè sterile, appariva come una vera *rustica*, persino nelle sue anomalie.

Il polline della pianta era assolutamente fatuo, incapace di fecondare; come conseguenza della sterilità, la pianta produsse un numero prodigioso di fiori prontamente cadenti.

Verso la fine dell'estate, non avendo ormai più speranza di autofecondazione, portai la pianta vicino ad un folto gruppo di *N. rustica* normale, il cui polline veniva attivamente portato dai pronubi sui fiori della pianta in esame. Cominciò allora un cenno di ingrossamento in alcune cassule che per lo più rimanevano grinzose, vuote, e cadevano forse perchè il polline piuttosto che trovarvi ovuli fecondabili, esercitava uno stimolo puramente vegetativo. Finalmente da alcune piccole cassule giunte a maturanza si ottennero 24 semi di buon aspetto.

Allora si procedette col massimo rigore a fecondazioni artificiali in condizioni di isolamento. Attecchirono solo quelle fatte con polline di *rustica* e non quelle fatte con polline di *Tabacum*. Da due frutti raccolti il 18 ottobre 1921, si ebbero 7 semi di buon aspetto.

Digitized by Google

I 24 semi avuti da fecondazione libera, posti in germinatoio, non dettero segni di vitalità; al 56° giorno non parendo di poterne più sperare alcuna germinazione fu proceduto allo studio del contenuto: 14 contengono embrione ed endosperma, 5 il solo endosperma variamente sviluppato, 5 sono vuoti, cioè costituiti dal solo tegumento.

I 7 semi avuti da fecondazione artificiale erano tutti embrionati, e se si riflette che maturarono a metà di ottobre, vi si può vedere una conferma del fatto più volte asserito che le attitudini genetiche migliorano in fine stagione. Dei 7 embrioni, tuttavia, solo 5 dettero piantine vitali.

Le coltivai a Bari nel 1922. Queste 5 piante, a cui potrebbe attribuirsi la formula empirica (*N. rustica* × *N. Tabacum*) ♀ × *N. rustica* ♂, ma nella cui genesi forse il « sangue » di *N. Tabacum* non è entrato affatto, erano tutti e 5 di schietto tipo « Erbasanta », fertilissime, senza più ricordo della variazione e della sterilità della madre. Ho seguito sino al 1925 le loro separate discendenze in gran numero di individui senza scoprirvi altro che *N. rustica* purissima e, come di norma, fertilissima anche all'autofecondazione.

Che cosa era dunque la pianta sterile e rigogliosa ottenuta nel 1921 da *N. rustica* impollinata con *N. Tabacum*?

Non era certo un prodotto di *embrionia nucellare*, chè in questo caso non avrebbe potuto essere sterile (totalmente dal lato maschile e parzialmente dal lato femminile), nè presentare variazioni.

Non pare che possa essere un vero ibrido con *N. Tabacum*, nonostante l'aspetto di eterosi, poichè il reincrocio (sia pure con *N. rustica*) avrebbe dovuto rivelare per disgiunzione i caratteri di *N. Tabacum*.

Può dirsi un *falso ibrido*; ma questa è poco più di una parola vuota, se non si analizza l'eterogeneo contenuto che questa parola può includere.

Può essere un caso di *apogamia parziale*? Ma allora perchè queste forme sterili non compaiono nelle condizioni ordinarie di riproduzione? La *N. rustica* è di una sessualità così efficiente che, allevata in stirpe pura, ogni pianta appare completamente autofertile con ovuli e granelli pollinici i quali tutti hanno la potenzialità di fecondare e di lasciarsi fecondare producendo individui sempre uguali fra loro e sempre indefinitamente autofertili. Inoltre questi *falsi ibridi* non appaiono mai in ibridazioni facili, ma solo in quelle che stentano ad attecchire e producono pochissimi ibridi sterili; pare dunque di poter pensare che i falsi ibridi possano formarsi solo in ovarii che vengano a trovarsi in specialissima condizione [1].

Se poi questa pianta fosse derivata da una oosfera o da altra cellula di un gametofito diploide, non si vede perchè avrebbe dovuto essere sterile. È vero bensì che in molte piante apogame si verificano degenerazioni delle

(1) Vedasi R. SAVELLI, *Intorno all'uso di « polline coadiuvante » per favorire l'ottenimento di ibridi tra forme poco affini*, « Nuovo Giorn. Bot. It. », vol. XXXIII, pp. 470-489.

Digitized by Google

cellule germinali; ma questo avviene quando l'apogamia trova ragione in una precedente origine ibrida della pianta apogama: qui invece l'apogamia - se di apogamia si tratta - sorge *ex novo* in una pianta pura e fertilissima com'è la « Erbasanta ».

E allora torna spontanea alla mente quella ipotesi secondo cui anche nelle piante, come in certi animali, potrebbe avvenire fecondazione per opera di spermi di specie lontana, e poi nel corso delle divisioni ontogenetiche il nucleo si libererebbe più o meno presto dei cromosomi paterni, sicchè in definitiva si ottiene un prodotto a puri caratteri materni. Tale ipotesi non ha ancora trovato chiaro appoggio di fatti nelle piante; ma può dirsi per questo inverosimile?

In passato si era pur detto che *Chara crinita* era il solo esempio di vera partenogenesi aploide esistente nelle piante superiori; poi in un secondo tempo si è visto che questo era un errore e si è detto che partenogenesi aploide nelle piante superiori non esiste; ma recentemente questo concetto rientra, e proprio attraverso le Solanacee, se devono credersi attendibili le ricerche di Blakeslee e Belling su *Datura* e quelle di Clausen e Mann proprio su *Nicotiana*: e così si vede quanto facilmente l'errore di ieri possa diventare la verità di domani.

Circa la genesi di questa mia pianta sterile di *Nicotiana rustica* (la cui discendenza attraverso fecondazione con la forma normale si è poi manifestata completamente pura) le due eventualità più probabili mi sembrano doversi trovare o in qualche fatto di *gamolisi* o in qualche fatto di partenogenesi vera. Certo è molto probabile che negli ovarii della *Nicotiana rustica* di partenza, al momento della loro impollinazione con *N. Tabacum*, tutti i gametofiti presentassero un numero di cromosomi già normalmente ridotto.

Biologia. — *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina.* Nota di D. Cattaneo, pres. dal Socio A. Perroncito.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente senatore GARBASSO comunica all'Assemblea la morte di Sir GIORGIO GREENHILL Socio straniero fin dal 2 agosto 1898. Ricorda che egli fu per oltre 30 anni professore al Collegio di artiglieria di Woolwich e si rivelò conoscitore profondo dell'Analisi e in particolare della teoria delle funzioni ellittiche. Egli coltivava la matematica più che per sè stessa, in vista delle applicazioni. Portò contributi essenziali alla dinamica, all'idrostatica e alle sue varie applicazioni e alla balistica. La sua opera scientifica fu molto apprezzata e anche altre Accademie, tra le quali l'Accademia delle Scienze di Parigi, lo ebbero Socio.

Il Presidente GARBASSO, prima di dar la parola al Socio SOMIGLIANA per la commemorazione di C. NEUMANN, annuncia all'Assemblea che l'Accademia ha subìto recentemente una gravissima perdita nella persona del Socio LUIGI LUZZATTI.

S'inchina alla memoria dell'insigne maestro scomparso e ricorda che egli fu oltre tutto grande patriotta e buon italiano.

Il Socio PATERNÒ a nome dell'Assemblea si associa alle parole del Presidente.

Il Socio SOMIGLIANA commemora con elevate ed acconce parole il defunto Socio Straniero C. NEUMANN.

Il Presidente GARBASSO ringrazia il Socio SOMIGLIANA per la bella commemorazione fatta.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio SOMIGLIANA presenta all'Accademia il quarto volume dell'edizione nazionale delle « Opere » di A. Volta ed annuncia il prossimo compimento anche dei volumi quinto e sesto.

Il Socio PERRONCITO fa omaggio all'Accademia del suo volume « Rigenerazione e Trapianti » che fa parte del Trattato di Anatomia patologica pubblicato a cura del prof. P. Foà.

Il Segretario Accademico prof. CASTELNUOVO presenta le opere giunte in dono segnalando le « Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Pavia negli anni 1924-25, 1925-26 » e il supplemento al volume XXIV dell'« Archivio di Fisiologia » diretto dai Soci G. FANO e S. BAGLIONI.

Digitized by Google

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio LOMBARDI, anche a nome del Socio sen. CORBINO, legge la relazione sulla Memoria dell'ing. A. MARINO dal titolo « Teoria della propagazione delle oscillazioni elettriche in un sistema di due linee parallele, a costanti uniformemente distribuite » e ne propone la pubblicazione negli Atti Accademici.

L'Assemblea approva.

L'Accademico Segretario aggiunto prof. PARRAVANO legge la relazione dei Soci SILVESTRI e A. RUFFINI con la quale si propone la pubblicazione negli Atti Accademici della Memoria del prof. BRUNO MONTEROSSO « Su di un particolare strato cellulare esistente attorno al mesointestino dei Balanidi ».

L'Assemblea approva.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Accademico CASTELNUOVO comunica che al concorso per il premio del Ministero della Marina scaduto il 31 dicembre 1926 ha presentato domanda di ammissione il prof. O. GILIBERTO.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente sen. GARBASSO presenta all'Assemblea un plico suggellato dei proff. Alessandro Marcucci e Giuseppe Tarulli, pervenuto alla Segreteria il 15 marzo 1927, che verrà conservato negli archivi dell'Accademia.

Digitized by Google

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 aprile 1927

Achmatov A. S. — Eine experimentelle Untersuchung der Dunkeladaptationsgleichungen. (Sonderabd. aus « Pflügers Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere ». Band. 215, pp. 10-18). Berlin, 1926. 8°.

Amadori L. — L'azione dell' jodio metallico sulle piante. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali. Processi verbali ». Vol. XXXV). Pisa, 1926. 8°, pp. 1-5.

Amadori L. — Una specie nuova di Rhizopus. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Volume XXXVII). Pisa, 1927. 8°, pp. 1-5.

Archivio di Fisiologia. Supplemento al Volume XXIV. Firenze, 1926. 8°, pp. 601-751.

Baryscheva E. — Ueber die Synthese der Geschmacksempfindungen. (Sonderabd. aus « Pflügers Archiv f. d. ges. Physiol.» Band 215, pp. 103-109. Berlin, 1926. 8°.

Belikov P. N. — Experimentelle Bestimmung der « Absorption » der Schallwellen in einem Medium, welches mit Resonatoren gefüllt ist. (Sonderabd. aus « Zeitschrift für Physik.». Band. 39, pp. 233-240). Berlin, 1926. 8°.

Belikoff P. N. — Ueber die Gültigkeit des Talbotschen Gesetzes für das Gehör. (Sonderabd. aus « Pflügers Archiv f. d. ges. Physiol ». Bd. 209, pp. 537-539). Berlin, 1925. 8°.

Belikoff P. N. — Ueber die Wirkung Kurzer Töne auf das Ohr. (Sonderabd. aus « Pflüger Archiv f. d. ges. Physiol. » Bd. 209, pp. 540-541). Berlin, 1925, 8°.

Bezzi M. — Sulla distribuzione geografica della mosca delle ciliege. (*Rhagoletis cerasi L.*, Dipt.) (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Portici. Vol. XX). Portici, 1927. 8°.

Bezzi M. — Un nuovo Micradon (Dipt.) della Cina. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XX). Portici, 1927. 8°, pp. 1-4.

Borri C. — Nuove osservazioni sul comportamento della vite selvatica maremmana in rapporto all'infezione fillosserica. (Estr. dai « Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXVI). Pisa, 1927. 8°, pp. 1-12.

Catania V. — Contributo alla conoscenza dei neuroblastomi del simpatico. (Estr. da « Lo Sperimentale ». Anno LXXX, pp. 491-511). Siena, 1926. 8°.

Cuscianna N. — Note morfologiche e biologiche sulla *Simaethis Nemorana* Hb. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XX, pp. 17-34). Portici, 1927. 8°.

Facciola L. — Contributo all'interpretazione del passaggio dell'occhio del lato cieco sul lato oculato nei Pleuronettidi. (Estr. dal « Bollettino della Società Zoologica Italiana ». Vol. I, fasc. III e IV). S. l. 1920. 8°, pp. 1-23.

Ferrari C. — Sollecitazioni nella struttura di un aeromobile per una improvvisa

Digitized by Google

variazione di carico. (Estr. da « l'Aerotecnica ». Anno VI, N. 5). Pisa, 1926. 8°, pp. 1-19.

FISHER J. W. — The Apparition Dates of the Andromede (or Bielid) Meteor Swarms. (Reprint. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XII, pp. 728-734). Washington, 1926. 8°.

GOLGI C. — Commemoration of Camillo Golgi : thirty Days after his Death. by Prof. Antonio Pensa. (Reprint. from the « Journal of the American Association for Medico-Physical Research ». Vol. IV, pp. 187-195). London, 1927. 8°.

LASAREFF P. — Die Anomalie des Erdmagnetismes und der Gravitation in Kursker Gouvernement (Sonderabd. aus « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Bd. XV, pp. 71-80), Leipzig, 1926. 8°.

LASAREFF P. — Die Theorie der Erscheinungen des Flimmerns beim Dunkelsehen. (Sonderabd. aus « Pflügers Archiv für die ges. Physiologie des Menschen und der Tiere ». Band 196, pp. 177-184). Berlin. 1922. 8°.

LASAREFF P. — Die Wahl der Punkte für die Bohrungsarbeiten. (Sonderabd. aus « Gerlands Beiträge zur Geophysik. Band. XV, pp. 91-102). Berlin, 1924. 8°.

LASAREFF P. — Sur la fonction périodique des centres nerveux et sur les ondes électromagnétiques, qui accompagnent la fonction nerveuse. (Extr. de « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Russie »). Leningrad, 1923, fol.

LASAREFF P. — Sur la loi d'équivalence photochimique. (Extr. du « Journal de Chimie Physique ». Tome XXIII, pp. 515-520). Paris, 1926. 8°.

LASAREFF P. — La loi « tout ou rien » appliquée aux fonctions des cellules excitables et les conséquences de cette loi. (Extr. de « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Russie »). Leningrad, 1925, fol.

LASAREFF P. — Sur la loi « tout ou rien » appliquée aux nerfs optiques. (Extr. de « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Russie », 1916, pp. 47-48). Leningrad, 1926, fol.

LASAREFF P. — Sur la loi « tout ou rien » appliquée aux nerfs optiques et sur la formule de Fechner Helmholtz. (Extr. de « Comptes Rendus de l'Académie de Sciences de Russie » 1924, pp. 179-182). Leningrad, 1924, fol.

LASAREFF P. — Sur une cause de changement des climats du globe aux époques géologiques. (Extr. de « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'Urss. », 1926, pp. 219-220). Leningrad, 1926, fol.

LASAREFF P. — Sur une généralisation de la loi de Weber-Fechner. (Extr. de « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Russie », 1925, pp. 8-9). Leningrad. 1925, fol.

LASAREFF P. — Sur une théorie de l'achromatisme de l'œil. (Extr. de « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'Urss. », 1926, pp. 207-208). Leningrad, 1926, fol.

LASAREFF P. — The General Theory of the Sensation of Flickers in Peripheral and Central Vision. (From the « Philosophical Magazine ». Vol. II, pp. 1169-1183). Moscow, 1926, 8°.

LASAREFF P. — Ueber die Empfindung der Leichtintensität beim peripheren Sehen auf Grund der Ionentheorie. (Sonderabd. aus « Pflügers Archiv f. d. ges. Physiol. », Band. 199, pp. 290-291). Berlin, 1923, fol.

LASAREFF P. — Ueber die Gesetze der Verschmelzung der Empfindungen des Flimmerns beim Dunkel und Hellsehen. (Sonderabd. aus « Pflügers Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere ». Band. 214, pp. 440-448). Berlin, 1926, 8°.

LASAREFF P. — Ueber das Nichtermüden der Augenzentren beim Dunkelsehen während der Adaptation. (Sonderabd. « Pflüger Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere ». Band. 200, pp. 119-123). Berlin, 1923, 8°.

Digitized by Google

LASAREFF P. — Ueber die Theorie der Dunkeladaptation bei der starken Vorbelicktung. (Sonderabd. aus « Pflügers Archiv für die Gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere ». Band 213, pp. 256-261). Berlin, 1926, 8°.

LASAREFF P. — Ueber die Theorie der Nachbilder beim Farbenschen. (Sonderabd. aus « Pflüger Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere ». Band 201, pp. 333-338). Berlin, 1923, 8°.

PARODI U. — Il problema del cancro. (Estr. da « l'Osservatore Medico ». Anno IV, n. 2). Catania, 1926, 8°, pp. 1-24.

PARODI U. — La struttura del nodulo linfatico e del suo follicolo secondario nell'anello di Waldeyer e nell'appendice vermiforme dell'uomo. (Estr. dal « Bollettino della Società di Biologia sperimentale ». Vol. I, fasc. III). Catania, 1926, 8°, pp. 1-4.

PARODI U. — Rapporti tra tumori e traumi. Conferenza. (Estr. da « l'Osservatore Medico ». Anno III). Catania, 1925, 8°, pp. 1-22.

PARODI U. — Sul potere anticomplementare del siero di sangue dell'uomo. (Estr. dal « Bollettino della Società di Biologia sperimentale ». Vol. I, fasc. I-II). Catania, 1926, 8°, pp. 1-4.

PARODI U. — Sulla morfologia e sulla interpretazione dei reperti morfologici del nodulo linfatico lienale nell'uomo. (Estr. da « Haematologica ». Vol. VIII). Pavia, 1927, 8°, pp. 1-45.

PARODI U. — Sulle modalità di reazione allo stimolo oncogeno del catrame di due zone di tegumento successivamente trattate. (Estr. dal « Bollettino della Società di Biologia Sperimentale ». Vol. I, fasc. III. Catania, 1926. 8°, pp. 1-8.

PARODI U. e RICCA S. — Contributo alla conoscenza della atrofia olivopontocerebellare. (Estr. dalla « Rivista di Patologia nervosa e mentale ». Vol. XXX, fasc. IV). Siena, 1925. 8°, pp. 1-33.

PARODI U. e RICCA S. — Contributo alla conoscenza della encefalite pariossile diffusa di Schilder. (Estr. dalla « Rivista di Patologia nervosa e mentale ». Vol. XXXI, pp. 588-614). Siena, 1926. 8°.

PAYNE H. C. — On the Spectra of Stars of Class c F. 8. (Reprint. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XII, pp. 722-728). Washington, 1926. 8°.

PAYNE H. C. — Some Applications of the Ionization Formula. (Reprint. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XII, pp. 712-717). Washington, 1926. 8°.

PERRONCITO A. — Rigenerazione e trapianti. Torino, 1927. 8°, pp. 1-155.

POLIKARPOFF M. — Ueber die experimentelle Prüfung des Lasareff-Gesetzes der Verschmelzung der Flimmerungen beim peripherischen und zentralen Sehen in monochromatischem Lichte. (Sonderabd. aus « Pflügers Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere ». Band. 215, pp. 95-102). Berlin, 1926. 8°.

REITANO R. — Contributo alla conoscenza delle alterazioni del sistema nervoso centrale nella malaria. (Estr. dal « Policlinico ». Anno 1927. Roma, 1927. 8°, pp. 1-10.

REITANO R. — Contributo allo studio delle calcificazioni circoscritte del cervelletto. (Estr. da « l'Osservatore Medico ». Anno IV, n. 6). Catania, 1926. 8°, pp. 1-12.

RICHARDS T. W. — A Brief History of the Investigation of Internal Pressures. (Reprint. from « Chemical Reviews ». Vol. II, pp. 315-348). Washington, 1925, 8°.

RICHARDS T. W. — An Improved Differential Method for the Exact Determination of Specific Heats of Aqueous Solutions; including Results for Various Salts and Organic Acids. (Reprint. from the « Journal of the American Chemical Society ». Vol. XLVII, pp. 1876-1893). Cambridge, 1925. 8°.

RICHARDS T. W. — Atomic Weights and

Digitized by Google

Isotopes. (Reprint. from the « Chemical Reviews ». Vol. I, n. 1). S. l., 1924. 8°, pp. 1-40.

RICHARDS T. W. and HALL P. L. — Attempts to Fractionate Mixed Isotopes of Lead, and the Atomic Weight of this Metal. (Reprint. from the « Journal of the American Chemical Society ». Vol. XLVIII, pp. 1530-1543). Cambridge, 1926. 8°.

RICHARDS T. W. — Compressibility, Internal Pressure and Change of Atomic Volume. (Reprint. from the « Journal of the Franklin Institute », 1924). S. l., 1924. 8°, pp. 1-27.

RICHARDS T. W. — Further Evidence concerning the Magnitude of Internal Pressures, especially that of Mercury. (Reprint. from the « Journal of the American Chemical Society. Vol. XLVIII, pp. 3063-3080). Cambridge, 1926. 8o.

RICHARDS T. W. — Internal Pressures produced by Chemical Affinity. (Reprint. from the « Journal of the American Chemical Society ». Vol. XLVII, pp. 731-742). Cambridge, 1925. 8°.

RICHARDS T. W, — The Determination of Surface Tension with Very Small Volumes of Liquid, and the Surface Tensions of Octanes and Xylenes at Several Temperatures. (Reprint. from the « Journal of the American Chemical Society ». Vol, XLVI, pp. 1196-1207). Cambridge, 1924. 8°.

RICHARDS T. W. — The Internal Pressures of Solids. (Reprint. from the « Journal of the American Chemical Society ». Vol. XLVI, pp. 1419-1436). Cambridge, 1924. 8°.

RICHARDS T. W. and CHADVELL M. H. — The Densities and Compressibilities of Several Organic Liquids and Solutions, and the Polymerization of Water. (Reprint. from the « Journal of the American Chemical Society ». Vol. XLVII, pp. 2283-2302). Cambridge, 1925. 8°.

RICHARDS T. W. and HALL P. L. — The Atomic Weight of Uranium Lead and the Age of an expecially Ancient Uraninite. (Reprint. from the « Journal of the American Chemical Society ». Volume XLVIII, pp. 704-708). Cambridge, 1925. 8°.

RICHARDS T. W. and SAERENS E. — The Compressibilities of the Chlorides, Bromides and Iodides of Lithium, Rubidium and Cesium. (Reprint. from the « Journal of the American Chemical Society ». Vol. XLVI, pp. 934-952). Cambridge, 1924. 8°.

SCHLESINGER M. — Studien über elektrodenloses Wasserstoffleuchten. (Sonderabdt. aus « Zeitschrift für Physik ». Band 39, pp. 214-225). Berlin, 1926. 8°.

SILVESTRI F. — Thysanoures recueillis par M. Henri Gadeau de Kerville pendant son voyage zoologique en Syrie. (Extr. du « Voyage Zoologique d'Henri Gadeau de Kerville en Syrie ». 1908. pp. 267-274). Rouen, 1926. 8°.

STEKLOFF M. W. A. — Necrologie par P. Lasareff. (Sonderabd. aus « Gerlands Beiträge zur Geophysik ». Band XV, pp. 531-533). Leipzig, 1926. 8°.

G. C.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

SBORGI U. – Sul comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose (presentata dal Socio *R. Nasini*) . . . . . Pag. 511
NATTA G. – Sulla struttura cristallina dei cloruri di metalli trivalenti (pres. dal Socio *G. Bruni*) 512
BIGIAVI D. – Azione dell'acido peracetico sopra gli acetilderivati delle ammine aromatiche (pres. dal Socio *A. Angeli*) . . . . . »
ALOISI P. – Determinazione approssimativa di 2V nelle sezioni sottili dei minerali (pres. dal Corrisp. *G. D'Achiardi*) . . . . . »
SAVELLI R. – Sul valore genetico dei prodotti di «Nicotiana rustica» ∞ «Nicotiana Tabacum» (pres. dal Socio *B. Longo*) . . . . . »
CATTANEO D. – Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina (pres. dal Socio *A. Perroncito*) 518

PERSONALE ACCADEMICO

GARBASSO A. (Presidente) – Comunica all'Assemblea la morte del Socio Straniero Sir GIORGIO GREENHILL 525
ID. – Annunzia la morte del Socio Nazionale L. LUZZATTI, ricordando brevemente l'illustre estinto . . . . . »
PATERNÒ E. – Si associa alle parole del Presidente . . . . . »
SOMIGLIANA C. – Commemora il Socio Straniero C. NEUMANN . . . . . »
GARBASSO A. (Presidente) – Ringrazia il Socio Somigliana per la commemorazione fatta . . . . . »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

SOMIGLIANA C. – Presenta il quarto volume delle «Opere» di A. Volta . . . . »
PERRONCITO A. – Fa omaggio del suo volume «Rigenerazioni e Trapianti» . . . »
CASTELNUOVO G. (Segretario) – Presenta le opere giunte in dono all'Accademia segnalando le «Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Pavia negli anni 1924-25, 1925-26»; e il supplemento al vol. XXIV dell'«Archivio di Fisiologia» . . . . . »

RELAZIONI DI COMMISSIONI

LOMBARDI L. (Relatore) – A nome anche del Socio O. M. CORBINO, riferisce favorevolmente per l'inserzione negli «Atti Accademici» della Memoria di A. MARINO, «Teoria della propagazione delle oscillazioni elettriche in un sistema di due linee parallele a costanti uniformemente distribuite» 526
PARRAVANO N. (Segretario aggiunto) – Legge la Relazione dei Soci F. SILVESTRI e A. RUFFINI, favorevole all'inserzione negli «Atti Accademici» della Memoria di B. MONTEROSSO, «Su di un particolare strato cellulare esistente attorno al mesointestino dei Balanidi» . . . . . »

CONCORSI A PREMI

CASTELNUOVO G. (Segretario) – Comunica la domanda di ammissione del prof. O. GILIBERTO al concorso per il Premio del Ministero della Marina, scaduto il 31 dicembre 1926 . . . . . »

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

GARBASSO A. (Presidente) – Presenta un plico suggellato dei sigg. A. MARCUCCI e G. TARULLI. . . . . »

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 aprile 1927 527

Digitized by Google

RENDICONTI - Aprile 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1927 (Anno V)

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

VOLTERRA V. – Sulla periodicità delle fluttuazioni biologiche . . . . . Pag. 465
SEVERI F. – Riflessioni sull'area di una superficie curva 471
ID. – Ancora sull'area di una superficie curva 475
TONELLI L. – Una proprietà delle funzioni integrali 480
LO SURDO A. – Sulle caratteristiche dei triodi a tensioni di griglia saturanti . . »
ROLLA L. e PICCARDI G. – Sul potenziale di elettroaffinità dell'anidride molibdica . »
NASINI R. e PORLEZZA C. – Determinazione della concentrazione in idrogenioni attivi in acque minerali italiane . . . . . »
ID. – Azioni catalitiche nelle acque minerali. Reazione della benzidina in acque minerali italiane . . . . . »
FRANCHI S. – Sulle conclusioni di una mia Memoria . . . . . »

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

ALBANESE G. – Sul teorema fondamentale della base per la totalità delle curve d'una superficie algebrica (pres. dal Socio *F. Severi*) 481
DUBOURDIEU J. – Sur les groupes d'holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions (cas d'un ds^2 défini et positif) (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 488
ANDREOLI G. – Sulla curvatura e sul parallelismo in una superficie (pres. dal Socio *R. Marcolongo*) 491
FANTAPPIÈ C. – I funzionali analitici delle funzioni di due variabili complesse (presentata dal Socio *F. Severi*) 495
CHERUBINO S. – Sulle integrali superficiali delle forme differenziali quadratiche (presentata dal Socio *G. Scorza*) 499
MUSCHELISVILI N. – Sur les orbites périodiques et les lignes géodèsiques fermées (pres. dal Corrisp. *L. Tonelli*) . . . . . »
ONICESCU O. – Scostamento geodetico, stabilità e problema di Whittaker (presentata dal Socio *T. Levi-Civita*) . . . . . »
CALAPSO R. – Intorno a una trasformazione delle congruenze rettilinee W (presentata dal Corrisp. *G. Fubini*) . . . . . »
CRUDELI U. – Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto a un asse (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 500
ID. – Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali (pres. *Id.*) 505
ARMELLINI-CONTI G. – Del confronto dei cataloghi calorimetrici di Hagen, Sestini, Osthoff e Kruger (pres. dal Socio *A. Di Legge*) . . . . . »
PAGLIARULO M. L. – Sulla dispersione rifrattiva e rotatoria naturale delle soluzioni acquose di aspartato monoetilico (pres. dal Socio *M. Cantone*) . . . . . »
FERMI E. e RASETTI F. – Una misura del rapporto h/k per mezzo della dispersione anomala del Tallio (pres. dal Socio *O. M. Corbino*) 510
MALQUORI G. – Il sistema $AlCl_3 - KCl - H_2O$ a 25° (presentata dal Socio *N. Parravano*) . . . . . »
FONTANA C. – Sulla identità di struttura cristallina dei composti Fe_3S_4 e FeS (presentata dal Socio *G. Bruni*) 511

(*Segue in terza pagina*).

Digitized by Google

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 24 aprile 1927 (anno V).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Una proprietà delle funzioni integrabili.* Nota [1] del Socio Corrisp. L. TONELLI.

Intendendo di considerare l'integrabilità nel senso del Lebesgue, mi propongo di dimostrare la seguente proprietà delle funzioni integrabili:

Se $f(x)$ è una funzione integrabile nell'intervallo (a, b), la funzione

$$\frac{f(x)}{|x_1 - x|^\alpha} \tag{1}$$

è integrabile, rispetto ad x in (a, b), per quasi tutti i valori di x_1 e per tutti i numeri α tali che sia $0 < \alpha < 1$.

Questa proposizione è evidente se la $f(x)$ è limitata oppure se ha soltanto un numero finito di punti di infinito; non lo è, invece, nel caso generale, nel quale la $f(x)$ può risultare illimitata nell'intorno di ciascun punto di (a, b). Poichè basta dimostrare la proposizione enunciata per il modulo della funzione (1), potremo, nella nostra dimostrazione, supporre senz'altro che sia sempre, in (a, b), $f(x) \geqq 0$.

Consideriamo un valore di α soddisfacente alla condizione $0 < \alpha < 1$, e cominciamo col provare che, per tale valore di α, la (1) è integrabile per quasi tutti gli x_1.

È evidente l'integrabilità della (1) per valori di x_1 esterni all'intervallo (a, b), perchè per essi la funzione $|x_1 - x|^{-\alpha}$ si mantiene limitata in (a, b). Restano perciò da considerare soltanto i valori di x_1 compresi in (a, b). Posto

$$F(y) = \int_a^y f(x)\, dx,$$

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1927.

Digitized by Google

la funzione, di y, $F(y):(b-y)^\alpha$ è certamente integrabile in (a,b), perchè $F(y)$ è continua e quindi limitata. Esiste dunque finito l'integrale

$$\int_a^b \frac{F(y)}{(b-y)^\alpha}\,dy = \int_a^b \frac{dy}{(b-y)^\alpha}\int_a^y f(x)\,dx\,;$$

e siccome qui può invertirsi l'ordine delle integrazioni, in virtù di una proposizione da me data altrove [1] e per aver supposto, come si è detto, $f(x) \geqq 0$, si ha

$$\int_a^b \frac{F(y)}{(b-y)^\alpha}\,dy = \int_a^b f(x)\,dx \int_x^b \frac{dy}{(b-y)^\alpha}\,.$$

Ma è, evidentemente,

$$\int_x^b \frac{dy}{(b-y)^\alpha} = \int_x^b \frac{dx_1}{(x_1-x)^\alpha}\,,$$

e perciò

$$\int_a^b \frac{F(y)}{(b-y)^\alpha}\,dy = \int_a^b f(x)\,dx \int_x^b \frac{dx_1}{(x_1-x)^\alpha}\,,$$

ed anche, sempre per la proposizione sopra ricordata,

$$\int_a^b \frac{F(y)}{(b-y)^\alpha}\,dy = \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} \frac{f(x)}{(x_1-x)^\alpha}\,dx\,.$$

Da ciò segue che l'integrale

$$\int_a^{x_1} \frac{f(x)}{(x_1-x)^\alpha}\,dx$$

esiste finito per quasi tutti i valori di x_1 di (a,b).

Ponendo ora

$$F_1(y) = \int_y^b f(x)\,dx\,,$$

e ragionando in modo analogo a quanto abbiamo fatto or ora, otteniamo

$$\int_a^b \frac{F_1(y)}{(y-a)^\alpha}\,dy = \int_a^b \frac{dy}{(y-a)^\alpha}\int_y^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \int_a^x \frac{dy}{(y-a)^\alpha}\,,$$

e, per essere

$$\int_a^x \frac{dy}{(y-a)^\alpha} = \int_a^x \frac{dx_1}{(x-x_1)^\alpha}\,,$$

$$\int_a^b \frac{F_1(y)}{(y_0-a)^\alpha}\,dy = \int_a^b f(x)\,dx \int_a^x \frac{dx_1}{(x-x_1)^\alpha} = \int_a^b dx_1 \int_{x_1}^b \frac{f(x)}{(x-x_1)^\alpha}\,dx\,,$$

(1) Questi « Rendiconti ». vol. XVIII (1909), p. 246.

Digitized by Google

donde segue che l'integrale

$$\int_{x_1}^{b} \frac{f(x)}{(x - x_1)^{\alpha}}\, dx$$

esiste finito per quasi tutti i valori di x_1 di (a, b). Dunque, per quasi tutti gli x_1 di (a, b), esistono insieme, finiti, gli integrali

$$\int_{a}^{x_1} \frac{f(x)}{|x_1 - x|^{\alpha}}\, dx \quad , \quad \int_{x_1}^{b} \frac{f(x)}{|x_1 - x|^{\alpha}}\, dx ,$$

e quindi anche l'integrale, somma di questi due,

$$\int_{a}^{b} \frac{f(x)}{|x_1 - x|^{\alpha}}\, dx .$$

Così è dimostrato che, *per il valore* α *considerato*, la funzione (1) è integrabile rispetto ad x in (a, b), per quasi tutti gli x_1.

Dobbiamo ora considerare l'integrabilità della funzione (1) indipendentemente dal valore di α. A tal fine, per ogni numero intero positivo n, indichiamo con E_n l'insieme dei punti x_1 di (a, b) per i quali la funzione

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{|x_1 - x|^{1 - \frac{1}{n}}}$$

non è integrabile, rispetto ad x, in tutto (a, b). Per quanto abbiamo già dimostrato, E_n è un insieme di misura nulla, e se indichiamo con E l'insieme somma di tutti gli E_n, per $n = 1, 2, \cdots$, anche E risulta di misura nulla. Ora è facile vedere che la funzione (1), qualunque sia α, purchè soddisfacente alla condizione $0 < \alpha < 1$, è integrabile rispetto ad x in tutto (a, b), per tutti gli x_1 non appartenenti ad E. Ed infatti, considerato uno dei valori α ora indicati, scegliamo un intero positivo n tale che sia $\alpha < 1 - \frac{1}{n}$. Allora, se x_1 non appartiene ad E e quindi neppure ad E_n (che è contenuto in E), la funzione (2) è integrabile in (a, b), rispetto ad x, ed è perciò integrabile anche

$$f(x) \left| \frac{b - a}{x_1 - x} \right|^{1 - \frac{1}{n}} = \frac{f(x)}{|x_1 - x|^{1 - \frac{1}{n}}} (b - a)^{1 - \frac{1}{n}} .$$

Ma, per x_1 e x in (a, b) (escluso $x = x_1$), è $\left| \frac{b - a}{x_1 - x} \right| \geqq 1$, e quindi, essendo $\alpha < 1 - \frac{1}{n}$,

$$\left| \frac{b - a}{x_1 - x} \right|^{\alpha} \leqq \left| \frac{b - a}{x_1 - x} \right|^{1 - \frac{1}{n}} .$$

Digitized by Google

Dunque, se x_1 non appartiene ad E, risulta integrabile rispetto ad x la funzione $f(x)\left|\frac{b-a}{x_1-x}\right|^{\alpha}$, e quindi anche la

$$\frac{f(x)}{|x_1-x|^{\alpha}} = f(x)\left|\frac{b-a}{x_1-x}\right|^{\alpha}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\alpha}.$$

È così dimostrato quanto volevamo, e cioè che, *esclusi i valori di* x_1 *appartenenti ad un insieme* E *di misura nulla, per tutti gli altri* x_1 *la funzione* $\frac{f(x)}{|x_1-x|^{\alpha}}$ *è integrabile rispetto ad* x *in* (a, b), *qualunque sia* α, *purchè soddisfacente alla condizione* $0 < \alpha < 1$, *e ciò con la sola ipotesi che la* $f(x)$ *sia integrabile in* (a, b).

Matematica. — *Sur l'écart géodésiques et quelques notions connexes.* Nota del Socio straniero E. CARTAN.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *Sopra l'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre e sulla temperatura stellare effettiva ed apparente.* Nota[1] del Socio Corrisp. G. ARMELLINI.

1. È noto che il metodo più comodo e più usato per lo studio della temperatura delle stelle è fondato sopra la determinazione della loro intensità radiante in due differenti regioni dello spettro. E ciò può farsi sia visualmente, p. es. determinando col fotometro eterocromatico del Nordmann la grandezza stellare nel rosso e nel verde, sia con l'aiuto della fotografia misurando la grandezza fotografica di una stella e paragonandola con la sua grandezza visuale; ciò che equivale, presso a poco, a confrontare l'intensità radiante nel bleu con l'intensità radiante nel giallo.

Come si sa, questo metodo fotometrico è basato sopra l'ipotesi - sufficientemente verificata in pratica - che l'astro irradi come un « radiatore perfetto o corpo nero » dei fisici, nel qual caso indicando con I l'intensità radiante corrispondente alla lunghezza d'onda λ e con e la base dei logaritmi naturali, si ha la relazione di Planck:

$$(1) \qquad I = \frac{C}{\lambda^5\left(e^{\frac{b}{\lambda T}} - 1\right)}.$$

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

In pratica, dati i limiti dentro cui si mantiene la temperatura stellare, nel campo visuale e fotografico si può sostituire questa equazione con approssimazione generalmente più che sufficiente per i bisogni astronomici, con l'altra più semplice del Wien:

$$(2) \qquad I = \frac{C}{\lambda^5 e^{\frac{h}{\lambda T}}}$$

dove C è una costante di proporzionalità, senza interesse per noi, e dove si ha $h = 143.10^6$, misurando la temperatura assoluta T in gradi centigradi e le lunghezze d'onda λ in unità Angstrom (U. A.), cioè in diecimilionesimi di millimetro. Si comprende quindi come conoscendo il rapporto $\frac{I_1}{I_2}$ delle energie radianti corrispondenti a due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2, la (1) o la (2) permettano di ricavare T.

2. Occorre però rilevare che le intensità radianti, che l'astronomo può misurare, sono quelle che giungono al cannocchiale dopo aver attraversato l'atmosfera terrestre. Ora la nostra atmosfera esercita sulle radiazioni stellari un assorbimento che si esplica in due modi, vale a dire:

1) *Quantitativamente*, cioè diminuendo la quantità totale di energia ricevuta e rendendo quindi la stella meno luminosa (sia visualmente che fotograficamente) di quel che apparirebbe se la Terra fosse sprovvista d'atmosfera.

2) *Qualitativamente*, cioè alterando la legge di distribuzione della energia nello spettro visuale e fotografico, poichè in genere i raggi rossi e gialli sono meno assorbiti degli azzurri, e rendendo quindi inesatta la temperatura T dedotta da misure del rapporto $\frac{I_1}{I_2}$.

Per chiarezza, chiameremo la temperatura stellare, dedotta da osservazioni fotometriche necessariamente viziate dall'assorbimento atmosferico, col nome di *temperatura apparente,* la indicheremo con T′ e nella presente Nota daremo un metodo semplice e pratico per risalire da essa alla temperatura effettiva T.

3. A tale scopo sia $I(\lambda)$ l'intensità della radiazione dell'astro studiato, quale si avrebbe se la Terra non avesse atmosfera, ed $i(\lambda)$ l'intensità misurata dall'astronomo dopo che la radiazione stessa ha subito un parziale assorbimento attraverso la nostra atmosfera. Indicando con z la distanza zenitale dell'astro, al momento della osservazione e con γ una funzione di λ, avremo allora:

$$(3) \qquad i(\lambda) = I(\lambda)\, e^{-\gamma \sec z}$$

formola semplicissima, dovuta al Lambert, e che risulta pienamente confermata dall'esperienza, dallo zenit fino a circa 70° di distanza zenitale, onde sembra inutile di sostituirla con altre più complesse giacchè a nessun astro-

Digitized by Google

nomo verrebbe in mente di eseguire misure fotometriche su astri prossimi all'orizzonte, dove sono infinite le cause di errore [1].

Secondo la nota legge di Rayleygh sulla diffusione della luce, il coefficiente γ che figura in (3) dovrebbe essere inversamente proporzionale alla quarta potenza della lunghezza d'onda, ma il Wilsing ha mostrato che in pratica ciò non si verifica, forse per l'influenza del vapor acqueo contenuto nell'atmosfera terrestre. Lo stesso Wilsing [2], con accurate osservazioni fatte sopra la distribuzione di energia nello spettro solare, ha determinato sperimentalmente i valori del logaritmo decimale di $e^{-\gamma}$, ottenendo i risultati contenuti nella seguente tabella dove abbiamo posto $y = \mathrm{Log}_{10} e^{-\gamma}$

TABELLA I.

λ	y	λ	y	λ	y
4510	$\bar{1}$.810	4980	$\bar{1}$.851	6600	$\bar{1}$.916
4720	$\bar{1}$.833	5370	$\bar{1}$.869	7000	$\bar{1}$.919 (b. vap.)
4800	$\bar{1}$.836	5560	$\bar{1}$.876	7830	$\bar{1}$.942
4880	$\bar{1}$.845	5770	$\bar{1}$.873 (anorm.)	—	—

Lo stesso autore propone diverse espressioni analitiche, atte a rappresentare questi risultati di osservazione, ma a me sembra che, *nel campo visuale e fotografico* [3], ed esclusione fatta delle regioni di anormalità prossime alle bande del vapor acqueo, si possa adottare la legge semplicissima:

$$\gamma = p + \frac{q}{\lambda} \tag{4}$$

dalla quale, ponendo $p = -0.299$ e $q = 3220$, si ottiene la seguente

TABELLA II.

λ	y	λ	y	λ	y
4510	$\bar{1}$.820	4980	$\bar{1}$.849	6600	$\bar{1}$.918
4720	$\bar{1}$.834	5370	$\bar{1}$.870	7000	$\bar{1}$.930
4800	$\bar{1}$.839	5560	$\bar{1}$.879	7830	$\bar{1}$.952
4880	$\bar{1}$.843	5770	$\bar{1}$.888	—	—

(1) Cfr. MÜLLER, *Photometrie der Gestirne*, p. 110 e sgg.

(2) Cfr. J. WILSING, *Ueber die Helligkeitsverteilung in Sonnenspektrum*, «Pub. des Obs. zu Potsdam», 72.

(3) Ricordiamo che l'occhio ha la massima sensibilità per $\lambda = 5500$, e le lastre fotografiche per $\lambda = 4600$ circa.

Digitized by Google

Naturalmente però i valori numerici di p e di q, possono variare con le condizioni particolari di ubicazione, di altitudine, di umidità atmosferica media ecc. dei singoli Osservatorî astronomici. Noi ci proponiamo quindi:

1) Di dare un metodo facile con cui ogni Osservatorio astronomico possa dedurre il valore di q - che chiameremo col nome di *costante atmosferica selettiva* – per la località che esso occupa.

2) Di mostrare come una volta conosciuta la costante selettiva q, sia possibile di ridurre la temperatura stellare esaminata, passando dalla temperatura « apparente » alla « effettiva ».

Per chiarezza cominceremo dalla seconda parte.

4. Servendoci della (4) la (3) diviene

$$i = Ie^{-\left(p+\frac{q}{\lambda}\right)\sec z} \tag{5}$$

cioè, ricordando la (2),

$$i = \frac{C}{\lambda^5 e^{\frac{h}{\lambda T}+\left(p+\frac{q}{\lambda}\right)\sec z}} \tag{6}$$

onde ponendo

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} + \frac{q\sec z}{h} \tag{7}$$

$$C' = Ce^{-p\sec z} \tag{8}$$

la (5) dà infine

$$i = \frac{C'}{\lambda^5 e^{\frac{h}{\lambda T'}}} \tag{9}$$

la quale, paragonata con la (2) mostra che *la distribuzione dell'energia nello spettro, tenendo conto dell'assorbimento selettivo dell'atmosfera ha luogo come se la stella irradiasse ancora come un corpo nero ma a temperatura* T′ *differente dalla temperatura effettiva* T.

Chiamando ora con ΔT la differenza $T' - T$ e trattando per semplicità il ΔT come un differenziale, la (7) ci dà:

$$\Delta T = -\frac{q}{h} T^2 \sec z \tag{10}$$

da cui ricaviamo che *la temperatura stellare apparente è minore della temperatura effettiva, essendo la differenza tra le due temperature proporzionale alla costante selettiva atmosferica ed al quadrato della stessa temperatura effettiva.*

Così, adottando per la costante atmosferica selettiva il valore di Potsdam ($q = 3220$), per una stella a temperatura effettiva di 6000 centigradi, allo zenit, si avrebbe:

$$\Delta T = -\frac{3220}{143.10^6} 6000^2 = -810 \tag{11}$$

Digitized by Google

e cioè la temperatura misurata fotometricamente, allo zenit, riuscirebbe di circa 800 centigradi inferiore alla temperatura effettiva. Tutto ciò mostra come queste correzioni non siano trascurabili e quindi la necessità in cui si trova ogni Osservatorio astrofisico di determinare esattamente la costante selettiva della propria atmosfera. E di ciò passiamo ad occuparci.

5. Il Wilsing [1] si è servito a tale scopo della distribuzione dell'energia nello spettro solare, ma praticamente sembra assai più agevole il metodo che passiamo a suggerire.

Ricordiamo a tale scopo che l'*indice del colore* c di una stella si definisce come la differenza tra la sua grandezza fotografica e quella visuale, ponendo lo zero della graduazione in modo che risulti $c = 0$ per le stelle bianche (tipo spettrale AO); segue che c sarà positiva, nulla o negativa secondo che il colorito dell'astro sia aranciato, bianco od azzurro. Si dimostra ancora [2] che, adottando la formola (2) del Wien, l'indice del colore è legato alla temperatura effettiva dalla relazione:

$$T = \frac{a}{b + c} \tag{12}$$

dove a e b sono due costanti, onde chiamando con c' il valore apparente di c - viziato cioè dall'assorbimento atmosferico - e ponendo $\Delta c = c' - c$ si ha dalla (12) trattando il Δc come un differenziale:

$$-\frac{\Delta T}{T^2} = \frac{\Delta c}{a} \tag{13}$$

e cioè per la (10)

$$\Delta c = \frac{qa}{h} \sec z. \tag{14}$$

Ne segue che *l'indice del colore misurato è maggiore di quello reale* - e cioè l'assorbimento atmosferico sposta il colore stellare verso il rosso - e che la differenza è proporzionale alla secante della distanza zenitale dell'astro osservato e alla costante selettiva atmosferica q. In pratica, essendo a poco lontano da 10^4, l'errore commesso nella valutazione dell'indice del colore, è di circa 0.2 sec z, quantità ben sensibile ai nostri mezzi di misura.

Questa proprietà offre un mezzo assai semplice con cui ogni Specola può determinare la costante selettiva della propria atmosfera, osservando l'indice del colore di una medesima stella a due differenti distanze zenitali

(1) Cfr. WILSING, Mem. cit.

(2) Una semplice dimostrazione di questa importante relazione tra T e l'indice colorimetrico c, si ricava integrando l'equazione (III) della mia Nota *Sopra la differenza tra la grandezza visuale e la grandezza bolometrica delle stelle* (Cfr. « Rend. Lincei », 1926, II sem., fasc. 9).

Digitized by Google

(non maggiori di 70°, per la validità della (3)) ζ_1 e ζ_2. Si ha infatti dalla (14) indicando con c_1 e c_2, i due valori trovati:

$$q = \frac{h\,(c_1 - c_2)}{a\,(\sec \zeta_1 - \sec \zeta_2)}. \tag{15}$$

Ed in tal modo una volta determinato il potere selettivo della propria atmosfera, ogni Specola astrofisica sarà in grado, come abbiamo visto, di correggere le proprie osservazioni, risalendo dalle temperature stellari apparenti a quelle effettive.

Astrofisica. — *Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1926.* Nota del Socio Corrisp. G. Abetti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astrofisica. — *Sulle relazioni fra le eruzioni solari e le tempeste magnetiche terrestri.* Nota del Socio Corrisp. G. Abetti.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla corrente elettrica filtrata attraverso ad una valvola termoionica saturata.* Nota [1] del Socio Corrisp. A. Lo Surdo.

L'intensità della corrente che passa attraverso ad una valvola termoionica nella fase di saturazione, dipende dalla emissione elettronica del filamento incandescente: se la differenza di potenziale fra placca e filamento pur variando si mantiene sufficiente perchè tutti gli elettroni emessi dal filamento cadano sulla placca, e se non varia l'emissione del filamento, l'intensità della corrente che passa attraverso alla valvola deve assumere un valore costante.

La valvola termoionica può quindi servire come filtro per ottenere una corrente continua sotto l'azione di una f. e. m. variabile.

Cominciamo col supporre che in un circuito si trovi inserita una valvola termoionica la cui caratteristica sia quella generalmente conosciuta, che è rappresentata dalla fig. 1; indichiamo con i_s l'intensità della corrente di saturazione e con V_s la più piccola differenza di potenziale che produce la saturazione.

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

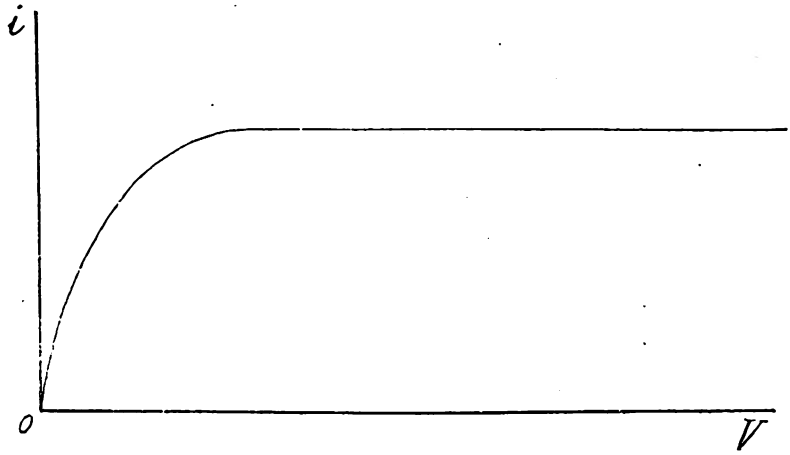


Fig. 1.

Quando nel circuito agisce una f. e. m. variabile ma unidirezionale, come quella rappresentata dalla fig. 2, la valvola si troverà sempre in saturazione se

$$E_2 \geqq V_s + i_s r \tag{1}$$

dove r indica la resistenza del circuito ed E_2 il minimo valore raggiunto dalla f. e. m. nelle pulsazioni.

E quando è soddisfatta questa condizione l'intensità della corrente deve assumere il valore costante di saturazione.

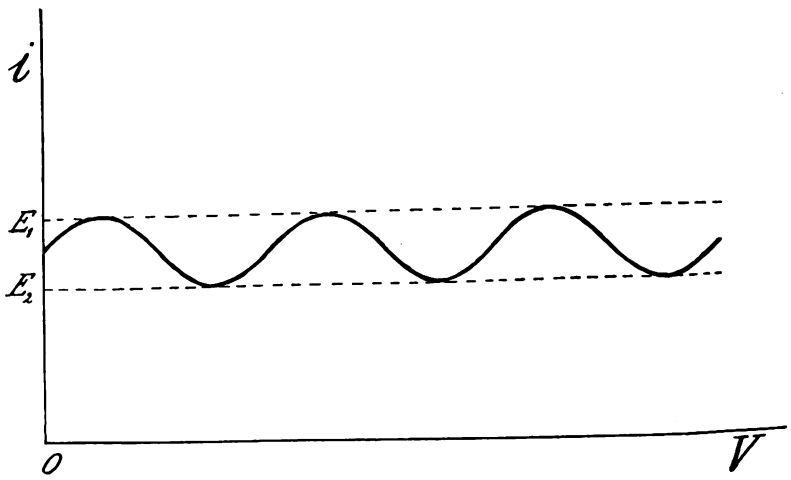


Fig. 2.

Entro i limiti imposti alla resistenza dalla relazione (1), cioè per

$$r \leqq \frac{E_2 - V_s}{i_s} \tag{2}$$

Digitized by Google

la differenza di potenziale V fra gli elettrodi della valvola, ha le stesse pulsazioni della f. e. m. che agisce nel circuito. Un aumento della resistenza del circuito utilizzatore abbassa egualmente il massimo ed il minimo della differenza di potenziale V, che sono $E_1 - i_s r$ ed $E_2 - i_s r$.

La lampada si trova nelle condizioni di minima dissipazione se

$$r = \frac{E_2 - V_s}{i_s}. \tag{3}$$

La resistenza apparente del circuito (valvola e resistenza di utilizzazione) nelle condizioni di saturazione, segue le oscillazioni della f. e. m., ed ha il valore:

$$\rho = \frac{E}{i_s} \tag{4}$$

Essa è indipendente da r ed è eguale alla resistenza apparente della sola valvola.

Applichiamo queste considerazioni al caso ordinario in cui la f. e. m. pulsante sia ottenuta mediante la nota disposizione per la rettifica delle correnti alternate a tensione elevata rappresentata nella fig. 3.

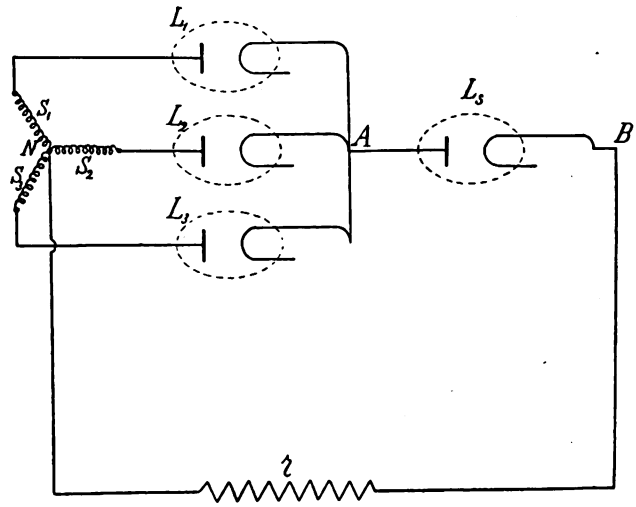


Fig. 3.

I tre secondari di un trasformatore trifase sono collegati ciascuno alla placca di una valvola termoionica; i filamenti delle tre valvole sono riuniti insieme, ed hanno un circuito di alimentazione comune (1).

(1) Queste tre valvole L_1 L_2 L_3 (fig. 3) vengono regolate in modo che la loro corrente di saturazione sia notevolmente più grande della massima intensità della corrente di utilizzazione nel circuito. Esse allora funzionano opponendo una piccola resistenza apparente pressochè costante, e sotto una tensione piccola rispetto alla f. e. m. delle fasi.

Digitized by Google

Tra il neutro N ed il punto A la f. e. m. istantanea è approssimativamente quella della fase che ha una forza elettromotrice positiva [1] e prevalente, e quindi essa risulta rappresentata dalla linea *a b c d e f g* (fig. 4) la quale limita superiormente il complesso dei tre diagrammi che rappresentano la f. e. m. delle tre fasi. La f. e. m. rettificata oscilla tra E_m, il massimo dei valori istantanei della f. e. m. fra fase e neutro, e la metà di esso.

Chiudendo il circuito fra A ed N con una resistenza sufficientemente elevata per limitare l'intensità della corrente notevolmente al di sotto della saturazione delle lampade, l'intensità della corrente varia con buona approssimazione proporzionalmente alla f. e. m. Per ridurre costante l'intensità noi interponiamo la lampada L_s, che però, a differenza delle altre tre, deve funzionare sempre in saturazione. Perciò occorre che sia

$$(5) \qquad 0 \leq r \leq \frac{E_m - 2V_s}{2i_s}.$$

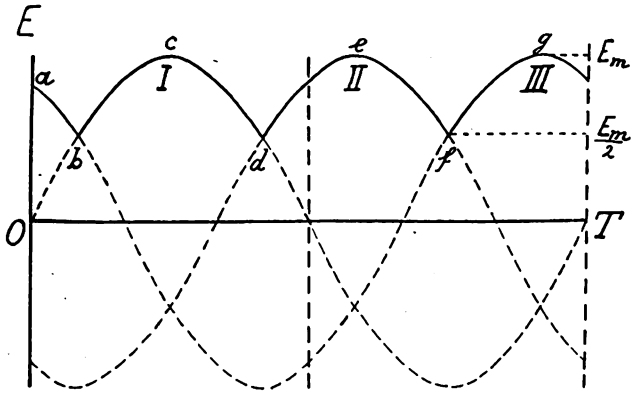


Fig. 4.

Ma la corrente di saturazione delle valvole termoioniche non si mantiene rigorosamente costante: essa cresce col crescere della differenza di potenziale fra filamento e placca; i risultati di alcune mie ricerche su lampade di diverso tipo [2], mi portano a concludere che la corrente di saturazione, entro ampi limiti e con buona approssimazione, varia proporzionalmente alla differenza di potenziale fra placca e filamento. La caratteristica reale della valvola ha quindi la forma che si vede nella fig. 5 dove il tratto rettilineo che rappresenta la fase di saturazione è lievemente inclinato sull'asse V.

(1) Cioè che fa positivo A rispetto ad N.

(2) « Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. V, 1927, p. 327.

Digitized by Google

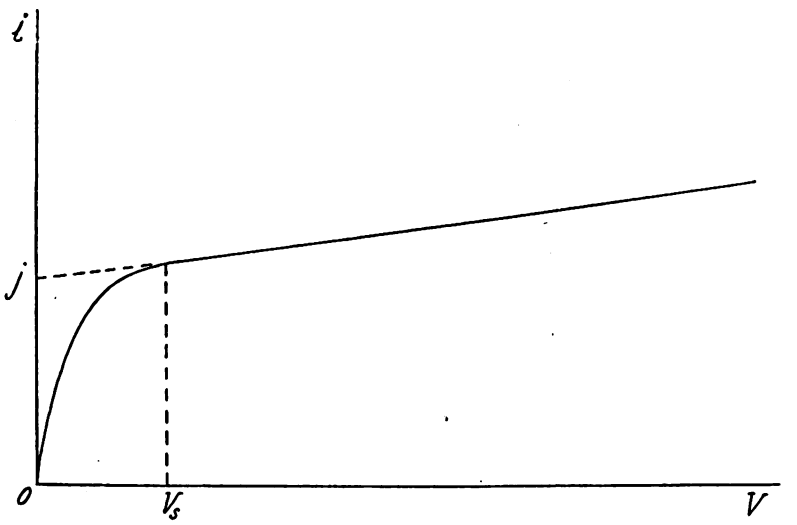


Fig. 5.

Non è quindi possibile ottenere mediante l'uso di una valvola termoionica una corrente di intensità rigorosamente costante; le considerazioni esposte avanti possono valere peraltro approssimativamente soltanto quando le pulsazioni della f. e. m. sono piccole. In generale bisogna tener conto dell'andamento reale della valvola saturata, cioè del fatto che nella fase di saturazione, per $V > V_s$, dove V_s rappresenta il più piccolo potenziale di saturazione, l'intensità della corrente è data dalla relazione

$$i = j + kV \tag{6}$$

che è l'equazione del tratto rettilineo del diagramma: j e $k = \frac{\delta i}{\delta V}$ sono due costanti.

Poichè

$$V = E - ir$$

si ha, sostituendo nella (6)

$$i = \frac{j + kE}{1 + kr}.$$

Quindi per una variazione ΔE della f. e. m. che agisce nel circuito si ha una variazione dell'intensità della corrente

$$\Delta i = \frac{k}{1 + kr} \Delta E.$$

Quando la resistenza dell'utilizzatore è di un ordine inreriore a quello di k [1] si ha praticamente:

$$\Delta i = k \Delta E.$$

(1) k è generalmente molto piccolo. Per una lampada Marconi, tipo MR 4, accesa in modo che la corrente di saturazione sia di circa 10 m. a., la variazione di i in ampère per l'aumento di una volta è dell'ordine di 10^{-7}.

Digitized by Google

E poichè si può porre [1]:

$$k = \alpha j$$

dove α è una costante, che per ogni valvola è indipendente entro ampi limiti dall'accensione del filamento, si ha:

$$\frac{\Delta i}{j} = \alpha \Delta E$$

Da quanto è esposto avanti si può concludere che, se in un circuito si inserisce una valvola termoionica saturata allo scopo di filtrare la corrente dovuta ad una f. e. m. pulsante, le pulsazioni della intensità di corrente vengono fortemente attenuate ma non si possono eliminare del tutto. E se si modifica l'accensione del filamento, ma si lascia sempre agire una data f. e. m. pulsante sulla stessa lampada, la parte variabile contenuta nella corrente filtrata risulta una frazione approssimativamente costante della parte continua.

Chimica-fisica. — *Sul potenziale di elettroaffinità dell'anidride molibdica.* Nota [2] del Corrisp. L. Rolla e di G. Piccardi [3].

In una Nota precedente [4], sulla statica chimica dei fenomeni elettronici, noi abbiamo riportato il valore del potenziale di ionizzazione del molibdeno, determinato col nostro metodo della fiamma.

Noi eravamo partiti, per la nostra ricerca, da anidride molibdica pura, che, esaminata con un comune spettroscopio, non mostrava alcuna riga appartenente ad elementi estranei ed in particolare a metalli alcalini od alcalino terrosi. Questa anidride molibdica, introdotta nella fiamma, produceva un piccolo aumento di corrente (che avevamo attribuito all'ionizzazione dell'atomo di molibdeno) in base al quale avevamo calcolato il valore del potenziale di ionizzazione.

Disponendo ora di mezzi assai migliori, noi abbiamo invece constatato, che l'anidride molibdica usata, conteneva tracce di metalli alcalini, chimicamente inapprezzabili, ma sufficienti per perturbare, anzi per cambiare totalmente di aspetto il fenomeno decorrente nella fiamma.

Noi abbiamo allora ottenuto dell'anidride molibdica *purissima, esente da basi*, per sublimazione. L'anidride da sublimare veniva introdotta in un pic-

(1) « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », vol. V, 1927, p. 330.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale ed inorganica della R. Università di Firenze.

(3) Presentata nella seduta del 3 aprile 1927.

(4) L. Rolla e G. Piccardi. Questi « Rendiconti », vol. II, serie 6ª, p. 173, 1925.

Digitized by Google

colissimo forno elettrico, costituito da un tubo di quarzo sul quale era avvolto un nastro di platino, riscaldabile elettricamente. Il forno veniva portato al rosso chiaro e percorso da una corrente d'aria.

L'anidride che è assai volatile, viene facilmente trascinata dalla corrente d'aria; le basi non volatilizzano, in queste condizioni, e sembrano anzi restare disciolte nella silice del forno.

L'anidride molibdica, rigorosamente pura, presenta, come tutte le molecole a carattere acido, una notevole affinità per l'elettrone ed inverte la corrente che si origina fra la griglia e la placca poste nella fiamma. (Questa elettroaffinità delle molecole, che presenta un grande interesse anche dal punto di vista strettamente chimico, è l'oggetto delle nostre attuali ricerche).

Noi abbiamo potuto allora determinare, invece del potenziale di ionizzazione dell'atomo di molibdeno, il potenziale di affinità della sua anidride.

Facendo giungere da un piccolo forno, opportunamente costruito, i vapori di anidride molibdica direttamente nella fiamma, pesando il tubo del forno avanti e dopo l'esperienza e registrando, come al solito, la variazione della corrente, noi abbiamo ottenuto i risultati seguenti:

	Deviazione del galvanometro $1° = 2{,}475.10^{17}$ amp.	Elettroni per secondo	Perdita in peso	Durata della esperienza	Molecole per secondo	Log. K
I	1,88	$2{,}936.10^{12}$	0,0410 gr.	205″	$8{,}420.10^{17}$	7,010
II	1,88	$2{,}936.10^{12}$	0,0430 »	210″	$8{,}618.10^{12}$	7,000
III	2,27	$3{,}546.10^{12}$	0,0950 »	305″	$1{,}335.10^{18}$	6,982

Questi valori di log. K sono fra loro praticamente coincidenti.

Valutando la temperatura della fiamma come prossima a 1970° assoluti, si trova che il coefficiente angolare della retta delle affinità è uguale a 2,56; il potenziale di affinità elettronica della anidride molibdica possiede dunque il valore:

2,73 volta.

Questo valore è stato calcolato ammettendo che, alla temperatura della fiamma da noi usata, l'anidride molibdica sia praticamente stabile, cioè non subisca una dissociazione sensibile.

Chimica. — *I solfati doppî dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini.* VIII. *Solfati doppî di cerio (ceroso) e di sodio.* Nota del Socio F. Zambonini e S. Restaino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Geologia. — *Sulle conclusioni di una mia Memoria.* Nota[1] del Corrisp. ing. S. FRANCHI.

In omaggio alle tradizioni dell'Accademia, la quale non ammette polemiche nel proprio seno, io ho acconsentito a ritirare la Memoria da me presentata nella seduta del giorno 6 dello scorso febbraio, in replica ad una Nota del Socio Sacco, pubblicata nei « Rendiconti dell'Accademia » qualche mese prima [2], in seguito ad una mia Memoria sopra un argomento di capitale importanza per la geologia dell'Appennino Settentrionale [3].

Il mio scritto sarà pubblicato nel « Bollettino della Società Geologica Italiana », ed io mi limito a presentare qui le conclusioni a cui sono pervenuto:

1. La formazione caratteristica, prevalentemente costituita da calcari alberesi, arenarie e scisti, con fucoidi (*Ch. Intricatus, Ch. Targionii,* ecc.) e con elmintoidee, fra cui la *H. labyrinthica Heer*, formazione da me detta (*Zona ad Helminthoida labyrinthica*), rappresentante la parte superiore del Priaboniano (Ludiano?) nelle Alpi Marittime franco-italiane, si estende all'Appennino genovese, parmense e modenese, come era stato intraveduto dal Pareto, dal Sismonda e da A. Issel, ed è ora riconosciuto da valenti studiosi dell'Appennino.

2. L'assegnazione di tale formazione al Parisiano nell'Appennino Genovese, fatta dal Sacco fin dal 1891, e tutt'ora mantenuta, non è giustificata da criteri stratigrafici, litologici o paleontologici.

3. Le formazioni scistose sottostanti in concordanza alla suddetta formazione, a cominciare dagli scisti variegati manganesiferi, tutto attorno al gruppo Antola-Alfeo, cioè quelli delle valli Polcevera, Scrivia, Sturla e Lavagna, inglobanti le roccie ofiolitiche, sono priaboniane, anzichè cretacee.

4. Questa potentissima formazione scistosa, in tutta la regione genovese-spezina e circumapuana, fino ad occidente del Serchio, è chiaramente ed indiscutibilmente sovrapposta al cosidetto Macigno, ritenuto eocenico anche dal prof. Sacco, ed è perciò, anche per questo fatto, certamente eocenica (priaboniana); ciò in perfetto accordo col precedente asserto, il quale viene ad avere una duplice dimostrazione.

(1) Presentata nella seduta 3 aprile 1927.

(2) F. SACCO, *La questione dell'età degli scisti argilloscisti ofiolitiferi dell'Appennino Settentrionale,* « Rendiconti Acc. dei Lincei », vol. IV, fasc. 11, dicembre 1926.

(3) La prosecuzione della Zona ad *Helminthoida* dalle Alpi Marittime all'Appennino Genovese e l'età delle *Argille Scagliose,* « Memoria della R. Accademia Nazionale de Lincei », serie sesta, vol. I, fascicolo X.

Digitized by Google

5. Della esistenza dell'orizzonte ofiolitifero al posto della lacuna anteriore alla Scaglia, affermata ora dal Sacco, non esistono prove.

6. D'altra parte, tale esistenza, essendo inconciliabile coi precedenti asserti 3 e 4, si deve ritenere non confermata.

7. La serie dei terreni indicata dal prof. Sacco al termine della sua Nota (p. 505) è perciò, per vari riguardi, inaccettabile.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Intorno ad una trasformazione delle congruenze rettilinee* W. Nota di R. Calapso, presentata [1] dal Socio Corrisp. G. Fubini.

Nel presente lavoro è stabilita una trasformazione, per parallelismo di raggi, delle congruenze W, in guisa che alle rigate di una tale congruenza, che tagliano le focali secondo le linee asintotiche, corrispondano le sviluppabili della congruenza trasformata. Supponendo che la congruenza W sia riferita ai parametri delle asintotiche corrispondentisi sulle focali, il problema proposto si presenta come la trasformazione di una congruenza W in congruenza riferita alle sviluppabili, in guisa che raggi corrispondenti nella data congruenza e nella trasformata siano paralleli.

Per enunciare con brevità i risultati della presente Nota, ricordiamo che data una superficie S e presa comunque una superficie S_0, associata ad S per deformazione infinitesima, alle asintotiche di S corrisponde in S_0 un sistema coniugato (rete); se x, y, z ed x_0, y_0, z_0 sono le coordinate cartesiane dei punti che generano rispettivamente S ed S_0 e se u, v sono i parametri delle asintotiche di S, si hanno equazioni della forma

$$\frac{\partial x_0}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \mu \frac{\partial x}{\partial u} .$$

Esprimiamo ciò dicendo che le asintotiche di S e la rete corrispondente di S_0 sono sistemi *antiparalleli.*

Ciò premesso sia (G) una congruenza W, riferita ai parametri delle asintotiche delle focali S ed S_1, e sia (G′) una trasformata (riferita alle sviluppabili) corrispondente a (G) per parallelismo di raggi; la proprietà qui stabilita si riassume nel seguente teorema:

I. *Esiste una rete antiparallela alle asintotiche di* S *ed una rete antiparallela alle asintotiche di* S_1, *entrambe armoniche a* (G′).

Questo teorema si enuncia indipendentemente dalle linee coordinate nel seguente modo:

(1) Nella seduta del 3 aprile 1927.

Digitized by Google

Sia (G) *una congruenza* W *e* (G′) *una congruenza corrispondente a* (G) *per parallelismo di raggi (ed in guisa che alle rigate* (G), *che tagliano le focali* S, S_1 *secondo le asintotiche, corrispondano le sviluppabili di* (G′)*); se per la retta* G′ *si conducono i piani rispettivamente paralleli ai piani tangenti alle focali di* (G), *questi piani inviluppano due superficie* S_0, S_0' *associate ad* S *ed* S_1. *La rete di* S_0 *antiparallela alle asintotiche di* S *è armonica a* (G′); *similmente la rete di* S_0' *antiparallela alle asintotiche di* S_1 *è pure armonica a* (G′).

II. *Se una rete* (S_0) *e una congruenza* (G′) *sono armoniche, e se la rete* (S_0) *ammette un sistema antiparallelo (necessariamente di asintotiche) la superficie sostegno di queste asintotiche è focale di una congruenza* W *corrispondente a* (G′) *per un parallelismo di raggi.*

§ 1.

1. Per la dimostrazione del teorema I scriviamo le equazioni a cui soddisfano le coordinate del punto di S, cioè

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\dfrac{\partial x}{\partial u} + b\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = p\dfrac{\partial x}{\partial u} + q\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{cases} \qquad \left(\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u}\right)$$

e deduciamo una congruenza W (avente S come focale) col metodo di Fubini; cioè si conduce per il punto di S la retta che ha i parametri direttori

$$(2)\qquad X = h\frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v}$$

in cui h e k soddisfano al sistema

$$(3)\qquad \frac{\partial h}{\partial v} = -pk \quad , \quad \frac{\partial k}{\partial u} = -bh .$$

2. Per effettuare una trasformazione della W in congruenza riferita alle sviluppabili, occorre formare l'equazione di Laplace a cui soddisfano le funzioni X, Y, Z.

Dalle (2) per derivazione si ha

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial h}{\partial u} + ah\right)\dfrac{\partial x}{\partial u} + k\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial k}{\partial v} + qk\right)\dfrac{\partial x}{\partial v} + h\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \end{cases}$$

Digitized by Google

donde risulta facilmente l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial X}{\partial u} + Q\frac{\partial X}{\partial v} + RX \tag{5}$$

in cui

$$\begin{cases} P = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial k}{\partial v} + q \quad , \quad Q = \dfrac{1}{h}\dfrac{\partial h}{\partial u} + a \\ R = \dfrac{\partial q}{\partial u} + bp - PQ \end{cases} \tag{6}$$

Trasportiamo il raggio della congruenza parallelamente a se stesso e sia $(x'\,y'\,z')$ un punto del raggio nella nuova posizione; è noto che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la congruenza trasformata (G') sia riferita alle sviluppabili, è che sussistano relazioni della forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = A\dfrac{\partial X}{\partial u} + BX \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = C\dfrac{\partial X}{\partial u} + DX \end{cases} \tag{7}$$

le cui condizioni d'integrabilità sono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial v} = P(C - A) + D \\ \dfrac{\partial C}{\partial u} = -Q(C - A) + B \\ \dfrac{\partial B}{\partial v} - \dfrac{\partial D}{\partial u} = R(C - A) \end{cases} \tag{8}$$

(Si noti che i punti $x' - Ax$ ed $x' - Bx$ sono i fuochi di G').

3. Introduciamo le funzioni

$$t = h(C - A) \quad , \quad \tau = -k(C - A); \tag{9}$$

osservando le (8) e le (6) risultano le relazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial u} + at = h\left(B - \dfrac{\partial A}{\partial u}\right) \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial u} + q\tau = k\left(D - \dfrac{\partial C}{\partial v}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Ciò premesso, consideriamo le equazioni

$$\begin{cases} x' - AX = x_0 + t\dfrac{\partial x}{\partial u} \\ x' - CX = x_0 + \tau\dfrac{\partial x}{\partial u} \end{cases} \tag{11}$$

Digitized by Google

nelle incognite $x_0\, y_0\, z_0$; queste sono coesistenti perchè sottraendo si ottiene l'identità. Derivando la prima rispetto ad u e la seconda rispetto a v e tenendo conto delle (8), (10), (2) si trova

$$(12) \qquad \frac{\partial x_0}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \mu \frac{\partial x}{\partial u}$$

in cui

$$\lambda = k\left(B - \frac{\partial A}{\partial u}\right) - bh\,(C - A)$$

$$\mu = h\left(D - \frac{\partial C}{\partial v}\right) + pk\,(C - A)\,.$$

Portando infine nelle (11) le espressioni (12), troviamo

$$(13) \qquad \begin{cases} \dot{x}' - A\,X = x_0 + \dfrac{l}{\mu}\dfrac{\partial x_0}{\partial v} \\ x' - C\,X = x_0 + \dfrac{\tau}{\lambda}\dfrac{\partial x_0}{\partial u}, \end{cases}$$

le quali esprimono che i fuochi di (G') appartengono alle tangenti alle curve della rete (x_0). La proposizione è stabilita.

§ 2.

4. Per dimostrare il teorema II consideriamo una rete (S_0) e scriviamo l'equazione di Laplace

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 x_0}{\partial u\, \partial v} = a_1 \frac{\partial x_0}{\partial u} + b_1 \frac{\partial x_0}{\partial v}$$

a cui soddisfano le coordinate del punto di (S_0). È noto che per formare una congruenza (G') armonica alla data rete, basta assumere una nuova soluzione θ della stessa (14): i fuochi della (G') hanno le coordinate

$$(15) \qquad x_1 = x_0 - \frac{\theta}{\dfrac{\partial \theta}{\partial u}}\frac{\partial x_0}{\partial u} \quad , \quad x_2 = x_0 - \frac{\theta}{\dfrac{\partial \theta}{\partial v}}\frac{\partial x_0}{\partial v}$$

Supponiamo che la rete (S_0) ammetta un sistema antiparallelo; si avranno le (12) e le funzioni (x, y, z) soddisferanno ad un sistema della forma (1) in cui

$$(16) \qquad \begin{cases} a = b_1 - \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial u} \quad , \quad b = a_1 \dfrac{\lambda}{\mu} \\ p = b_1 \dfrac{\mu}{\lambda} \quad , \quad q = a_1 - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial \lambda}{\partial v} \end{cases}$$

Digitized by Google

Per il punto (x, y, z) conduciamo la parallela a G', i cui parametri direttori sono

$$\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}$$

ossia

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} - \mu\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u};$$

ponendo

$$h' = \mu\frac{\partial\theta}{\partial u} \quad , \quad k' = -\lambda\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

ed osservando le (16), otteniamo

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h'}{\partial v} = h'\left(\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial v} + \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} + q\right) - pk' \\ \dfrac{\partial k'}{\partial u} = k'\left(\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial u} + \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} + a\right) - bh'. \end{cases}$$

Intanto per la relazione

$$\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u}$$

si potrà scrivere

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v} + q = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + a = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial u}$$

e ponendo

$$h = \Phi h' \quad , \quad k = \Phi k',$$

si ritrovano le (3); dunque la superficie $(x\,y\,z)$ è focale di una congruenza W corrispondente a (G') per parallelismo di raggi.

Digitized by Google

Matematica. — *Sugli integrali superficiali delle forme differenziali quadratiche.* Nota di S. CHERUBINO, presentata [1] dal Socio Corrisp. G. SCORZA.

In una recente Nota [2], il prof. Mauro Picone ha rilevato come la condizione

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

cui devono soddisfare i coefficienti della forma differenziale quadratica

$$A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy \tag{2}$$

affinchè il suo integrale, esteso ad una superficie biregolare S, dipenda soltanto dal bordo di S, è da ritenersi semplicemente necessaria, poichè le ulteriori condizioni per la sua sufficienza non sono state sinora stabilite in modo rigoroso, con la desiderabile generalità per le applicazioni.

Si ha che [3]: se H è un dominio internamente connesso dello spazio ordinario ed S è una superficie biregolare *variabile* interna ad H, dotata di base, la cui pagina positiva subordini un costante verso positivo sul bordo *fisso* BS di essa (costituito di un sistema di curve regolari chiuse, in numero finito, interne ad H) il verificarsi identico, nello interno di H, della condizione (1) è necessario, ma non sempre sufficiente, perchè l'integrale superficiale

$$\int_{+S} (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy) \tag{3}$$

non varii al variare di S.

La sufficienza della (1) appare invece legata alla connessione del dominio H, dalla quale non può rendersi indipendente, in generale, se non imponendo nuove condizioni alle funzioni A, B, C.

Il prof. Picone, nella Nota citata, oltre a indicare alcuni particolari dominii nei quali la (1) diventa sufficiente, ha anche segnalato un caso nel quale la invariabilità col bordo dell'integrale superficiale (3) resta assicurata dalla (1), indipendentemente dalla connessione di H.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1927.

(2) *Sopra un teorema relativo agli integrali superficiali*, « Esercitazioni Matematiche », anno IV, fasc. 2°, 1924.

(3) Seguiamo qui le denominazioni e le notazioni del trattato del prof. M. PICONE: *Lezioni di Analisi infinitesimale*, « Circolo Matematico di Catania », 1923.

Digitized by Google

Io mi sono occupato di ricercare altri casi di invariabilità, che non dipendono dalla forma di H e sono riuscito a scoprirne varii, che mi sembrano tutti degni di rilievo.

Ho potuto così constatare che l'analogia fra il comportamento della forma differenziale quadratica (2) e quello delle forme differenziali lineari è assai più stretta di quello che può sembrare a prima vista, poichè valgono per la (2) teoremi perfettamente analoghi a quelli da me ultimamente indicati per le forme differenziali lineari [1].

1. Posto che

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v) \tag{4}$$

siano le equazioni parametriche di S, dicendo T la base di S (che sarà un dominio regolare del piano u, v) ed FT la frontiera di T, cui le (4) fanno corrispondere BS, si ha, per definizione:

$$\int_{+S} (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy) = \tag{5}$$

$$= \int_T \left[A \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + B \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + C \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du\,dv .$$

Supponendo che le (4) ammettano anche le derivate parziali miste e che queste siano continue, al 2° membro della (5) si potrà applicare la integrazione per parti e avere, con breve calcolo

$$\int_T A \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2} \int_{+BS} A\,(y dz - z dy) + \frac{1}{2} \int_T \left(y \frac{\partial z}{\partial u} - z \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial A}{\partial v} du\,dv -$$

$$- \frac{1}{2} \int_T \left(y \frac{\partial z}{\partial v} - z \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial A}{\partial u} du\,dv .$$

Se ne deduce che il secondo membro della (5) diventa:

$$\frac{1}{2} \int_{+BS} [(z B - y C)\,dx + (x C - z A)\,dy + (y A - x B)\,dz] +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_T \left[\left(z \frac{\partial B}{\partial v} - y \frac{\partial C}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \left(x \frac{\partial C}{\partial v} - z \frac{\partial A}{\partial v} \right) \frac{\partial y}{\partial u} + \left(y \frac{\partial A}{\partial v} - x \frac{\partial B}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial u} \right] du\,dv -$$

$$- \frac{1}{2} \int_T \left[\left(z \frac{\partial B}{\partial u} - y \frac{\partial C}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + \left(x \frac{\partial C}{\partial u} - z \frac{\partial A}{\partial u} \right) \frac{\partial y}{\partial v} + \left(y \frac{\partial A}{\partial u} - x \frac{\partial B}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial v} \right] du\,dv .$$

(1) *Sulla integrazione delle forme differenziali lineari*, questi « Rendiconti », seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

Con successive trasformazioni e tenendo presente la (1), si perviene alla relazione:

$$(I)\qquad \int_{+S}(A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{+BS}[(zB - yC)\,dx + (xC - zA)\,dy + (yA - xB)\,dz] -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{+S}(A^{(1)}\,dy\,dz + B^{(1)}\,dz\,dx + C^{(1)}\,dx\,dy),$$

ove si è posto

$$A^{(1)} = x\frac{\partial A}{\partial x} + y\frac{\partial B}{\partial y} + z\frac{\partial C}{\partial z}$$

e analogamente per B e C.

2. Supponendo ancora che le A, B, C ammettano tutte le derivate parziali sino a quelle di ordine $r+1$, con quest'ultime continue, facendo le stesse posizioni già fatte nel caso delle forme differenziali lineari ed eseguendo sulla (I) un calcolo perfettamente analogo a quello eseguito nel caso predetto, si ottengono le due formole fondamentali

$$(II)\qquad \int_{+S}(A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy) =$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1}(-1)^h \cdot \frac{1}{2^{h+1}} \cdot \int_{+BS}[(zB^{(h)} - yC^{(h)})\,dx + (xC^{(h)} - zA^{(h)})\,dy + (yA^{(h)} - xB^{(h)})\,dz] +$$

$$+ (-1)^k \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \int_{+S}(A^{(k)}\,dy\,dz + B^{(k)}\,dz\,dx + C^{(k)}\,dx\,dy) \quad (k = 1, 2, \cdots, r+1)$$

$$(IV)\qquad \int_{+S}(A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy) =$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1}\frac{(-1)^h}{\underline{|h+2}} \cdot \int_{+BS}[(zB_{(h)} - yC_{(h)})\,dx + (xC_{(h)} - zA_{(h)})\,dy + (yA_{(h)} - xB_{(h)})\,dz] +$$

$$+ \frac{(-1)^k}{\underline{|k+1}} \cdot \int_{+S}(A_{(k)}\,dy\,dz + B_{(k)}\,dz\,dx + C_{(k)}\,dx\,dy) \quad (k = 1, 2, \cdots, r+1)$$

nelle quali si è posto, simbolicamente:

$$A^{(0)} = A \;;\quad A^{(h)} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^h A \;;\quad A_{(k)} = \left(x\frac{\partial A}{\partial x} + y\frac{\partial A}{\partial y} + z\frac{\partial A}{\partial z}\right)^k$$

e analogamente per B e per C:

Digitized by Google

3. Da queste relazioni si deducono immediatamente i seguenti teoremi:

Nelle ipotesi che precedono, l'integrale superficiale (3) *è invariabile al variare di* S *nell'interno di* H, *qualora – per un certo intiero* k *– si verifichi uno dei fatti seguenti:*

a) $A^{(k)} = \alpha_k A \quad , \quad B^{(k)} = \alpha_k B \quad , \quad C^{(k)} = \alpha_k C \quad ,$ *con* $\alpha_k \neq (-2)^k$;

b) $A^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}$ *sono funzioni omogenee dello stesso grado* $m_k \neq -2$;

c) $A_{(k)} = \alpha_k A \quad , \quad B_{(k)} = \alpha_k B \quad , \quad C_{(k)} = \alpha_k C \quad ,$ *con* $\alpha_k \neq (-1)^k \underline{|k+1}$;

d) $A_{(k)}, B_{(k)}, C_{(k)}$ *sono funzioni omogenee di ugual grado* $m_k \neq -2$;

e) $A = A_1 A_2 \quad , \quad B = B_1 B_2 \quad , \quad C = C_1 C_2$ *e le* A_1, B_1, C_1 *sono funzioni omogenee di ugual grado* m, *mentre la somma*

$$\sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} m(m-1)\cdots(m-h+1) A_{2(k-h)}$$

e le due analoghe per B_2 *e* C_2 *sono funzioni omogenee di ugual grado* μ_k, *con* $m + \mu_k \neq -2$;

f) oppure le dette somme riproducono le A_2, B_2, C_2 *moltiplicate per un comune fattore numerico* $\alpha_k \neq (-1)^k \underline{|k+1}$;

g) esistono tre funzioni X, Y, Z, *finite e continue in* H *con tutte le loro derivate parziali del primo ordine, che verificano, identicamente nell'interno di* H, *le relazioni*

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = A^{(k)} \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = B^{(k)} \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = C^{(k)};$$

h) ovvero le altre

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = A_{(k)} \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = B_{(k)} \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = C_{(k)}.$$

4. Anche come nel caso delle forme lineari, dalla relazione fondamentale (IV), si ottiene il seguente importante teorema:

Se, nell'interno del dominio internamente connesso H, *di connessione qualsiasi, le funzioni* A, B, C, *oltre a soddisfare la* (3), *sono parzialmente derivabili un numero indefinito di volte e queste derivate parziali sono uniformemente limitate in ogni porzione limitata di* H, *l'integrale superficiale* (3) *non varia al variare della superficie biregolare* S *nell'interno di* H, *qualora rimanga fisso il bordo di* S *e costante il verso positivo su esso subordinato da* + S [1].

Ne segue che l'integrale in questione, sotto le condizioni ora espresse, è la somma della serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{\underline{h+2}} \cdot \int_{+BS} [(z B_{(h)} - y C_{(h)})\,dx + (x C_{(h)} - z A_{(h)})\,dy + (y A_{(h)} - x B_{(h)})\,dz].$$

(1) Abbiamo anche qui, com'è ovvio, implicitamente supposto che le (4) posseggano, e siano continue, le derivate parziali miste.

Digitized by Google

Matematica. — *Démonstration nouvelle d'une inégalité relative aux polynomes trigonométriques.* Nota di S. BERNSTEIN, presentata [1] dal Socio V. VOLTERRA.

Je me propose de donner une nouvelle démonstration de la proposition suivante :

I. *Si une somme*

$$S_n(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta \cdots + b_n \sin n\theta$$

satisfait pour toute valeur réelle de θ *à l'inégalité*

$$|S_n(\theta)| \leq L, \tag{1}$$

on a également pour toute valeur réelle de θ

$$|S_n'(\theta)| \leq n L.$$

A cet effet, j'utiliserai la proposition générale démontrée dans le chapitre II de mon livre *Leçons sur les propriétés extrémales, etc.* (p. 56):

II. *Soit* $s(x) + it(x)$ *un polynome dont toutes les racines se trouvent du même coté de l'axe réel* [2]; *la condition que le polynome* $P(x)$ *satisfait à l'inégalité*

$$|P(x)| \leq L\,|s(x) + it(x)|$$

pour toutes les valeurs réelles de x *entraîne également les inégalités*

$$|P'(x)| \leq L\,|s'(x) + it'(x)|, \cdots, |P^{(h)}(x)| \leq L\,|s^{(h)}(x) + it^{(h)}(x)|,$$

quel que soit h, *pour toutes les valeurs réelles de* x.

En particulier, en posant $s(x) + it(x) = (1 + ix)^{2n}$, on conclut immédiatement de II que

III. *Si on a pour toutes les valeurs réelles de* x

$$|P(x)| \leq L(1 + x^2)^n,$$

on aura également

$$|P'(x)| \leq 2nL(1 + x^2)^{\frac{2n-1}{2}}, \quad |P''(x)| \leq 2n(2n-1)L(1 + x^2)^{\frac{2n-2}{2}} \text{ etc.}$$

(1) Nella seduta del 20 marzo 1927.

(2) Cette propriété est équivalente à la condition que toutes les racines des équations $s(x) = 0$ et $t(x) = 0$ sont réelles et se séparent mutuellement.

Digitized by Google

C'est de III que nous allons tirer I. En effet, en posant $x = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ on a

$$S_n(\theta) = \frac{P(x)}{(1+x^2)^n}, \tag{2}$$

où $P(x)$ est un polynome de degré $2n$; ainsi, en vertu de (1), on a

$$|P(x)| \leq L(1+x^2)^n, \tag{3}$$

quelle que soit la valeur réelle de x.

Donc, on a, à cause de III,

$$|P'(x)| \leq 2nL(1+x^2)^{\frac{2n-1}{2}}. \tag{4}$$

Mais de (2) nour tirons par différentiation

$$P'(x) = 2(1+x^2)^{n-1} S'_n(\theta) + 2nx(1+x^2)^{n-1} S_n(\theta);$$

ainsi, d'après (4),

$$\left| \frac{S'_n(\theta) + n x S_n(\theta)}{\sqrt{1+x^2}} \right| \leq nL;$$

c'est à dire l'inégalité

$$\left| S'_n(\theta) \cdot \cos\frac{\theta}{2} + n S_n(\theta) \cdot \sin\frac{\theta}{2} \right| \leq nL \tag{5}$$

est une conséquence nécessaire de (1).

Or, quel que soit l'angle α, l'inégalité (1) entraîne que

$$|S_n(\theta+\alpha)| \leq L. \tag{1-bis}$$

Par conséquent le même raisonnement appliqué à $S_n(\theta+\alpha)$ conduit aussi à l'inégalité plus générale

$$\left| S'_n(\theta+\alpha) \cdot \cos\frac{\theta}{2} + n S_n(\theta+\alpha) \sin\frac{\theta}{2} \right| \leq nL, \tag{5-bis}$$

dans laquelle nous pouvons poser, en particulier, $\theta = 0$, ce qui donne pour toute valeur de α

$$|S'_n(\alpha)| \leq nL,$$

et notre affirmation est ainsi établie.

De plus, l'inégalité (5-*bis*) peut être transformée de la facon suivante: posons $n \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = C$, où C est une constante réelle quelconque et divisons (5-*bis*) par $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{n}{\sqrt{n^2+C^2}}$; on obtient ainsi l'inégalité

$$|S'_n + CS_n| \leq L\sqrt{n^2+C^2} \tag{6}$$

Digitized by Google

que sera vérifiée pour toutes les valeurs réelles de l'angle (quel que soit la constante C) *du moment que l'inégalité* (1) *est satisfaite.*

L'inégalité (6) étant analogue à l'inégalité (1), on peut poser

$$T_n = S'_n + CS_n ,$$

donc D étant une nouvelle constante arbitraire on aura également

$$| T'_n + DT_n | = | S''_n + (C + D) S'_n + CDS_n | \leqq L \sqrt{(n^2 + C^2)(n^2 + D^2)}.$$

En repetant le même raisonnement de proche en proche, nous voyons que quelles que soient les constantes réelles $C_1, C_2, \cdots, C_h$, on a comme conséquence de l'inégalité (1), l'inégalité

$$| S_n^{(h)} + (C_1 + C_2 + \cdots + C_h) S_n^{(h-1)} + \cdots + C_1 \cdots C_h S_n | \leqq$$
$$\leqq L \sqrt{(n^2 + C_1^2)(n^2 + C_2^2) \cdots (n^2 + C_h^2)} .$$

Nous obtenons ainsi la proposition suivante:

IV. *Soit* $f(z) = z^h + a_1 z^{h-1} + \cdots + a_h$ *un polynome de degré* h, *dont toutes les racines sont réelles; l'inégalité* (1) *entraine que*

$$(7) \quad | S_n^{(h)} + a_1 S_n^{(h-1)} + \cdots + a_h S_n | \leqq L | f(ni) | = L \sqrt{f(ni) . f(-ni)}$$

Le signe d'égalité dans (7) aura lieu effectivement pour

$$S_n = L \cos n(\theta - \alpha) .$$

Le cas géneral, où $f(z)$ n'aurait pas toutes ses racines réelles, est plus difficile. Cependant, la proposition IV continue à subsister sous certaines conditions, même lorsque $f(z)$ aurait des racines complexes.

Bornons nous au cas de $h = 2$. Nous aurons, à cause de III,

$$P''(x) \leqq 2n(2n - 1) L (1 + x^2)^{n-1};$$

mais, en vertu de (2),

$$P''(x) = 4x(n - 1)(S'_n + nx S_n)(1 + x^2)^{n-2} + 4(S''_n + nx S'_n)(1 + x^2)^{n-2} +$$
$$+ 2n S_n (1 + x^2)^{n-1},$$

d'où

$$2[S''_n + (2n - 1) x S'_n + n(n - 1) x^2 S_n] + n S_n (1 + x^2) \leqq n(2n - 1)(1 + x^2) L$$

ou bien

$$(7\text{-}bis) \qquad \left| S''_n \cos^2 \frac{\theta}{2} + (2n - 1) S'_n \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \right.$$
$$\left. + n(n - 1) S_n \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{n S_n}{2} \right| \leqq L n \left(n - \frac{1}{2} \right)$$

Digitized by Google

qui doit être vérifiée, comme (5-*bis*), quel que soit l'angle α qui figure dans S_n.

On vérifie immédiatement que l'on a dans (7-*bis*)

$$n\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left|-n^2\cos^2\frac{\theta}{2}+in(2n-1)\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\right.$$

$$\left.+n(n-1)\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{n}{2}\right|=\left|f(ni)\right|,$$

et cependant ici

$$f(z)=z^2\cos^2\frac{\theta}{2}+(2n-1)z\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\left[n(n-1)\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{n}{2}\right]$$

doit avoir ses racines imaginaires, comme cela arrive par exemple, si $\theta=0$, où $f(z)=z^2+\frac{n}{2}$, le premier membre de (7-*bis*) se réduisant alors à $\left|S_n''+\frac{n}{2}S_n\right|$.

Il est d'ailleurs facile de voir que dans le cas, où $f(x)$ est une fonction paire (ou impaire), il suffit que ses coefficients soient de signes alternés pour que la proposition IV subsiste.

Matematica. — *Scostamento geodetico, stabilità e problema di Whittaker.* Nota di O. Onicescu, presentata [1] dal Socio T. Levi-Civita.

Possediamo infine la formola che, generalizzando quella di Jacobi, definisce in un modo semplice ed espressivo l'insieme delle geodetiche di una varietà, infinitamente vicine ad una geodetica data. Questa formola è data dal sistema di equazioni di Levi–Civita [2]

$$(I)\qquad (D^2\xi)^r=-\sum_{ihk}^{n}\left\{ir,hk\right\}b^i b^h\xi^k\qquad(r=1,2,\cdots,n)$$

nelle quali $b^i(i=1,2,\cdots,n)$ rappresentano i parametri contravarianti della direzione tangente alla geodetica B che funge da base; $\xi^i(i=1,2,\cdots,n)$ i parametri dello scostamento normale lungo B; $(D\xi)^i(i=1,2,\cdots,n)$ il vettore derivato (secondo Bianchi e Levi-Civita), lungo B, del vettore ξ^i, $(D^2\xi)^i$ essendo il derivato di questo; $\left\{ir,hk\right\}$ sono i simboli di Riemann di seconda specie della varietà V_n in cui operiamo e di cui l'elemento lineare è $ds^2=\sum_{ik}^{n}a_{ik}\,dx_i\,dx_k$.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1927.

(2) *Sur l'écart géodésique*, « Math. Annalen », Bd. 97, Hf. 1/2, 1926.

Digitized by Google

Siccome per la questione della stabilità del movimento nella vicinanza di B (trattata, in modo completo ed elegante dal Vranceanu [1] in una Nota presentata a questa Accademia [2], partendo anche lui dalle equazioni dello scostamento di Levi-Civita), ed anche per il problema di Whittaker sopra le geodetiche chiuse, interessa, in prima approssimazione solo la lunghezza dello scostamento, noi dedurremo dal sistema di Levi-Civita l'equazione differenziale in ε notando con ε la lunghezza dello scarto, ponendo cioè

$$\xi^r = \varepsilon \cdot \eta^r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

con la condizione

$$\sum_1^n{}_r \eta^r \eta_r = 1 . \tag{2}$$

Dalle (1) risulta

$$(D^2\xi)^r = \ddot{\varepsilon}\eta^r + 2\dot{\varepsilon} \cdot (D\eta)^r + \varepsilon (D^2\eta)^r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

e

$$\sum_1^n{}_r (D^2\xi)^r \eta_r = \ddot{\varepsilon} + \varepsilon \sum_1^n{}_r \eta_r (D^2\eta)^r$$

oppure, designando con λ la lunghezza del vettore $(D\eta)^r$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$, ed in virtù delle (2)

$$\sum_1^n{}_r (D^2\xi)^r \eta_r = \ddot{\varepsilon} - \lambda^2 \varepsilon .$$

Utilizzando, adesso, le espressioni delle $(D^2\xi)^r$ date dal sistema (I), avremo l'equazione cercata,

$$\text{II} \qquad \frac{d^2\varepsilon}{ds^2} + (R - \lambda^2) \cdot \varepsilon = 0$$

in cui

$$R = \sum_1^n{}_{ibkr} \{ ir, hk \} b^i b^h \eta^r \eta_r$$

è la curvatura corrispondente alla giacitura b, ξ; ed s è l'arco della geodetica di base. Nel caso speciale $n = 2$, lo spostamento della direzione η^r si fa per parallelismo, dunque $\lambda = 0$, e l'equazione in ε si riduce a quella di Jacobi.

Chiamiamo $R - \lambda^2$ coefficiente di stabilità di primo ordine. Dal noto teorema di Sturm si può inferire che *il movimento lungo la geodetica di base è stabile se il coefficiente di stabilità è positivo lungo quella geodetica, per qualunque direzione normale associata* η^r.

(1) Nonchè (a quanto mi informa il prof. Levi-Civita) dal Crudeli in una Nota presentata essa pure a questa Accademia, che trovasi attualmente in corso di stampa.

(2) « Rendiconti Acc. Lincei », vol. V, fasc. 2, p. 107.

Digitized by Google

Dimostriamo altrove che si può generalizzare a quanti si vogliono gradi di libertà il criterio di Whittaker, per l'esistenza di una traiettoria chiusa in un problema conservativo a due gradi di libertà, come segue:

Consideriamo una regione chiusa, non semplicemente connessa, della varietà rappresentativa V_n, di cui l'elemento lineare è il $ds^2 = \sum_1^n a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ già contemplato. La superficie e le superficie limite essendo regolari almeno fino al secondo ordine, se, lungo quelle superficie, la forma quadratica

$$\sum_1^n {}_{bk}\, \gamma_{nbk}\, \alpha_b\, \alpha_k$$

è definita negativa, nella regione esiste almeno una traiettoria chiusa.

(Per formare l'espressione precedente abbiamo supposto che la congruenza delle linee coordinate $[n]$ (su cui varia la sola x_n), sia formata dalle geodetiche normali alla superficie limite, con che alla $[n]$ si possono associare altre $n-1$ congruenze, situate sopra quella superficie; i coefficienti γ_{nbk} designano i noti invarianti chiamati coefficienti di rotazione di una tale ennupla).

Partendo dall'equazione (II) si possono, come nel caso $n = 2$, caratterizzare le circostanze in cui l'esistenza di una regione di Whittaker è possibile.

Se noi prendiamo un punto A di una geodetica, B per esempio, e consideriamo una seconda geodetica che passa per A e che fa con la precedente un piccolo angolo, queste due geodetiche si possono rincontrare in un secondo punto M. Il limite di M, quando l'angolo diminuisce, è il punto coniugato α di A sulla geodetica B. Si sa che l'azione è minima fra i punti A e A′ della stessa geodetica quando A′ è compresa fra A ed α. La possibilità dell'esistenza di una traiettoria chiusa, minimizzante dell'azione è dunque legata all'inesistenza dei punti coniugati α. Questo si verifica quando, e solo quando il *movimento medio* dell'equazione (II) è nullo, e nessuno dei *moltiplicatori delle soluzioni* della (II) *non è uno*.

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive per le funzioni di più variabili.* Nota di E. Pini, presentata dal Socio Corrisp. L. Tonelli.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Analisi matematica. — *Sul problema di Dirichlet nei campi sferici e ipersferici.* Nota di G. Ascoli, presentata dal Socio Corrisp. G. Fubini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Meccanica. — *Sul moto sferico vorticoso di un fluido incomprimibile.* Nota di F. SBRANA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.* Nota di B. FINZI, presentata dal Socio Corrisp. N. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Sur le théorème de Kutta-Joukowski.* Nota di A. ROSENBLATT, presentata[1] dal Corrisp. U. CISOTTI.

Dans une Note[2] récente M. U. Cisotti a donné un exemple très intéressant d'un profil pour lequel le théorème de Kutta-Joukowski sur la résultante des pressions exercées par un fluide indéfini parfait irrotationnel plan sur ce profil est en défaut. M. Cisotti ne donne pas la raison de ce fait. Il me semble pourtant intéressant d'énoncer la généralisation du théorème qui embrasse les cas d'exception comme celui de M. Cisotti.

Soit $w = u - iv$ la vitesse d'un fluide de densité constante ρ entourant un corps de profil K ayant à l'infini la vitesse asymptotique $w_\infty = u_\infty - iv_\infty$. Les composantes P_x, P_y de la pression résultante sur le corps sont données par la formule de Blasius[3]

$$(1) \qquad P_y + iP_x = \frac{\rho}{2} \int_K w^2 \, dz$$

l'intégration étant effectuée le long du profil K dans le sens négatif des rotations du plan xy.

Supposons w régulier dans tout le plan fini en dehors du contour K.

(1) Nella seduta del 24 aprile 1927.

(2) *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, « Rendiconti della R. Nazionale Accademia dei Lincei », 1927, janvier.

(3) *Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik*, « Zeitschrift f. Mathematik und Physik », t. 58, 1910.

Digitized by Google

L'intégrale est égale à l'intégrale effectuée autour du point à l'infini dans le sens positif[1]. On a le développement à l'infini

$$w = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \cdots \tag{2}$$

où l'on a

$$\alpha_0 = w_\infty, \tag{3}$$

$$2\pi i \alpha_1 = -\int_K w\, d\zeta. \tag{4}$$

L'intégrale dans la formule (4) est effectuée dans le même sens que celle de la formule (1). C'est la « circulation » de Kelvin et elle sera désignée par C. On a alors la formule

$$P_y + iP_x = \rho C (u_\infty - iv_\infty). \tag{5}$$

C'est la formule de Kutta-Joukowski. Sa validité suppose donc la validité de la formule (1) de Blasius. Or cette dernière formule est en défaut dans le cas où la fonction w^2 possède des pôles sur le contour K ce qui arrive dans le cas des points anguleux d'angle extérieur 2π. Si $\mathrm{Res}_P(w^2)$ dénote le résidu de w^2 au point P on a la formule *complète*

$$P_y + iP_x = \frac{\rho}{2}\int_K w^2\, d\zeta + \rho\pi i \sum \mathrm{Res}_P(w^2). \tag{6}$$

M. Cisotti envisage une lame rectiligne de longueur $2l$ inclinée d'un angle β sur l'axe des x et il place l'origine des coordonnées au point distant de $l\cos\beta$ du centre de la lame. Les deux extrémités P et P′ de la lame de coordonnées

$$\zeta = le^{i\beta}(\cos\beta \pm 1), \qquad + \text{ pour } P', \; - \text{pour } P, \tag{7}$$

sont des pôles de w^2. Si l'on effectue au moyen de la transformation

$$\zeta = le^{i\beta}\left[\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)\right] \tag{8}$$

la représentation du plan ζ sur le plan ζ, l'image de la lame est le cercle unité $|\zeta| = 1$. M. Cisotti trouve

$$w = \frac{1}{\zeta^2 - e^{2i\beta}}\left[w_\infty(\zeta^2 - 1) - \frac{C\zeta}{\pi i l}\right]. \tag{9}$$

(1) R. Grammel, *Ueber ebene Zirkulationsströmungen und die von ihnen erzeugten Kräfte*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung », t. 25, 1916.

Digitized by Google

On calcule facilement les résidus de w^2 aux points P, P′ et on trouve

$$(10) \qquad \mathrm{Res}_{P,P'}(w^2) = \mp \frac{l}{8 e^{3i\beta}} \left[w_\infty (e^{2i\beta} - 1) \pm \frac{C e^{i\beta}}{\pi i l} \right]^2.$$

Donc on a

$$(11) \qquad \rho \pi i \sum \mathrm{Res}_P (w^2) = - \frac{\rho C w_\infty}{2} (1 - e^{-2i\beta}).$$

La formule (5) de Kutta-Joukowski doit donc être remplacée par la formule

$$(12) \qquad P_y + iP_x = \rho C w_\infty \cos\beta (\cos\beta - i \sin\beta),$$

ce qui est le résultat du calcul direct de M. Cisotti.

Fisica. — *Una misura del rapporto h/k per mezzo della dispersione anomala del tallio.* Nota di E. Fermi e di F. Rasetti, presentata [1] dal Socio O. M. Corbino.

È noto che nella teoria dei quanti la legge statistica di Boltzmann può mettersi sotto la forma

$$(1) \qquad n_i/n_l = p_i/p_l \cdot e^{-\frac{w_i - w_l}{kT}} = p_i/p_l \cdot e^{-\frac{h}{k}\frac{\Delta\nu}{T}}$$

dove n_i ed n_l indicano le densità degli atomi in due stati i ed l, aventi pesi statistici p_i e p_l ed energie w_i e w_l, in modo che $\Delta\nu = (w_i - w_l)/h$ rappresenta la differenza dei termini spettroscopici corrispondenti. In questo lavoro ci siamo proposti una verifica della legge espressa dalla (1); ciò ci ha naturalmente portati ad una misura del rapporto delle due costanti universali h e k.

Come giustificazione sperimentale indiretta della (1) si possono considerare l'andamento dei calori specifici dei corpi solidi e dell'idrogeno a basse temperature; la distribuzione di intensità negli spettri di bande; il calcolo spettroscopico del paramagnetismo di alcuni ioni.

Si hanno inoltre alcune osservazioni spettroscopiche qualitative sull'equilibrio termico tra i diversi stati quantici di un atomo, basate sul fatto che vapori ad alta temperatura assorbono delle righe che a bassa temperatura appaiono soltanto in emissione. Ciò si osserva assai frequentemente nell'arco.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1927.

Digitized by Google

Osservazioni più precise furono fatte da W. Grotrian [1] sul vapore di tallio contenuto in tubi scaldati ad alta temperatura. Il termine fondamentale del tallio è doppio; i due livelli che lo costituiscono 6^2P_1 e 6^2P_2 hanno tra di loro una differenza di 7792 numeri d'onda, per modo che nel vapore a temperatura relativamente bassa la quasi totalità degli atomi si troverà nello stato 6^2P_1, e si osserveranno quindi in assorbimento soltanto le righe che partono da questo stato; in particolare la riga $6^2P_1 - 7^2S_1$, λ 3776. Ad alta temperatura invece una certa percentuale degli atomi verrà a trovarsi nello stato 6^2P_2 e quindi appariranno in assorbimento le righe che partono da questo stato; in particolare la riga verde $6^2P_2 - 7^2S_1$, λ 5350. Grotrian osservò effettivamente queste circostanze.

Essendo nostro scopo una verifica quantitativa della (1) abbiamo ritenuto più opportuno, invece dell'assorbimento, misurare la dispersione anomala in vicinanza delle predette righe del tallio, essendo il rapporto dei coefficienti di dispersione anomala delle due righe proporzionale al rapporto delle densità n_1 ed n_2 degli atomi negli stati 6^2P_1 e 6^2P_2. Abbiamo scelto come materiale per le nostre esperienze il tallio, perchè esso riunisce in sè le seguenti circostanze:

1° Possederè, accanto al livello normale, un altro livello con differenza di energia dal precedente tale che, in un intervallo di temperature comodamente realizzabile, vari considerevolmente il rapporto del numero degli atomi nei due stati.

2° Avere per il detto intervallo di temperature una tensione di vapore sufficientemente grande.

3° Avere righe che partono dai due stati in una regione spettrale comodamente accessibile.

Per la misura della dispersione anomala ci siamo serviti dell'ordinario metodo interferenziale di Puccianti. I due raggi di un interferometro di Jamin venivano fatti passare entro due tubi di quarzo chiusi alle estremità da due lastre di vetro. Un avvolgimento di nichel–cromo attorno ad uno dei tubi permetteva di scaldarlo fino a 1250°. In questo tubo si metteva un pezzetto di tallio; lasciando nel tubo dell'aria alla pressione di qualche cm. di Hg, la velocità di distillazione del tallio verso le parti fredde del tubo veniva ridotta talmente che il pezzetto di tallio impiegava circa un'ora a distillare completamente.

Per valutare la temperatura veniva misurata l'energia elettrica dissipata nella spirale di riscaldamento; la temperatura come funzione di questa energia, nello stato stazionario, era stata determinata precedentemente per mezzo di una coppia termoelettrica platino-platino rodio, tarata dalla Physikalisch Technische Reichsanstalt di Berlino.

Le frangie di interferenza venivano proiettate sulla fenditura di uno spettrografo a prismi di Hilger di circa tre metri di distanza focale, avente

(1) W. GROTRIAN, «ZS. f. Phys.», *12*, 218, 1922.

Digitized by Google

per la riga verde una dispersione di 5,73 Å per mm. Una parte della luce, prima della fenditura, veniva deviata per riflessione sopra una lastra di vetro, in modo che un'altra immagine delle frangie si formava sulla fenditura di uno spettrografo a quarzo di Hilger, che dava per la riga λ 3776 una dispersione di 10,5 Å per mm. Davanti a ciascuna fenditura si trovava una lente cilindrica per concentrare maggiormente la luce.

Per fotografare la linea verde abbiamo usate delle lastre Hauff Flavin. Servendoci come sorgente della luce di un arco elettrico, potevamo fare delle fotografie contemporanee delle frangie in vicinanza delle due righe con pose di due o tre minuti primi.

Per mezzo di questo dispositivo abbiamo fatte sei serie di coppie di fotografie della dispersione anomala del vapore di tallio e abbiamo per ciascuna fotografia misurata la dispersione anomala. Per fare le misure nel modo più semplice, abbiamo disposto l'interferometro in modo che le frangie a grande distanza dalle righe di assorbimento fossero orizzontali. Per il caso della forte dispersione anomala della riga ultravioletta si misuravano le distanze dalla riga delle intersezioni di una decina di frangie successive con una retta orizzontale. Si riconosce facilmente che le inverse di queste successive distanze formano una progressione aritmetica la cui ragione è l'inversa del coefficiente di dispersione anomala d_2 il quale, secondo la teoria classica della dispersione, è legato al numero N_1 degli oscillatori elettronici contenuti nell'unità di volume e alla lunghezza l dello strato di vapore attraversato, dalla relazione

$$(2) \qquad N_1 l = \frac{4\pi m c^2}{e^2} \frac{d_1}{\lambda_1^2} = 4{,}54.10^{21} \frac{d_1 \text{ Ang}}{\lambda_1^2 \text{ Ang}}$$

Il corrispondente coefficiente d_2 della dispersione anomala in vicinanza della riga verde si misurava semplicemente osservando la distanza dalla riga di assorbimento alla quale si ha il passaggio di una frangia.

La tabella seguente dà i risultati delle misure.

T_{ass}	d_1 Ang	d_2 Ang	d_1/d_2
1281	254	0.26*	978*
1343	552	0.72	768
1383	656	1.03	637
1433	960	2.09	459
1463	1680	3.85	436
1496	2100	5.01*	419*

I numeri indicati con un asterisco, relativi alle fotografie fatte alle temperature estreme, sono incerti, avendosi in un caso una dispersione anomala troppo piccola, nell'altro le frangie confuse da correnti convettive nell'interno dei tubi, inevitabili ad alte temperature.

Digitized by Google

Siccome il rapporto n_1/n_2 delle densità degli atomi nei due stati 6^3P_1 e 6^3P_2 è proporzionale al rapporto dei coefficienti di dispersione anomala d_1/d_2, dovremo avere, in virtù della (1),

$$d_1/d_2 = A\, e^{h\Delta\nu/kT}$$

dove A è una costante. Cioè, prendendo i logaritmi decimali

$$\log d_1/d_2 = \log A + 0{,}4343\, \frac{h\Delta\nu}{k} \cdot \frac{1}{T} .$$

Si vede dunque che $\log d_1/d_2$ deve essere una funzione lineare di $1/T$. Nel diagramma della fig. 1 sono state riportate in ascisse le inverse delle temperature assolute e in ordinate $\log d_1/d_2$.

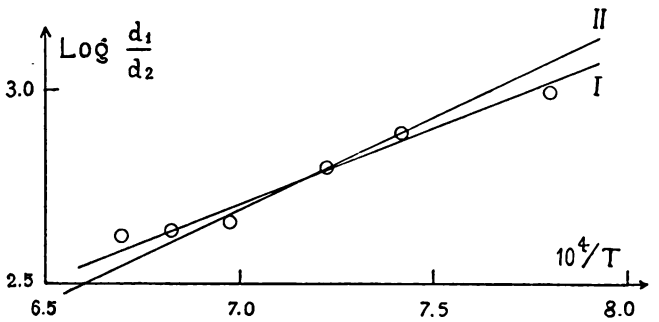


Fig. 1.

Se si tien conto che le misure di temperatura possono contenere un errore fino a 10°, si riconosce che i punti trovati sperimentalmente possono considerarsi, entro i limiti dell'errore sperimentale, appartenenti a una retta. La retta I del grafico è stata ottenuta dai punti sperimentali col metodo dei minimi quadrati, attribuendo, per le ragioni spiegate sopra, un peso 1/3 alle misure fatte alle temperature estreme. Il suo coefficiente angolare dovrebbe essere eguale a $0{,}4343\, h\Delta\nu/k$. Si trova così dalle nostre misure

$$h\Delta\nu/k = 9{,}1.10^3$$

e siccome $\Delta\nu = 7792\, c$ risulta

$$h/k = 3{,}9.10^{-11};$$

il suo valore effettivo è invece

$$h/k = 4{,}8.10^{-11}.$$

Come si vede le nostre misure di h/k hanno dato un errore inferiore al 20 %; errore che, dato il genere di misure, può considerarsi soddisfaciente.

Digitized by Google

La retta II del grafico ha una inclinazione corrispondente al valore effettivo del rapporto h/k; la sua equazione corrisponde a porre

$$d_1/d_2 = 0{,}22\, e^{11200/T}$$

dove si può valutare che l'errore del coefficiente 0,22 sia di $\pm$ 0,04.

Per mezzo della (2) e dell'equazione corrispondente che lega N_2 e d_2 risulta allora

$$N_1/N_2 = (0{,}44 \pm 0{,}08)\, e^{11200/T}$$

Se si considera che il rapporto p_1/p_2 dei pesi statistici degli stati 6^2P_1 e 6^2P_2 è 1/2, si vede che i numeri degli elettroni di dispersione per atomo sono gli stessi in ambedue gli stati entro i limiti della nostra approssimazione.

Le nostre misure permettono anche di assegnare un limite inferiore al valore effettivo di questo numero, ammettendo che l'intero tratto di tubo compreso nella stufa fosse pieno di vapore saturo alla temperatura indicata. Si trova in questo modo

$$N_1/n_1 = N_2/n_2 > 1/10$$

il valore reale potrebbe essere benissimo il doppio di questo ed eventualmente anche di più.

Prendiamo questa occasione per rettificare alcuni dati di Mac Lennan [1] sopra il valore dell'indice di rifrazione del vapore di tallio, che risultano enormemente più grandi del vero. Infatti, secondo i risultati di Mac Lennan, il vapore di tallio, già alla temperatura di 540°, dovrebbe avere una rifrattività dell'ordine di grandezza di quella dell'aria a pressione atmosferica; ciò che, tenuto conto che il vapore di tallio a quella temperatura ha una pressione dell'ordine di 1/1000 di mm., corrisponderebbe ad una refrattività atomica circa 100.000 volte più grande di quella che si trova per gli altri vapori metallici. Dalle nostre misure risulta invece una rifrattività dell'ordine di grandezza normale. Inoltre Mac Lennan dà una curva di dispersione con caratteristiche particolari, delle quali non abbiamo trovato alcuna traccia nella forma delle nostre frangie di interferenza.

Fisica. — *Sulla doppia rifrazione paramagnetica.* Nota di A. Carrelli, pres. dal Socio M. Cantone.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Mac Lennan, «Proc. Roy. Soc.», *100*, 191, 1922.

Digitized by Google

Fisica. — *Sopra un nuovo tipo di riflessione dei Raggi X.* Nota di N. CARRARA, pres. dal Socio Corrisp. L. PUCCIANTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Elettrochimica. — *Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore.* Nota di L. MAZZA, pres. dal Socio Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose* [1]. Nota di U. SBORGI, presentata [2] dal Socio R. NASINI.

Recentemente H. Eggert [3] ha eseguito una serie di ricerche sulla passività del ferro, del nichel e del cromo in soluzioni non acquose. Alcune consistono nella misura del potenziale di detti metalli, in soluzioni in alcool metilico e in piridina, dopo che i metalli sono stati in contatto con H_2 o N_2, ecc. Altre sono costituite da elettrolisi con questi metalli anodi in soluzioni di LiCl e di $AgNO_3$ nei suddetti solventi.

L'A. definisce la passività come quello stato nel quale un metallo (che nello stato normale si scioglie con valenza bassa spontaneamente in un acido o essendo anodo di una corrente) passa in soluzione con valenza alta o non vi passa più affatto. Ed aggiunge: « Fin qui tutti i lavori su questo argomento sono stati eseguiti in soluzione acquosa. Sorge quindi la questione: i due stati si verificano anche in altri solventi: o, in altre parole, i metalli passivabili si comportano ugualmente in tutti i solventi? ». Da questo le ricerche di cui sopra, suggerite all'A. da G. C. Schmidt.

Sono ben lieto di vedere che l'importanza di questo problema del comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose sia affermato da così valenti ricercatori e che le esperienze eseguite da H. Eggert portino all'argomento un prezioso contributo, ma mi sia concesso di notare che, alcuni anni sono, a questo problema io ho dedicato una serie di ricerche esposte in varie Note. Nella prima di esse [4] illustravo le ragioni di tali ricerche, mettendo in particolare rilievo la portata di esse per la questione della passività. Eseguivo poi varie elettrolisi con nichel anodo in soluzioni metilalcooliche di cloruro sodico, ioduro potassico, solfato di rame, nitrato di argento.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1927.

(3) « Z. f. Elektroch. und angew. physik. Ch. », 33, 94, 1927.

(4) *Sul comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose. I. Nichel in soluzioni metilalcooliche*, « Atti del R. Ist. Ven. di Scienze, lettere ed arti », 80, 2, p. 1033, 1927.

Digitized by Google

In un'altra Nota [1] fu esaminato il comportamento anodico di Ni, Co, Fe, Cu, Zn, Cd, Al, in soluzioni acetoniche sature di cloruro di litio e di nitrato d'argento.

In una terza Nota [2], il comportamento di Fe, Ni, Co, Cr, in soluzioni etilalcooliche di nitrato di calcio e di nitrato di ammonio.

In tutti questi casi si eseguirono sempre elettrolisi di confronto con soluzioni acquose adoperando lo stesso campione di metallo e mettendoci, fin dove fosse possibile, nelle identiche condizioni per la soluzione acquosa e per quella non acquosa.

Ma si approfittò delle proprietà del solvente per sperimentare anche, in certi casi, il comportamento anodico a temperatura molto bassa (— 10°).

Il resultato di tutte queste espezienze fu che « i metalli che sono passivi e gli anioni che sono passivanti in soluzione acquosa, sono passivi e passivanti anche in soluzione non acquosa ». Questo fu scritto a proposito delle elettrolisi in alcool metilico e in acetone: e fu confermato colle esperienze in alcool etilico.

In alcuni casi fu constatata però anche una qualche influenza attivante o passivante del solvente, nel senso che i percenti di metallo disciolto in confronto al calcolato secondo una certa valenza, non sempre coincidevano in soluzione acquosa e non acquosa.

Le esperienze di H. Eggert si riferiscono ad altro solvente (piridina) e, per quello che riguarda l'alcool metilico, hanno a comune colle mie solo il comportamento del nichel (però, a densità di corrente diversa).

Quindi, come sopra dicevo, esse sono un altro contributo al problema del comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose: e rimane ormai, da tutti questi vari casi, dimostrato come tale comportamento sia sostanzialmente uguale in soluzioni acquose e non acquose.

Poichè ho toccato nuovamente questo argomento, credo anche opportuno di riferire qui, brevemente, altre esperienze che furono da me eseguite in collaborazione colla sig. dott. Maria Sgarzi, appunto nel tempo in cui di tale argomento mi occupai, e che non furono mai pubblicate perchè si aveva allora in animo di estenderle, ciò che poi non si potè più fare.

Queste esperienze avevano sempre lo stesso scopo di un confronto del comportamento anodico in soluzioni acquose, con quello in soluzioni non acquose e si riferiscono al cadmio in soluzioni etilalcooliche di vari sali, ma specialmente di nitrato ammonico. White [3] aveva infatti studiato il com-

(1) *Sul comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose. II. Comportamento dei vari metalli in soluzioni acetoniche.* « Nuovo Cimento », 22, 151, 1921.

(2) *Sul comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose. III.* Fe, Ni, Co, Cr, *in soluzioni etilalcooliche di nitrati*, « Nuovo Cimento », 23, 303, 1922.

(3) « Journ. of phys. Chem. », 15, 723, 1911.

Digitized by Google

portamento di quel metallo anodo in soluzione acquosa di nitrati ed aveva trovato un attacco anormalmente alto. Avendo constatato che per i metalli passivabili si ha comportamento press'a poco identico in soluzioni acquose e non acquose pensai che poteva essere interessante vedere se il parallelismo sussistesse anche in questo caso del cadmio, in cui in un certo senso si ha, per l'attacco, l'inverso di un fenomeno di passività.

Gli apparecchi ed i metodi che adoprammo furono gli stessi descritti nelle Note prima citate ed in particolare nella terza. Si operò in atmosfera e in corrente di azoto e si adoprò sempre un diaframma poroso cilindrico che si poneva intorno al catodo.

Il catodo era una lamina di platino: l'anodo una lamina di cadmio (Kahlbaum), di forma quadrata o rettangolare, della superficie di 4 cm^2 per alcune esperienze e di 20 cm^2 per altre, e dello spessore di 0.4 mm. (ci preparavamo al laminatoio queste lamine da altre di più grosso spessore): molto spesso si adoprò la stessa lamina rismerigliandola. Il cadmio era quasi puro: conteneva tracce di ferro. Come elettroliti adoprammo NaCl, NH_4Cl e NH_4NO_3 purissimi e ne preparammo le soluzioni sature etilalcooliche nel modo già descritto nelle Note precedenti, cioè in modo da assicurare che fosse esclusa dalla soluzione ogni traccia di umidità. Nel preparare le soluzioni cercavamo di avvicinarci alla temperatura che poi avremmo avuta nella cella durante l'elettrolisi.

I risultati ottenuti nelle elettrolisi in cloruri sono quelli riportati nella Tabella I.

TABELLA I.

Elettrolisi in soluzioni etilalcooliche di cloruri.

Elettrolita	Temperatura	Superficie anodica cm^2	Intensità di corrente Amp.	Cu deposto nel Voltametro gr.	Cd calcolato bivalente gr.	Cd disciolto gr.	% del calcolato
NaCl	− 10°	4	0.015—0.01	0.0312	0.0552	0.0540	97.89
»	+ 25°	4	0.03—0.018	0.0460	0.0813	0.0822	101.06
»	+ 50°	4	0.03—0.015	0.0488	0.0863	0.0968	112.19
NH_4Cl	+ 25°	4	0.12	0.1606	0.2840	0.2889	101.74
»	+ 50°	4	0.12	0.1514	0.2677	0.2927	109.34

Nelle esperienze in cloruro sodico (data la solubilità estremamente piccola di questo sale nell'alcool) la corrente cadeva a valori minimi: la tensione ai morsetti si portava fino a 100 volts: all'anodo si formava un precipitato bianco fioccoso che si depositava in fondo alla cella. In cloruro ammonico si formavano sull'anodo dei piccoli fiocchi bianchi che poi si

Digitized by Google

stendevano a formare uno strato che si staccava facilmente dall'elettrodo specialmente se gli si davano piccole scosse: comunque il precipitato formantesi non impediva lo svolgersi normale dell'elettrolisi e, come mostrano i risultati, l'attacco secondo la valenza normale.

Paragonando questi risultati con quelli ottenuti in soluzioni acquose da White [1], si vede che il comportamento è del tutto simile in soluzioni acquose ed etilalcooliche.

Non ci soffermammo ulteriormente su queste elettrolisi in cloruri e rivolgemmo invece la nostra attenzione a quelle in nitrato ammonico. Riportiamo nella tabella seguente i risultati ottenuti, che, come si vede, si riferiscono a elettrolisi eseguite sistematicamente a — 10°, + 25° e + 50° a densità di corrente di 3, 0.3. 0.03, Amp./dm²

TABELLA II.

Elettrolisi in soluzioni etilalcooliche di nitrato ammonico.

Temperatura	Superficie anodica cm²	Densità di corrente Amp./dm²	Cu deposto nel Voltametro gr.	Cd calcolato bivalente gr.	Cd disciolto gr.	% del calcolato
— 10°	4	3	0.2374	0.4198	0.5974	142.30
+ 25°	4	3	0.2686	0.4749	0.7454	156.95
+ 25°	4	3	0.2099	0.3711	0.5784	155.85
+ 50°	4	3	0.2248	0.3975	0.6858	172.53
+ 50°	4	3	0.1317	0.2329	0.3950	169.63
— 10°	4	0.3	0.0204	0 0 .61	0.0672	186.30
+ 25°	4	0.3	0.0274	0.0484	0 0972	200.63
+ 50°	4	0.3	0.0273	0.0483	0.1045	216.49
+ 25°	20	0.03	0.0392	0.0693	0.7579	1093.5
+ 50°	20	0.03	0.0387	0.0684	0.7566	1105.7

Nelle esperienze a densità alta di corrente, sull'anodo si constatava il formarsi dapprima di fiocchetti bianchi che, quando si operava a 25°, a poco a poco si stendevano a formare strati disposti come le pagine di un libro che si staccavano con facilità: a — 10°, invece, il precipitato era a forma di scaglie; a 50° la quantità di precipitato era molto minore; fatto, questo, dovuto alla aumentata solubilità nell'alcool caldo. Inoltre si aveva sull'anodo sempre uno sviluppo di gas. Il liquido anodico era acido, il liquido catodico basico e aveva odore di ammoniaca (a 50° questa si svolgeva e il liquido catodico era neutro e inodoro).

(1) Loc. cit.

Digitized by Google

Era già noto dalle esperienze di White un comportamento consimile in soluzione acquosa: ma per avere una conferma che ciò accade anche in condizioni identiche a quelle in cui si era operato in soluzione alcoolica, si eseguirono in soluzione acquosa le esperienze notate nella seguente

TABELLA III.

Elettrolisi in soluzione acquosa di NH_4NO_3 3 %

Temperatura	Superficie anodica cm^2	Densità di corrente Amp /dm^2	Cu deposto nel Voltametro gr.	Cd calcolato bivalente gr.	Cd disciolto gr.	% del calcolato
+ 25°	4	3	0.1312	0.2320	0.4447	191.7
+ 50°	4	3	0.1250	0.2210	0.4733	214.14

Si volle infine vedere se in soluzione etilalcoolica di nitrato ammonico si avesse, senza alcun passaggio di corrente, un attacco del cadmio quale si ha in soluzione acquosa. A questo scopo si immerse una delle solite lamine di 4 cm^2 di superficie, in una soluzione etilalcoolica satura, facendo gorgogliare azoto. Si ebbero i seguenti risultati:

Dopo 2 ore a 50°: perdita di peso gr. 0.1567
» 2 » 25°: » » » 0.0895
» 2 » — 10°: » » » 0.0151

Vi è dunque un attacco chimico che cresce col crescere della temperatura. È questo attacco chimico che si sovrappone evidentemente all'attacco elettrochimico, durante l'elettrolisi; ciò è indicato anche dai risultati delle ultime esperienze della tabella II dove si aveva una superficie molto maggiore (lamina di 20 cm^2).

Il parallelismo tra quello che accade in soluzione acquosa e quello che accade in soluzione etilalcoolica è completo, ed anche queste ricerche riferentisi ad un caso di attacco anormalmente alto, confermano che generalmente il comportamento anodico dei metalli è nelle grandi linee uguale in soluzioni acquose e in soluzioni non acquose.

Digitized by Google

Chimica. — *I sistemi* $AlCl_3 — HCl — H_2O$, $KCl — HCl — H_2O$ *e* $KNO_3 — HNO_3 — H_2O$ *a 25°*. Nota (III) di G. Malquori [1] presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Facendo seguito a due pubblicazioni precedenti [3] rendo noti i risultati delle ricerche sulle variazioni di solubilità che i cloruri di alluminio e di potassio subiscono in presenza di acido cloridrico, e che il nitrato di potassio subisce in presenza di acido nitrico alla temperatura di 25°.

Groschuff [4] ha già studiato due isoterme, a 0° e a 21°, del sistema $KNO_3 — HNO_3 — H_2O$. L'isoterma a 21° è stata però individuata solo con pochi punti, e pertanto per questo motivo, e anche per dare maggiore omogeneità ai miei dati sperimentali, ho creduto opportuno descriverla di nuovo a 25°.

Anche per il cloruro di potassio si trovano riportati alcuni valori di solubilità in presenza di acido cloridrico [5].

I risultati delle esperienze sono riportati nelle tabelle 1, 2, 3 e riassunti nella figura.

Tabella N. 1.

Sistema $AlCl_3 — HCl — H_2O$ a 25°

Composizione della soluzione		
$AlCl_3$ %	HCl %	H_2O %
34.08	—	65.92
29.75	4.15	66.10
27.98	5.09	66.93
18.10	11.21	70.69
15.25	14 07	70.68
10.11	19.43	70.46
7.95	23.19	68.86
2.49	30.17	67.54
0.98	40.98	58.01

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1927.

(3) Questi « Rendiconti », vol. V, 1927, fasc. 6°, p. 451 e fasc. 7°, p. 510.

(4) « Z. An. Chem. », *40*; 1 ; (1904).

(5) Seidell, *Solubilities of inorg a. org. compounds*; 2ª ed., New-York, (1919), p. 516.

Digitized by Google

TABELLA N. 2.

SISTEMA $KCl — HCl — H_2O$ A 25°

Composizione della soluzione		
KCl %	HCl %	H_2O %
26.31	—	73.69
20.93	3.31	75.26
15.87	6.15	77.98
10.28	10.31	79.41
6.51	15.07	78.42
2.70	23.15	74.15
1.87	28.05	70.08
1.19	31.83	66.98
0.15	40.98	58.77

TABELLA N. 3.

SISTEMA $KNO_3 — HNO_3 — H_2O$ A 25°

Composizione della soluzione		
KNO_3 %	HNO_3 %	H_2O %
27.31	—	72.69
25.03	10.30	64.67
24.13	13.97	61.90
26.12	20 11	53.77
35.10	29.56	35.31
43.28	44.17	12.55
49.99	50.01	—

Digitized by Google

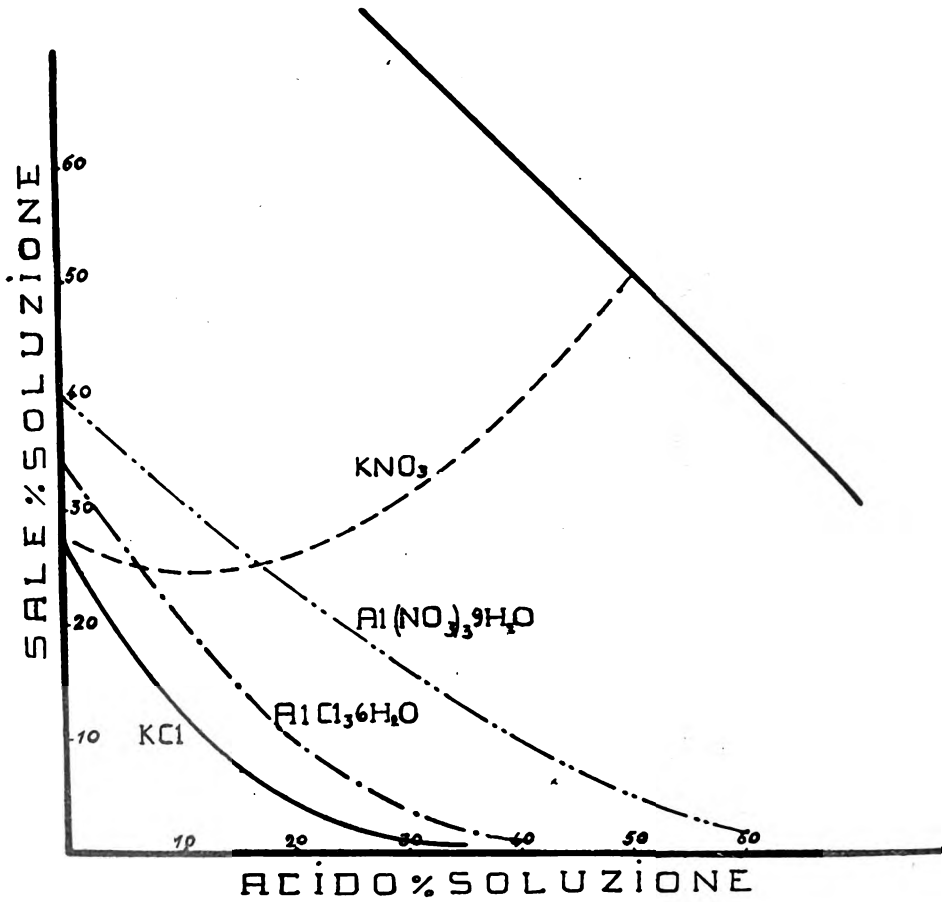


Diagramma 3.

Le solubilità del cloruro di alluminio e del cloruro di potassio diminuiscono entrambe per la presenza di acido cloridrico, e quella del primo più di quella del secondo. (Per una concentrazione del 10 % di acido cloridrico, sono presenti nella soluzione rispettivamente il 12 % di KCl e il 20.5 % di $AlCl_3$).

Nel caso dei nitrati le cose invece vanno diversamente. Nella figura infatti è riportata la curva di solubilità di $Al(NO_3)_3$, $9H_2O$ quale è stata determinata da Jnamura [1]. Come si vede, mentre il nitrato di potassio aumenta di solubilità per la presenza di acido nitrico in soluzione, quello di alluminio invece segue la regola generale e la sua proporzione nella soluzione diminuisce col crescere del contenuto di acido.

(1) « Me. Coll. Sc. », Kyoto, *4*; 105 (1919).

Digitized by Google

Chimica. — *Sulla identità di struttura cristallina dei composti* Fe_3S_4 *e* FeS. Nota [1] di C. FONTANA, presentata [2] dal Socio G. BRUNI.

Nella letteratura chimica vengono descritti, come è ben noto, diversi solfuri di ferro, oltre FeS e FeS_2, come individui chimici. Accanto a questi solfuri vi è infatti la serie numerosa delle pirrotiti dalla formula generale $FeS + S_x$. Di queste pirrotiti sono state studiate la struttura e il reticolo cristallino della modificazione β (la stabile a bassa temperatura) da vari autori [3], esaminando dei campioni di pirrotite naturale e di pirrotite artificiale, ottenuti questi ultimi da solfato ferroso e solfuro ammonico (che danno marcassite, la quale per riscaldamento dà pirrotite), da ferro e zolfo allo stato elementare, da decomposizione nel vuoto di pirite. In tutti i casi si è giunti alla conclusione che i composti della formula generale $FeS + S_x$ presentano la struttura cristallina del solfuro ferroso e che gli atomi di zolfo in più non alterano in modo sensibile il reticolo cristallino, come risulta dalle costanti qui riportate:

solfuro ferroso (troilite)	$a = 3{,}43$	$c = 5{,}79$	$k = 1{,}686$
β-pirrotiti naturali ed artificiali	$a = 3{,}43$	$c = 5{,}68$	$k = 1{,}666$

Le β-pirrotiti prese in esame dai citati autori avevano un contenuto massimo di zolfo del 40,30 %, corrispondenti cioè alla formula $Fe_3S_{3{,}81}$.

Nel presente lavoro riferisco su di una preparazione di pirrotite artificiale fatta da Fe_3O_4 artificiale e H_2S a 1000° circa. Il prodotto ottenuto, del quale è detto sotto, si è dimostrato identico alle β-pirrotiti artificiali e naturali dei precedenti autori.

Scopo specifico del lavoro era quello di riscontrare se nelle condizioni date da Sidot [4] si formi o meno il preteso composto Fe_3S_4. Secondo Sidot al calor rosso chiaro si ha la reazione:

$$FeO \cdot Fe_2O_3 + 4\,H_2S \rightarrowtail FeS \cdot Fe_2S_3 + 4\,H_2O$$

Si viene così ad affermare l'esistenza di detto composto come un solfoferrito di ferro, del quale l'autore osserva anche la magnetipolarità.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 3 aprile 1927.

(3) ALLEN, CRENSHAW, JOHNSTON, LARSEN, « Z. anorg. Chem. », *76* (1912), 201; ALSEN, « Geologiska Föreninges i Stockholm Förhandligar », *47* (1925), 19; JONG, « Physica, Neederlandsch Tijdschrift voor Naturkunde », *5* (1925), 194.

(4) « Compt. rend. », *66* (1868), 1257.

Digitized by Google

Ho preparato il prodotto usando le indicazioni di Sidot. In un tubo di porcellana ho posto il composto Fe_3O_4 artificiale Kahlbaum e vi ho fatto passare una corrente di idrogeno solforato secco; quindi, sempre in corrente di detto gas, ho iniziato il riscaldamento del tubo stesso, portando la temperatura del forno a 1000° circa e mantenendola per due ore. Il raffreddamento si è effettuato pure in corrente di idrogeno solforato.

Il prodotto ottenuto ha l'aspetto di una polvere cristallina, granulare, omogenea al microscopio e di un color grigio giallastro metallico, simile alla pirite di ferro polverizzata. Il prodotto ha dato all'analisi i seguenti risultati:

Fe	trovato	54,85 %	calcolato per Fe_3S_4		55,10
S	»	45,20 »	»	»	44,90

I risultati analitici si accordano quindi con la formula bruta Fe_3S_4.

Per decidere o meno se questo prodotto era un individuo chimico a sè con struttura cristallina propria, ho usato l'analisi röngtenografica, l'unico metodo che poteva con assoluta certezza risolvere questa questione. Data la natura della sostanza in esame, il metodo da usarsi era quello delle polveri; ho impiegato una radiazione X di ferro puro ($\lambda_\alpha = 1{,}9344$ Å, $\lambda_\beta = 1{,}7530$ Å), ottenendo un fotogramma che mi ha permesso di calcolare con sufficiente precisione la struttura del prodotto in esame. Come è noto il ferro è l'elemento più adatto da usarsi come anticatodo nello studio dei preparati di ferro; il rame non si presta assolutamente allo scopo.

$Fe_3S_4 = 3FeS + S$ - Anticatodo di ferro - Spessore del preparato 1.5 mm.

N.	θ	i	$\operatorname{sen}\frac{\theta'}{2}$	d	K	$h_1\ h_2\ h_4$	a
1	39,7	d	0,3290	2,940	α	100	3,39
2	44,9	f	0,3713	2,605	α	101	3,39
3	51,9	d	0,4280	2,260	β	102	—
4	57,7	ff	0,4737	2,042	α	102	3,40
5	62,6	d	0,5115	1,891	β	110	—
6	69,8	ff	0,5650	1,712	α	110	3,40
7	76,3	mf	0,6114	1,582	α	201	3,41
8	86,6	md	0,6807	1,421	α	202	3,42
9	124,6	mf	0,8841	1,094	α	121	3,42
10	135,5	mf	0,9247	1,046	α	212	3,43

Digitized by Google

La tabella ha i simboli già usati in precedenti lavori. Come si può dedurre dall'esame della costante reticolare a, il röngtenogramma si ordina nel sistema esagonale con un rapporto assiale $c/a = 1{,}665$. Possiamo ora confrontare i dati ottenuti con quelli degli altri autori:

troilite e solfuro ferroso	$a = 3{,}43$	$c = 5{,}79$	$k = 1{,}686$
β-pirrotiti degli altri autori	$a = 3{,}43$	$c = 5{,}68$	$k = 1{,}664$
β-pirrotite qui ottenuta	$a = 3{,}43$	$c = 5{,}69$	$k = 1{,}665$

Resta così dimostrato che la reazione a 1000° ed a pressione ordinaria tra magnetite e idrogeno solforato ha l'andamento:

$$Fe_2O_3 \cdot FeO + 4\,H_2S \rightarrowtail 3\,FeS + S + 4\,H_2O$$

Lo zolfo che resta nel prodotto non occupa posizione fissa e caratteristica nel reticolo. Senza poter qui affermare di quale tipo di soluzione solida si tratti, è certo che l'esistenza di Fe_3S_4 come solfoferrito dovrebbe avere per conseguenza una struttura propria della sostanza e, sotto questo punto di vista, si può ritenere che l'esistenza di Fe_3S_4 come individuo chimico non risulti provata nel prodotto in questione.

La quantità notevole di zolfo che il prodotto contiene non deve sorprendere, perchè si hanno altri esempi di elementi e molecole che entrano in reticoli cristallini senza posizione definita, come il carbonio in soluzione solida nel ferro e l'acqua nelle zeoliti.

Con questo non si vuol escludere che si possa, specialmente in natura, trovare un composto del tipo della linneite dalla formula $(Co, Ni)_3S_4$, che, come ha recentemente dimostrato G. Menzer [1], è un individuo chimico. L'analogo composto di ferro dovrebbe, con tutta probabilità, cristallizzare nel sistema monometrico, classe dello spinello, come la magnetite e la linneite. Anche artificialmente, in condizioni diverse, è possibile si riesca a preparare il prodotto di ferro analogo a quello di nichel e cobalto che si trova in natura.

P.S. - Durante la correzione delle bozze di questo lavoro, mi è pervenuto il fasc. 3° del vol. 161 della «Z. anorg. u. allg. Chem.», uscito il 5 aprile 1927, in cui è la Memoria: *I composti* Fe_3S_4, Co_3S_4, Ni_3S_4 *e la loro struttura*, di W. F. de Jong e H. W. V. Willems. I risultati ottenuti da questi AA. concordano esattamente con i miei, avendo essi pure mediante l'analisi röntgenografica riscontrato che con i mezzi attalmente a disposizione non si può preparare il composto Fe_3S_4, che il prodotto di tali reazioni è sempre FeS e che lo zolfo, che vi si trova in eccesso, è in soluzione. (15/4/27).

(1) «Z. f. Kristall.», *64* (1926), 506.

Digitized by Google

Chimica. — *La struttura cristallina dello iodio.* Nota I [1] di A. FERRARI, presentata [2] dal Socio G. BRUNI.

I reticoli degli elementi sono stati i primi ad essere studiati col metodo röntgenografico. La determinazione della loro struttura è particolarmente semplificata da due fatti: l'eguaglianza di tutti gli atomi che costituiscono la cella elementare e l'alta simmetria che presentano i reticoli della maggior parte di essi.

Tutti gli elementi a carattere metallico infatti cristallizzano nel sistema monometrico o in sistemi uniassici: esagonale e tetragonale. Le celle elementari di questi metalli si raggruppano in pochi tipi contenenti un numero limitato di atomi.

Negli elementi a carattere metalloidico la struttura sembra essere meno semplice. Così l'arsenico, l'antimonio, il bismuto, il selenio e il tellurio sono ancora uniassici romboedrici, ma la posizione di parecchi atomi non è rappresentabile con coordinate semplici come nel caso dei metalli; ma solo introducendo parametri variabili da elemento a elemento. Lo zolfo e l'iodio sono biassici e precisamente rombici.

Lo zolfo è stato studiato da Mark e Wigner [3], che ritrovarono per esso una cella elementare straordinariamente grande nella quale sono contenuti ben 128 atomi.

Nessuna pubblicazione sull'esame röntgenografico dell'iodio è apparsa fino ad ora.

Il grande interesse che la conoscenza del reticolo dello iodio, presenta anche per lo studio di molte questioni chimiche mi ha indotto ad affrontare il problema.

L'iodio è stato studiato dai cristallografi [4] e riconosciuto rombico coi rapporti assiali:

$$a : b : c = 0.6644 : 1 : 1.3653$$

Ho iniziato lo studio coi raggi Röntgen dell'iodio facendo dei fotogrammi di questa sostanza col metodo delle polveri, impiegando come preparati sia dei tubetti di vetro Lindemann al borato di litio ripieni di iodio, sia dei cilindretti fusi di questo elemento.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.
(2) Nella seduta del 20 marzo 1927.
(3) « Zeitsch. f. physik. Chemie », *111*, 398 (1924).
(4) « Groth. Chem. Krystallographie », *1*, Leipzig, 1906, p. 39.

Digitized by Google

In entrambi i casi i fotogrammi erano molto deboli e con poche linee, per cui un calcolo del reticolo basato sopra di essi sarebbe stato difficile e sopratutto troppo incerto. Per la facilità con cui l'iodio dà cristalli ben formati apparve subito preferibile impiegare il metodo di Laue accoppiato a quello del cristallo rotante. Ho scelto così dei cristalli ottenuti per sublimazione, presentanti l'aspetto di lamine appiattite a contorno romboidale. La faccia rombica si riconosce facilmente essere la { 010 } pel fatto che le diagonali del rombo stanno tra loro nel rapporto degli assi a e c.

Il fotogramma di Laue secondo questa faccia è riprodotto nella fig. 1 [1]; e la proiezione gnomonica dello stesso (fig. 2) conferma trattarsi della { 010 }, come pure l'esattezza dei rapporti assiali dedotti dai cristallografi.

Collo stesso cristallo è stato eseguito il fotogramma col metodo del cristallo rotante impiegando un tubo Coolidge ad anticatodo di nichel e una camera nella quale il diametro della pellicola è di mm. 57.18. Questo fotogramma è riprodotto nella figura 3, e le misure dei tratti più intensi corrispondenti alle distanze reticolari sottomultiple della { 010 } sono date nella tabella I.

TABELLA I.

$\theta/_2$	sen $\theta/_2$	K	$d = \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen} \theta/_2}$	h_1 h_2 h_3	b	Intensità osservate
12.0	0.208	β	3.600	0 2 0	7.200	media
13.4	0.232	α	3.565	0 2 0	7.130	forte
24.9	0.421	β	1.780	0 4 0	7.120	debole
27.7	0.465	α	1.781	0 4 0	7.120	media
44.0	0.695	α	1.191	0 6 0	7.146	debole

Da questa si deduce come valore medio di b, 7.144 Å. Con un altro cristallo d'iodio della stessa forma del precedente ho eseguito un fotogramma sempre col metodo del cristallo rotante, ma con anticatodo di rame: il calcolo di esso è dato nella tabella II.

(1) Come si vede nella fig. 1 la direzione del fascio non corrisponde perfettamente con quella dell'asse b. Un fotogramma perfettamente centrato è difficile da eseguire perchè la grande tensione di vapore dell'iodio, fa sì che dopo un paio d'ore d'esposizione il cristallo sia completamente volatizzato. Non si possono quindi fare collo stesso cristallo parecchi fotogrammi come sarebbe necessario per orientare perfettamente la lamina cristallina.

Digitized by Google

TABELLA II.

$\theta/_2$	sen $\theta/_2$	K	$d = \frac{\lambda}{2 \text{ sen } \theta/_2}$	$h_1\ h_2\ h_3$	b	Intensità osservate
11.2	0.196	β	3.550	0 2 0	7.100	media
12.5	0.215	α	3.580	0 2 0	7.160	forte
22.7	0 386	β	1.800	0 4 0	7.200	debole
25.2	0.426	α	1.807	0 4 0	7.228	media
39.7	0.638	α	1.205	0 6 0	7.230	debole

Il valore medio di b dedotto da questo secondo fotogramma è 7.184 Å. Assumendo per b la media dei due valori precedenti ossia 7.164 Å, e servendoci dei rapporti assiali noti dalle misure cristallografiche, si calcolano le seguenti dimensioni della cella elementare:

$$a = 4.760 \text{ Å}$$
$$b = 7.164 \text{ Å}$$
$$c = 9.783 \text{ Å}$$

dalle quali risulta per la stessa un volume di 333.64 Å^3.

Se si ammette che la cella contenga 8 atomi di iodio la densità di questo dovrebbe essere:

$$\frac{8 \times 126.92 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ gr.}}{333.64 \times 10^{-24} \text{ cm}^3} = 5.052 .$$

La densità sperimentale è 5.03 [1]: il perfetto accordo di questi valori conferma l'esattezza della detta supposizione.

Calcolando colla formola:

$$n\lambda = \frac{2\, b \text{ sen } \theta/_2}{\sqrt{\frac{h_1^2}{0.6644^2} + h_2^2 + \frac{h_3^2}{1.3653^2}}} ,$$

dalla posizione delle macchie di Laue le lunghezze d'onda delle radiazioni che le hanno generate, si ottengono assumendo $b = 7.16$ Å, i valori della tabella III.

(1) « Groth. », loc. cit.

Digitized by Google

TABELLA III.

$h_1\ h_2\ h_3$	Intensità	$n\lambda$	$h_1\ h_2\ h_3$	Intensità	$n\lambda$	$h_1\ h_2\ h_3$	Intensità	$n\lambda$
0 1 4	mf	1.455	1 1 3	m	1.740	2 2 7	mf	0.731
0 1 5	m	0.990	1 1 4	d	1.190	2 2 9	d	0.495
0 1 6	d	0.708	1 1 5	m	0.860	2 2 11	md	0.365
1 3 10	m	0.650	1 1 6	ff	0.629	3 1 1	ff	0.641
1 3 12	d	0.490	1 1 7	m	0.460	3 1 2	mf	0.600
1 3 13	d	0.415	1 1 8	m	0.373	3 1 3	ff	0.536
4 2 1	md	0.701	1 1 9	m	0.302	3 1 5	ff	0.405
4 2 3	mf	0.650	1 1 10	md	0.247	2 1 0	mf	1.431
4 2 5	md	0.584	- - -	—	—	2 1 2	f	1.160
4 2 7	md	0.475	- - -	—	—	2 1 3	md	0.963
- - -	—	—	- - -	—	—	2 1 4	d	0.764

Vediamo così che nessuna lunghezza d'onda risulta inferiore a 0.185 Å ossia alla minima ammissibile per la differenza di potenziale di 67000 Volta alla quale è stato eseguito il fotogramma $\left(\lambda \text{ minimo} = \frac{h}{eV} = \frac{12.3}{V} \quad V = \text{numero dei chilovolta}\right)$.

Nella grande maggioranza i valori sono assai più grandi del minimo, per cui sembra poco probabile che le costanti della cella siano multiple di quelle sopra calcolate.

Conosciuta così la cella elementare dell'iodio mi è stato possibile interpretrare le deboli e incerte linee che si riscontrano nei citati fotogrammi ottenuti col metodo delle polveri e con anticatodo di ferro.

L'interpretazione degli stessi è data nella tabella IV.

La costante reticolare *b* è calcolata colla formola

$$b = d_{h_1 h_2 h_3} \sqrt{\frac{h_1^2}{a^2} + h_2^2 + \frac{h_3^2}{c^2}}$$

Gli angoli osservati sono corretti colla formola di Pauli [1] ritenendo il diametro del preparato 1.5 m/m.

(1) « Zeitsch. für Kristall. », vol. 56, p. 604.

Digitized by Google

Le intensità apprezzate ad occhio, dato che i fotogrammi sono debolissimi, non possono corrispondere che in modo assai grossolano colle reali.

TABELLA IV.

N.	$\theta/2$	sen $\theta/2$	K	$d = \frac{\lambda}{2 \text{ sen } \theta/2}$	$h_1\ h_2\ h_3$	b	Intensità osservate
1	11.1	0.182	β	4 820	1 0 0	7.25	d
2	12.4	0.202	α	4.708	1 0 0	7.19	f
3	13.2	0.216	β	4.040	0 1 2	7.17	d
4	14.7	0.240	α	4.030	0 1 2	7.16	f
5	17.4	0.228	α	3.360	0 2 1	7.16	m
6	24.1	0.399	α	2.422	0 0 4	7.11	m
7	26.9	0.443	α	2.182	2 1 0	7.10	mf
8	28.4	0.466	α	2.075	1 3 1	7.14	mf
9	31.5	0.514	α	1.880	0 1 5	7.14	md
10	44.4	0.695	α	1.392	1 5 0	7.10	md

Da questa tabella si vede che anche le linee del fotogramma di Debye dell'iodio vengono tutte spiegate con una cella rombica delle predette dimensioni.

Lo studio dei cristalli presentanti facce diverse dalla {010}, sarebbe estremamente utile per determinare senza incertezza la disposizione degli atomi nella cella elementare.

Secondo Groth (1) la faccia {001} si otterrebbe nella sublimazione dell'iodio con la stessa frequenza della {010}; ma nell'esame di un gran numero di cristalli ottenuti per questa via ho sempre ritrovato la {010}, mai la {001}. Per evaporazione di soluzione di iodio in solventi varii, ho ottenuto invece cristalli presentanti ben sviluppate forme diverse dalla {010}.

Queste faccie però presentano, come appare dai fotogrammi di Laue, un solo asse di simmetria e il loro studio che riesce per questa ragione complicato, è ancora in corso. Su esso spero poter presto riferire dando la struttura della cella dell'iodio.

Riassumendo. - L'iodio presenta un reticolo rombico la cui cella elementare è costituita da un parallelepipedo ortogonale contenente 8 atomi e i cui spigoli sono:

$$a = 4.760\ \text{Å} \quad , \quad b = 7.164\ \text{Å} \quad , \quad c = 9.783\ \text{Å}\ .$$

Sembra poco probabile ammettere una cella multipla di questa.

(1) «Groth.», loc. cit.

Digitized by Google

Chimica. — *Azione dell'acido peracetico sopra gli acetilderivati delle ammine aromatiche.* Nota di D. BIGIAVI, presentata [1] dal Socio A. ANGELI.

L'ammino-gruppo delle basi aromatiche può essere ossidato a $-NO$ e $-NO_2$ e a questo scopo si presta l'acido di Caro e in alcuni casi anche il permanganato. L'acido peracetico invece, oltre al termine di massima ossidazione, dà anche l'azossicomposto, che deriva probabilmente da una condensazione dell'idrossilammina con il nitrosoderivato formatisi come termini intermedi di ossidazione. Così, p. es., l'aminoazobenzolo si trasforma nel composto:

$$C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N \cdot C_6H_4 \cdot N = N \cdot C_6H_5$$ [2]

A risultati diversi si giunge quando si prendono in esame gli acetilderivati delle ammine primarie aromatiche; ci siamo limitati a ricercare l'azione dell'acido peracetico sopra gli acetilderivati di alcune ammine. In tutti i casi esaminati (e cioè: acetanilide, p-bromo-, p-nitroacetanilide, acetilderivato della p-toluidina, della ps-cumidina, dei due p-aminoazossibenzoli) si giunge, non però con buoni risultati e rendimenti, ai nitroderivati, con la trasformazione:

$$-NH\,CO\,CH_3 \rightarrowtail -NO_2$$

e in genere non abbiamo trovato la formazione di azossiderivati.

Si può pensare che l'acetile si stacchi con facilità e che si ripristini l'ammina sotto l'azione dell'acido peracetico: una tale azione idrolizzante di quest'acido non si verifica comunemente quando esso si trovi in presenza di un gruppo $-O \cdot COCH_3$, poichè, per esempio, l'acetilderivato del p-ossiazobenzolo: $C_6H_5 \cdot N = N \cdot C_6H_4 \cdot O \cdot CO \cdot CH_3$ dall'acido peracetico viene ossidato, senza formazione di altri prodotti secondari, nella miscela dei due acetilderivati dei corrispondenti benzol-azossifenoli isomeri e anche l'aggruppamento $-O \cdot CO \cdot C_6H_5$ conserva una notevole stabilità a questo mezzo, poichè il benzoilderivato del p–ossiazobenzolo ossidato con acido peracetico in presenza di eccesso di anidride acetica, fornisce la miscela dei due ben-

(1) Nella seduta del 3 aprile 1927.
(2) VALORI, «R. A. L.», *23*, II, 215 (1914).

Digitized by Google

zoilderivati dei benzolazossifenoli isomeri. Invece quando, per esempio, il radicale benzoilico è legato a un azoto, come nel caso del composto di Mc. Pherson:

$$C_6H_5 \cdot N(CO\,C_6H_5) - N : C_6H_4 : O$$

esso tende con facilità, sotto l'azione dell'acido peracetico (non dell'acido acetico), a staccarsi e dare il benzolazofenolo e successivamente i suoi prodotti di ossidazione [1].

Il fatto però che fra i prodotti di ossidazione di composti contenenti l'aggruppamento: $-NH\cdot CO\cdot CH_3$ si riscontrino i nitroderivati e non gli azossicomposti (che invece si formano prevalentemente nell'ossidazione di termini $-NH_2$), potrebbe far pensare che il gruppo acetilico si stacchi solo dopo che l'azoto ha subito un'ossidazione e in seguito ad una azione di peridrolisi, con un meccanismo di questo genere:

$$-NH\cdot CO\cdot CH_3 \rightarrow -N(OH)-CO\,CH_3 \rightarrow -N(OH)(OH) + OH\cdot CO\cdot CH_3$$

Il nitrosoderivato che prende origine viene successivamente ossidato in modo rapido a nitrocomposto, e non può per l'assenza di aril-idrossilammina dare l'azossiderivato.

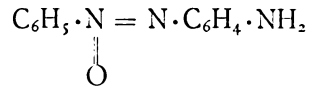
Come già abbiamo accennato, facendo agire l'acido peracetico sull'acetilaminoazobenzolo (para) alla temperatura di 50°-60° per qualche giorno si forma la miscela dei p-nitroazossibenzoli (p. f. 148° e p. f. 153°), ma questi non sono il principale prodotto della reazione: lo sono invece i due acetilderivati degli aminoazossibenzoli isomeri, già preparati nello stesso modo da Passerini [2] e i cui punti di fusione non coincidono con quelli da me trovati. Secondo quanto ho potuto osservare, questi due acetilderivati vengono facilmente saponificati dall'acido cloridrico al 20 % e forniscono i cloridrati dei due p-aminoazossibenzoli, solubili a caldo nell'acido di quella concentrazione.

Si approfitta appunto di questa proprietà per filtrare a caldo la soluzione dei cloridrati, lasciando indietro la miscela dei nitroazossibenzoli, che rappresenta circa il 30-35 % della reazione, se il perhydrol è in quantità lievemente superiore al calcolato, se la temperatura non supera i 50° e il riscaldamento non è troppo prolungato; in caso contrario aumenta il rendimento dei nitroderivati.

(1) Bigiavi, «G», *57*, (1927).
(2) R. A. L. *30*, II, 137 (1921); «G.», *51*, 229 (1921).

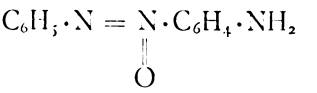
Digitized by Google

Riporto qui alcuni dati riferentisi ai due isomeri, parlando in seguito della struttura che abbiamo loro attribuito:



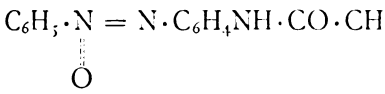
(lamine giallo-marroni)

(p. f. 136°)
(sec. Passerini: p. f. 136°)



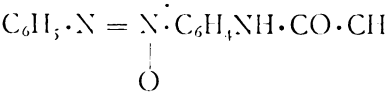
(aghetti giallo-canarino)

(p. f. 133°) (1)
(sec. Passerini: p. f. 114°)



(aghi setacei giallo-chiari)

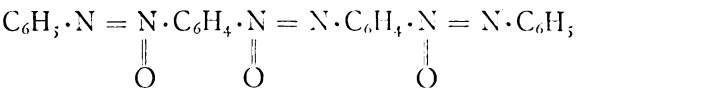
(p. f. 151°)
(sec. Passerini: p. f. 166°)



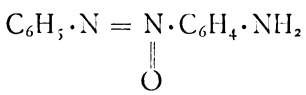
(giallo-citrino)

(p. f. 172°)
(sec. Passerini: p. f. 143°)

Passerini ne ha stabilita la struttura ossidando gli stessi aminoazossibenzoli con perhydrol e acido acetico: è noto che con tale ossidante da composti contenenti un gruppo $-NH_2$ si giunge prevalentemente agli azossiderivati. Egli infatti dall'isomero (p. f. 114°) ha avuto un trisazossibenzolo (p. f. 230°) la cui struttura era già stata determinata da Angeli (2):



e di conseguenza al suddetto aminoazossibenzolo compete la struttura:



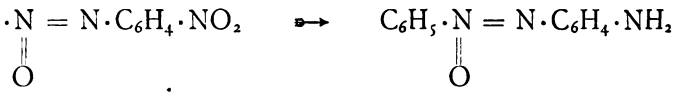
perchè un tale composto, e non l'isomero, può dare per ossidazione e condensazione dei termini nitroso e idrossilammina formatisi il triazossiderivato suddetto.

Conferma di questa struttura attribuita ad uno dei due isomeri, si ha da quanto è riferito sul « Beilstein »: Schmidt (1879) ha ottenuto per riduzione con solfuro d'ammonio in soluzione alcalina all'ebollizione dal p-nitroazossibenzolo di Zinin, oltre al p-aminoazobenzolo, anche un p-aminoazossi-

(1) Il p. f. misto dei due isomeri (136° e 133°) è 113°-120°.
(2) « R. A. L. », *22*, I, 360 (1913).

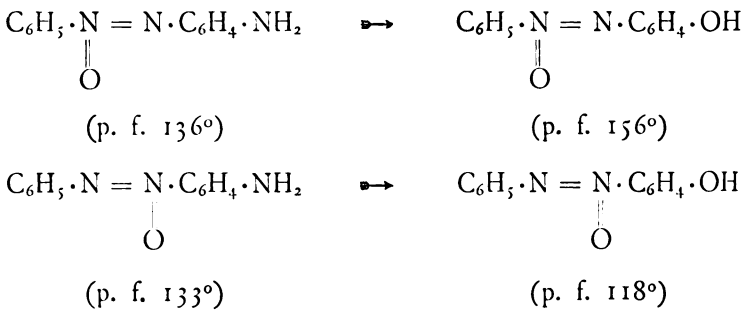
Digitized by Google

benzolo fondente a 138°.5, che è certamente identico all'α-aminoazossibenzolo fondente a 136°. Ora il nitroazossibenzolo di Zinin ha appunto la costituzione di un α-azossiderivato, secondo le ricerche e considerazioni di Angeli:



A riprova di questi dati di Schmidt è stata da me eseguita la riduzione catalitica del suddetto nitroderivato, che ha condotto appunto, insieme ad altri prodotti, all'aminoazossibenzolo a p. f. 136°.

Le nostre esperienze ci hanno condotto a portare ancora un'altra riprova alla struttura attribuita ai due isomeri da Passerini, col trasformare, dopo diazotazione e sostituzione del gruppo diazo- con l'ossidrile, i due p-aminoazossibenzoli nei due già noti, e di struttura ben determinata, p-ossiazossibenzoli:



Sono da rilevarsi delle interessanti differenze di comportamento. Così, per esempio, il β-derivato è molto più stabile al permanganato in soluzione diluita acquosa o anche acetonica, e come esso si comporta la p-nitroanilina. I due p-ossiazossibenzoli e i due o-ossiazossibenzoli [1], hanno una diversa stabilità allo stesso ossidante, che ben si accorda con quella dei due aminoazossibenzoli.

Riporto alcune proprietà dei due isomeri p-aminoazossibenzoli:

(136°)	(133°)
dà un isodiazotato (versando in alcali la soluzione del sale di diazonio),	dà un isodiazotato,
poco stabile al $KMnO_4$,	stabile al $KMnO_4$ (come la p-nitroanilina),

(1) ANGELI, «G.», *51*, 35 (1921).

Digitized by Google

si condensa facilmente con nitroso-benzolo,	si condensa più lentamente con nitrosobenzolo,
ha deboli proprietà coloranti,	non ha proprietà coloranti,
non si riduce con stannito, (temperatura ordinaria).	si riduce con stannito, (temperatura ordinaria).

Ricordiamo poi che, contrariamente a quel che si verifica nel p-aminoazobenzolo, dimetilaminoazobenzolo, nel p–p′-diaminoazobenzolo, che forniscono dei sali con HCl, H_2SO_4 intensamente colorati in rosso–violetto e solo dei sali instabili colorati in rosso chiaro, i due p-aminoazossibenzoli isomeri danno dei cloridrati e solfati incolori. Se prendiamo in considerazione l'ipotesi che la colorazione violetta dei sali degli aminoazocomposti derivi da una forma chinoide della molecola, questa non è più possibile negli azossicomposti, da cui il fatto dell'assenza di sali intensamente colorati che si riscontra in questo gruppo di sostanze, perchè, oltre ai due isomeri da me esaminati, ricordo che l'ossido del dimetilaminoazossibenzolo:

$$C_6H_5 \cdot N = N(:O)\, C_6H_4 \cdot \underset{\underset{O}{\|}}{N}\, (CH_3)_2$$

dà un solfato colorato in giallo [1], e l'o-aminoazossibenzolo:

$$C_6H_5 \cdot N(:O) = N \cdot C_6H_4 \cdot NH_2$$

un cloridrato incoloro [2]. Anche dai m-aminoazoderivati sembra che si abbiano dei sali incolori o poco colorati [3].

(1) Angeli, questi «Rendiconti», *24*, I, (1915).

(2) Cusmano, «G.», *51*, 75 (1921).

(3) Per quel che riguarda i sali acidi degli ossiazocomposti, si ha comportamento diverso da quello degli aminoazoderivati: il cloridrato del m-ossiazobenzolo è rosso scuro come quello del p-ossiazobenzolo (Jacobson, «B.», *36*, 4107). Sembra, da quanto ho potuto osservare, che dal p-p′diossiazossibenzolo, sciolto in acido acetico, con HCl gassoso si ottenga un cloridrato in cristallini rosso violacei.

Digitized by Google

Chimica. — *Sulla struttura cristallina dei cloruri dei metalli trivalenti. I° Cloruro cromico* [1]. Nota di G. NATTA, presentata [2] dal Socio G. BRUNI.

La igroscopicità o la deformabilità della maggior parte degli alogenuri dei metalli trivalenti non aveva permesso ai cristallografi di studiare con esattezza che un numero ristretto di essi.

Tali composti, secondo le attuali conoscenze, si potrebbero suddividere a seconda della loro struttura cristallina in due grandi classi: una comprendente gli alogenuri che cristallizzano nel sistema esagonale (o romboedrico); l'altra quelli che cristallizzano nel sistema rombico. Al primo gruppo appartengono alcuni alogenuri di alluminio, di ferro, il cloruro di titanio trivalente, l'ioduro di bismuto ed una modificazione di quello di arsenico; mentre al secondo, oltre che l'altra modificazione dell'ioduro di arsenico, appartengono gli alogenuri di antimonio. Per l'ioduro di questo si conoscono inoltre una modificazione rossa trigonale ed una gialloverdastra monoclina. Gli ioduri di arsenico e di antimonio appaiono perciò isodimorfi e costituiscono l'anello di congiunzione delle due serie.

Per alcuni però degli alogenuri indicati non si sa ancora con sicurezza se appartengano al sistema esagonale o al romboedrico.

I metodi dell'analisi röntgenografica non mi risulta siano stati sinora impiegati per l'esame di questo tipo di composti e nemmeno per altri, la cui composizione corrisponda alla formola AB_3. Ad essi dovrebbero perciò competere dei tipi nuovi di strutture atomiche.

Ho esaminato con i raggi X alcuni cloruri: per essi ho impiegato, non sempre con successo a causa dell'alterabilità dei preparati, i vari metodi: delle polveri, di Laue, del cristallo rotante.

1° *Cloruro cromico.* Nella letteratura non vi è accenno alle sue proprietà cristallografiche. È noto che il cloruro cromico anidro si ottiene per sublimazione sotto forma di laminette violacee esilissime, molli, untuose al tatto che, a differenza del cloruro idrato e di tutti gli altri cloruri di metalli trivalenti, hanno la proprietà di essere difficilmente solubili in acqua.

Per sublimazione del cloruro cromico, anidro di Kahlbaum, per riscaldamento al rosso chiaro in tubo di quarzo, ottenni delle esili laminette, meno deformate di quelle presenti nel prodotto commerciale. Alcune di esse

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1927.

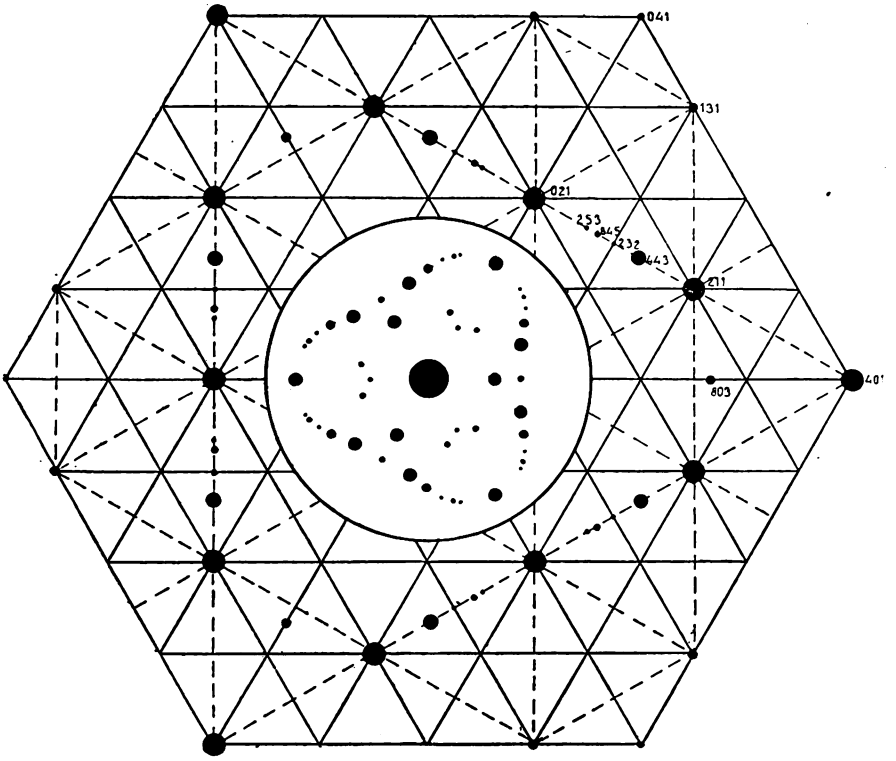
Digitized by Google

osservate al microscopio, appaiono limitate da lati che comprendono angoli di 120°. Solo rarissime hanno un intero contorno esagonale.

Al microscopio di polarizzazione appaiono, osservate in direzione che non sia normale alla lamina, fortemente birifrangenti e policroiche.

Data la loro estrema sottigliezza solo con grande difficoltà mi riuscì di ottenere un cristallo così poco deformato da permettere l'esame col metodo di Laue.

Col metodo Debye-Hull non mi fu facile ottenere dei bei fotogrammi. È un inconveniente che presenta la maggior parte dei composti di cromo



quello di fornire fotogrammi poco nitidi, che solo parzialmente si evita usando radiazioni a grande lunghezza d'onda. Tra i fotogrammi eseguiti con diversi anticatodi: cromo, ferro e nichel con tubi Coolidge ad elettroni, e rame con tubo Hadding, ho preferito per il calcolo quello migliore fornito dall'anticatodo di nichelio.

I fotogrammi delle polveri presentano un aspetto particolare: invece delle comuni linee ad andamento curvo si osservano, per certe linee, solo dei brevi tratti verticali, in corrispondenza della mezzeria dei fotogrammi. Il loro aspetto ricorda quello dei fotogrammi ottenibili col metodo del cristallo rotante. Attribuisco questa particolarità al fatto, che le laminette di

Digitized by Google

cloruro cromico, che difficilmente per macinazione si possono ridurre in polvere finissima, si dispongano, durante il riempimento del tubicino da esaminare, non disorientatamente, come il metodo delle polveri richiede, ma si impilino con una orientazione preferita, e precisamente con la faccia di sfaldatura parallela alla superficie esterna del cilindretto.

Potei ordinare tutte le linee secondo la supposizione di un rapporto assiale eguale a 1.30, valore molto vicino, come si vedrà in seguito, a quello determinato indipendentemente dai fotogrammi di Laue.

Nella seguente tabella sono indicati: gli angoli di riflessione; l'intensità stimata; la distanza reticolare; gli indici secondo Bravais-Miller, riferiti al sistema esagonale; il lato della cella elementare. Quest'ultimo è stato calcolato con la nota formula:

$$a = d\sqrt{4/3\,(h^2 + k^2 + hk) + l^2 \cdot a^2/c^2}$$

dove d è la distanza reticolare.

Come lato della cella risulta $a = 4.42$ Å.

TABELLA I.

Fotogramma delle polveri.

θ	Intensità	*d*	*hkil*	*a*
17.7	m	5.398	0001	4.15
34.2	m	2.814	0002	4.33
45.0	ddd	2.166	$11\bar{2}0$	4.33
52.2	dd	1.882	$20\bar{2}0$	4.35
			0003	4.35
57.0	ddd	1.733	$11\bar{2}2$	4.37
62.8	dd	1.584	$20\bar{2}2$	4.39
			$11\bar{2}3$	4.39
70 5	f	1.435	$000\bar{4}$	4.42
			$12\bar{3}0$	4.39
73.7	dd	1.381	$12\bar{3}1$	(4.35)
80.9	ddd	1.223	$30\bar{3}0$	4.38
			0005	4.44
91.7	m (Sbandata)	1.154	$30\bar{3}2$	4.38
			$20\bar{2}4$	4.44
			1233	4.42
108.9	md	1.013	$22\bar{4}0$	4.42

Digitized by Google

I fotogrammi delle polveri non possono *a priori* indicare se la sostanza appartiene al sistema esagonale o romboedrico e neppure eliminare il dubbio che la cella elementare possegga dimensioni multiple di quelle sopra calcolate.

Ritenni perciò molto utile l'esame dei fotogrammi di Laue. La radiazione « bianca » di un anticatodo di tungsteno, emessa da un tubo ad elettroni sotto una tensione di 65 kV., venne inviata normalmente alla faccia di base del cristallo in esame. Ottenni fotogrammi di Laue ad evidente simmetria trigonale, caratterizzati per un relativamente piccolo numero di macchie, tutte leggermente sbandate per le imperfezioni del cristallo.

La proiezione gnomonica del fotogramma è riprodotta in figura. Sono indicate in tratto pieno le rette che individuano gli indici Bravais-Miller riferiti al sistema esagonale, in linea tratteggiata per gli indici di Miller relativi ad una croce assiale romboedrica (1).

Riferendoci per comodità di calcolo alla prima rappresentazione, si calcola dalla proiezione gnomonica per la cella esagonale un rapporto assiale 1.29.

Nella tabella II sono indicate le distanze reticolari delle faccie corrispondenti alle macchie di un fotogramma Laue, e le lunghezze d'onda $n\lambda$ calcolate ponendo per il lato della cella il valore 4.42 dedotto col metodo delle polveri. Nessuna di tali lunghezze d'onda risulterebbe inferiore al minimo (0.20 Å), che in base all'ipotesi di Planck può emettere un anticadoto sotto una tensione di 65 kV. (2).

TABELLA II.

Fotogramma di Laue.

N.	sen θ	Intensità	*hkil*	*d*	$n\lambda$
1	0.319	f	$02\bar{2}1$	3.627	1.155
2	0.277	m	$44\bar{8}3$	1.065	0.295
3	0.249	f	$21\bar{4}1$	1.042	0.518
4	0.162	f	$40\bar{4}1$	1.885	0.3055
5	0.310	ddd	$25\bar{7}3$	0.584	0.363
6	0.303	dd	$84\bar{2}5$	0.679	0.206
7	0.295	ddd	$23\bar{5}2$	0.811	0.478
8	0.242	d	$80\bar{8}3$	0.900	0.2175
9	0.184	d	$13\bar{4}1$	1.007	0.371
10	0.154	dd	$04\bar{4}1$	1.885	0.2805

(1) Per il passaggio dagli indici Bravais-Miller (esagonale) *hkl* a quelli *pqr* di Miller (romboedrico) ho usato le note formule:

$$p=2h+k+l\ ;\ q=k-h+l\ ;\ r=-h-2k+l\ ;\ h=\frac{p-q}{3}\ ;\ k=\frac{q-r}{3}\ ;\ l=\frac{p+q+r}{3}.$$

(2) $\lambda_{min.}=\frac{Ve}{h}$.

Digitized by Google

Viene così confermata dai fotogrammi di Laue l'ipotesi dedotta dai fotogrammi delle polveri di una cella ortorombica di lato 4.42 Å e rapporto assiale c/a 1.29–1.30. Tale cella è la terza parte di un prisma esagono definito dalle medesime costanti, contenente 3 molecole $CrCl_3$.

Il volume della cella elementare per un $c/a = 1.30$ è di $97.0 \cdot 10^{-24}$ cmc. Essendo $263 \cdot 10^{-24}$ gr. il peso di una molecola di $CrCl_3$ si calcola una densità di 2.71.

Tale valore è compreso tra quelli determinati da altri sperimentatori e, come è naturale, molto vicino al massimo di essi (1).

La simmetria dei fotogrammi di Laue può venire attribuita a varie classi del sistema romboedrico, quali la emimorfica emiedrica (ditrigonale piramidale), enantiomorfica emiedrica (trapezoidale), oloedrica (ditrigonale scalenoedrica), ma troppo pochi sono i punti del rotogramma di Laue e troppo incerta è la stima delle intensità dei fotogrammi delle polveri per permettere un calcolo esatto della struttura atomica.

Più facilmente confrontabili appaiono le intensità relative alle riflessioni di ordine superiore della faccia (0001) nell'esame del fotogramma ottenuto col metodo del cristallo rotante da una laminetta di cloruro di cromo.

La tabella n. 3 indica per ognuna delle bande osservate in tale fotogramma il seno dell'angolo di riflessione, le intensità osservate, e la distanza reticolare c della (0001).

TABELLA III.

Cristallo rotante di $CrCl_3$. — *Anticatodo di rame.*

$\frac{\theta}{2}$	i	sen $\frac{\theta}{2}$	K	d	$hkil$	c	$\frac{S}{n}$
7.3	d	0.1270	β	5.43	0001	5.43	—
8.0	f	0.1393	α	5.524	0001	5.52	7
14.4	dd	0.294	β	2.77	0002	5.54	—
16.0	f	0.276	α	2.79	0002	5.58	20.5
24.0	ddd	0.407	α	1.892	0003	5.676	2.3
29.1	md	0.487	β	1.417	0004	5.668	—
32.7	f	0.541	α	1.423	0004	5.692	19.0
43.3	m	0.677	α	1.137	0005 $20\bar{2}4$	5.685	1.4 5.0

(1) Secondo CLARKE e ABOTT (« Am. J. Sci. 'Sill.' », 3, *14*, 281; « J. B. », 1877, 44) il p. sp. del cloruro di cromo è 2.361; secondo CLARKE e GRABFIELD è 2.757 (« Am. Chem. J. », 5 1884, 240). Nelle *International Critical Tables of National Research Council*, New York, vol. 1°, p. 132, è indicato 2.7.

Digitized by Google

Si osserva che le riflessioni di ordine dispari (di 3° e di 5°) appaiono tutte meno intense di quelle di ordine pari (di 2° e di 4°). Solo quella di 1° ordine appare quasi egualmente intensa come quelle di 4° e di 2°. Tra le numerose ipotesi che ho supposto per il calcolo della struttura atomica non mi fu facile trovarne qualcuna che accordi pienamente, secondo il calcolo del fattore di struttura, con le intensità osservate nei fotogrammi. Ho anche esaminato, pur non richiedendolo la lunghezza d'onda dei fotogrammi di Laue, delle celle di volume doppio di quella precedentemente descritta, aventi un rapporto assiale di 2.60, e contenenti due molecole di cloruro di cromo, senza ottenere risultati migliori. Ho in special modo esaminato i due tipi di struttura, sembrandomi essi i più probabili, che sono rispettivamente definiti dalle seguenti coordinate degli atomi:

a) Cr : 000

Cl : $^1/_3\ u$; $0\ ^1/_3\ v$; $^2/_3\ ^2/_3\ z$

b) Cr : 000

Cl : $^1/_3\ ^2/_3\ u_1$; $^2/_3\ ^1/_3\ v_1$; $00\ z_1$.

Nella tabella n. 3 sono indicati per le macchie del fotogramma del cristallo rotante i rapporti tra i fattori di struttura e l'ordine di riflessione. Il fattore di struttura era stato calcolato in base all'ipotesi b) ponendo $u_1 = ^1/_4$, $v_1 = ^3/_4$, $Z_1 = ^1/_2$ e supponendo il potere dispersivo degli atomi proporzionale al numero atomico e non al numero degli elettroni degli ioni corrispondenti. Meno buono è l'accordo tra fattore e l'intensità osservata per alcune macchie di Laue che hanno indici molto elevati, per le quali è notevole l'influenza di piccole variazioni nel valore dei parametri.

Secondo tale struttura ed i valori dei diametri atomici calcolati da Vasastjerna e Goldschmidt, il cloruro cromico avrebbe una struttura non ionica, in accordo con le proprietà chimiche e fisiche di tale composto, che differiscono notevolmente da quelle della maggior parte degli altri cloruri metallici.

Dall'esame che sto ora completando di altri alogenuri, come quelli di alluminio e ferrico anidri, di cui riferirò in una prossima Nota, spero di trarre ulteriori e più sicure deduzioni sulla struttura atomica e sull'isomorfismo di questa interessante classe di composti dei metalli trivalenti.

Conclusione. Il cloruro cromico appartiene cristallograficamente al sistema romboedrico e verosimilmente alla classe oloedrica, ha una cella elementare contenente una molecola di $CrCl_3$, di lato $a = 4.42$ Å ed un rapporto assiale $c/a = 1.29$–1.30. Si calcola per esso una densità di 2.71.

Digitized by Google

Ottica cristallografica. — *Sopra due recenti note della signorina M. Philibert* [1]. Nota di C. PERRIER [2] presentata [3] dal Socio F. ZAMBONINI.

I. - In due recenti note [3] la sig.na M. Philibert ha dato notizia dei risultati dello studio da lei eseguito intorno ad un curioso fenomeno da me osservato in occasione di un precedente lavoro [4], cioè intorno alla biassicità che presentavano due lamine di spato di Islanda, quando esse venivano osservate con l'aiuto del piatto di Fedorow.

Il risultato dello studio fu che la biassicità era, conformemente a quanto avevo preveduto, puramente apparente e dovuta alla risultante di due birifrangenze di segno contrario, una quella, della calcite, l'altra, quella delle parti in vetro accompagnanti la sezione durante le indagini.

Lo studio, però, mise in evidenza un fatto inaspettato, che, cioè, mentre in un primo tempo si era creduto che la birifrangenza accessoria risiedesse nella lamina porta-oggetti, non impiegandosi per esse, normalmente, nessuna cura gran che speciale durante la lavorazione, risultò invece, che la birifrangenza risiedeva negli stessi segmenti sferici, ed inoltre, contrariamente a quanto pure da prima si era supposto, che cioè, la birifrangenza accessoria della *lamina birifrangente equivalente* fosse in relazione con una indicatrice ottica ad un solo asse (logica conseguenza, del resto, della prima supposizione), si potè stabilire che essa era in relazione con una indicatrice ottica a due assi.

La cosa era, naturalmente, assai interessante perchè nessuno di quanti, fino ad ora, si occuparono della teoria di questo metodo, come lo stesso Fedorow, Nikitin, Duparc, ha mai fatto cenno di questo possibile inconveniente; forse appunto perchè ritenuto già eliminato da una accurata fabbricazione e scelta dei vetri impiegati.

Solo il Berek [5] accenna di sfuggita alla questione, osservando che la birifrangenza dei segmenti sferici non deve superare un $\mu\mu$.

II. - Dalla Fisica si sa, che le lastre di vetro normalmente raffreddate diventano generalmente uniassiche: solo in qualche condizione speciale

(1) M. PHILIBERT, *Sur le dedoublement de l'axe optique de la calcite avec la platine de Fedorow.* Note I e II, questi « Rendiconti », 2° sem. 1926.

(2) Laboratorio Chimico Petrografico del R. Ufficio Geologico - Roma.

(3) Nella seduta del 20 marzo 1927.

(4) C. PERRIER, *Contributo alla conoscenza del metodo universale. - Sulla determinazione delle birifrangenze.* « Boll. R. Uff. Geol. », vol. LII n. 1.

(5) M. BEREK, *Mikroskopische Mineralbestimmung mit Hilfe der Universaldrehtischmethoden.* Berlin, Borntraeger. 1925.

Digitized by Google

possono diventare biassiche, condizioni però che difficilmente avrebbero dovuto verificarsi durante la produzione del vetro dei segmenti sferici. L'esame [1] accurato di questa loro birifrangenza mi condusse, allora, alla conclusione che in essi, con ogni verosimiglianza almeno, non doveva esservi *birifrangenza permanente,* cioè birifrangenza dovuta a tensioni interne, ma solo *birifrangenza transitoria,* causata da azioni esterne.

Ciò è evidentemente non privo di interesse pratico, perchè nel primo caso il difetto non può essere eliminato in nessun altro modo che cambiando i segmenti, mentre nel secondo caso si può sempre sperare di eliminare ancora l'inconveniente.

La Casa costruttrice comunicò, infatti, che i segmenti erano riuniti all'armatura di sostegno mediante un mastice [2], il quale indurendosi aveva certamente determinato delle deformazioni non uniformi, cause della birifrangenza e della biassicità, confermando così le mie deduzioni.

Riesce quindi evidente la necessità che le case costruttrici non si preoccupino solamente della preparazione del vetro per la fabbricazione dei segmenti, ma che si preoccupino anche, e forse più di quanto parrebbe sia stato fatto fino ad ora, del modo con cui si fissano i segmenti all'armatura metallica di sostegno, potendo un difetto costruttivo a questo riguardo essere anche più dannoso dell'eventuale anisotropia del vetro impiegato.

III. - Queste difficoltà che accompagnano l'uso del metodo universale, e che sono state qui segnalate potrebbero, forse, indurre a ritenere, chi con questo genere di lavoro non ha famigliarità, cosa molto difficile il potere avere con il piatto di Fedorow dei risultati esatti e sicuri.

Non bisogna, per altro, esagerare l'importanza della birifrangenza dei segmenti sferici. I metodi d'impiego del piatto di Fedorow sono oramai diventati molto numerosi; sopra alcuni di essi l'anisotropia dei segmenti eserciterebbe effettivamente un'influenza assai dannosa, tale, anzi da infirmarne gravemente i risultati, ma sopra altri indubbiamente, no.

Nel primo caso si tratta sempre di metodi che si basano su determinazioni di birifrangenze, metodi assai esatti e comodissimi, ma ancora poco usati, perchè assai recenti e probabilmente anche perchè un poco più lunghi.

Nel secondo caso, cioè sui metodi più antichi, e, comunque, su tutti i metodi che si basano su determinazioni di direzioni di estinzione, la birifrangenza dei seguenti sferici, anche nel caso di valori abbastanza elevati come quelli da noi constatati, non esercita proprio nessuna apprezzabile influenza.

Il metodo normale di lavoro, quello che fino ad ora fu, si può dire, costantemente seguìto da tutti, rientra appunto in quest'ultima categoria.

(1) Non è qui il caso di riprodurre la discussione critica che porta a questa conclusione; essa si troverà, invece in un mio lavoro di prossima pubblicazione: *Sulla birifrangenza dei segmenti sferici* nel « Bollettino del R. Ufficio Geologico », vol. LII.

(2) Presentemente il montaggio avviene senza l'intervento di mastice.

Digitized by Google

Esso consiste, infatti, nel determinare la posizione dei tre piani di simmetria dell' indicatrice ottica di una sezione di un cristallo, cosa che si ottiene individuando quelle tali posizioni per cui, facendosi rotare la lamina intorno ad un asse normale al piano di vibrazione di uno dei due nicols (posti a 90°), essa rimane perennemente estinta.

È chiaro come in questo caso la bassa birifrangenza dei segmenti sferici non può avere che un effetto assolutamente trascurabile, tanto più quando si pensa, che la determinazione dei successivi piani dell' indicatrice, dà anche il modo di correggere quella dei precedenti, onde l' errore viene in ogni caso fortemente diminuito.

Nel mio recente lavoro sulle trachiti di Porto Scuso [1] io seguii esclusivamente il metodo della determinazione dei piani di simmetria dell' indicatrice sopra indicata, e non è perciò a temersi che la birifrangenza dei segmenti sferici, dato anche che allora già esistesse [2], abbia potuto influenzare i risultati.

Una prova di ciò ci sarebbe già nella costanza dei valori ottenuti con i diversi plagioclasi esaminati, ma una prova sicura ed indubbia, perchè indipendente, che i risultati ottenuti furono buoni, e, confesso, anche molto superiori in esattezza a quanto io potevo ardire sperare, lo si ha in un recente lavoro di Duparc e Gysin [3], i quali, studiando i plagioclasi delle trachiti di S. Antioco, che sono sicuramente identiche a quelle di Porto Scuso da me studiate, ottennero per essi, sia mediante il piatto di Fedorow, che mediante il metodo di Michel-Lewy, assolutamente la stessa composizione da me rinvenuta.

IV. - La birifrangenza dei segmenti sferici è naturalmente sempre così bassa che al microscopio l'occhio non può, generalmente, avvertirla altro che se è munito di apparecchi ausiliari.

Qualunque dispositivo atto a misurare la birifrangenza con sufficiente precisione può essere impiegato per stabilire se nei segmenti si abbia o no anisotropia; i più semplici e pratici sembrano a me: il compensatore rotativo (a quarzo-Nikitin, oppure a calcite-Berek), ed il doppio cuneo di Wright; meno bene si presta il doppio cuneo di Macè de Lepinay.

Il compensatore rotativo, il cui impiego a questo scopo fu già infatti proposto da Berek, mostra facilmente la birifrangenza dei segmenti, in quanto

(1) C. Perrier, *Sulle trachiti di Porto Scuso.* « Boll. R. Uff. Geol. », *P* (1925), n. 7.

(2) L'occhio direttamente avvertiva questa birifrazione sempre molto male; si può quasi dire che, anche quando la signorina Philibert fece le misure, la si poteva percepire solo in quantochè si sapeva che essa esisteva realmente: essa veniva invece messa magnificamente in evidenza con l'impiego di apparecchi ausiliari. Per quanto si riferisce ai metodi per constatare ed eventualmente misurare la birifrangenza dei segmenti darò maggiori dettagli nel mio sopra indicato lavoro: *Sulla birifrangenza dei segmenti sferici* di prossima pubblicazione nel vol. LII del « Boll. del R. Uff. Geologico ».

(3) L. Duparc et M. Gysin, *Sur quelques roches trachytoides du Sud-Ouest de la Sardaigne.* « C. R. Soc. de Phys. de Genève » 42 (1925) 135.

Digitized by Google

che la croce nera, che esso presenta in posizione normale, subisce uno spostamento, qualora si intercali sul cammino dei raggi una lamina birifrangente; le direzioni di anisotropia dei segmenti, corrispondendo ad altrettanti *lamine birifrangenti equivalenti* si lasceranno perciò riconoscere da questi spostamenti.

Col doppio cuneo di Wright le due bande nere di ciascun cuneo subiranno degli spostamenti per introduzione di una lamina birifrangente, e poichè lo spostamento di una delle bande avviene in un senso nella stessa misura di quello che nell'altra avviene nel senso opposto, il fenomeno avviene perciò stesso in modo assai più perspicuo.

Combinando l'azione di questi due apparecchi si possono poi, naturalmente, fare anche, e con grandissima esattezza, tutte le misure quantitative, quali quelle che feci fare alla signorina Philibert.

Ho voluto aggiungere queste parole alle due note della signorina Philibert, sia per togliere i dubbi che a qualcuno potessero sorgere sulla praticità e convenienza di impiego del piatto di Fedorow, sia per richiamare l'attenzione dei fabbricanti sul fatto, che un non accurato montaggio dei segmenti può determinare in questi delle alterazioni tali da renderli meno atti al loro impiego.

Biologia. — *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. I. - La struttura ultramicroscopica del cristallino normale.* Nota di D. CATTANEO, presentata [1] dal Socio A. PERRONCITO.

Le più recenti ricerche sullo stato chimico-fisico del cristallino porterebbero ad ammettere che la sostanza lenticolare si debba considerare come un sistema colloidale organico condensato, monofasico. Il carattere precipuo di questo sistema sarebbe quello di essere otticamente e fisicamente omogeneo, carattere che, secondo alcuni, è elemento essenziale per la vita del protoplasma ed è comune alla maggior parte dei sistemi colloidali naturali.

Per questa ragione questi sistemi differenzierebbero essenzialmente dai sospensoidi inorganici ed organici idrofili e idrofobi, sistemi eterogenei, difasici, costituiti da una fase interna o discontinua e da una fase esterna o continua e dai loro precipitati o coaguli disperdibili, mentre, per un certo senso in riguardo alle proprietà chimico-fisiche, si avvicinerebbero ai sistemi molecolar-ion-dispersi di sostanze inorganiche semplici (cristalloidi di Graham), i quali sono sistemi liquidi, pure otticamente vuoti, omogenei (Bottazzi).

(1) Nella seduta del 3 aprile 1927.

Digitized by Google

Mi è sembrato importante per poter giungere alla conoscenza della costituzione fisica e morfologica della sostanza lenticolare di ricorrere all'osservazione ultramicroscopica, la quale, mentre da un lato permette di ricercare strutture non altrimenti visibili, d'altro lato può essere utile per controllare e studiare le immagini istologiche precedentemente descritte.

Nelle mie ricerche ho usato il condensatore bicentrico a specchio B per campo oscuro di Leitz. Dopo un primo orientamento coll'ocul. 8 comp. e con obbiettivi a secco 4 e 6 Koristka, le osservazioni sono state fatte coll'obbiettivo speciale (Fluorit-Immersion 1/12 a, num. Ap. 1.15) di Leitz, al quale è intercalato apposito diaframma, in modo da poter ottenere una giusta illuminazione del campo oscuro.

Ho studiato materiale a fresco proveniente da esemplari di tutte le classi dei vertebrati, procurando che l'esame avvenisse immediatamente dopo la morte dell'animale, cosicchè in genere la prima osservazione è stata fatta non oltre i 15 minuti dalla morte. Solo per i grossi mammiferi necessariamente occorse un tempo maggiore (circa un'ora). Ho esaminato anche cristallini umani provenienti da occhi enucleati per processi morbosi diversi.

I reperti sono sostanzialmente analoghi in tutti i vertebrati, e limiterò quindi la descrizione a quello che ho osservato nei mammiferi.

La capsula all'esame ultramicroscopico non presenta nessuna speciale particolarità, essa appare otticamente omogenea.

Diverso invece è l'aspetto dell'epitelio: se colla cristalloide anteriore si distaccano delicatamente dal cristallino lembi di epitelio, gli elementi cellulari, esaminati così a piatto, appaiono di forma regolarmente poligonale, separati da linee oscure. I nuclei, perfettamente rotondi od ovali, sono otticamente vuoti e non lasciano riconoscere nessuna speciale differenziazione. Il corpo protoplasmatico presenta una struttura granulosa, si direbbe cioè che in una sostanza fondamentale omogenea, oscura, siano ammassati dei granuli più o meno grandi, più o meno regolari, rinfrangenti e così strettamente avvicinati che tutta la cellula assume una speciale luminosità. Questi granuli sono privi di movimento Browniano.

Tale è il reperto nei preparati a fresco. Se però questi si esaminano dopo alcune ore o se il materiale si preleva dopo qualche tempo dalla morte, anche nei nuclei cominciano ad apparire dei granuli rinfrangenti. Le cellule non sono più separate da linee oscure omogenee, ma presentano margini meno distinti, i granuli citoplasmatici appaiono assai rinfrangenti, e, per la maggior dispersione luminosa, tutto il corpo cellulare assume uno spiccato colorito grigio-argenteo.

Interessante è l'aspetto all'osservazione ultramicroscopica della sostanza propria del cristallino. Mentre nella parte più interna, nel nucleo, essa appare otticamente vuota, nella corteccia le fibre appaiono delimitate da linee longitudinali, regolari, parallele, più rinfrangenti della sostanza fondamentale. Si può pertanto pensare che questa rinfrangenza sia dovuta ad uno speciale

Digitized by Google

carattere fisico della sostanza cementante che separa le singole fibre, o pure sia semplicemente la conseguenza delle modalità particolari di riflessione della luce sulla superficie delle fibre stesse, poichè, è noto, le fibre del cristallino rappresentano prismi di sostanza rinfrangente a facce piane, a sezione esagonale.

Ma sopratutto interessa quello che si osserva nella sostanza propria delle fibre, reperto che non può essere messo in rapporto se non con una particolare differenziazione del citoplasma lenticolare.

Dobbiamo a questo riguardo distinguere le fibre degli strati superficiali e le fibre degli strati profondi. Mentre queste ultime appaiono con un contenuto omogeneo, otticamente vuoto, le fibre superficiali presentano nel protoplasma indifferenziato omogeneo, che forma la parte fondamentale, un sistema di elementi differenziabili ultramicroscopicamente per una più spiccata rinfrangenza. Si tratta per lo più di filamenti rettilinei o leggermente sinuosi ed ondulati che raggiungono in lunghezza dimensioni spesso notevoli: carattere assolutamente costante è l'orientazione secondo l'asse delle fibre.

L'osservazione coll'obbiettivo speciale a immersione dimostra che tali filamenti non sempre appaiono lisci, ma spesso hanno una struttura granulosa: talvolta, come vedremo in speciali condizioni, sono visibili granuli e anellini distinti. Questo reperto si riscontra non solo negli strati anteriori della corteccia, ma anche negli strati posteriori e nella regione dell'equatore e si dimostra facilmente quando si esaminano zone della sostanza corticale a fresco, in soluzione fisiologica isotonica o in liquido di Ringer.

Se si esaminano i preparati dopo qualche ora si osserva un aumento della rinfrangenza delle formazioni descritte, le quali assumono aspetto nettamente granuloso, fino a che si hanno in prevalenza granuli e anellini, isolati o riuniti tra loro, che spiccano nel protoplasma omogeneo per la più intensa dispersione della luce.

*
* *

Dal risultato delle mie ricerche alcune considerazioni si possono dedurre riguardo alla struttura del protoplasma in genere e di quello lenticolare in ispecie.

Ricerche ultramicroscopiche sui tessuti a fresco sono fino ad oggi assai scarse; mancano completamente per il cristallino. Le conclusioni alle quali arrivano gli autori sono assai discordanti.

Mentre secondo Gaidukow, il quale fece osservazioni sulle cellule vegetali, e Ph. Russo, che studiò elementi diversi di organismi animali e vegetali, il protoplasma vivente sarebbe un idrosol contenente granuli dotati di movimento Browniano, movimento che è caratteristico per la vita, secondo Mayer e Schaeffer il protoplasma animale esaminato allo stato vivente non contiene granuli mobili, è quindi gelificato: come tutti i gel alcalini

Digitized by Google

esso è otticamente omogeneo; essendo estremamente labile bastano lievi azioni meccaniche o chimiche per provocarvi la separazione di due fasi, cosicchè la visibilità e il movimento dei granuli sarebbe il risultato di una precipitazione di colloidi.

Anche Cesaris-Demel nei leucociti all'esame ultramicroscopico ha trovato che le granulazioni appaiono splendenti e immobili finchè gli elementi sono vivi. Si rendono mobili a mano a mano che questi si alterano, e Aggazzotti, da ricerche ultramicroscopiche sui globuli rossi, deduce che la materia vivente si trova sotto uno stato fisico otticamente vuoto, di idrogel; solo con la morte la sostanza vivente perderebbe il suo carattere di omogeneità e assumerebbe un aspetto granuloso.

Bottazzi, fondandosi su altri principi chimico fisici, ritiene che il protoplasma sia un sistema omogeneo. Più recentemente distingue il concetto di *protoplasma indifferenziato* da quello di *citoplasma*, intendendo per citoplasma quel sistema polifasico, in cui una delle fasi, la fase liquida per eccellenza, è il protoplasma indifferenziato, altre fasi essendo le differenziazioni strutturali permanenti. E riferendosi più particolarmente alla lente cristallina, cartilagine, elementi connettivi, ecc., così si esprime: « Hanno queste formazioni, eccetto il vitreo che ha struttura analoga a quella di un coagulo di plasma sanguigno, una struttura analoga a quella delle gelatine propriamente dette? Sono cioè sistemi solidi granulosi, eterogenei? Ricerche attendibili a questo riguardo non esistono. Ma a me non sembra che, per esempio, una fibra della lente cristallina, la sostanza fondamentale della cartilagine ialina, ecc., debbano senz'altro essere ritenuti sistemi difasici, costituiti di una fase solida granulosa, o reticolare, o filamentosa, ecc., e di un liquido. Si sarebbe piuttosto indotti a credere che esse somiglino a formazioni cristalline, cioè a sistemi omogenei solidi e che si siano originate per concentrazione del materiale proteico, onde sono costituite, operatasi con orientamento particolare delle micelle, durante lo sviluppo organico ».

Da queste considerazioni Bottazzi è indotto a ritenere la lente cristallina come un sistema colloidale solido omogeneo.

Le mie ricerche ultramicroscopiche dimostrano chiaramente che le fibre cristalliniche possono contenere una fase che si differenzia otticamente da quella omogenea fondamentale, dimostrabile non solo quando si esaminano i tessuti morti, ma anche quando l'osservazione viene fatta in modo tale da ritenersi gli elementi direi quasi in stato di sopravvivenza. Dobbiamo in ogni caso ammettere che bastano stimoli lievissimi, quali quelli che si determinano nell'allestimento del preparato perchè si abbia la differenziazione delle due fasi.

Del resto sono completamente d'accordo colle vedute di Bottazzi nel ritenere che il protoplasma sia rappresentato essenzialmente dalla sostanza fondamentale otticamente omogenea.

Negli strati nucleari del cristallino dove mancano, o si hanno solo debolissime reazioni metaboliche, si ha una struttura omogenea, un sistema,

Digitized by Google

possiamo dire, monofasico; negli strati corticali invece si ha una costituzione polifasica, la quale è assai opportuna per i processi chimici del metabolismo perchè rende maggiormente possibili i fenomeni di assorbimento.

O se pure non vogliamo ammettere una differenza strutturale tra sostanza corticale e sostanza nucleare possiamo pensare che per l'aumento graduale di indice di rifrazione che si ha andando dalla corteccia verso il centro del cristallino, la fase più rinfrangente non si rende più otticamente distinguibile dalla sostanza fondamentale.

*
* *

Ora si presenta ovvia la domanda fino a qual punto la struttura visibile all'ultramicroscopio nelle fibre lenticolari si possa comparare alle strutture morfologiche descritte dagli autori e dimostrabili coi comuni metodi istologici.

A me pare che esiste una analogia sostanziale tra quello che è dato di vedere all'osservazione ultramicroscopica e i reperti descritti recentemente da Busacca, ricorrendo alla tecnica abitualmente usata nelle culture dei tessuti.

Benchè questo metodo non sia molto opportuno, o almeno facilmente applicabile per lo studio di elementi altamente differenziati quali sono le fibre del cristallino degli animali adulti, tuttavia il sopracitato autore ha potuto distinguere nel protoplasma delle fibre lenticolari, che appare come una massa omogenea perfettamente limpida e trasparente, delle parti filamentose dotate di maggiore rinfrangenza che per il loro carattere ritenne per condriosomi.

I filamenti che si osservano nelle fibre corticali orientati costantemente nel senso longitudinale diminuiscono gradatamente a mano a mano che ci si allontana dalla cristalloide, mancano del tutto nelle fibre nucleari.

Un reperto non molto dissimile era stato precedentemente osservato nei preparati fissati, ricorrendo al metodo dell'acido arsenioso di Golgi, da Maggiore, e da Levi, col metodo di Maximow, nelle fibre del cristallino embrionale.

Uniformandosi alle vedute di Levi, Busacca ritiene che il citoplasma delle fibre corticali sia costituito da un colloide fondamentale senza struttura nel quale sono sospese delle particelle gelificate, i condriosomi.

Dagli studi di Levi risulta che nelle cellule dei tessuti le parti nelle due fasi diverse non sono ben distinguibili con mezzi ottici ordinari, perchè il costituente nella fase meno densa ha un indice di rifrazione vicino a quello dei condriosomi ed anche perchè questi ultimi sono tanto avvicinati che è impossibile di differenziarli otticamente dalla sostanza fondamentale. Nelle cellule delle culture emigrate nel plasma si ha verosimilmente un grado elevato di assorbimento di acqua che interessa prevalentemente il colloide

Digitized by Google

meno denso, per cui viene ad essere agevolata la differenziazione ottica del condrioma.

Col metodo usato da Busacca la differenza di potere rinfrangente tra condriosomi e parte omogenea circostante non è sempre evidente: mentre nella cavia, nel pollo, nell'uomo i condriosomi spiccano molto bene sul restante citoplasma, nel tritone e nella rana non sono visibili.

Coll'esame ultramicroscopico la differenziazione ottica è spinta al massimo grado: anche nella rana, per esempio, si distinguono nettamente le formazioni filamentose dal protoplasma omogeneo.

Senza voler attribuire uno speciale significato funzionale alle particolarità che ho rilevato coll'indagine ultramicroscopica, io credo che dalle mie osservazioni si può dedurre che nel colloide omogeneo senza struttura, costituente il protoplasma delle fibre lenticolari, sono differenziabili otticamente all'ultramicroscopio delle parti più dense che assumono in prevalenza una forma filamentosa e che si debbono ritenere connesse alla struttura dell'elemento cellulare.

Con tutta verosimiglianza quello che si osserva con molta evidenza all'esame ultramicroscopico nei tessuti a fresco trova corrispondenza nelle immagini istologiche osservate coi comuni metodi al semplice esame microscopico.

Questo dimostra ancora una volta che è infondato ciò che da molti oggi si asserisce troppo facilmente, essere cioè sempre artificiose le immagini dei preparati fissati: l'indirizzo giusto delle scienze biologiche a me sembra che oggi debba essere quello di collegare i fatti morfologici coi dati che si possono desumere dallo studio delle proprietà chimico-fisiche dei colloidi.

BIBLIOGRAFIA

AGGAZZOTTI, *Ricerche ultramicroscopiche sui globuli rossi di Spelerpes fuscus.* « Zeit. f. allg. Phys. », II, 1910.

BOTTAZZI, *I sistemi colloidali dell'organismo vivente.* « Atti Soc. Prog. delle Scienze », XII Riun., Catania, 1923.

BUSACCA, *Ricerche sulla costituzione morfologica e fisica delle fibre cristalline normali.* « Boll. d'Ocul. », IV, 1925.

CESARIS-DEMEL, *Nuove osservazioni di ultramicroscopia del sangue.* « Pathologica », VI, 1914.

GAIDUKOW, *Dunkelfeldbeleuchtung und Ultramikroscopie in der Biologie und in der Medizin.* Jena, Fischer, 1910.

LEVI, *Sulla presunta partecipazione dei condriosomi alla differenziazione cellulare.* « Arch di Anat. e di Embr. », X, 1911.

ID., *La costituzione del protoplasma studiata su cellule viventi coltivate in vitro,* « Arch. di Fisiol. », IL, 1916.

ID., *Nuovi studi su cellule coltivate in vitro.* « Arch. Ital. di Anat. e di Embr. », XVI, 1919.

Digitized by Google

MACGIORE, *L'apparato mitocondriale nel cristallino.* « Ricerche Lab. Anat. norm. Roma », XVI, 1911.

MAYER e SCHAEFFER, *Sur la structure des gels. Application à l'étude de la constitution du protoplasme animal et des liquides de l'organisme.* « Soc. de Biol. », LXIV, 1908.

RUSSO PH., *De la signification des aspects qui présentent à l'ultramicroscope les cellules vivantes ou mortes.* « Arch. intern. de Phys. », X, 1910.

ID., *Recherches ultramicroscopiques touchant l'action de divers agents extérieurs sur les conditions de vie du protoplasme.* « Arch. Intern. de Phys. », X, 1910.

Fisiologia. — *Azione di ph sugli scambi gassosi di poltiglie muscolari a costante presenza di fosfatione.* Nota di M. COMEL, presentata dal Socio Corrisp. A. HERLITZKA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Genetica. — *Come si scinde una semimutante.* Nota di R. SAVELLI, pres. dal Socio B. LONGO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

G. C.

Digitized by Google

Digitized by Google

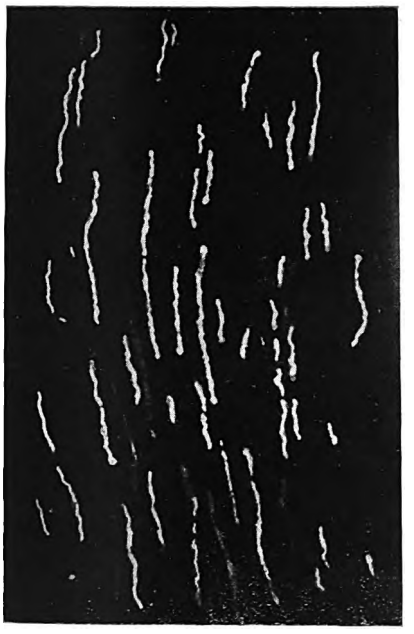


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

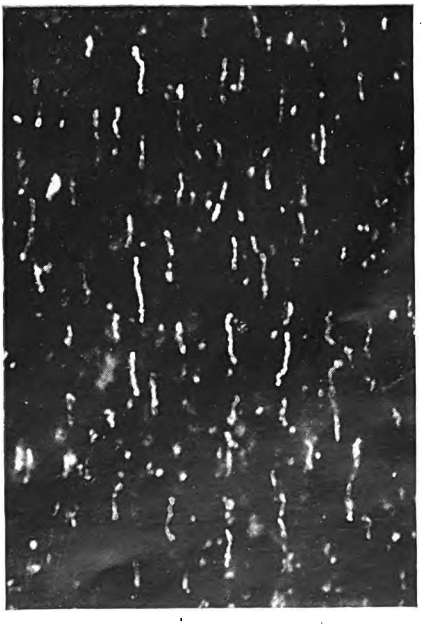


Fig. 4.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Le microfotografie sono state eseguite coll'ocul. 8 comp., obb. Fluorit.-Immersion $^1/_{12}$ Leitz, usando dell'apparecchio fotografico Leitz.

Fig. 1. — Struttura ultramicroscopica degli strati superficiali della corteccia posteriore. Cristallino di bue, esaminato 1 ora dopo la morte.

Fig. 2. — Struttura ultramicroscopica degli strati superficiali della corteccia posteriore Cristallino di bue, esaminato 30 ore dopo la morte.

Fig. 3. — Struttura ultramicroscopica degli strati superficiali della corteccia anteriore. Cristallino di coniglio, esaminato $^1/_4$ d'ora dopo la morte.

Fig. 4. — Struttura ultramicroscopica degli strati superficiali della corteccia posteriore. Cristallino di coniglio, esaminato $^1/_2$ ora dopo la morte.

Digitized by Google

Digitized by Google

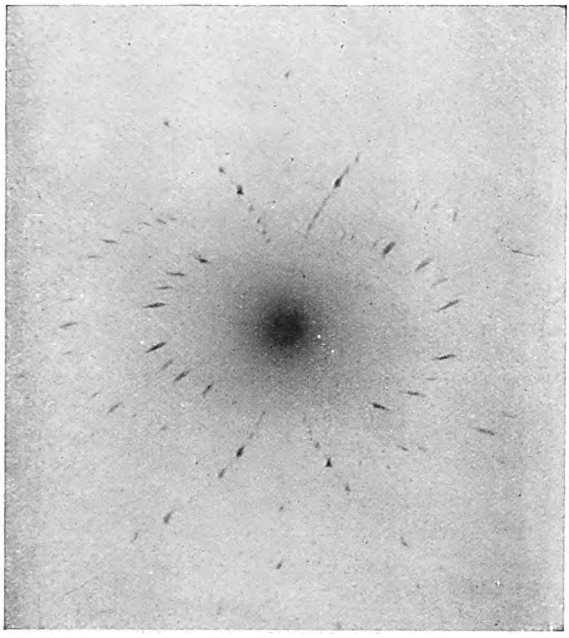
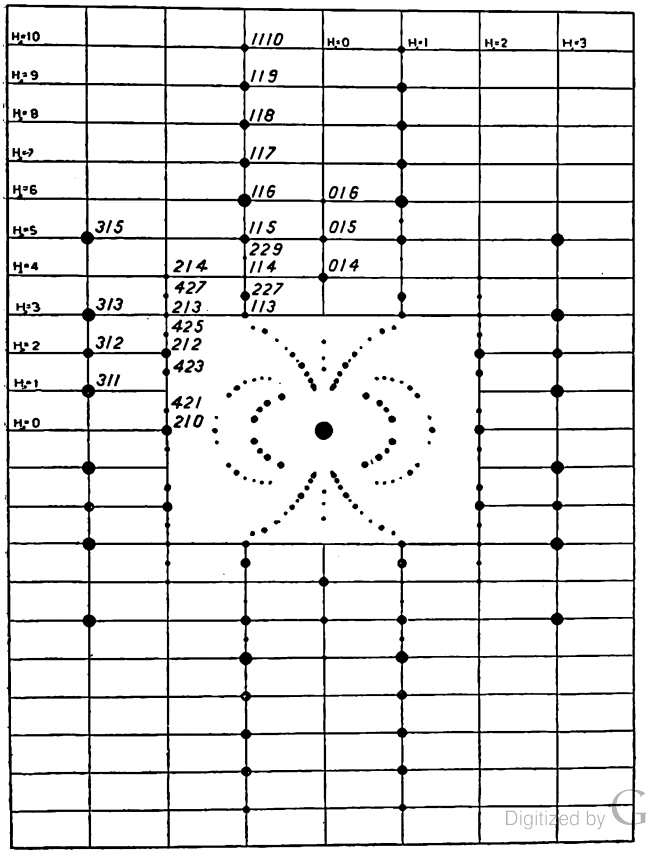


Fig. 1



Digitized by Google

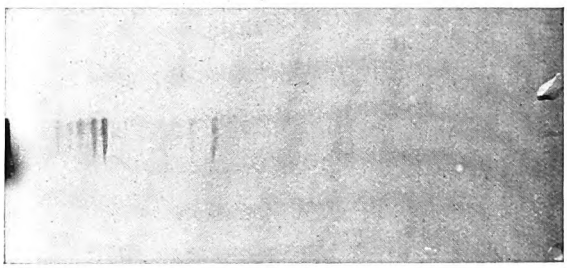


Fig. 3

Digitized by Google

CARRELLI A. - Sulla doppia rifrazione paramagnetica (pres. dal Socio *M. Cantone*) Pag. 570
CARRARA N. - Sopra un nuovo tipo di riflessione dei Raggi X (pres. dal Corrispondente *L. Puccianti*) 571
MAZZA L. - Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore (pres. dal Corrisp. *L. Rolla*) . . . . . »
SBORGI U. - Sul comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose (presentata dal Socio *R. Nasini*) . . . . . »
MALQUORI G. - I sistemi $AlCl_3 - HCl - H_2O$, $KCl - HCl - H_2O$ e $KNO_3 - HNO_3 - H_2O$ a 25° (pres. dal Socio *N. Parravano*). 576
FONTANA C. - Sulla identità di struttura cristallina dei composti Fe_3S_4 e FeS (presentata dal Socio *G. Bruni*) 579
FERRARI A. - La struttura cristallina dello iodio (pres. dal Socio *G. Bruni*) . . . 582
BIGIAVI D. - Azione dell'acido peracetico sopra gli acetilderivati delle ammine aromatiche (pres. dal Socio *A. Angeli*) 587
NATTA G. - Sulla struttura cristallina dei cloruri di metalli trivalenti. 1° Cloruro cromico (pres. dal Socio *G. Bruni*) 592
PERRIER C. - Sopra due recenti Note della signorina M. Philibert (pres. dal Socio *F. Zambonini*) 598
CATTANEO D. - Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. - I. La struttura ultramicroscopica del cristallino normale (pres. dal Socio *A. Perroncito*) . 601
COMEL M. - Azione di *ph* sugli scambi gassosi di poltiglie muscolari a costante presenza di fosfatione (pres. dal Socio *A. Herlitzka*) 607
SAVELLI R. - Come si scinde una semimutante (pres. dal Socio *B. Longo*) . . . »

Digitized by Google

RENDICONTI - Aprile 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Fascicolo del 24 aprile 1927 (Anno V)

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

TONELLI L. - Una proprietà delle funzioni integrali . . . . . Pag. 533
CARTAN E. - Sur l'écart géodésiques et quelques notions connexes 536
ARMELLINI G. - Sopra l'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre e sulla temperatura stellare effettiva ed apparente . . . . . »
ABETTI G. - Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1926 541
ID. - Sulle relazioni fra le eruzioni solari e le tempeste magnetiche terrestri . . »
LO SURDO A. - Sulla corrente elettrica filtrata attraverso ad una valvola termoionica saturata . . . . . »
ROLLA L. e PICCARDI G. - Sul potenziale di elettroaffinità dell'anidride molibdica . 546
ZAMBONINI F. e RESTAINO S. - I solfati doppî dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. - VIII. Solfati doppî di cerio (ceroso) e di sodio 547
FRANCHI S. - Sulle conclusioni di una mia Memoria 548

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

CALAPSO R. - Intorno a una trasformazione delle congruenze rettilinee W (presentata dal Corrisp. *G. Fubini*) 549
CHERUBINO S. - Sulle integrali superficiali delle forme differenziali quadratiche (presentata dal Socio *G. Scorza*) 554
BERNSTEIN S. - Démonstration nouvelle d'une inégalité relative aux polynomes trigonométriques (pres. dal Socio *V. Volterra*) 558
ONICESCU O. - Scostamento geodetico, stabilità e problema di Whittaker (presentata dal Socio *T. Levi-Civita*) 561
PINI E. - Sulla ricerca delle funzioni primitive per le funzioni di più variabili (presentata dal Socio *L. Tonelli*) 563
ASCOLI G. - Sul problema di Dirichet nei campi sferici e ipersferici (pres. dal Corrisp. *G. Fubini*) . . . . . »
SBRANA F. - Sul moto sferico vorticoso di un fluido incomprimibile (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 564
FINZI B. - Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema Kutta-Joukowski (pres. dal Corrisp. *U. Cisotti*) . . . . . »
ROSENBLATT A. - Sur le théorème de Kutta-Joukowski (pres. *Id.*) . . . . . »
FERMI E. e RASETTI F. - Una misura del rapporto h/k per mezzo della dispersione anomala del Tallio (pres. dal Socio *O. M. Corbino*) 566

(Segue in terza pagina)

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° maggio 1927 (Anno V)

Presidenza del Socio anziano sen. prof. G. Fano

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geodesia. — *Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes.* Nota [1] del Socio Straniero E. Cartan.

Les Notes récentes de M. Vranceanu [2] et de M. Crudeli [3], qui se rattachent aux équations de l'écart géodésique dues à M. Levi-Civita, me fournissent l'occasion de signaler un certain nombre de résultats se rapportant à des questions connexes. Le premier a trait au calcul, aux infiniment petits du troisième ordre près, de la longueur d'un arc de courbe déformé, le second au problème de l'écart géodésique pour les systèmes matériels non holonomes, le troisième au problème de l'écart entre deux surfaces minima infiniment voisines. L'espace ambiant est un espace de Riemann quelconque.

I. - Considérons, dans un espace de Riemann que nous supposerons, pour simplifier, à trois dimensions, une courbe *quelconque* B (courbe de base). Il existe, comme on sait, un espace euclidien de raccordement le long de la ligne B (ou, ce qui revient au même, un ds^2 euclidien dont les coefficients g_{ij} prennent en tous les points de B, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, les mêmes valeurs numériques que pour la métrique riemannienne donnée). Considérons, en chaque point M d'un arc donné PQ de la ligne B, une direction de cosinus directeurs déterminés et portons,

(1) Presentata nella seduta del 24 aprile 1927.

(2) G. Vranceanu, *Sopra la stabilità geodetica* (« Rendiconti », 5[1], p. 107).

(3) U. Crudeli, *Su lo scostamento geodetico*, ecc. (« Rendiconti », 5[1], pp. 248-251).

Digitized by Google

dans chacun des deux espaces (euclidien et riemannien), sur la géodésique définie par cette direction, une longueur infiniment petite déterminée. Nous obtenons ainsi dans l'espace de Riemann un arc de courbe P'Q' et dans l'espace euclidien de raccordement un arc de courbe $P'_0Q'_0$. Soient σ et σ_0 les longueurs de ces deux arcs. Il est clair que la différence $\sigma - \sigma_0$ doit dépendre de la courbure riemannienne de l'espace donné dans la région considérée.

Il est remarquable *qu'elle ne dépend en rien de la courbure et de la torsion de la ligne de base* B. On a la formule extrêmement simple

$$(1) \qquad \sigma - \sigma_0 = -\frac{1}{2}\int_P^Q Ky^2\, ds,$$

où s désigne l'abcisse curviligne du point courant M de l'arc PQ, y la composante normale du vecteur infiniment petit MM', et K la courbure riemannienne de l'espace en M dans la direction plane déterminée par la direction de B et la direction MM' (1).

Je signalerai, comme application de la formule (1), une nouvelle démonstration de la formule par laquelle M. Levi-Civita rattache la courbure riemannienne à sa notion de parallélogrammoïde (2). Prenons pour ligne de base une géodésique et sur cette géodésique un arc PQ de longueur a. Prenons aux différents points M de l'arc PQ une direction qui reste parallèle à elle-même quand M se transporte sur l'arc PQ et portons sur la géodésique correspondante une longueur constante $MM' = b$. Nous obtenons une figure limitée par l'arc de géodesique PQ, deux arcs de géodésiques égaux PP' et QQ' faisant le même angle φ avec PQ et un certain arc de courbe P'Q'. La construction indiquée, faite dans l'espace euclidien de raccordement, donne évidemment $\sigma_0 = a$; en posant $\sigma = a'$, nous obtenons

$$(2) \qquad a' - a = -\frac{1}{2} b^2 \sin^2\varphi \int K\, ds.$$

(1) La manière dont intervient l'*écart* MM', par sa seule composante normale y, ainsi que la courbure K, permet de rapprocher la formule (1) de la formule

$$\frac{d^2y}{ds^2} + Ky = 0$$

indiquée par M. U. CRUDELI (loc. cit., p. 251; cfr. T. BOGGIO, « Rend., 4II, p. 257), où les lettres y, K et s ont la même signification que dans le texte. Il me semble cependant que la formule de MM. Boggio et Crudeli est inexacte, comme on peut s'en rendre compte en considérant dans l'espace ordinaire l'écart de deux droites infiniment voisines non situées dans un même plan.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* (« Rend. Circ. Palermo », t. 78, 1917, pp. 187-217); cfr. E. CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann* (« Mém. de Math. », fasc. IX, 1925, pp. 28-29).

Digitized by Google

Si l'arc PQ est infiniment petit, la partie principale de $a - a'$ est égale à $\frac{1}{2} K a b^2 \sin^2 \varphi$ et on a par suite

$$a^2 - a'^2 = K a^2 b^2 \sin^2 \varphi ,$$

ou

$$\frac{a^2 - a'^2}{S^2} = K, \tag{3}$$

S désignant l'aire du quadrilatère considéré.

Si maintenant on remplace l'arc de courbe P'Q' par l'arc de géodésique qui joint ses deux extrémités, la longueur σ est altérée d'une quantité négligeable à l'ordre d'approximation considéré, et on retrouve la formule de M. Levi-Civita.

Si l'on supposait que la géodésique MM', au lieu de se transporter parallèlement à elle-même, subît un déplacement hélicoïdal de pas réduit h, on arriverait, par le calcul élémentaire de σ_0'', à la formule plus générale

$$\frac{a^2 - a'^2}{S^2} = K - \frac{1}{h^2} , \tag{4}$$

par laquelle on pourrait rejoindre la notion des parallélismes de Clifford dans l'espace elliptique (1).

II. - Considérons maintenant le problème de l'écart géodésique pour un système matériel à liaisons non holonomes indépendantes du temps. Supposons, pour simplifier, que la position du système dépende de 3 paramètres x, y, z, avec une liaison non holonome

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0 . \tag{5}$$

L'expression de la force vive du système permet de représenter chaque position du système par un point d'un espace de Riemann à trois dimensions. La normale en chaque point aux directions satisfaisant à l'équation (5)

(1) La formule (1) suppose que la vitesse angulaire de rotation absolue de la direction MM' (le temps étant pris égal à s) reste fini. En se bornant à une déformation MM' constamment *normale*, on peut donner une formule plus générale que (1). Tout point infiniment voisin de B peut être défini par les trois coordonnées s (abscisse curviligne de M), u et v (composantes du vecteur MM' suivant deux directions rectangulaires données). On a alors la formule suivante

$$d\sigma^2 = d\sigma_0^2 - K y^2 ds^2 + \frac{4}{3} (R_{1212} u + R_{1213} v)(u\,dv - v\,du)\,ds - \frac{1}{3} R_{2323} (u\,dv - v\,du)^2 ,$$

où les coefficients du ds^2 sont donnés au 3e ordre près; les R_{ijkh} sont les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel, l'indice 1 se rapportant à la direction tangente à B, les indices 2 et 3 aux deux directions suivant lesquelles sont comptées les composantes u et v. Cette formule s'appliquerait à un arc de courbe situé dans la surface géodésique normale en un point donné de B (s constant, u et v fonctions très petites d'un même paramètre).

Digitized by Google

définit une congruence de courbes (C). Tout mouvement spontané du système est représenté par une ligne normale à la congruence (C) et ayant, par rapport à cette congruence, une courbure normale nulle (géodésique). Soit B une telle géodésique. Attachons à chacun de ses points M (ainsi qu'à chaque point de toute géodésique infiniment voisine) un trièdre trirectangle dont le premier vecteur unitaire soit tangent à la géodésique et le troisième à la ligne de la congruence (C) passant par M. Nous désignerons par

$$\begin{array}{ccccc} \gamma_{131} & , & \gamma_{132} & , & \gamma_{133} \\ \gamma_{231} & , & \gamma_{232} & , & \gamma_{233} \end{array}$$

les coefficients de rotation bien connus de Ricci.

Le passage de B à une géodésique infiniment voisine se fera en portant en chaque point M de B un vecteur normal infiniment petit MM′ dont nous désignerons les composantes par (o, u, v). Nous introduirons comme inconnue auxiliaire l'angle infiniment petit w dont le trièdre tourne autour de son 3e axe quand on passe de M à M′.

Cela posé, les équations de l'écart géodésique sont

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{ds} - \gamma_{231}\, v - w = 0, \\ \dfrac{dv}{ds} + (\gamma_{231} - \gamma_{132})\, u - \gamma_{133}\, v = 0, \\ \dfrac{dw}{ds} + (R_{1212} - \gamma_{132}\gamma_{231} + \gamma_{131}\gamma_{232})\, u + (R_{1213} + \gamma_{131}\gamma_{233} - \gamma_{133}\gamma_{231})\, v = 0 \end{cases}$$

On remarquera qu'on ne peut pas supposer $v = o$; sinon en effet, d'après la seconde équation (6), on aurait $u = o$ (la quantité $\gamma_{231} - \gamma_{132}$ ne peut être nulle que *si la liaison est holonome*). Autrement dit *le passage de la géodésique* B *à une géodésique infiniment voisine ne peut jamais satisfaire à la condition de liaison*

$$a\delta x + b\delta y + c\delta z = o$$

imposée aux mouvements réels.

L'élimination de u et w conduit facilement pour v à une équation différentielle linéaire du *troisième* ordre. Il semble donc fort douteux qu'*en général* les mouvements spontanés soient stables.

III. - La dernière formule que je vais indiquer est une généralisation de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, due à Schwarz, à laquelle satisfait la longueur qu'il faut porter normalement à une surface minima donnée de l'espace ordinaire pour obtenir une surface minima infiniment voisine.

Digitized by Google

Considérons, dans un espace de Riemann à n dimensions, une surface minima S, et attachons à chaque point M de S un système de $n-2$ vecteurs unitaires normaux à S et rectangulaires entre eux. Soit

$$a_\alpha \cos 2\theta + b_\alpha \sin 2\theta$$

la projection sur le $\alpha^{ième}$ vecteur normal de la courbure normale d'une ligne quelconque tracée sur S et faisant en chaque point un angle θ avec une tangente fixe attachée à ce point.

Tout vecteur normal à S sera défini par ses projections

$$u_\alpha \qquad (\alpha = 3, \cdots, n)$$

sur les $n-2$ vecteurs unitaires normaux. Les équations auxquelles doivent satisfaire les u_α pour qu'on passe de S à une surface minima infiniment voisine sont alors

$$(7) \qquad \Delta u_\alpha + \sum_{\lambda=3}^{\lambda=n} (R_{1\alpha 1\lambda} + R_{2\alpha 2\lambda} + 2a_\alpha a_\lambda + 2b_\alpha b_\lambda) u_\lambda = 0.$$

Le symbole Δ désigne le second paramètre différentiel de Beltrami, appliqué ici à un vecteur normal et calculé naturellement suivant les règles du calcul différentiel absolu.

Les équations (7) fournissent à la fois une généralisation de l'équation de Schwarz et une généralisation des équations de l'écart géodésique de M. Levi-Civita.

Si $n = 3$, la quantité $a_3^2 + b_3^2$ est égale à la courbure totale (gaussienne) de la surface, changée de signe. Dans le cas de l'espace euclidien, on a l'équation, équivalente à celle de Schwarz,

$$\Delta u + \frac{2}{R^2} u = 0,$$

$\frac{1}{R}$ désignant la valeur absolue des courbures principales de la surface.

Les équations (7) seraient à considérer si on voulait discuter l'existence d'un vrai *minimum* pour l'aire de la surface S limitée par un contour donné.

Digitized by Google

Astronomia. — *Sulle cause della luminosità delle stelle cadenti.* Nota [1] del Corrisp. P. BURGATTI.

1. È opinione antica, sparsa su tutti i libri, che la luminosità delle stelle cadenti sia dovuta all'attrito dell'aria.

A cagione, si dice, della grande velocità del meteorite, gli urti con le molecole dell'aria sono così violenti che il corpo diventa incandescente ed irradia ad un tratto quella luce bianca e vivissima che desta la nostra ammirazione. Infatti, si aggiunge, i meteoriti che sono stati raccolti poco dopo la loro caduta erano caldi, e la loro superficie presenta sempre traccie evidenti di fusione. E questa è la sola ragione che si suol portare a sostegno dell'opinione in discorso; opinione così inveterata, che è tenuta per una di quelle verità triviali che non possono dar luogo a discussione.

Da più di vent'anni io mi son fatto intorno a cotesto fenomeno un concetto del tutto diverso. Ma non credetti opportuno a quei tempi e negli anni successivi farne pubblica dichiarazione, perchè, date le idee allora correnti, non avrei saputo addurre ragioni che avessero avuto qualche valore presso gli studiosi, e sarei parso più audace che ragionevole.

Oggi le cose sono mutate. Prima le applicazioni della teoria cinetica dei gas e gli studi sulla loro ionizzazione; poi le brillanti ricerche intorno alle aurore boreali con gli ultimi risultati di Störmer, Vègard e altri; e infine le numerose osservazioni e i profondi studi sulla propagazione delle onde elettromagnetiche lunghe e brevi (specialmente su queste) intorno al globo, hanno indotto i fisici a cambiare fondamentalmente le loro idee intorno alla costituzione dell'alta atmosfera. Cosicchè le mie considerazioni possono svolgersi oggi in un campo propizio; ond' io non esito più a sottoporle alla benevola attenzione dei competenti, per quanto esse siano ancora incomplete.

2. Per brevità chiamerò *ipotesi termica* la spiegazione oggi corrente intorno alla luminosità delle stelle cadenti; benchè più che una ipotesi sia stata considerata come una verità evidentissima. A prova di questo citerò una Memoria abbastanza recente dei signori Lindemann e Dobson [2], interessante sotto varî rispetti, ma più specialmente per l'appoggio che porta alla mia tesi.

Siccome, dicono i chiari Autori, le stelle cadenti entrando nell'atmosfera s' infiammano e brillano di bianca luce, noi potremo dallo studio in-

(1) Presentata nella seduta del 1° maggio 1927.

(2) « Proceedings of the Royal Soc. London », gennaio 1923, *Meteors and the phisical conditions of the upper atmosphere.*

Digitized by Google

torno alla produzione di quella vivace incandescenza dedurre qualche cognizione riguardo alla costituzione dell'alta atmosfera. E dopo parecchi ragionamenti e ingegnosi calcoli, che non mi sembrano del resto tutti persuasivi, giungono a dedurre certi caratteri della densità e della temperatura alle grandi altezze che sono alquanto paradossali e certamente in pieno contrasto con le idee ben fondate, che dominano oggi; e ciò malgrado il visibile sforzo degli Autori stessi per non rendere il contrasto troppo stridente (1). Ma essi, ben convinti della saldezza del loro punto di partenza, affermano che coteste conclusioni, per quanto strane possano apparire, s' impongono all'attenzione dei fisici.

Chi non si lasciasse dominare dalla tradizione concluderebbe con più ragione così: considerato che le conclusioni dedotte dalle esposte analisi sono in pieno contrasto con quelle che si deducono per varie altre vie e che fra loro tanto bene concordano, si deve dubitare che l' ipolesi termica intorno alla luminosità delle stelle cadenti corrisponda del tutto alla realtà delle cose. Questa conclusione mi par tanto logica, ch' io la presento qui come una delle ragioni che danno forza alle mie idee, sulle quali dirò ora brevemente.

3. Occorre ricordare che le stelle cadenti appariscono d'un tratto a una altezza media fra gli 80 e 100 km. e con una velocità che si calcola dell'ordine di 40 a 50 km. al secondo. La bianca luminosità per incandescenza richiede una temperatura non certo inferiore a 1500°, dipendente del resto (entro limiti non ampi) dalla natura del corpo. Riguardo all' innalzamento della temperatura d'un corpo per effetto dell'attrito d'un gas si hanno pochi dati nei casi ordinari e mancano del tutto quando si tratta di grandissime velocità (dell'ordine delle velocità planetarie) e di gas molto rarefatti. Chi dice che sia proporzionale alla velocità, e chi, con più ragione, al quadrato della velocità. Stando all'esperienze di Lord Kelwin (2), si dedurrebbe che vicino al suolo, cioè nell'aria a 15° circa e alla pressione di 760 mm., il riscaldamento per attrito salirebbe intorno a 1000° al massimo per un meteorite che avesse la velocità di 50 km. al secondo. Ma come dipende il riscaldamento della densità del mezzo? In mancanza di esperienze conclusive par logico ammettere che sia proporzionale alla densità, come accade per la resistenza. E allora a 50 km. d'altezza il riscaldamento sarebbe già insufficiente a produrre una incandescenza visibile. Come può dunque produrla

(1) Oltre i 65 km. la densità dell'atmosfera sarebbe *considerevolmente* superiore a quella che si suppone oggigiorno, e la temperatura, di 200 e più gradi assoluti fino 50 km., aumenterebbe di molto al crescer dell'altezza. Questi fatti si potrebbero spiegare, secondo gli Autori, ammettendo l'esistenza di *una forte percentuale d'ozono*; ipotesi del tutto gratuita e artificiosa.

(2) « S Papers », t. 5, p. 445 sgg. L'Autore scrive: « The result (s' intende degli esperimenti) shows that at high velocities the termal effect is proportional to the square of velocity, the rise of temperature of the whirled body being evidently that due to the communication of the velocity to a constantly renewed film of air ».

Digitized by Google

vivacissima a quelle altezze ove tutto induce ad ammettere che la pressione si riduca a una frazione di millimetro?

E si noti che se la luce apparisce d'un tratto brillantissima a 80 km., per esempio, bisogna ammettere che il riscaldamento sia avvenuto nelle regioni ancora più alte. E siccome in qualche secondo il meteorite percorre centinaia di chilometri, il riscaldamento dovrebbe accadere là ove non si dubita punto che regni al massimo una pressione dell'ordine di quelle che esistono nei nostri tubi a vuoto più perfezionati.

Come si vede, in queste considerazioni io distinguo il tratto alto della traiettoria dal tratto inferiore che corre nella bassa atmosfera. È di quello soltanto ch' io intendo parlare.

Notevole, e non facilmente spiegabile con l' ipotesi termica, è anche la colorazione della luce. Siccome durante l' incandescenza un corpo si fa rossiccio dapprima e a mano a mano più bianco, è strano che soltanto la luce bianca sia ad un tratto visibile (1). Se qualche volta comparisce una luce un poco rossiccia, sempre ciò accade quando il meteorite penetra negli strati medi dell'atmosfera, e un attimo dopo diventa invisibile o quasi. Tutto questo fa credere che la vera incandescenza visibile cominci soltanto nei medi strati; ma tosto s'attenua e non può giungere mai a produrre luce viva (2).

Dividendo dunque l'atmosfera in quattro zone comprese circa fra 0 e 50 km., da 50 a 100, da 100 a 200 (la zona detta *idrogenata*) e oltre i 200 km. (la zona detta da alcuni, non so con quanta ragione, del *geocoronio*), è logico concludere che solo nella 1ª zona, e tutto al più nel passaggio dalla 2ª alla 1ª, sia possibile il fenomeno della incandescenza, non dico vivace, ma un poco appariscente. L' ipotesi termica, secondo la quale bisogna forzatamente ammettere che l' incandescenza vivissima avvenga nell' ultima zona (quasi nel vuoto assoluto), onde manifestarsi a noi d'un tratto nella zona idrogenata, mi pare difficile a sostenersi (3). Bisogna dunque attribuire la stupenda luminosità delle stelle cadenti in questa zona ad altre e ben di-

(1) Non di rado, se la striscia luminosa è abbastanza intensa, essa appare orlata d'un bel verde visibilissimo.

(2) Una volta, all'alba, sulla vetta del Cimone (2000 m.) ebbi la fortuna di vedermi passare dinanzi a poco più di cento metri e quasi alla mia altezza, un meteorite di forma poliedrica, che giudicai della grossezza d'un medio cocomero. Pareva che avesse una tenue scia di vapori, ma non splendeva (per lo meno la sua luce non vinceva la debole luce dell'alba), ed era forse l'alba che me lo faceva vedere nel cielo purissimo. Data la perfetta visibilità del corpo del meteorite, la sua velocità doveva essere inferiore a quella d'un comune proiettile d'artiglieria. Disparve dietro al monte e non potei vedere dove andasse a cadere. La resistenza della bassa atmosfera diminuisce dunque di molto la velocità del meteorite (di un cinquantesimo almeno), per modo che l'attrito non può più produrre un considerevole aumento di temperatura.

(3) Se si riportassero i calcoli dei signori Lindemann e Dobson alla zona del geocoronio, come veramente si dovrebbe fare, si troverebbero risultati ancor più strani di quelli ottenuti dai citati autori. Ond' è che le loro ricerche danno gran forza alle mie obiezioni, ammesso che i loro calcoli siano accettabili.

Digitized by Google

verse cause. Essa presenta le stesse precise caratteristiche per tutte le stelle cadenti (fatto da non trascurarsi), ed ha senza dubbio una suggestiva rassomiglianza con quella che si osserva nei tubi di *Crookes*.

4. *Io credo appunto che si tratti principalmente d'un fenomeno di natura elettrica*. Non è certo facile, allo stato presente delle nostre conoscenze, portare delle ragioni del tutto convincenti. La questione resta insoluta, ma viene posta sotto nuova luce che può dar luogo a ricerche interessanti. Gli osservatori sono rimasti finora quasi indifferenti davanti al fenomeno della luminosità, giacchè in base all' ipotesi termica c' è poco da ricercare; l' ipotesi elettrica invece potrà essere per essi più feconda.

In appoggio a questa ipotesi stanno diverse circostanze. Gli studi moderni, che da più parti hanno condotto a meditare sulla costituzione dell'alta atmosfera, portano alla conclusione che la zona idrogenata e la zona superiore devono essere fortemente ionizzate e percorse da correnti di elettroni. Lo strato di confine fra cotesta zona e la così detta *atmosfera effettiva*; lo strato dove si ritiene ormai quasi certo che accada la riflessione e la rifrazione delle onde sonore e più ancora delle onde Hertziane, si trova appunto tra gli 80 e 100 km., proprio là dove di solito apparisce la maggior luminosità delle stelle cadenti.

Il meteorite dunque attraversa una zona che per la sua natura si presta a produrre fenomeni elettrici considerevoli; come dimostra ormai chiaramente il ben studiato fenomeno delle aurore boreali. Il non tener conto di questo; il voler porre in gioco il puro fenomeno d'attrito, come se si trattasse d'uno strato atmosferico d'ordinaria natura, mi pare del tutto irragionevole.

L'urto fra il meteorite e l'atmosfera di elettroni e di ioni s'accresce per la grande velocità di questo; un certo aumento di temperatura con formazione d'un tenue straterello di vapori intorno al meteorite deve avvenire; e allora tutto può accadere in modo non dissimile da ciò che accade in un tubo di *Crookes* quando si provoca la scarica attraverso il gas rarefatto. E si noti che il meteorite può essere considerato come un anodo, perchè nei suoi secolari giri attorno al sole, percorso di continuo da radiazioni ultraviolette d'ogni specie, deve acquistare certamente una carica elettrica positiva, l'entità della quale non si può *a priori* apprezzare.

Talvolta è stato osservato che il meteorite lascia dopo il suo passaggio un lieve e candido bagliore lungo il primo tratto della sua traiettoria, che persiste per qualche minuto, ed anche, hanno affermato alcuni osservatori, per una mezz'ora e più. Questo fenomeno ammette nella nostra ipotesi una razionale spiegazione. Probabilmente la perturbazione provocata dal violento passaggio del meteorite determina per qualche tempo ancora degli urti fra ioni e elettroni, che si manifestano appunto con un lieve bagliore, del resto non sempre visibile.

Nella ipotesi termica invece il fenomeno è assai strano; tanto è vero che qualcuno fra i partigiani di questa ha pensato di considerare cotesto

Digitized by Google

fenomeno indipendente da quello della incandescenza e di attribuirlo a cause di natura elettrica [1] (senza dir quali).

Nei medi strati dell'atmosfera le cose vanno alquanto diversamente. Ivi il riscaldamento, come si è detto, può essere sufficiente a provocare per un momento una certa incandescenza, almeno fino al colore rosso; perciò a terra si troverà il meteorite caldo e con traccie di fusione [2].

In conclusione io credo che l'ipotesi termica non corrisponda del tutto a verità; per lo meno dev'essere ridiscussa al lume delle moderne conoscenze. In base a queste l'*ipotesi elettrica* si affaccia spontanea al pensiero come la più logica e la più meritevole di considerazione.

Importante in questo dibattito fra le due ipotesi sarebbe lo studio dello spettro delle stelle cadenti. Io non ho notizie che studi di questo genere siano stati fatti [3].

Astrofisica. — *Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1926.* Nota [4] del Corrisp. GIORGIO ABETTI.

Le osservazioni regolari dell'altezza della cromosfera solare misurando l'altezza della riga H_α invertita, con la fessura dello spettroscopio situata radialmente al bordo, sono state continuate nel 1926 ad Arcetri, Catania e Madrid.

Ad Arcetri dal principio del 1926 si è fatto, nel procedimento delle misure, il cambiamento accennato in una precedente Nota [5], cioè esse sono state eseguite di 30° in 30° di latitudine partendo dal polo nord del sole. I risultati ottenuti sono i seguenti per l'altezza media annua della cromosfera alle varie latitudini e complessivamente:

Altezza media della cromosfera - Arcetri 1926.

+90° N	+60° E	+30° E	0° E	−30° E	−60° E	−90° S	−60° W	−30° W	0° W	+30° W	+60° W	Media
10″.8	10″.6	10″.8	10″.8	10″.8	10″.7	10″.9	10″.7	11″.0	10″.8	10″.9	10″.5	10″.7

(1) Si può obiettare: se il fenomeno elettrico avviene dopo il passaggio del meteorite, perchè non deve avvenire a più forte ragione durante il passaggio stesso?

(2) Ma alcune di quelle tracce non potrebbero essere originarie del meteorite?

(3) Mentre rivedevo le bozze, ho avuto conoscenza d'una Nota interessante del sig. SPARROW in «Astrophisical Journal» del 1926 *Physical Theory of Meteors*, ove, fra l'altro, son criticate le deduzioni di LINDEMANN e DOBSON, il che concorda coi dubbi che ho espresso io stesso in questa Nota. Nello stesso «Journal» del 1927 c'è una risposta di questi Autori. Parlerò probabilmente in altro luogo di questi lavori; qui basti dire che nulla tolgono alla ragionevolezza della mia ipotesi.

(4) Presentata nella seduta del 24 aprile 1927.

(5) Questi «Rendiconti», vol. III, ser. VI, p. 144, 1926.

Digitized by Google

I giorni di osservazioni sono stati 106 (osservatori G. Abetti e P. Cipriani), ma si deve notare che per le latitudini dove le protuberanze sono più frequenti le medie sopra scritte sono dedotte da un numero di osservazioni considerevolmente minore essendosi omesse tutte quelle che erano perturbate dalla presenza di una protuberanza. A Madrid, le analoghe *osservazioni* sono state eseguite dal prof. P. Jimènez sin dal principio (dicembre 1923), partendo dal polo nord di 45° in 45° di latitudine, e non soltanto all'angolo preciso, ma altresì a circa 2° o 3° prima o dopo di questo per accrescere la precisione e limitare, per quanto possibile, l'effetto delle perturbazioni accidentali. In questo modo è anche evitato di misurare l'altezza della cromosfera proprio a quegli angoli in cui, in un determinato giorno, si presentavano protuberanze di base non troppo estesa. I giorni di osservazione nel 1926 sono stati 49.

Anche a Catania, a partire dal 29 gennaio 1926, le osservazioni sono state eseguite di 45° in 45° cominciando dal polo nord, in 134 giorni.

Altezza media della cromosfera – Catania e Madrid 1926.

	+90° N	+45° E	0° E	−45° E	−90° S	−45° W	0° W	+45° W	Media
Catania	10″.0	9″.7	9″.7	9″.6	9″.8	9″.6	9″.5	9″.6	9″.69
Madrid	10 .7	10 .7	9 .9	10 .4	10 .7	10 .7	10 .1	10 .5	10 .41

Se si confronta la media complessiva ottenuta in Arcetri per il 1926 (10″.8) con quella ottenuta dal 1° gennaio al 29 agosto 1925 (9″.3), si riscontra un notevole aumento che può essere dovuto a due cause principali: 1) un aumento generale dell'attività del sole per tutto il 1926, che ebbe luogo infatti, come si sa dalle altre sue manifestazioni, a partire dal settembre 1925, proprio quando vennero cessate in Arcetri le osservazioni di quell'anno per il montaggio del nuovo obbiettivo all'equatoriale di Amici e la pulitura dei prismi dello spettroscopio; 2) l'aumentata luminosità dell'obbiettivo (da 28 cm. a 36 cm. di apertura con la stessa distanza focale) e l'aumentata trasparenza dei prismi dello spettroscopio in seguito alla pulitura.

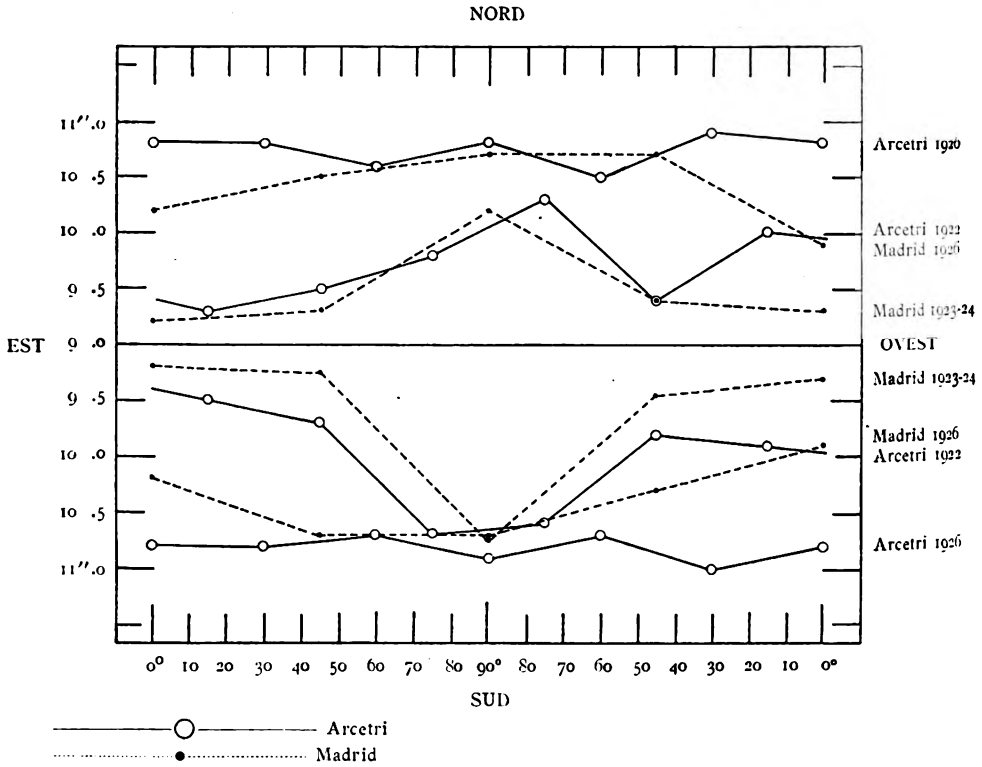
Per Madrid non si può fare il confronto con le osservazioni del 1925, perchè, a causa delle cattive condizioni climatiche, in quell'anno furono fatte osservazioni soltanto in otto giorni, ma l'altezza media per il 1926 (10″.5), è in buon accordo con quella trovata ad Arcetri (10″.8).

Per Catania pure non si può istituire un sicuro confronto perchè mentre prima del secondo semestre 1926 le misure furono nella quasi totalità eseguite dal prof. Favaro, dopo quest'epoca si sono alternati varî osservatori (signorine Ricci e Rausi e sig. Strano) di cui è necessario, in

Digitized by Google

una definitiva riduzione, determinare le equazioni personali. In media si avrebbe una diminuzione, da 10″.9 per il 1925, a 9″.7 per il 1926, che in parte appunto può essere dovuta al cambio degli osservatori.

Per ciò che riguarda la variazione complessiva dell'altezza della cromosfera di anno in anno, si vede quanto sia importante, per arrivare a stabilirne con qualche precisione l'entità effettiva di investigare con un omogeneo sistema di misure, le possibili cause di errore, quali le condizioni dell'atmosfera, i diversi mezzi strumentali, i diversi osservatori.



Se si considera ora l'altezza della cromosfera alle varie latitudini, dalle osservazioni di Arcetri essa risulta per il 1926 sensibilmente costante, e così pure dalle osservazioni di Madrid, benchè in queste vi sia una tendenza di maggiore elevazione alle alte latitudini (fig. 1).

Esaminando le cause della maggiore divergenza all'equatore che non ai poli fra le osservazioni di Madrid e quelle di Arcetri, si è indotti a credere, che possano dipendere dalla differenza nel modo di eseguire le misure già detto e cioè, che ad Arcetri furono omesse tutte quelle fatte in un punto della cromosfera perturbato (protuberanze), mentre a Madrid furono fatte le osservazioni nelle regioni immediatamente vicine alle protuberanze stesse. Ora si sa che in tali regioni spesso la cromosfera è più

Digitized by Google

bassa che nei punti di altezza normale, provocando così in media un'altezza minore per gli angoli in cui sono più frequenti le protuberanze. D'altra parte il modo tenuto in Arcetri ha lo svantaggio che la media altezza per questi angoli resta basata su di un numero troppo scarso di osservazioni specie durante i periodi di massimo di attività solare.

Malgrado la detta divergenza, dall'insieme delle osservazioni sembra si possa concludere, che nel 1926 la cromosfera è stata più uniformemente distribuita attorno al globo solare che non negli anni precedenti. Ciò risulta chiaramente se riportiamo sul grafico per confronto i valori ottenuti ad Arcetri nel 1922. A parte l'altezza generale media su cui in parte, come si è detto, possono avere influito le mutate condizioni strumentali, la maggiore altezza ai poli trovata nel 1922 e anche nel 1923, attenuata nel 1924-25, è scomparsa nel 1926.

Per Madrid, non essendo nel 1922 ancora state cominciate queste misure sono poste invece, per analogo confronto, quelle ottenute dal dicembre 1923 al novembre 1924 [1], che presentano lo stesso generale andamento.

Anche all'Osservatorio dell'Università di Crimea, a Simferopol [2], sono state iniziate analoghe osservazioni dell'altezza della cromosfera con metodo essenzialmente simile, ma poichè esse sono limitate, per quanto sono pubblicate, soltanto a pochi giorni dell'estate del 1924 (due giorni) e di quello del 1925 (14 giorni), così non si può ancora stabilire un confronto con le osservazioni qui discusse. Tuttavia si può notare che l'andamento generale dell'altezza della cromosfera alle varie latitudini determinato a Simferopol, è simile a quello trovato dalle misure di Arcetri e Madrid.

Secondo le teorie solari di Emden [3] e Bjerknes [4], ai poli del sole dovrebbe esistere una temperatura più alta che non all'equatore. Conseguenza di questo fatto potrebbe essere, se i risultati qui esposti verranno ulteriormente confermati, una maggiore altezza ed intensità della cromosfera ai poli che non all'equatore e più notevole ai minimi che non ai massimi dell'attività solare.

Per quanto riguarda l'attività dell'alta cromosfera, cioè delle protuberanze, si deve notare, che durante tutto il 1926 essa fu molto considerevole, risultando dalle osservazioni di Zurigo un aumento di 665 unità di protuberanze (area coperta dall'arco di un grado del bordo solare per un secondo d'arco) rispetto al 1925. Il massimo delle protuberanze sulla zona delle macchie è ben definito, a circa ± 30°, e quello ad alta latitudine si è spostato da ± 60°, nel 1925, a ± 70° nel 1926.

I dettagli e le riduzioni definitive di queste osservazioni verranno date come di solito nelle pubblicazioni dell'Osservatorio di Arcetri.

(1) Pubblicazioni « Osservatorio Arcetri », fasc. 42, p. 45, 1925.

(2) PEREPELKIN, *Mikrometermessungen der Höhe der Sonnenchromosphäre*, « Astron. Nachr. », n. 5485, 1927.

(3) *Gaskulgen*, p. 440, Leipzig, 1907.

(4) *Solar Hydrodynamics*, Contr. Mqunt Wilson. n. 312, p. 25, 1926.

Digitized by Google

Fisica. — *Su di un nuovo metodo di telefonia ottica con luce ordinaria o con luce ultravioletta.* Nota del Socio Q. MAJORANA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *Determinazione della concentrazione in idrogeno ioni attivi in acque minerali italiane.* Nota [1] del Socio R. NASINI e di C. PORLEZZA [2].

In una Nota precedente [3] abbiamo considerato i varii metodi che possono applicarsi per determinare *l'esponente d'idrogeno*, P_H, delle acque minerali, esponente che si riferisce, com'è noto, alla misura della *concentrazione attiva* degli ioni idrogeno in una soluzione.

Per quanto riguarda le acque minerali, abbiamo esposto soprattutto il metodo elettrometrico e il metodo colorimetrico, mettendo specialmente in evidenza le cause d'errore che possono influire sui risultati.

Le numerose esperienze da noi eseguite ci hanno permesso di concludere che nel caso delle acque minerali il metodo che si presta ad una maggiore generalità di applicazione è il metodo colorimetrico; i tentativi (ripetuti anche cercando di modificare gli elettrodi comunemente impiegati) di impiegare il metodo elettrometrico per acque molto ricche di acido carbonico – e questo si verifica assai spesso – non ci hanno permesso di raggiungere con questo metodo risultati costanti.

Nelle determinazioni che qui riportiamo e da noi eseguite con la collaborazione del dott. Gimignani Lorenzo, il quale si è quasi sempre recato con noi sul posto, e di più ha validamente contribuito alla esecuzione delle esperienze preliminari relative alla applicabilità dei vari metodi, ci siamo serviti quasi esclusivamente dell'apparecchio colorimetrico Bjerrum-Arrhenius costruito dalla casa Lautenschläger. Com'è noto, tale apparecchio è assai semplice, consistendo essenzialmente di una bacinella rettangolare di vetro, divisa, in diagonale, da una lastra di vetro, in due compartimenti a sezione triangolare; in uno di tali compartimenti si pone l'indicatore in soluzione acida, nell'altro l'indicatore stesso in soluzione alcalina. La soluzione da esaminare è posta in una cellula soprastante alla bacinella suddetta ed è spostabile lungo una scala; l'uguaglianza della colorazione dell'indicatore nella soluzione in esame e nella zona sottostante della bacinella può venire individuata a mezzo di una finestra che permette di percepire uno sotto l'altro i due strati colorati.

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1927.
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Pisa.
(3) «Annali di Chimica Applicata», vol. 16°, p. 156 (1926).

Digitized by Google

Agggiungiamo qui l'elenco degli indicatori impiegati (per brevità abbiamo riportato soltanto il nome commerciale) insieme al loro « esponente », cioè al P_H corrispondente al punto di viraggio.

TABELLA I.

Indicatori usati	Esponente dell'indicatore
Bleu di timolo	1.7
Bleu di bromofenolo . . .	4.1
Rosso di metile	5.1
Porpora di bromocresolo . .	6.3
Bleu di bromotimolo . . .	7.0
Rosso di fenolo	7.9
Rosso di cresolo	8.3
Bleu di timolo	8.9

Questa tabella ci servirà tra breve per fare un'osservazione d'indole generale.

Pur non volendo negare una certa soggettività nell'apprezzamento dei colori, e pur non essendo facile introdurre correzioni esatte per l'azione dei sali, pure il metodo colorimetrico e l'apparecchio suddetto ci hanno permesso di giungere a risultati ben concordanti in misure ripetute. Occorre anche mettere in rilievo che nel caso delle acque minerali una grandissima esattezza non appare necessaria.

Notiamo espressamente che, specie nel caso di acque molto carboniche, abbiamo trovato molto opportuna la seguente tecnica di prelevamento del campione: prese due provette di uguale diametro, venivano poste in una di esse le quantità di liquido e di soluzione di indicatore prescritte nella istruzione dell'apparecchio, nell'altra, previamente sciacquata con acqua minerale, veniva messo l'opportuno indicatore nella quantità prescritta, e poi direttamente dalla sorgente veniva introdotta tanta acqua minerale quanta era necessaria per avere eguale livello di liquido nelle due provette. Si tappava poi immediatamente la provetta contenente l'acqua minerale e si eseguiva la misura con l'apparecchio descritto; in generale la misura stessa veniva ripetuta almeno due volte con campioni diversi.

Esponiamo anzitutto i risultati delle misure da noi eseguite su alcune acque minerali, tra le quali varie da noi già analizzate, riserbandoci di esaminare in seguito il P_H di altre acque tra quelle che abbiamo già sottoposto all'analisi.

A chiarimento della tabella che segue aggiungiamo che, oltre alla misura pura e semplice del P_H, abbiamo creduto opportuno di istituire una ricerca, sia pure di valore relativo, in riguardo alla variazione del P_H con

Digitized by Google

l'agitazione dell'acqua minerale. Per quanto sia da aspettarsi, *coeteris paribus*, che un'acqua perda tanto più facilmente acido carbonico quanto più ne contiene, pure ci è sembrato che l'indagine su acque anche di diverso tipo non fosse priva di interesse, poichè la perdita di anidride carbonica quando l'acqua venga abbandonata a sè stessa è connessa al cosiddetto « invecchiamento » dell'acqua sul quale ci siamo già intrattenuti nella nostra Nota già citata.

Per trovarci in condizioni comparabili, abbiamo pensato di procedere nel seguente modo: dopo eseguita la misura del P_H nella maniera descritta, si stappava la provetta e si agitava energicamente (senza capovolgerla) per 30 secondi, al termine dei quali si chiudeva nuovamente la provetta e si determinava il P_H; per le acque più ricche in acido carbonico si ripeteva questa operazione dopo altri 30 secondi di agitazione.

Questi dati sono riportati qui sotto insieme agli altri, ed accanto ad essi abbiamo scritto la corrispondente concentrazione in ioni idrogeno attivi:

TABELLA II.

Acqua di Bagni di Casciana	P_H	6.52	[H]	$= 0.30$	$\times 10^{-6}$
Acqua S. Leopoldo (Bagni di Casciana)	»	6.36	»	$= 0.44$	$\times 10^{-6}$
Acqua di S. Martino (Bagni di Uliveto)	»	6.40	»	$= 0.40$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.60	»	$= 0.25$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (» altri 30″ »	»	6.76	»	$= 0.17$	$\times 10^{-6}$
Acqua di S. Martino per bibita (Uliveto)	»	6.2	»	$= 0.63$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.5	»	$= 0.32$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	6.65	»	$= 0.225$	$\times 10^{-6}$
Acqua Bagni di Ponente (Uliveto)	»	6.18	»	$= 0.66$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.45	»	$= 0.355$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	6.65	»	$= 0.225$	$\times 10^{-6}$
Acqua d'Imbottigliamento (Uliveto)	»	6.13	»	$= 0.735$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.60	»	$= 0.25$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	6.70	»	$= 0.20$	$\times 10^{-6}$
Sorgente per il lavaggio (Uliveto)	»	6.24	»	$= 0.58$	$\times 10^{-6}$
Sorgente di Cinciano	»	6.42	»	$= 0.38$	$\times 10^{-6}$
Salsomaggiore (Pozzo Saline)	»	6.59	»	$= 0.255$	$\times 10^{-6}$
Id. dopo stagionatura	»	6.95	»	$= 0.115$	$\times 10^{-6}$
Bagni S. Giuliano (Pisa)	»	6.56	»	$= 0.28$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.69	»	$= 0.205$	$\times 10^{-6}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	6.9	»	$= 0.13$	$\times 10^{-6}$
Sorgente del Rinfresco (Bagni di Montecatini)	»	7.0	»	$= 1$	$\times 10^{-7}$

Digitized by Google

Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	P_H	7.29	[H]	$= 0.515 \times 10^{-7}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	7.38	»	$= 0.42 \times 10^{-7}$
Sorgente del Tettucio (Bagni di Montecatini)	»	6.93	»	$= 0.12 \times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	7.23	»	$= 0.59 \times 10^{-7}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	7.40	»	$= 0.40 \times 10^{-7}$
Sorgente Regina (Bagni di Montecatini)	»	6.70	»	$= 0.20 \times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	7.15	»	$= 0.71 \times 10^{-7}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	7.30	»	$= 0.50 \times 10^{-7}$
Sorgente Torretta (Bagni di Montecatini)	»	6.75	»	$= 0.19 \times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	7.10	»	$= 0.80 \times 10^{-7}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	7.30	»	$= 0.50 \times 10^{-7}$
Sorgente Tamerici (Bagni di Montecatini)	»	7.5	»	$= 0.32 \times 10^{-7}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	7.65	»	$= 0.225 \times 10^{-7}$
Sorgenti Leopoldine (Bagni di Montecatini)	»	7.22	»	$= 0.60 \times 10^{-7}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	7.42	»	$= 0.38 \times 10^{-7}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	7.55	»	$= 0.285 \times 10^{-7}$
Sorgente Campo (Bagni di Montecatini)	»	6.85	»	$= 0.14 \times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	7.18	»	$= 0.66 \times 10^{-7}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	7.35	»	$= 0.45 \times 10^{-7}$
Acqua delle Ferrarelle	»	6.10	»	$= 0.80 \times 10^{-6}$
Bagni "La Perla":				
Sorgente S. Luigi (bagno)	»	6.6	»	$= 0.25 \times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.7	»	$= 0.20 \times 10^{-6}$
Sorgente S. Giuseppe (bagno)	»	6.75	»	$= 0.175 \times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.86	»	$= 0.14 \times 10^{-6}$
Fonte bibita e bagno	»	6.4	»	$= 0.40 \times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.65	»	$= 0.225 \times 10^{-6}$
Sorgente S. Luigi esterna (bibita)	»	6.2	»	$= 0.63 \times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.55	»	$= 0.285 \times 10^{-6}$
Id. id. (» altri 30″ »)	»	6.71	»	$= 0.195 \times 10^{-6}$
Sorgente dei Bagni al Morbo	»	6.7	»	$= 0.20 \times 10^{-6}$
Id. id. (dopo 30″ di agitazione)	»	6.9	»	$= 0.13 \times 10^{-6}$

In riguardo ai dati ora esposti osserviamo che i valori non sono strettamente riferiti alla stessa temperatura, ma essi sono ben comparabili perchè la temperatura ambiente, a cui si aveva cura di far giungere l'acqua prima di eseguire la misura, non era molto diversa nei varii casi. Invece l'esat-

Digitized by Google

tezza lascia un po' a desiderare per alcune acque, come quelle a tipo clorurato-sodiche di Montecatini e soprattutto quelle di Salsomaggiore, che hanno un contenuto salino più o meno notevole, e che rendono necessaria la correzione per l'« errore salino ». Purtroppo nella letteratura non ci è riuscito trovare che scarsi dati, che qui riportiamo, limitandoci agli indicatori elencati nella tabella I [1].

TABELLA III.

Indicatore	Sale	Concentrazione	Correzione in PH
Bleu di timolo (viraggio acido)	KCl	0.1 n	— 0.06
»	»	0.2 n	— 0.06
»	»	0.5 n	— 0.04
»	»	1.0 n	+ 0.05
Bleu di bromofenolo	»	0.1 n	— 0.05
»	»	0.25 n	— 0.15
»	»	0.5 n	— 0.35
»	»	1.0 n	— 0.35
Porpora di bromocresolo	NaCl	0.5 n	— 0.25
Rosso di metile	»	0.5 n	+ 0.1
Rosso di fenolo	»	0.5 n	— 0·15
Bleu di timolo (viraggio alcalino)	»	0.5 n	— 0.17

Come si vede, per la zona delle nostre misure in cui abbiamo dovuto impiegare i due indicatori porpora di bromocreosolo e bleu di bromotimolo, non abbiamo che un solo dato relativo al primo e nessuno riguardo al secondo. Dobbiamo quindi per ora ritenere come provvisorî i dati riguardanti le acque di Montecatini più mineralizzate e quella di Salsomaggiore, poichè abbiamo intenzione di eseguire opportune esperienze per stabilire con una certa accuratezza la correzione da apportare. Naturalmente serbano invece il loro valore, sia pure relattvo, le misure riferentisi anche a tali acque dopo agitazione.

Abbiamo anche eseguito misure che, se non sono strettamente attinenti alle acque minerali, pure si riferiscono a prodotti provenienti dal sottosuolo e che riguardano l'industria boracifera di Larderello. Riportiamo qui sommariamente tali determinazioni, poichè l'ammoniaca che accompagna l'acido borico sia nel vapore dei soffioni, sia nelle acque che ne derivano, stabilisce

(1) Cfr. KOLTHOFF, *La détermination colorimétrique de la concentration des ions hydrogène*, Paris, Gauttier-Villars, 1926, p. 160.

Digitized by Google

probabilmente dei compensi che non permettono di osservare forti variazioni nel P_H:

Adriana di evaporazione corrispondente al soffione di S. Enrico.

				Alcalinità °/₀₀	H_3BO_3 °/₀₀
Inizio dell'Adriana	$P_H = 7.0$	$[H] = 1 \times 10^{-7}$	4 cm³ $NaOH\frac{N}{1}$		4.31
A circa $^1/_4$	» $= 6.95$	» $= 0.115 \times 10^{-6}$	4.4 »	»	5.5
» $^1/_2$	» $= 6.85$	» $= 0.14 \times 10^{-6}$	8.8 »	»	14.2
» $^3/_4$	» $= 6.75$	» $= 0.175 \times 10^{-6}$	12 »	»	19.2
Nella vasca di raccolta a 2° B	$P_H = 5.96$	$[H] = 0.11 \times 10^{-5}$	30 »	»	56.04
Acqua di condensazione (S. Enrico)	$P_H = 7$	$[H] = 1 \times 10^{-7}$	2.4 »	»	0.32
Entrata triplo effetto (condens. della Centrale elettrica)	$P_H = 6.7$	$[H] = 0.20 \times 10^{-6}$	1.2 »	»	3.64
Acqua di lavaggio foro reçupero	$P_H = 6.9$	$[H] = 0.13 \times 10^{-6}$	1.6 »	»	2.30
Acqua di lavaggio foro Piazza Anna	$P_H = 7.1$	$[H] = 0.80 \times 10^{-7}$	2.4 »	»	2.38

Concludendo in questo lavoro:

1. Sono state eseguite numerose misure, sul posto, relative ad acque minerali, e si è estesa la misura anche all'acqua dopo agitazione per avere un'idea della facilità di perdita dell'acido carbonico disciolto.

2. Le misure hanno dimostrato che il metodo colorimetrico, nel caso delle acque minerali, offre vantaggi di maggior generalità di applicazione e costanza nei risultati.

3. Si sono eseguite misure anche in riguardo a soluzioni che rappresentano varî stadi di estrazione dell'acido borico a Larderello, ma non appare che in tal caso, dato anche il fatto che insieme al contenuto in acido borico cresce pure l'alcalinità, il P_H possieda un carattere di misura chimico-fisica utilizzabile come criterio di orientamento.

Digitized by Google

Geologia. — *La «falda di ricoprimento del Monte Rosa» di Emile Argand e l'anticlinale permo-triasica Acceglio-Col Longet, nelle Alpi Cozie meridionali.* Nota [1] del Corrisp. Ing. S. FRANCHI.

In una memoria presentata all'Accademia or son due mesi [2] io mi sono occupato dell'importantissimo resoconto, scritto da P. Termier, delle gite fatte insieme al compianto W. Kilian, E. Raguin e con me in alcune valli italiane [3], e ne ho rilevato il grande valore, come documento statuente il quasi completo accordo al quale si è giunti, sulla geologia delle Alpi franco-italiane. Ma le escursioni fatte con gli eminenti Colleghi di Francia erano state compiute, disgraziatamente, con troppo ristretti limiti di tempo, per cui si capisce che, a causa dei controlli forzatamente incompleti, siano rimasti dei punti nei quali permane qualche discrepanza nella interpretazione dei fatti.

Di quelli dell'alta Valle di Susa io ho trattato ampiamente nella memoria dianzi citata, presentando profili, fotografie e panorami, coi quali spero di aver convinto il mio amico Termier che le affermate anormalità dei contatti fra Trias e Calcescisti in quella valle non possono essere confermate; ma mi sono riservato di trattare a parte della Valle Maira, perchè per questa non credo necessaria una nuova discussione, dopo le minute descrizioni da me fatte, fin dal 1898, dei contatti che sono stati ritenuti anormali da Termier e Kilian.

Nella escursione geologica compiuta in Valle Maira, così efficacemente descritta da P. Termier nel suo resoconto, ci siamo trovati in perfetto accordo sulla concordanza fra i micascisti del massiccio Dora-Val Maira, fra Dronero e S. Damiano, e l'Eotrias, iniziantesi con delle quarziti molto metamorfiche e proseguentesi con le dolomie, a luoghi con diplopore, quarziti, calcescisti, micaliti, calcescisti a sismondina, ecc., complesso eminentemente metamorfico, fino ad attraversare, in corrispondenza dello sbocco del Vallone di Elva, l'anticlinale di dolomie a *Worthenia solitaria,* incappucciata dai calcescisti con pietre verdi, i quali poi, con frequenti intercalazioni di filladi, si attraversano per parecchi chilometri, fin presso la nota ed interessantissima zona permo-eotriasica Acceglio-Col Longet, la quale figura in tutte le carte geologiche.

(1) Presentata il 1° maggio 1927.

(2) Nella seduta del 6 marzo 1927, ma poscia ritirata per poterla stampare con ampio corredo di figure, nel Bollettino del R. Ufficio geologico.

(3) *Compte Rendu d'une excursion géologique dans les Hautes Vallées de la Dora Riparia, de la Maira et de la Stura, en compagnie de MM. Secondo Franchi, Wilfrid Kilian et Eugène Raguin.* « Bull. Soc. Géol. de France ». 4e Série. t. XXV, p. 839-855. Année 1925.

Digitized by Google

L'accordo perfetto mantenuto fino allora è cessato quando si venne a parlare di questo contatto; perchè ivi i Colleghi francesi interpretano l'assenza del Trias, nelle solite forme dolomitiche, come conseguenza di un contatto anormale, tra i calcescisti, regolarmente inclinati verso la Francia, e le quarziti, mentre io ritengo che il Trias medio sia rappresentato, quale forma eteropica, da una parte dei calcescisti, con frequenti intercalazioni di grossi banchi di calcari cristallini e con limitati e saltuari banchi di dolomie; complesso questo che io osservai costantemente coi medesimi rapporti di perfetta concordanza con le quarziti, attraverso tutte le valli a sud della Maira, e che lo Stella osservò in Valle Varaita e in Val Chianale.

Disgraziatamente il brevissimo tempo disponibile, dovendo noi ritornare a Cuneo per recarci il giorno seguente in Valle Stura, non mi permise di accompagnare i Colleghi di Francia in vari punti non molto lontani, dove essi stessi avrebbero potuto osservare la perfetta concordanza e i passaggi graduali tra le quarziti e i calcescisti con pietre verdi, tanto presso Acceglio, seguendo la strada che conduce alle Grange Serre, che presso Ussolo e Maddalene.

Nel mio lavoro del 1898 « Sull'età mesozoica della zona delle pietre verdi » [1], intuita la grande importanza che aveva la zona Acceglio-Col Longet dai punti di vista della tettonica e della stratigrafia, ne ho lungamente discussi i rapporti, sia con la sinclinale di calcescisti del Monviso, che con quella di Acceglio, appoggiandomi su profili generali, come quello della tavola IX e quello della fig. 22, e su numerosi profili di dettaglio, come quelli delle figure 3, 4, 5, 16, 21 e 24 del mio lavoro. Per di più io ho pubblicato, a p. 221 dell'Estratto, una fotografia del Monte Pelvo, dalla quale appare, in modo molto chiaro, la perfetta concordanza dei grossi e ripetuti banchi di calcari cristallini intercalati nei calcescisti, sui quali le quarziti dell'Eotrias sono rovesciate, banchi che figurano in parecchi dei suddetti profili. Io potrei presentare bellissime fotografie dell'anticlinale permo-triasica di Acceglio vista da Onersio, e dei contatti, con perfetta concordanza, visibili su centinaia di metri di altezza, degli enormi banchi di quarziti e anageniti, rovesciati sopra i calcari cristallini e i calcescisti, ma riservo questi documenti per una illustrazione più completa della tettonica e della stratigrafia delle Alpi Cozie.

Io non dubito che P. Termier, rileggendo ora quanto io scrissi nel 1898 per dimostrare la perfetta concordanza e i passaggi ai calcescisti della zona permo-cotriasica Acceglio-Col Longet, vorrà meco convenire che questa costituisce una molto chiara anticlinale, stratigraficamente inserita senza ombra di contatto anormale, fra i calcescisti.

Questi rapporti sono del resto indicati abbastanza chiaramente in uno dei noti profili di E. Argand, il n. 8, il quale profilo si può ritenere ab-

(1) « Boll. R. Comitato geolog. », 1898, nn. 3-4.

Digitized by Google

bastanza approssimato per la parte che sta al di sopra della quota di 1000 metri, avendo egli, secondo il suo metodo, in questo lodevole, lasciati invariati i limiti delle parti visibili delle varie formazioni, risultanti dai miei profili.

Questa anticlinale si presenta, fra le due sinclinali di calcescisti, come una digitazione della grande zona permo-carbonifera interalpina, in modo analogo a quello con cui il Carbonifero, con la zona di gneis minuti del Gran S. Bernardo, si trova fra le due note sinclinali calcescistose con pietre verdi di Courmayeur e di Aosta.

Stando così le cose, come risulta concordemente dalle osservazioni mie e da quelle del Collega Stella per la Valle Varaita, io confido che P. Termier vorrà riconoscere che la tettonica della zona Acceglio-Col Longet non può offrire nessun argomento in favore della esistenza della supposta piega coricata del Monte Rosa, nota sotto il nome di *Nappe du Mont Rose*.

Se questa esistenza fosse veramente legata a quella dei contatti anormali, supposti nei pressi di Acceglio, da Termier e dal compianto comune amico Kilian, io dovrei fin d'ora concludere alla inesistenza della famosissima piega coricata.

D'altra parte ad una conclusione analoga io sono stato condotto dalla minuta discussione fatta nella su citata Memoria, dei supposti contatti anormali dell'alta Valle di Susa; esclusi però quelli dei lembi esotici della costa settentrionale del Monte Chaberton e del retrostante Rio Secco, costituenti una questione a sè, della quale io confido si possa trovare una soluzione in collaborazione coll'eminente Direttore del Servizio Geologico della Francia.

Chimica. — *I solfati doppî dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. IX. Solfati di neodimio e di rubidio* [1]. Nota [2] del Socio F. ZAMBONINI e del dott. V. CAGLIOTI.

Nella presente Nota daremo conto dei risultati ottenuti nello studio di una parte del sistema $Nd_2(SO_4)_3 - Rb_2SO_4 - H_2O$, eseguito per l'isoterma di 25°, con i soliti metodi già minutamente descritti nei precedenti lavori [3].

Almeno per quanto ci è noto, solfati doppî di neodimio e rubidio non sembra siano stati finora descritti, nè abbiamo trovato notizie intorno ad eventuali solfati di didimio e rubidio.

Il neodimio adoperato era quello stesso, assai puro, del quale ci siamo già serviti in altre indagini: per il rubidio ci accertammo che era privo di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 1° maggio 1927.

(3) Cfr. le Note di ZAMBONINI e CAROBBI, ZAMBONINI e CAGLIOTI, ZAMBONINI e RESTAINO, ZAMBONINI e STOLFI pubblicate nei «Rendiconti» di questa Accademia a partire dal 2° semestre 1924.

Digitized by Google

potassio e di cerio. Per le analisi, si impiegarono gli stessi metodi usati per il sistema $Nd_2(SO_4)_3 - K_2SO_4 - H_2O$.

Abbiamo cercato, dapprima, di preparare, possibilmente in cristallini atti ad essere misurati, i sali doppî che apparivano suscettibili di esistenza in base alle nostre ricerche sui solfati doppî del neodimio col potassio e con l'ammonio. A tale scopo, si sono mescolate due soluzioni, di solfato di neodimio l'una, di solfato di rubidio l'altra, in modo da corrispondere ai rapporti molecolari 1 : 1 , 1 : 3 , 1 : 5 . Appena mescolate le due soluzioni, si formò subito un deposito cristallino, che si lasciò per cinque giorni in contatto con le acque madri. In tutti e tre i casi si formarono dei nitidi cristalli, molto piccoli, ma perfettamente definibili, che rispondono alla formula $Nd_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 8H_2O$ ovvero 1 — 1 — 8 , che è il tipo già ben noto.

I cristalli esaminati sono essenzialmente di due tipi, a seconda che si presentano molto tabulari secondo il pinacoide *a* {100}, ovvero hanno ben sviluppato il pinacoide *b* {010}. In quest'ultimo caso, poi, possono essere allungati o nella direzione dell'asse *c* ovvero in quella di *a*. Abbiamo osservato una certa relazione fra l'*habitus* dei cristalli e la composizione delle soluzioni dalle quali si sono separati. E, precisamente, da quelli contenenti i due solfati nei rapporti 1 : 3 e 1 : 5 si sono avuti cristalli tabularissimi secondo {100} (o faccie vicinali a questo pinacoide), mentre dalla soluzione 1 : 1 si separavano specialmente i cristalli del secondo tipo, cioè col pinacoide {010} ben sviluppato.

I cristalli del composto $Nd_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 8H_2O$ sono perfettamente isomorfi con quelli dei solfati doppî $La_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$, $Ce_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$, $Di_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$, $Nd_2(SO_4)_3 \cdot Tl_2SO_4 \cdot 8H_2O$, descritti cristallograficamente da Marignac [1], da Morton [2], da Wyrouboff [3], da Kraus [4], da Zambonini e Caglioti [5], da Zambonini e Restaino [6]. E come i cristalli dei sali ora nominati, così anche quelli del composto $Nd_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 8H_2O$ presentano spessissimo le facce tipiche sostituite da facce vicinali, specialmente quando si tratta di prismi {*h k o*} e del pinacoide {100}. Viceversa, il pinacoide {010} ha, di solito, le sue facce perfettamente regolari, piane e splendenti. Quanto alle facce dei prismi {*o k l*}, esse sono generalmente striate parallelamente al-

(1) *Œuvres compl.*, I, 393. *Solfati doppi di lantanio e di didimio con l'ammonio.*

(2) « Ofv. Vetensk. Akad. Handl. Stockholm », 1885, VI, 189. *Sale doppio di didimio e ammonio.*

(3) « Bull. Soc. Franç. Min. », 1891, XIV, 84. *Sale doppio di cerio e ammonio.*

(4) « Zeitschr. für Kryst. », 1901, XXXIV, 419. *Solfati doppi di lantanio e ammonio e di cerio-ammonio.*

(5) « Rend. R. Acc. Lincei », (6) 1925, II, 2° sem., 153. *Sale doppio di neodimio e tallio.*

(6) « Rend. R. Acc. Lincei », (6) 1926, III, 1° sem., 178. *Sale doppio di cerio e ammonio.*

Digitized by Google

l'asse a; ma, per lo più, si tratta di una striatura molto fine, benchè, talvolta, diventi assai più pronunciata. Tipico è il comportamento di {100}, che, a stretto rigore, si può dire non esista, essendo in tutti i cristalli misurati sostituito da facce vicinali. Così, in un cristallo, (100) era sostituito da due facce, delle quali una, stretta, formava con (010) un angolo di 89°0′, mentre l'altra, più grande, era inclinata di 89°8′ su $(0\bar{1}0)$. Di prismi $\{h\,k\,o\}$ se ne sono trovati parecchi e, precisamente, in varî cristalli si è misurato:

$(010) : (h\,k\,o)$	$= 86°\,24'$	$86°\,48'$		
$: (h_1k_2o)$	$= 85°\,44'$			
$: (h_2k_2o)$	$= 83°\,58'$	$84°\,1'$	$84°\,16'$ (2)	$84°\,19$ (1)
$: (h_3k_3o)$	$= 78°\,47'$			
$: (h_4k_4o)$	$= 73°\,36'$			

Di prismi $\{o\,k\,l\}$ si è osservato in tutti i cristalli {011}, che ha permesso misure esatte e concordanti. Per $(010) : (011)$ si è trovato $47°\,32'$ $47°\,30'$ $47°\,40'$ $47°\,35'$ $47°\,26'$ $47°\,34'$ in varî cristalli: la media $47°\,33'$ è molto vicina al valore di $47°\,45'$ dato da Morton per i cristalli di $Di_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$. Per $(011) : (0\bar{1}1)$ si è avuto, come media, $84°\,53'$ (calc. per il composto di didimio e ammonio $84°\,30'$). Il prisma {012} non è molto frequente, ed ha piccole faccette:

$(012) : (011) = 17°\,51'$ mis. ($17°\,34'$ calc. per il composto di Di e NH_4).

Si è anche misurato al microscopio, con gran cura, l'angolo che su (010) fa lo spigolo $[(010) : (011)]$ con [001]: ho trovato che β ha un valore approssimativo di $96°\,40'$, che è intermedio fra quello di $95°\,28'$ calcolato da Morton per il solfato di didimio e ammonio ottoidrato e quelli dati da Kraus per i solfati doppî di lantanio e ammonio ($97°\,36'$) e di cerio e ammonio ($97°\,15'$), pure ottoidrati.

Se noi consideriamo (h_2k_2o) come (310), dai tre angoli

$$(010) : (310) = 84°\,18'$$
$$(010) : (011) = 47°\,33'$$
$$\beta = 96°\,40'$$

seguono le costanti

$$a : b : c : 0.3015 : 1 : 0.921$$
$$\beta = 96°\,40'$$

le quali per c e β si avvicinano molto ai valori dati da Kraus e da Morton per i composti su indicati, mentre a è decisamente inferiore, avendo quegli Autori trovato dei valori compresi fra 0.34 e 0.36. Fatti analoghi noi abbiamo osservato nei cristalli di $Ce_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$ e di

(1) Queste due misure sono molto più esatte delle altre due.

Digitized by Google

$Nd_2(SO_4)_3 \cdot Tl_2SO_4 \cdot 8H_2O$, e li abbiamo spiegati, ammettendo, con Groth [1], che nei cristalli dei solfati doppî delle terre rare e dei metalli alcalini di formula 1 — 1 — 8, le faccie tipiche sieno spesso sostituite da vicinali. Ma non possiamo tacere, che queste nuove osservazioni ci rendono assai perplessi, perchè i prismi $\{h\,k\,o\}$ da noi osservati nei cristalli dei quali ci stiamo occupando costituiscono un complesso di forme ben definite, e, precisamente, assegnato a (h_2k_2o) il simbolo (310), per gli altri prismi si calcolano i simboli (510) per $(h\,k\,o)$, 410 per (h_1k_1o), (320) per (h_3k_3o), mentre (h_4k_4o) risulta molto vicino a (110). Si ha, perciò, la serie regolarissima

$$(510)\quad (410)\quad (310)\quad (320)\quad (110)\,.$$

E con questi simboli si ha accordo molto soddisfacente fra gli angoli misurati e quelli calcolati in base alle costanti su riferite, e che riportiamo qui sotto:

$$(010):(510) = 86^\circ\,34'$$
$$(010):(410) = 85^\circ\,43'$$
$$(010):(310) = 84^\circ\,18'$$
$$(010):(320) = 78^\circ\,43'$$
$$(010):(110) = 73^\circ\,20'\,.$$

Assumendo, invece, $a = 0.35$, i simboli su indicati diventano, rispettivamente:

$$(610)\quad (510)\quad (720)\quad (530)\quad (540)$$

certamente assai meno semplici, non solo, ma l'accordo tra gli angoli misurati e quelli calcolati peggiora di molto. Si hanno, infatti, i seguenti valori teorici:

$$(010):(610) = 86^\circ\,41'$$
$$(010):(510) = 86^\circ\,1'$$
$$(010):(720) = 84^\circ\,20'\ [2]$$
$$(010):(530) = 78^\circ\,13'$$
$$(010):(540) = 74^\circ\,27\,{}^1/_2'$$

Non vi è dubbio che, dovendosi scegliere fra i due valori di a (0.30 e 0.35), senza nessuna preoccupazione per gli altri dati già noti, si prenderebbe senz'altro $a = 0.30$. E non va dimenticato, che la sostituzione del rubidio all'ammonio, nei casi di isomorfismo diretto, produce di solito soltanto delle variazioni assai lievi nei valori angolari, mentre nel nostro caso, lasciando invariato β_1 con $a = 0.3015$ si ha $(110):(1\bar{1}0) = 33^\circ\,20'$, con $a = 0.35$, invece, $38^\circ\,20'$, ossia una differenza di ben 5°.

(1) *Chemische Krystallographie* II, 560-561.

(2) Per (010):(310) si calcola $83^\circ\,23'$, ossia un valore notevolmente diverso da quelli misurati.

Digitized by Google

Ci siamo assicurati che i cristalli esaminati avevano proprio la composizione del composto 1 — 1 — 8. Infatti, si è trovato H_2O 14.43 %, Nd 29.46 %, mentre i valori teorici sono rispettivamente 14.59 % e 29.21 %.

I piani degli assi ottici sono normali a (010): da questa faccia esce la bisettrice acuta, positiva, di un grande angolo degli assi ottici. Su (010) una direzione di massima estinzione forma, per la luce del sodio, con l'asse *c* un angolo di 11 1/2° nell'angolo acuto β.

Il peso specifico in due diversi preparati è risultato uguale a 3.012 e a 3.010 a + 15°. La determinazione è stata eseguita col metodo della sospensione. Assumendo come valore medio 3.011, si calcola, in base al peso molecolare di 988.0 (per $Nd_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 8H_2O$), 328.1 per il volume molecolare, mentre per il corrispondente sale di ammonio si ha il valore vicinissimo di 329.4 [1] come si verifica comunemente nei sali isomorfi di rubidio e ammonio col medesimo anione.

I risultati ottenuti nello studio del sistema $Nd_2(SO_4)_3 — Rb_2SO_4 — H_2O$ per l'isoterma di 25° sono riuniti nella seguente

TABELLA I.

Numero dell'esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti il corpo di fondo
	$Nd_2(SO_4)_3$	Rb_2SO_4	H_2O	$\frac{Rb_2SO_4}{H_2O}$	Nd	Rb	SO_4	H_2O	$\frac{Nd_2(SO_4)_3}{Rb_2SO_4}$	
1	4.90	1.02	94.08	0.011	36.50	7.47	40.65	15.38 (1)	6.69	1 — 1 — 8 + $Nd_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$
2	4.90	1.05	94.05	0.011	35.71	8.35	40.35	15.59 (1)	5.99	
3	4.90	1.07	94.03	0.011	33.80	11.33	40.12	14.75 (1)	3.81	
4	4.73	1.20	94.07	0.013	29.34	17.51	39.01	14.14 (1)	2.14	1 — 1 — 8
5	2.29	1.43	96.28	0.015	29.27	17.45	39.10	14.18 (1)	2.15	
6	0.74	1.81	97.45	0.019	29.50	17.40	39.15	13.95 (1)	2.16	
7	0.24	2.99	96.77	0.031	29.40	17.28	39.18	14.34 (2)	2.17	
8	—	5.16	94.84	0.065	29.62	17.11	39.31	13.96 (1)	2.22	
9	—	6.84	93.16	0.073	29.48	17.48	39.18	14.66 (2)	2.15	
10	—	7.93	92.07	0.086	29.50	17.50	39.14	13.86 (1)	2.15	
11	—	20.79	79.21	0.263	29.20	17.38	39.01	14.41 (1)	2.15	
12	—	24.92	75.08	0.333	29.00	17.48	39.00	14.52 (1)	2.12	
13	—	29.93	70.07	0.427	29.10	17.60	39.06	14.24 (1)	2.17	
14	—	33.63	66.37	0.507	28.90	17.50	39.10	14.50 (1)	2.12	
15	—	39.67	60.33	0.657	29.10	17.25	39.05	14.45 (2)	2.16	
16	—	45.52	54.48	0.835	27.60	20.56	39.43	12.41 (1)	1.72	1 — 1 — 8 + Rb_2SO_4
17	—	45.54	54.46	0.836	27.44	22.02	39.77	10.77 (1)	1.59	
18	—	45.56	54.44	0.836	26.65	24.67	40.47	8.21 (1)	1.38	

(1) Determinata per differenza. (2) Determinazione diretta.

(1) In base al peso specifico del composto $Nd_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$, trovato uguale a 2.59 da Zambonini e Stolfi.

Digitized by Google

Composizione teorica dei composti ottenuti.

	Nd	Rb	SO_4	H_2O
$Nd_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 8H_2O$	29.20	17.37	38.90	14.58

Come risulta dalla tabella e dalla fig. 1, nelle nostre condizioni sperimentali si è formato un solo composto: $Nd_2(SO_4)_3 \cdot Rb_2SO_4 \cdot 8H_2O$ o 1 — 1 — 8.

Dobbiamo subito dire, che i corpi di fondo in contatto con soluzioni molto ricche in solfato di rubidio solo con grande difficoltà si ottengono

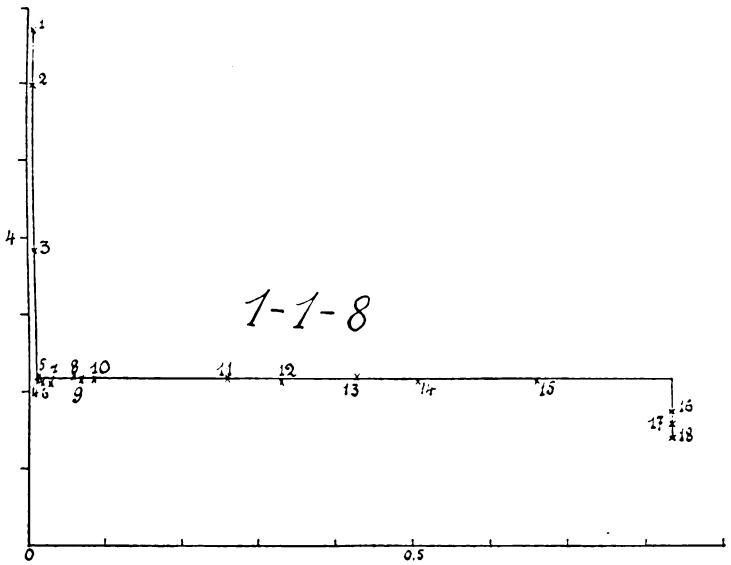


fig. 1.

puri, e generalmente presentano, invece, un eccesso di solfato di rubidio, mescolato od aderente alla polvere cristallina del composto 1 — 1 — 8 in forma talmente minuta, da non essere distinguibile al microscopio. Analizzando le polveri senz'altro, si ottengono, in questi casi, delle composizioni che non corrispondono a quella richiesta dalla formula 1 — 1 — 8, ma ad altre formule, nelle quali il rapporto $Nd_2(SO_4)_3 : Rb_2SO_4$ è uguale a 1 : x, indicando con x un numero alquanto superiore ad 1: così, in alcune esperienze si è avuto x = 1.25. Ma se si esaminano al microscopio i corpi di fondo che danno questi valori, si scorgono subito i cristallini caratteristici del composto 1 — 1 — 8, con le loro proprietà ottiche identiche fino nei più minuti dettagli a quelle dei grandi cristalli. Basta trattare questi cristalli con carta bibula umida, perchè, senza che sopravvenga alcuna modificazione nella proprietà dei cristalli stessi, la composizione risponda a quella voluta

Digitized by Google

dalla formula 1 — 1 — 8. La tenace adesione del solfato di rubidio al solfato doppio sembra presentarsi specialmente nel caso del neodimio: col cerio ceroso è di gran lunga minore, e tale da non influire sulla composizione chimica in modo da alterare sensibilmente il rapporto molecolare fra il solfato del metallo raro ed il solfato di rubidio.

I cristallini microscopici del composto 1 — 1 — 8 ottenuti nelle varie esperienze rispondono perfettamente, per *habitus* e proprietà, ai cristallini microscopici già descritti. Non si sono osservate nette relazioni, almeno evidenti, fra l'*habitus* dei cristalli del corpo di fondo ed il contenuto in solfato di rubidio della soluzione in contatto con la quale si trova il corpo di fondo medesimo.

Il sale doppio 1 — 1 — 8 ha un vasto campo di esistenza: puro, esso è stabile in contatto con soluzioni che contengono da 4.73 % $Nd_2(SO_4)_3$ e 1.20 % Rb_2SO_4 a 45% Rb_2SO_4.

Chimica. — *Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro* [1]. Nota I [2] del Corrisp. L. Cambi e di L. Szegö.

Nel corso di indagini da noi intraprese sulle reazioni fotochimiche dei cianuri complessi del ferro, sono state notate le caratteristiche interessanti degli spettri d'assorbimento di alcuni pentacianuri, che ci hanno indotto ad estendere all'intera serie di questi composti le misure che comunichiamo.

Usammo uno spettrografo Hilger E2 ad ottica di quarzo ed un fotometro a settori rotanti, pure a prismi di quarzo della stessa ditta. Diversi AA. hanno criticato questo metodo di misura [3], basandosi sul fatto che la legge di Talbot non vale per pose fotografiche ripetute di breve durata (l'annerimento della lastra fotografica è inferiore a quello dato da una posa sola della stessa durata complessiva). Esperienze recenti con il fotometro a settori hanno dimostrato però che le deviazioni dovute a tale effetto non sorpassano i limiti d'errore dei metodi spettrofotometrici in genere [4]. Noi abbiamo confermato tale risultato confrontando i valori ottenuti da Halban e Siedentopf col metodo fotoelettrico [5] e quelli da noi determinati col fotometro a settori per l'azobenzolo in soluzione alcolica.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Universita di Milano.

(2) Presentata nella Seduta del 1° maggio 1927.

(3) Weber, « Annal. d. Phys. », 45, 801 (1914); Schwarzschild, « Astrophys. Journ. », 11, 91 (1900).

(4) Roessler, « Ber. », 59, 2606 (1926).

(5) « Z. phys. Chem. », 100, 208 (1922).

Digitized by Google

La scala del nostro fotometro dava la serie degli spettogrammi per i valori di $\log \frac{I_o}{I}$ da 0 ad 1.5 con intervalli di 0.1 [1]. Il tubo a pareti di quarzo contenente le soluzioni aveva la lunghezza costante di 1 cm. Le concentrazioni per ciascun sale venivano scelte con una serie di spettrogrammi preliminari. Come fonte luminosa impiegammo l'arco con elettrodi di ferro alimentato con corrente continua a 220 Volt.

I sali vennero da noi preparati con i metodi di K. A. Hofmann e della loro purezza ci assicurammo con l'analisi. Preparammo le soluzioni con acqua di conducibilità scevra d'aria.

I. *Ferropentacianuri.* Le nostre ricerche riguardano i sali seguenti, in cui i valori dei coefficienti ε vennero dedotti impiegando le soluzioni alle concentrazioni indicate:

1. $K_4[Fe(CN)_6]$ M/100 e M/2000
2. $Na_3[Fe(CN)_5H_2O]$ M/250 e M 1000
3. $Na_3[Fe(CN)_5NH_3]$ M/250
4. $Na_4[Fe(CN)_5NO_2]$ M/200 e M/2000
5. $Na_4[Fe(CN)_5AsO_2]$ M/125
6. $Na_5[Fe(CN)_6SO_3]$ M/500 .

I risultati sono riportati nei diagrammi della fig. 1 [2]. I coefficienti del ferroesacianuro, già determinato da altri autori [3], vennero da noi nuovamente misurati per confronto.

Per il ferroacquopentacianuro, che interessava anche per ricerche che esporremo in seguito, abbiamo indagato l' influenza dell' alcalinità delle soluzioni. I diagrammi della fig. 2 riportano i dati delle miscele seguenti:

1. $Na_3[Fe(CN)_5 H_2O]$ 0.002 Mol.
2. » » » in NaOH 1/n
3. » » » » NaOH 10/n
4. » » » » HCl n/1000
5. » » » » HCl n/166.7 .

(1) Per ogni serie di fotogrammi per ciascun sale eseguimmo due fotografie estreme fuori serie con l'arco a rame per tarare la scala delle lunghezze d'onda che pure veniva fotografata. (Vedi i fotogrammi allegati alla Nota II seguente).

(2) I dati numerici dei singoli diagrammi riportati in questa Nota verranno pubblicati altrove.

(3) Jones e Strong, « Phys. Zeitschr. », 10, 499; Piutti, « Ber. » 45. 1830 (1912); Getman, « Journ. phys. chem. », 25, 147 (1920).

Digitized by Google

Le curve su indicate possono distinguersi in tre tipi: 1° acquocianuro, ammoniacocianuro, nitritocianuro, arsenitocianuro; 2° solfitocianuro; 3° ferroesacianuro.

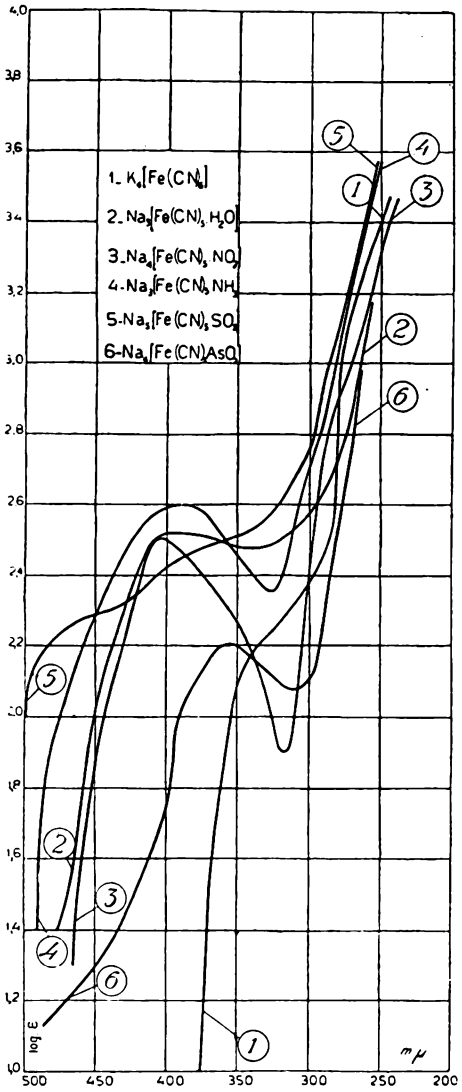


Fig. 1.

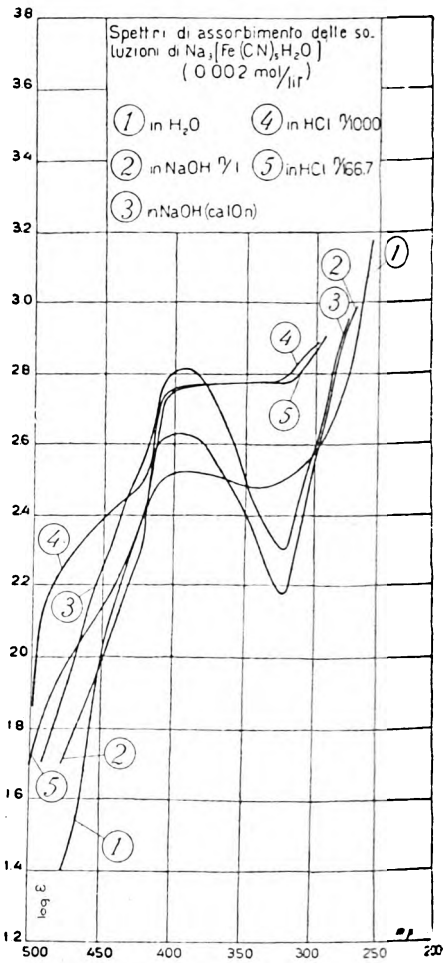


Fig. 2.

Le deduzioni sulla struttura dei corpi in soluzione, e particolarmente dei sali complessi, dagli spettri d'assorbimento, debbono essere sempre caute: pure in questo caso le analogie salienti che si notano inducono ad ammettere che, con molta probabilità, nei primi quattro sali si abbia la manifestazione dell'aggruppamento $(CN)_5\overset{II}{Fe}-$.

Digitized by Google

Il massimo caratteristico a circa 400 mμ, per valori di ε vicini fra loro è dato da quei ferropentacianuri con l'aggruppamento predetto meno stabilmente combinato al radicale od alla molecola eterogenea. Infatti sono noti il carattere non saturo del ferroacquopentacianuro, la dissociabilità dell'ammoniacocianuro e la facile decomposizione del nitritocianuro.

Per contro l'arsenitocianuro, pur avendo uno spettro d'assorbimento analogo, differisce per la posizione del massimo che risulta a 270 mμ circa con valore di ε alquanto minore. Ma questo sale si distingue dai precedenti per la sua maggiore stabilità e per le reazioni con i sali ferrici: la curva d'assorbimento sente evidentemente queste variazioni dell'intima costituzione.

Abbiamo già notato che il ferrosolfitopentacianuro mostra un diagramma assai diverso dagli altri ferropentacianuri. Esso è il termine più stabile della serie, si forma per azione del solfito da tutti i sali su ricordati. Tale spiccata affinità del residuo solforoso per il gruppo ferropentacianidrico altera, o maschera profondamente, il comportamento del complesso verso la luce.

Questa nostra discussione è avvalorata dal fatto che lo spettro d'assorbimento dei ferroesacianuri, che hanno il massimo grado di stabilità, assume una semplicità caratteristica e non manifesta analogie con i ferropentacianuri. Aggiungiamo che il ferroesacianuro e il ferriesacianuro non presentano alcuna deformazione della curva d'assorbimento in presenza d'alcali, come abbiamo osservato.

L'azione degli alcali è invece spiccata sul ferroacquopentacianuro. Il colore delle soluzioni del sale passa dal giallo bruno al giallo verde brillante rendendendole alcaline. L'andamento dei diagrammi della fig. 2, mette in evidenza tale effetto. Il comportamento chimico del prussiato in soluzioni contenenti alcali, aveva già fatto supporre la presenza dell'equilibrio [1]

$$[Fe(CN)_5 \cdot H_2O]''' + OH' \rightleftarrows [Fe(CN)_5OH]'''' + H_2O \ ,$$

che con ogni probabilità interviene nelle variazioni da noi notate degli spettri d'assorbimento.

In ambiente acido le curve si deformano notevolmente: è noto che il ferroacquocianuro si decompone in parte generando bleu di Prussia solubile, che evidentemente altera i valori di ε.

Abbiamo sperimentato anche con soluzioni di ammoniacocianuro contenenti eccesso di ammoniaca, ma non risultarono influenze sensibili. Delle azioni dell'alcali sul nitritocianuro ci occuperemo in una Nota seguente.

II. *Ferripentacianuri.* I ferripentacianuri vennero indagati in soluzione alle concentrazioni seguenti:

1. $NaK_2[Fe(CN)_5NO_2]$ M/250 ; M/500 ; M/1000
2. $Na_2[Fe(CN)_5H_2O]$ M/500 ; M/1000
3. $Na_2[Fe(CN)_5NH_3]$ M/500
4. $Na_2[Fe(CN)_5NO]$ M/100 ; M/500 ; M/2000
5. $K_3[Fe(CN)_6]$ M/1000 .

(1) L. Cambi, questi « Rend. », vol. XXIII (1914)) 814.

Digitized by Google

Digitized by Google

d'assorbimento non svelasse alcuna relazione semplice fra loro, se si toglie una lontana analogia fra ferriammoniacopentacianuro e ferriesacianuro.

Il nitroprussiato si differenzia nettamente dagli altri ferricianuri: ha uno spettro d'assorbimento semplice, con valori di ε rapidamente crescenti da 340 a 250 mμ, che richiama quello del ferrocianuro.

Uno di noi (L. Cambi) ha già osservato [1] che il comportamento chimico del nitroprussiato si distacca da quello dei ferricianuri. In ambiente acido il complesso nitroprussico ha una stabilità caratteristica verso alcuni riducenti. Negli altri ferripentacianuri si nota invece la grande tendenza del ferro a ridursi a ferroso, e inoltre, nel ferricianuro e nel ferriacquopentacianuro, una relativa facilità a cedere i gruppi — CN. Questi fatti portano una nuova conferma all'ipotesi di un intimo legame esistente fra il ferro del complesso e l'atomo d'azoto del gruppo NO.

A questo proposito dobbiamo accennare ai caratteri del gruppo nitroso dei due nitritopentacianuri ioni. È stata già osservata la diversità di comportamento dei due ioni, nella formazione di bleu ferroferrici, rispetto a quello delle altre coppie di ferropentacianuri. Il ferrisale si riduce inoltre facilmente a nitroprussiato [2]. È probabile che questi due ioni contengano il residuo dell'acido nitroso rispettivamente in forma isomera: il sale ferrico in forma di nitrogruppo — NO_2, quello ferroso come — O·NO, analogamente a quanto si osserva nei sali isomeri di cobaltinitropentammina e di alcune cobaltidinitrotetrammine.

Noteremo chiudendo che siamo lontani dal possedere un quadro sistematico degli spettri d'assorbimento delle soluzioni dei sali complessi, per quanto molti di essi siano stati oggetto di indagini del genere, e che non è possibile trarre deduzioni generali. Ma i dati che noi esponiamo, per i ferripentacianuri e per alcuni ferropentaciamuri, costituiscono un caso tipico, in cui gli spettri d'assorbimento mettono in evidenza profonde divergenze nelle manifestazioni dell'affinità in seno a ioni complessi, nonostante le formali analogie basate sulla teoria della coordinazione.

Chimica. — *Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro. La reazione fra nitroprussiato e alcoli.* Nota del Socio Corrisp. L. Cambi e L. Szegö.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Su i diazoidrati.* Nota del Socio Corrisp. L. Cambi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) L. Cambi e A. Clerici, questi «Rend.», vol. V, serie VI (1927) 83.
(2) Idm. p. 81.

Digitized by Google

Chimica. — *Nuovi derivati del caucciù.* Nota del Socio G. Bruni e E. Geiger.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche di fisiologia umana presso la Scuola centrale militare di Educazione fisica.* Nota [1] del Corrisp. S. Baglioni.

Il Laboratorio di fisiologia della Scuola militare di Educazione fisica (Farnesina) sorto fin dal 1923 per volontà del Comandante la Scuola, colonnello Cravero, rimase fino alla fine del 1924 privo di personale e di apparecchi scientifici. In detto periodo fu assegnato il personale costituito da un ufficiale medico ed uno chimico, e fu fornito il Laboratorio gradatamente di mezzi atti alle ricerche scientifiche nel campo del lavoro muscolare. Cosicchè fino ad oggi si sono formate tre sezioni nel laboratorio:

I Sezione. - *Misure di valutazione fisica.* — Si eseguono sugli allievi, al momento del loro arrivo alla Scuola e alla fine del corso varie misure, riguardanti i diametri e perimetri del torace, dell'addome, il peso, i perimetri delle braccia, delle coscie, misure della forza di pressione delle mani, della forza di trazione verticale per l'esame della potenzialità dei muscoli lombo-dorsali, della forza di trazione orizzontale per l'esame della potenzialità dei muscoli del cinto scapolare. L'apparato respiratorio è analizzato coll'esame della capacità vitale, della resistenza alla fatica respiratoria, della tonicità e forza del diaframma. L'apparato cardio-vascolare coll'esame della pressione arteriosa, dei diametri radioscopici del cuore e del rapporto cardio-respiratorio; delle funzioni psichiche sono esaminate le reazioni psico-motrici. Questi esami sono fatti al completo su tutti gli allievi che frequentano corsi superiori ai 3 mesi, parzialmente su coloro che frequentano i corsi brevi a tipo informativo (3 mesi) e sono riempite schede, che sono poi tenute presso il Laboratorio come materiale statistico. La ragione di tali misure è duplice: *a*) scartare quei soggetti che presentino eventuali tare fisiche per le quali non si ritengono adatti alla vita di ginnastica e sports, il che capita raramente presso la Scuola militare perchè vi affluiscono ufficiali e sottufficiali che, per il fatto che prestano servizio militare e per la giovine età, dànno affidamento di ben sopportare le fatiche in genere e in ispecie quelle di taluni esercizi (lotta greco-romana, giapponese, pugilato); *b*) raccogliere dati che possano servire a giudicare della bontà o meno dei programmi adottati e nello stesso tempo a dare un'idea dell'effetto che la vita attiva esercita sulle singole funzioni in generale.

II Sezione. – *Cinematografica-fotografica.* — Per lo studio del meccanismo dei movimenti, delle fasi costituenti ogni esercizio; a tal uopo è adoperata la cinematografia rallentata. Tutto il materiale cinematografico e

(1) Presentata nella seduta del 1° maggio 1927.

Digitized by Google

il fotografico (diapositive) serve per le lezioni di teoria dell'esercizio e per una parte delle lezioni di fisiologia dell'esercizio.

III Sezione. – *Scientifica propriamente detta.* — Comprende la *sottosezione radiologica* adoperata sopratutto per lo studio del cuore in rapporto al lavoro (ortodiascopie e radiografie del cuore in momenti diversi, misure dei diametri, ecc.).

La *sottosezione fisiologica* fornita di tutti i mezzi adatti per le ricerche sulle funzioni meccaniche dei singoli apparati (ritmo respiratorio, studi sul lavoro muscolare, sul cuore a mezzo anche dell'elettrocardiografia, ecc.).

La *sottosezione chimico-fisiologica* per tutte le ricerche biochimiche del respiro coll'analisi dei gas dell'aria respirata e del sangue coll'analisi dei gas del sangue; della concentrazione idrogenionica dei liquidi organici, del loro indice refrattometrico o colorimetrico; del consumo dell'ossigeno e della calorimetria; ricerche coi micrometodi più recenti sulla variazione dei costituenti il sangue (glicosio, urea, cloruro di sodio, ecc.) o l'urina e sulle modificazioni del ricambio materiale, sulla microscopia del sangue, urina, ecc.

Infine la *sottosezione psicofisiologica* fornita per ora solo dell'apparecchio per reazioni psico–motrici semplici o tempi di reazione.

Con questi mezzi, i due ufficiali addetti (maggiore medico dott. U. Cassinis e capitano L. Bracaloni) hanno finora eseguito e stanno eseguendo vari studi, i cui risultati brevemente riassumo.

1° *Rapporto cardio-respiratorio durante e dopo il lavoro muscolare.* — Di alcuni soggetti, così durante un periodo di lavoro all'ergografo di Mosso come nel confronto fra riposo e subito dopo la fine di un esercizio, il numero delle respirazioni per minuto e quello contemporaneo delle pulsazioni varia, ma se queste cifre sono divise fra loro si ha un quoziente che è sempre uguale: ossia il rapporto intercedente fra il numero delle respirazioni e quello delle pulsazioni in un minuto è costante anche se si siano eseguiti esercizi faticosi (come 5 riprese di pugilato o corse di 3000 metri). Questo fatto è stato interpretato come un indice della perfetta capacità funzionale dei due apparati (respiratorio e cardiaco) di fronte al lavoro muscolare. Quando tale rapporto non si mantenga, ne deriva un'inadeguata capacità funzionale dei detti apparati.

Esempio della costanza del rapporto durante il lavoro					Esempio della costanza del rapporto prima e dopo il lavoro				
nei primi	30″	di lavoro	P. 50	R. 14	rapp. 3.3	in riposo	P. 63	R. 12	rapp. 5.2
» secondi	30″	»	» 53	» 16	» 3.2	dopo 1 round boxe	» 136	» 25	» 5.4
» terzi	30″	»	» 59	» 18	» 3.2	» 2 » »	» 145	» 26	» 5.5
» quarti	30″	»	» 60	» 18	» 3 -	» 3 » »	» 144	» 28	» 5.1
» quinti	30″	»	» 60	» 16	» 3.7	» 4 » »	» 137	» 26	» 5.2
» sesti	30″	»	» 60	» 18	» 3 -	» 5 » »	» 133	» 26	» 5.1
						» 6 » »	» 150	» 29	» 5.1

Digitized by Google

2° *Intensità di alcuni esercizi fisici comparata colla produzione del* CO_2 *e colla durata massima dell'apnea volontaria.*

Con queste ricerche si è dimostrato che se è vero che a seconda della produzione del °/₀ di CO_2 si possono raggruppare i diversi esercizi in diversi gruppi, questi però non sono gli stessi fra i singoli soggetti studiati; mentre colla durata massima dell'apnea volontaria fatta dopo finito l'esercizio, si riesce ad ottenere una graduatoria di intensità degli esercizi quasi uguale per tutti i soggetti.

3° *Tonogrammi del respiro durante gli esercizi fisici*, ossia l'esame della frequenza del respiro, dei caratteri di esso e della ventilazione polmonare, del comportamento delle due fasi respiratorie durante diversi esercizi. Da queste ricerche risulta che molti esercizi per i quali si richiedono sforzi o ripetuti o unici sono accompagnati da periodi di sospensione del respiro più o meno lunghi secondo l'intensità dello sforzo da compiere, e che la fase espiratoria è quella che regola e fornisce il compimento di molti esercizi (attrezzi), mentre è l'inspiratoria quella che prevale in durata sul compimento di altri (corsa).

4° *Modificazione del volume del polso e del suo lavoro dopo vari esercizi fisici.* Tanto il volume che il lavoro crescono per effetto del lavoro muscolare analogamente all'aumento della pressione arteriosa, il che dà una chiara idea di quale lavoro venga imposto al cuore per compiere un esercizio.

A riposo	dopo marcia 3600 m.	dopo corsa 600 m.	dopo altra corsa 600 m.
Press. × Vol. = Ener.	Press. × Vol. = Ener.	Press. × Vol. = Ener.	Press. × Vol. = Ener.
50 × 0.6 = 30	50 × 0.9 = 45	50 × 1.2 = 60	50 × 1 - = 50
100 × 1.6 = 160	100 × 1.8 = 180	100 × 1.6 = 160	100 × 1.7 = 170
140 × 2 - = 280	140 × 2.4 = 336	160 × 2.1 = 294	140 × 2.1 = 294
150 × 1.7 = 255	150 × 1.9 = 285	150 × 2 - = 300	150 × 2 - = 300
200 × 1 - = 200	200 × 1.3 = 260	200 × 1.4 = 308	200 × 1.8 = 360
240 × 0.5 = 120	260 × 0.7 = 182	320 × 0.5 = 160	250 × 1.7 = 425
			310 × 0.7 = 217
Pressione art.	Pressione art.	Pressione art.	Pressione art.
> 160 < 75	> 180 < 80	> 220 < 90	> 250 < 100

5° *Modificazione del volume e dell'energia del polso durante l'apnea volontaria*; le variazioni sono più evidenti che per un esercizio, ma decorrono nello stesso modo: nel momento che precede la fine dell'apnea l'energia del polso raggiunge il massimo, in generale circa 500 e più grammi-centimetri.

Digitized by Google

6° *Misura della quantità di* CO_2 *dell'aria espirata e della riserva alcalina del sangue nell'apnea volontaria.*

Con queste ricerche è stato stabilito, contrariamente ai risultati di analoghe ricerche di autori, che la quantità percentuale dell'CO_2 nell'aria espirata dopo un periodo di massima durata di apnea aumenta coll'aumentare di tale durata. Si è arrivato fino ad avere l'8°, l'8,30 % di CO_2.

Quanto alla riserva degli alcali del sangue (metodo Van Slyke), in altri termini, al potere del plasma sanguigno a fissare CO_2 alla fine di un periodo massimo di apnea volontaria, è stato trovato che tale potere diminuisce (cioè tende ad aumentare l'acidosi) per quanto rimanga entro i limiti di oscillazioni ritenute fisiologiche.

7° *Valore della quota glicemica in rapporto con esercizi fisici.* Col micrometodo di Bang si è cercato di studiare quali modificazioni abbiano luogo nella quota dello zucchero del sangue durante e dopo diversi esercizi fisici. Si è veduto che subito dopo la fine di vari esercizi, che però non siano causa di fatica, si ha in certi soggetti costantemente un aumento, in altri una diminuzione della quota e che questo fatto è indipendente dal tipo di esercizio compiuto.

BICICLETTA.

Nome	Data dell'esperienza	Quota glicemica a riposo	Lunghezza del percorso	Tempo impiegato	Quota glicemica appena cessato l'esercizio	Dopo l'esercizio					
						10′	15′	20′	25′	30′	40′
Sold. De Cristoforo	22-V=26	0.87	3600 m.	10′ 46″	0.84	—	—	—	—	—	—
»	8-VI-26	0.90	»	9′	0.65	0.76	—	—	0.83	—	—
»	9-VI-26	0.87	»	9′ 50″	0.79	0.73	—	—	0.80	—	—
Ten. L. B.	22-V-26	0.84	2400 m.	6′ 20″	0.84	—	—	—	—	—	—
»	31-V-26	0.86	3600 m.	10′ 7″	0.82	0.71	—	0.77	—	—	—
»	2-VI-26	0.83	»	10′ 33″	0.79	0.75	—	0.81	—	0.79	0.83
»	4-VI-26	0.84	»	10′ 30″	0.86	0.79	—	0.79	—	—	—
Cap. U. C.	22-V-26	0.96	»	11′ 9″	0.79	—	—	—	—	—	—
Sold. Compiani	8-VI-26	0.90	»	—	0.96	—	0.79	—	—	—	—

Seguendo per due ore le variazioni della quota glicemica dopo finita, per es., una corsa di 600 metri su strada piana, si è visto che sia che la quota aumenti sia che diminuisca si ha spesso una successiva maggiore diminuzione al disotto dei valori normali che rimane tale per un tempo diverso secondo i soggetti. Così che mentre per gli uni ritorna circa ai

Digitized by Google

valori normali abbastanza presto, per gli altri dopo due ore ancora si è molto al disotto di detti valori.

Per la marcia di 5 chilometri invece non avviene alcuna variazione della quota dello zucchero del sangue sia durante che dopo compiuta.

Infine si è studiato l'effetto della somministrazione di una soluzione di glicosio nella proporzione di un grammo per ogni chilo del peso del corpo col risultato che nella corsa si ha in taluni un netto arresto dell'ascesa della quota, in altri nessun'azione così da avere una curva identica a quella della glicemia alimentare in riposo, mentre per effetto della marcia di 5 chilometri scende in tutti durante la marcia per risalire or più or meno dopo finita.

Variazione della quota glicemica in uno stesso soggetto:

a riposo seduto		dopo corsa 600 m. 2' 46"		glicemia alimentare 70 gr. glicosio in 300 acqua		glicemia alimentare nella corsa		glicemia alimentare nella marcia		glicemia normale nella marcia di Km. 4.800	
tempo	gl. %	tempo	gl. %	tempo	gl. %	tempo	gl. %	tempo	gl. %	tempo	gl. %
0'	0.73	0' a riposo	0.70	0'	0.76	0' a riposo	0.64	20' a riposo	0.76	20' a riposo	0.74
15'	0.73	14' dopo	0.72	34' dopo	0.78	25' dopo	0.61	5' dopo bevuto	1.07	5' »	0.65
30'	0.71	24'	0.72	44'	0.99	50'	0.75	0' inizia marcia		0' inizio marcia	
60'	0.72	34'	0.72	60'	0.99	62'	0.86	20' dopo	0.81	15'	0.66
75'	0.66	49'	0.77	81'	0.94	70'	0.70	35'	0.79	30'	0.59
90'	0.61	69'	0.70	83'	0.81	80'	0.64	47'	0.76	47'	0.60
115'	0.64	94'	0.69	108'	0.71	90'	0.66	59'	0.66	— fine marcia	
120'	0.68	132'	0.60	123'	0.71	100'	0.66	— finisce marcia		12' dopo	0.59
						120'	0.86	16'	0.58	25'	0.61
								30'	0.59	43'	0.68
								38'	0.63		

Questa non è che la parte iniziale della produzione scientifica di questo nuovo Laboratorio, il quale deve ancora completarsi in apparecchi per avere la possibilità di fare altre ricerche di microchimica, ricerche sugli organi di senso superiore (vista, udito) e tutte quelle che possano essere ritenute utili per lo studio degli effetti del lavoro muscolare sul nostro intiero organismo.

Così si aprono dinanzi ai ricercatori numerose e nuove indagini su l'alcoolemia e sul rapporto fra alcool e lavoro, sul ricambio materiale secondo il tipo di alimentazione, ecc., e specialmente lo studio delle turbe che ogni esercizio fisico fatto per un tempo gradatamente crescente, fino al raggiungimento della fatica, possa apportare nei diversi soggetti.

Digitized by Google

I risultati delle dette ricerche e di quelle che seguiranno mi sembrano utili contributi alla fisiologia applicata degli esercizi fisici.

Ne trarrà vantaggio lo sviluppo fisico dell'esercito e del popolo col sussidio della scienza nel modo più atto al progresso di una forte stirpe.

Non saranno d'altra parte privi d'importanza per la fisiologia umana, considerata come scienza a sè, essendo oggi coi mezzi di cui comunemente si dispone nei Laboratori universitari, molto difficile, se non impossibile intraprendere simili ricerche sistematiche ed esaurienti su organismi umani, giovani e sani.

LETTERATURA

U. Cassinis. *Rapporto fra ritmo cardiaco e respiratorio nel lavoro muscolare.* « Giorn. di Med. Milit. », fasc. I, 1926.

Id., *Rapporto fra ritmo cardiaco e respiratorio nel riposo e dopo lavoro muscolare.* « Giorn. di Med. Milit. », fasc. II, 1926.

Id., *L'intensità di alcuni esercizi fisici comparata colla ricerca della produzione di* CO_2, *ecc.* « Giorn. di Med. Milit. », fasc. VII, 1926.

Id., *Comportamento del volume del polso nell'apnea volontaria.* « Archiv. di fisiologia », vol, XXIV, fasc. L, 1926.

Id., *Il contenuto del* CO_2 *nell'aria alveolare e la riserva alcalina del sangue venoso nell'apnea volontaria.* « Archiv. di fisiologia », supplemento al vol. XXIV, 1926.

U. Cassinis-L. Bracaloni, *Valore glicemico ed esercizi fisici.* « Arch. di fisiologia », XXIV, 1926 e 1927.

U. Cassinis, *Modificazioni del volume e dell'energia del polso dopo vari esercizi fisici, ecc.* « Giorn. di Med. Milit. », fasc. I, 1927.

Id., *I tonogrammi del respiro durante diversi esercizi fisici.* « Giorn. di Med. Milit. », fasc. III, 1927.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul problema di Dirichlet nei campi sferici ed ipersferici.* Nota [1] di G. Ascoli, presentata dal Corrispondente G. Fubini.

1. Il problema di Dirichlet per l'ipersfera dello spazio S_n (euclideo) è notoriamente risoluto dall'integrale di Poisson

$$(1) \qquad U(P) = \frac{1}{\lambda_n R} \int_\sigma U(Q) \frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\theta)^{\frac{n}{2}}} d\sigma$$

dove Q descrive la superficie σ dell'ipersfera, di centro O e raggio R, P è

(1) Presentata nella seduta del 24 aprile 1927.

Digitized by Google

un punto interno ad essa, ed è $OP = \rho$, $P\widehat{O}Q = \theta$; λ_n indica brevemente la superficie di un'ipersfera di raggio 1 di S_n, e cioè

$$\lambda_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Scopo principale di questa Nota è di indicare una forma semplice ed espressiva che può darsi a questa formula e che non sembra sia stata osservata.

Si indichi con r la distanza PQ e, designata con Q' l'ulteriore intersezione di QP con l'ipersfera, si ponga anche $PQ' = r'$. Si ha:

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\theta \quad , \quad rr' = R^2 - \rho^2 ,$$

ciò che permette di dare alla (1) la forma:

$$U(P) = \frac{1}{\lambda_n R}\int_\sigma U(Q)\frac{r'}{r^{n-1}}\,d\sigma . \tag{2}$$

Si indichi ora con $d\omega$ l'angolo solido elementare che proietta da P l'elemento superficiale $d\sigma$; si ha subito:

$$r^{n-1}\,d\omega = d\sigma\cos O\widehat{Q}P = d\sigma\frac{r + r'}{2R},$$

Ricavando $d\sigma$ e sostituendo nella (2) risulta:

$$U(P) = \frac{2}{\lambda_n}\int_\sigma U(Q)\frac{r'}{r + r'}\,d\omega$$

dove l'integrazione è estesa alla ipersfera ω di centro P e raggio 1, sulla quale debbono immaginarsi distesi, in modo evidente, i valori U(Q) al contorno.

Scambiando in questa formula Q con Q', sommando e dividendo per 2 si ottiene:

$$U(P) = \frac{1}{\lambda_n}\int_\omega \frac{U(Q)\,r' + U(Q')\,r}{r + r'}\,d\omega , \tag{3}$$

l'integrazione essendo anche qui estesa alla detta ipersfera; od anche, notando che nei punti opposti di essa la funzione integranda assume valori uguali,

$$U(P) = \frac{1}{\lambda_n/2}\int_{\omega_1} \frac{U(Q)\,r' + U(Q')\,r}{r + r'}\,d\omega_1 , \tag{3'}$$

Digitized by Google

l'integrazione abbracciando ora una metà arbitraria ω_1 della ipersfera di centro P e raggio 1.

Le (3), (3') sono le espressioni cui volevamo giungere; esse sono suscettibili della seguente interpretazione geometrica. Condotta per P una corda arbitraria dell'ipersfera a tagliare questa in Q e Q', si consideri la funzione lineare dei punti di questa corda che assume in Q e Q' i valori assegnati per la funzione armonica, e se ne calcoli il valore in P. Tale valore, dipendente in generale dalla corda scelta, si potrà considerare come funzione della traccia (o delle tracce) della corda sopra una mezza ipersfera (o su un'ipersfera) di centro P e raggio 1; il valore medio di questa funzione è il cercato valore della funzione armonica in P.

Ci sembra notevole in questa costruzione il fatto che se P è sul contorno, essa non perde significato, e dà precisamente per U(P) il valore assegnato. Per questa circostanza essa si presterebbe a dimostrare in modo assai semplice la convergenza uniforme dei valori all'interno verso quelli in superficie, nei punti in cui la catena dei valori al contorno è continua.

2. Una trasformazione analoga alla precedente, ed un'analoga interpretazione, può darsi per l'integrale che risolve il problema di Dirichlet per il semispazio in S_n, e che dà l'unica soluzione del problema quando s'impongano alla funzione incognita le note condizioni di convergenza all'infinito.

Si ha infatti la formula:

$$U(P) = \frac{2\zeta}{\lambda_n} \int_\sigma \frac{U(Q)}{r^n}\, d\sigma,$$

dove P, Q, λ_n, σ, r hanno i significati analoghi a quelli del caso precedente, e ζ è la distanza di P dallo spazio limite.

Per l'angolo solido $d\omega$ che da P proietta $d\sigma$ si ha qui:

$$r^{n-1}\, d\omega = d\sigma \cos \widehat{PQN} = d\sigma \frac{\zeta}{r},$$

essendo QN la normale allo spazio limite, rivolta verso l'interno del semispazio. Risulta allora:

$$U(P) = \frac{1}{\lambda_n/2} \int_{\omega_1} U(Q)\, d\omega_1 \tag{4}$$

dove $d\omega_1$ è l'elemento di una semisfera di centro P e raggio 1 adiacente alla traccia della retta PQ su di essa. E può anche scriversi:

$$U(P) = \frac{1}{\lambda_n} \int_\omega U(Q)\, d\omega \tag{4'}$$

estendendo l'integrazione all'intera sfera.

Digitized by Google

Qui dunque, deposti i valori al contorno U(Q) sopra una ipersfera, od una mezza ipersfera, di centro P e raggio 1, e precisamente nelle tracce, o nella traccia, della congiungente PQ su di essa, il valor medio della funzione così ottenuta è il cercato valore in P della funzione armonica che assume in superficie i valori assegnati.

Queste formule (4), (4′) possono considerarsi come derivate dalle (3), (3′), quando si faccia tendere all'infinito il raggio dell'ipersfera, mentre rimangono fissi un punto di questa e l'S_{n-1} tangente, ad esso relativo. Ed infatti, per ogni punto determinato di ω, cioè per ogni retta determinata condotta per P, se Q tende alla traccia con l'S_{n-1} trangente, Q′ va all'infinito, r/r' tende a zero e U(Q′) resta finito; la funzione integranda tende a U(Q) e le (3) e (3′) si mutano nelle (4), (4′), rispettivamente.

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive per le funzioni di più variabili.* Nota di E. Pini, presentata [1] dal Corrispondente L. Tonelli.

Il problema della ricerca della funzione primitiva, per una funzione di una sola variabile indipendente, si può dire interamente risolto dopo i lavori di A. Denjoy e di L. Tonelli.

Nel caso di una funzione $f(x, y)$ di due variabili indipendenti, il limite del rapporto

$$\frac{f(x+u, y+v) - f(x+u, y) - f(x, y+v) + f(x, y)}{uv},$$

per u e v tendenti allo zero simultaneamente ma indipendentemente l'uno dall'altro, se esiste lo indicheremo con $s(x, y)$ e lo diremo derivata doppia della funzione $f(x, y)$.

Considerata la derivata $s(x, y)$ finita sopra un rettangolo R a lati paralleli agli assi x e y, H. Looman [2] ha determinato un procedimento il quale, mediante un'infinità numerabile al più di operazioni, permette di risalire dalla $s(x, y)$ alla funzione primitiva $f(x, y)$ (a meno di una funzione della forma $g(x) + h(y)$).

Si presenta ora spontanea la ricerca della funzione primitiva nel caso in cui la derivata $s(x, y)$ non sia sempre finita sul rettangolo dove essa è data. Studiando tale questione sono giunta al seguente risultato: « dalla conoscenza della $s(x, y)$ finita sul rettangolo R ad eccezione d'un insieme di

(1) Nella seduta del 24 aprile 1927.

(2) *Sur la totalisation des derivées des fonctions continues de plusieurs variables indipendentes.* « Fundamenta Mathematicae », t. IV, 1922.

Digitized by Google

punti proiettantesi sopra uno degli assi x od y secondo un insieme numerabile, si perviene alla funzione primitiva $f(x, y)$, a meno d'una funzione $g(x) + h(y)$, mediante un'infinità numerabile al più di operazioni ». La dimostrazione di questa proposizione, che sarà data in una prossima Nota, richiede alcune definizioni ed un lemma fondamentale, il quale permette anche di semplificare in modo assai notevole la dimostrazione stessa del Looman. Di queste definizioni e di questo lemma ci occuperemo nella presente Nota.

1. Quando usiamo l'espressione « rettangolo r » intendiamo un rettangolo a lati paralleli agli assi x e y; se $f(x, y)$ è una funzione continua, chiamiamo *variazione* $\Delta(f, r)$ della $f(x, y)$ sopra un rettangolo

$$r\{x_0 \leq x \leq x'_0 \quad , \quad y_0 \leq y \leq y'_0\}$$

il numero:

$$\Delta(f, r) = f(x'_0, y'_0) - f(x'_0, y_0) - f(x_0, y'_0) + f(x_0, y_0).$$

Se (x, y) è un punto fisso, r un rettangolo variabile di vertici opposti (x, y), $(x + u, y + v)$ con u e v diversi dallo zero, diremo *variazione relativa* della funzione $f(x, y)$ sul rettangolo r il rapporto:

$$\frac{\Delta(f, r)}{u, v} = \frac{f(x + u, y + v) - f(x + u, y) - f(x, y + v) + f(x, y)}{u \cdot v}.$$

2. Se I è un insieme perfetto di punti, chiamiamo *porzione di* I *relativa al rettangolo* r, indicandola con $I(r)$, l'insieme perfetto di punti di I che sono o interni ad r, o punti limiti di punti interni ad r. Indichiamo poi con $C_r(I(r))$ l'insieme complementare della $I(r)$ rispetto ad r, cioè l'insieme dei punti di r non appartenenti ad $I(r)$.

Ora, se I è un insieme superficiale e perfetto di punti e se $I(r)$ è la porzione di I determinata dal rettangolo $r\{a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d\}$, vogliamo considerare un campo, che diremo D, costituito da un numero finito di rettangoli senza parti interne in comune e così definito: preso ad arbitrio un numero ω positivo, dividiamo l'intervallo (a, b) in n intervalli uguali (x_{i-1}, x_i) di lunghezza minore di ω; indichiamo con B_i la striscia verticale $x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad , \quad c \leq y \leq d$.

I rettangoli ρ che costituiscono D sono tutti della forma

$$\rho = \{x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad , \quad \gamma_n \leq y \leq \delta_n\} \quad \text{con} \quad c \leq \gamma_n < \delta_n \leq d$$

e saranno scelti con la seguente regola: se $I(B_i)$ non esiste, ρ sarà il rettangolo B_i stesso; se $I(B_i)$ esiste e se la sua proiezione $I_y(B_i)$ sull'asse y non coincide con il segmento $c \leq y \leq d$, vi saranno degli intervalli contigui della $I_y(B_i)$ la cui lunghezza può essere maggiore, uguale o minore di $x_i - x_{i-1}$.

Digitized by Google

Prendiamo allora per rettangoli ρ tutti i rettangoli

$$\rho \equiv \{ x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad , \quad \gamma_n \leq y \leq \delta_n \},$$

(γ_n , δ_n) essendo un intervallo contiguo della $I_y(B_i)$ tale che

$$\delta_n - \gamma_n \geq x_i - x_{i-1} .$$

Se tutti gli intervalli contigui (γ_n , δ_n) della $I_y(B_i)$ sono di lunghezza minore di $x_i - x_{i-1}$, diremo che i rettangoli ρ non esistono per la striscia B_i; se $I_y(B_i)$ coincide con il segmento (c , d) i rettangoli ρ non esistono. Due rettangoli ρ non hanno mai dei punti interni in comune, ed un rettangolo ρ possiede sopra uno almeno dei lati orizzontali dei punti di I, eccettuato, può darsi, il caso in cui questi due lati appartengano rispettivamente ad $y = c$ e ad $y = d$.

Il numero dei rettangoli ρ è finito poichè le striscie B_i (in numero finito) contengono ciascuna un numero di rettangoli ρ minore di $\frac{d - c}{x_i - x_{i-1}}$.

Quando si vorrà considerare la variazione della funzione $f(x , y)$ sul campo D si dovrà considerare la somma delle variazioni della $f(x , y)$ sui rettangoli ρ che costituiscono D, cioè $V(f , D) = \sum \Delta(f , \rho)$. Se esiste il limite di $V(f , D)$ per ω tendente allo zero, diremo che la *variazione* $V\{f , C_r(I)\}$ *della* $f(x , y)$ *sulla* $C_r(I)$ *è definita* e porremo:

$$V\{f , C_r(I)\} = \lim_{\omega = 0} V(f , D).$$

3. Un insieme chiuso E non denso, superficiale e limitato, lo diremo *di prima specie in sè stesso*, se ogni porzione di E si proietta sopra i due assi secondo insiemi non numerabili. Sia ora P un insieme perfetto di prima specie in se stesso ed H l'insieme dei punti di P nella vicinanza dei quali la $s(x , y)$ non è integrabile (nel senso del Lebesgue) su P; sia M un punto di $P - H$. Diremo che $\Delta(f , r)$ *è calcolabile relativamente a* P *nella vicinanza del punto* M, se M è centro d'un rettangolo $\gamma(M)$ tale che la $V\{f , C_r[P(r)]\}$ è definita per ogni rettangolo r appartenente a $\gamma(M)$, ed inoltre si verifica l'uguaglianza:

$$\Delta(f , r) = \iint_r \sigma(x , y)\, dx\, dy + \lim_{\omega = 0} V(f , D)$$

dove con $\sigma(x , y)$ s'intende la funzione che coincide con la $s(x , y)$ sopra P ed è nulla fuori di P, e l'integrale è preso nel senso del Lebesgue.

4. Dimostriamo il seguente

LEMMA. - *Sia la funzione* $s(x , y)$ *finita su ogni punto di un rettangolo* R *ad eccezione d'un insieme superficiale di punti proiettantesi sull'asse* x

Digitized by Google

secondo un insieme numerabile. Essendo P *un insieme perfetto di punti appartenenti al rettangolo* R *e tale che nessuna sua porzione sia contenuta sopra una parallela all'asse* y, *si può sempre determinare una porzione effettiva* $P(r')$ *di* P *ed un numero* A *positivo in modo che per ogni punto* (x, y) *della* $P(r')$ *e per tutti gli* u *e* v *tali che* $(x + u, y + v)$ *appartenga ad* R, *sia sempre*

$$(1) \qquad \left| \frac{\Delta(f, r)}{u\,v} \right| = \left| \frac{f(x+u, y+v) - f(x+u, y) - f(x, y+v) + f(x, y)}{u\,v} \right| < A .$$

Infatti, per ogni intero positivo n, indichiamo con Q_n l'insieme dei punti (x, y) di P in cui è:

$$(2) \qquad \left| \frac{f(x+u, y+v) - f(x+u, y) - f(x, y+v) + f(x, y)}{u\,v} \right| \leq n$$

per ogni u e v tali che $(x + u, y + v)$ appartenga ad R.

L'insieme Q_n è, evidentemente, *chiuso*. Se uno degli insiemi Q_n fosse denso su tutta una porzione di P, esso conterrebbe tale porzione e si sarebbe dimostrato quanto si vuole. Supponiamo allora che nessuno degli insiemi Q_n sia denso sopra almeno una porzione di P.

Indichiamo con $q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots$ la successione delle rette che proiettano sull'asse x l'insieme dei punti di R nei quali la $s(x, y)$ assume il valore $\pm \infty$ e consideriamo la successione d'insiemi

$$Q_1, q_1, Q_2, q_2, \cdots, Q_n, q_n, \cdots$$

Nessuno di questi insiemi può essere denso su tutta una porzione di P e quindi, in conseguenza di un noto teorema di Baire, vi è almeno un punto di P al di fuori di tutti gli insiemi $Q_1, q_1, Q_2, q_2, \cdots, Q_n, q_n \cdots$ Ma ciò non è possibile perchè in un punto (x, y) non appartenente alle rette q_n la $s(x, y)$ è finita e quindi in esso vale la relazione (2) per n sufficientemente grande. Possiamo quindi dire che esiste almeno un insieme Q_n denso su tutta una porzione di P. Resta così dimostrata la disuguaglianza (1).

Osservazione. - La porzione $P(r')$ è, come P, tale che nessuna sua porzione è contenuta sopra una parallela all'asse y.

Diremo che un insieme perfetto gode della proprietà (a) se nessuna sua porzione è contenuta sopra una parallela all'asse y.

Corollario. - Ferme restando le ipotesi fatte sulla $s(x, y)$ nel lemma precedente e supposto che il rettangolo r appartenga ad R, *ogni porzione* $P(r)$ *che goda della proprietà* (a) *ne contiene un'altra, che gode anch'essa della stessa proprietà, e dove la* $s(x, y)$ *è limitata.*

Infatti, per il lemma precedente, si può sempre determinare una porzione $P(r')$, che gode della proprietà (Q), ed un numero A positivo in

Digitized by Google

modo che, per ogni punto (x, y) della $P(r')$ e per tutti gli u e v tali che $(x + u, y + v)$ appartenga ad R, sia sempre: $\left|\frac{\Delta(f, r)}{u\,v}\right| < A$.

Ma

$$s(x, y) = \lim_{\substack{u \\ v = 0}} \frac{\Delta(f, r)}{u\,v}.$$

Quindi per ogni punto (x, y) della $P(r')$ è sempre:

$$|s(x, y)| \leq A.$$

Matematica. — *Sopra le coordinate cartesiane lungo una curva.* Nota di J. DUBOURDIEU, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nel caso delle coordinate normali di Riemann esiste una formula ben conosciuta che dà lo sviluppo del ds^2 fino al secondo ordine. Nella sua Memoria [2] sopra lo scostamento geodetico, il prof. Levi-Civita ha dato una generalizzazione delle coordinate normali di Riemann lungo una curva qualunque L. Mi propongo qui di dare una formula analoga a quella di Riemann per lo sviluppo del ds^2 in un punto infinitamente vicino alla curva L.

Siano

$$y_i = \psi_i(y_n) \qquad \text{per } i = 1, 2 \cdots n - 1$$

le equazioni della curva L. Poniamo inoltre per simmetria: $y_n = \psi_n(y_n)$. Consideriamo un punto $P(y_1 \cdots y_n)$ infinitamente vicino alla curva L. Per questo punto si ha che $\varepsilon_n = y_n - \psi_n(y_n) = 0$ e le $\varepsilon_i = y_i - \psi_i(y_n)$ per $i = 1, 2 \cdots n - 1$ sono infinitamente piccole. La lunghezza dell'elemento $PQ(dy_1, dy_2 \cdots dy_n)$ è data allora dalla formula:

$$(1) \quad \begin{cases} ds^2 = ds_0^2 - \frac{1}{3} \sum_{(ij)(kh)} R_{ij,kh} (\varepsilon_i\, dy_j - \varepsilon_j\, dy_i)(\varepsilon_k\, dy_h - \varepsilon_h\, dy_k) \\ \qquad - \frac{2}{3} \sum_{(ij)(hk)} R_{ij,kh} (\varepsilon_i\, dy_j - \varepsilon_j\, dy_i)(\varepsilon_k\, \psi'_h - \varepsilon_h\, \psi'_k)\, dy_n \end{cases}$$

dove

$$ds_0^2 = dy_1^2 + \cdots + dy_n^2 \qquad \text{e} \qquad i, j, k, h = 1, 2, \cdots n.$$

Questa formula può interpretarsi geometricamente nel modo seguente: Per ogni punto M della curva L passa una superficie Σ (y_n = costante)

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Sur l'écart géodésique.* « Mathematische Annalen », Band 97 (1926), pp. 291-311.

Digitized by Google

generata da geodetiche spiccate da M secondo direzioni che si spostano per parallelismo lungo L. Sia dunque P un punto vicino ad L, M il punto dove la superficie Σ_1 contenente P incontra L, PQ un elemento qualunque $(dy_1 \cdots dy_n)$, N il punto dove la superficie Σ_2 contenente Q incontra L, sia infine PQ' l'elemento compreso fra Σ_1 e Σ_2 della curva ottenuta portando una lunghezza costante uguale a l'arco di geodetica MP sopra le geodetiche spiccate da L nelle direzioni che si ottengono spostando per parallelismo lungo L la direzione MP. La formula (1) ci dà:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{1}{3} K S_1^2 - \frac{2}{3} H S_1 S_2 ,$$

dove S_1 rappresenta l'area del bivettore MPQ e K la curvatura riemanniana della sua giacitura; S_2 l'area del bivettore MPQ' e H la curvatura mista di Bompiani secondo le due giaciture MPQ e MPQ'.

Nel caso particolare che l'elemento PQ si confonde coll'elemento PQ' abbiamo:

$$S_1 = S_2 = S \quad , \quad H = K$$

e d'altra parte ds_0^2 non è che il quadrato della lunghezza dell'elemento d'arco MN. Si ha dunque in questo caso:

$$K = \frac{\overline{MN}^2 - \overline{PQ}^2}{S^2} . \tag{2}$$

Abbiamo così una interpretazione intrinseca di K data dal teorema seguente:

Essendo dato un elemento d'arco MN *di una curva qualunque ed un elemento di geodetica* MP, *di lunghezza* ρ, *consideriamo l'elemento di curva* PQ *luogo degli estremi di segmenti geodetici di lunghezza* ρ *spiccati dai singoli punti di* MN *secondo le direzioni che si ottengono spostando* MP *per parallelismo lungo l'elemento* MN. *Essendo* S *l'area del quadrilatero* M N P Q *la curvatura riemanniana secondo la giacitura di questo quadrilatero è data dalla formula* (2).

Il prof. Severi aveva già enunciato questo teorema [1] supponendo che l'elemento MN fosse un elemento di geodetica.

Matematica. — *Sui differenziali secondi covarianti.* Nota di L. Berwold presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) *Sulla curvatura delle superficie e varietà*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. XLII, 1917, pp. 227-259, § 5.

Digitized by Google

Matematica. — *Sui sistemi di funzioni di Tchebycheff che sono ortogonali.* Nota di M. Bossolasco, pres. dal Socio C. Somigliana.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla ricerca della forma delle onde luminose dall'esame delle frangie d'ombra.* Nota di B. Pacella, presentata dal Socio A. Garbasso.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Ancora sulla ricerca della funzione primitiva per le funzioni di più variabili.* Nota di E. Pini, presentata dal Socio Corr. L. Tonelli.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sui principî della meccanica analitica.* Nota di C. Poli, presentata [1] dal Socio C. Somigliana.

Per stabilire le equazioni differenziali del moto o dell'equilibrio di un sistema vincolato, si suole ricorrere a dei principî generali che possono esser variamente enunciati, ma che sono equivalenti fra loro e che contengono come caso particolare quelli da cui si deducono le equazioni fondamentali della dinamica dei sistemi liberi:

$$(1) \qquad m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} = \bar{F}_i .$$

In questa nota mi propongo di dimostrare che, contrariamente all'opinione generalmente ammessa, vi è perfetta equivalenza fra queste equazioni e quelle che si stabiliscono pei sistemi vincolati mediante quei principî cui ho accennato; ossia che questi principî non implicano nessun nuovo postulato sperimentale o di natura fisica, all'infuori di quei medesimi necessari per ottenere le equazioni del moto dei sistemi liberi.

Il metodo classico, dato da Lagrange, riduce ogni problema dinamico, mediante il principio di d'Alembert, ad un problema di statica e questo a sua volta, mediante il principio delle velocità virtuali (modernamente detto dei lavori virtuali), conduce all'equazione fondamentale:

$$(2) \qquad \sum \left(m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} - \bar{F}_i \right) \times \delta P_i = 0 .$$

Pei sistemi liberi le δP_i sono arbitrarie e si ritrovano le (1).

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

Digitized by Google

In questo modo per giungere alla (2) sono necessari due distinti principî o postulati; inoltre ridurre ogni problema dinamico ad uno statico può sembrare poco soddisfacente dal punto di vista logico, poichè la statica è piuttosto da considerare come un caso particolare o caso limite della dinamica.

Seguendo questo indirizzo è facile però ottenere ancora la (2), introducendo le reazioni dei vincoli. Si dice: un sistema vincolato si può considerare libero a condizione di aggiungere alle forze direttamente applicate anche talune forze (che alcuni Autori ritengono fittizie), le quali rappresentano le azioni meccaniche esercitate dai vincoli e che perciò chiamiamo reazioni vincolari. Indicando con $\overline{R}_i$ la risultante delle reazioni applicate al punto P_i, le (1) divengono

$$m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} = \overline{F}_i + \overline{R}_i$$

e quindi, ammettendo che il lavoro virtuale delle reazioni vincolari sia nullo, si ritrova direttamente la (2). In questo modo la dinamica dei sistemi vincolati si fonda su un solo principio, quello testè enunciato e che si può chiamare principio delle reazioni virtuali. Vi è da osservare però che se col metodo classico si ricorre a due principî distinti, ora però si è dovuto ricorrere non solo al principio delle reazioni, ma anche alle (1) cioè ai principî della dinamica dei sistemi liberi; mentre si può sostenere che ciò non è necessario nel primo caso. Ma questa discussione che richiede anzitutto sia stabilito il modo con cui si definiscono la massa e la forza, non ha per lo scopo di questa Nota, nessuna importanza.

Osserviamo piuttosto che ammessa la (1) pei sistemi liberi, si riconosce facilmente come il cosiddetto principio delle reazioni virtuali non abbia affatto carattere di postulato, ma semplicemente di *definizione di una particolare classe di vincoli.* Non si afferma infatti che il lavoro virtuale delle reazioni vincolari sia *sempre* nullo, ma solo che ciò si verifica se i vincoli sono « lisci »; cioè quando siano escluse le resistenze passive o attriti. Volendo poi specificare cosa si intenda per vincolo liscio, non vi è altro che dire che son tali quei vincoli in cui il lavoro virtuale delle loro reazioni è nullo; perciò il principio delle reazioni non è altro che la definizione di vincolo liscio. Questa osservazione non è affatto nuova, poichè è esplicitamente enunciata anche nel classico trattato dell'Appell: senonchè l'autore si affretta subito dopo a giustificare il presunto principio mediante appello all'esperienza, passando in esame diversi tipi di vincoli più usuali per far vedere che soddisfano a quel principio. Questo curioso modo di procedere si può solo giustificare con una interpretazione diversa da quella risultante dalle parole stesse dell'autore, cioè che si vuol mostrare come la definizione di vincolo liscio sia abbastanza generale per comprendere almeno i casi pra-

Digitized by Google

tici più frequenti, poichè sarebbe evidentemente poco utile una dinamica valevole solo per vincoli lisci quando questi nella realtà dei problemi concreti non si incontrassero mai.

Ma effettivamente le cose stanno proprio così; i vincoli lisci *non esistono* se non come caso limite praticamente irrealizzabile. La meccanica analitica acquista così un valore di costruzione teorica valida in casi ideali e solo come prima approssimazione applicabile ai fenomeni reali, restando come unico campo di applicazione esatta quello dei sistemi liberi, ossia la meccanica celeste. Concezione nefasta ai progressi della scienza e della tecnica, che induce a separare anche nell'insegnamento, la meccanica *razionale* da quella *applicata*, e che può giustificare le ironiche espressioni dei tecnici e dei fisici (v. Bouasse) verso i cultori della meccanica « pura ». Fortunatamente però il principio dei lavori virtuali, e tutta la meccanica dei sistemi vincolati è valida anche se i vincoli non sono lisci, purchè naturalmente si tenga conto delle resistenze passive fra le forze direttamente applicate, per cui quella erronea concezione è frutto dei metodi che si seguono per ricavare le equazioni fondamentali, i quali devono esser pertanto modificati in modo da evitare false interpretazioni, e dare invece una chiara idea del valore e del significato delle equazioni stesse e del metodo per cui è possibile formulare analiticamente ogni problema concreto.

Il concetto di vincolo è un concetto astratto di carattere puramente analitico. Nella realtà non vi sono corpi liberi e corpi vincolati, ma sempre e solo dei corpi soggetti all'azione di talune forze che possono avere caratteristiche notevolmente diverse.

La differenza che vi è tra un punto vincolato che percorre con moto uniforme una traiettoria circolare perchè rigidamente connesso ad un perno girevole su cuscinetti, ed un punto libero che si muove con la stessa legge per effetto di una forza centrale, consiste unicamente nella diversità dei caratteri delle forze agenti sul mobile nei due casi. Difatti nel primo caso la forza è funzione della velocità, nel secondo invece è di posizione. La cosiddetta reazione del vincolo non è una forza fittizia, nel problema concreto, perchè si può sperimentalmente mettere in evidenza la deformazione elastica del corpo cosidetto rigido stabilente il vincolo, che determina appunto quella reazione.

Non vi sono dei corpi o sistemi o moti vincolati, e corpi o moti liberi; la distinzione appare solo nella formulazione analitica dei problemi meccanici, poichè si tratta di distinguere due categorie di problemi in cui diversi sono i dati che si suppongono noti.

In entrambi i casi dianzi accennati si applica la (1), ma sul punto libero si ritiene data la risultante di tutte le forze applicate, quindi è noto il secondo membro della equazione differenziale; nel caso del punto vincolato invece di dare tutte le forze applicate si suppone nota la forma della traiettoria.

Digitized by Google

Se non si vuol perdere di vista la natura fisica dei problemi meccanici nella loro formulazione matematica, si deve dire che i problemi analitici cui essi conducono, si distinguono in due categorie:

1.° Problemi detti di moto libero, in cui si suppongono date tutte le forze agenti sul sistema, o almeno le risultanti dalle forze applicate ad ogni singolo punto: essi consistono nella integrazione del sistema (1) di equazioni differenziali del secondo ordine in cui le $\overline{F}_i$ sono le funzioni note.

2.° Problemi detti di moto vincolato, in cui non si conoscono tutte le risultanti delle forze applicate ai singoli punti del sistema, ma solo le risultanti di alcune di esse o anche di talune loro componenti: allora le (1) si scriveranno

$$m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} = \overline{F}_i + \overline{R}_i \qquad (i = 1, \cdots n) \tag{3}$$

in cui le $\overline{F}_i$ sono note e la $\overline{R}_i$ incognite; ma in più si conoscono taluni integrali primi di queste equazioni, i quali, per ipotesi, hanno la forma di relazioni lineari fra le velocità dei punti del sistema:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{A}_{ik} \times \frac{d P_i}{dt} + B_k = 0 \qquad (k = 1, \cdots m) \tag{4}$$

in cui le $\overline{A}$ e le $\overline{B}$ sono funzioni note.

Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie risulta senz'altro l'esistenza e l'unicità della soluzione dei problemi della prima categoria, quando siano date le condizioni iniziali. Per quelli della seconda, ovviamente manca l'unicità quando non si impongano altre condizioni oltre quelle iniziali, poichè le (3) e le (4) insieme forniscono un sistema di $3n + m$ equazioni fra $6n$ funzioni scalari incognite (le coordinate dei punti P_i e le componenti dei vettori $\overline{R}_i$). Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange serve a dimostrare che la soluzione esiste ed è unica quando si aggiunga la condizione che le $\overline{R}_i$ siano combinazioni lineari delle $\overline{A}_{ik}$. Infatti le equazioni

$$m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} = \overline{F}_i + \sum_{h=1}^{m} \lambda_h \overline{A}_{ih} \qquad (i = 1, \cdots n) \tag{5}$$

insieme alle (4), supposte date le $\overline{F}_i$, le $\overline{A}_{ik}$ e le $\overline{B}_k$, forniscono $3n + m$ equazioni differenziali ordinarie fra $3n + m$ funzioni incognite scalari (le $3n$ coordinate dei punti P_i e gli m coefficienti indeterminati λ_h).

Un problema meccanico di moto vincolato si traduce dunque in un problema analitico determinato sempre e solo quando vi siano delle forze $\overline{R}$ che non si conoscono completamente, ma di cui si sappia però che si devono poter esprimere linearmente mediante le $\overline{A}_{ik}$ che compaiono nelle equazioni (4) dei vincoli.

Digitized by Google

Il significato fisico della proprietà di cui devono godere le forze che non sono completamente note, appar più chiaro ricorrendo ai concetti di velocità e di potenza (o attività) virtuali. Chiamiamo velocità virtuale del sistema degli n punti P_i, ogni gruppo di n vettori $\overline{P}'_i$ (funzioni dei P_i e del tempo), che soddisfaccia alle equazioni dei vincoli irrigiditi, cioè alle

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{A}_{ik} \times \overline{P}'_i = 0 \qquad (k = 1, \cdots m) \tag{6}$$

Le $\overline{P}'_i$ si possono esprimere in funzione di $r = 3n - m$ parametri scalari arbitrari:

$$\overline{P}'_i = \sum_{h=1}^{r} \overline{a}_{ih} \cdot P_h \qquad (i = 1, \cdots n) \tag{7}$$

dove le $\overline{a}_{ih}$ sono note. Inoltre un sistema di forze $\overline{R}_i$ applicate ai punti P_i si dirà *inattivo*, quando sia nulla la loro potenza o attività risultante per ogni velocità virtuale, cioè sia

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i \times \overline{P}'_i = 0$$

qualunque siano le $\overline{P}'_i$ soddisfacenti alle (6) o date dalle (7). Per l'arbitrarietà delle p_h si ha dunque

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ih} \times \overline{R}_i = 0 \qquad (h = 1, \cdots r) \tag{8}$$

Se le $\overline{R}_i$ che compaiono nelle (3) formano un sistema inattivo, si possono eliminare, mediante le (8) e si ottiene un sistema di equazioni differenziali con le sole incognite P_i che ammette una soluzione unica. Basta infatti ricavare le $\overline{R}_i$ dalle (3) e sostituire nelle (8) per avere le

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ih} \times m_i \frac{d^2 P_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ih} \times \overline{F}_i \qquad (h = 1, \cdots r) \tag{9}$$

che insieme alle (4) forniscono $r + m = 3n$ equazioni fra le $3n$ coordinate incognite dei punti P_i.

Quando dunque si conoscano degli integrali primi delle equazioni differenziali del moto di un sistema, della forma delle (4) comunemente detti vincoli del sistema, è lecito trascurare quei sistemi di forze applicate che siano inattivi rispetto ai vincoli dati. Questo, che è un puro teorema di analisi, è il contenuto essenziale dei cosiddetti principî di lavori virtuali o delle reazioni dei vincoli lisci.

La discussione, qui appena abbozzata per ragioni di spazio, delle caratteristiche dei problemi della meccanica analitica conduce a riconoscere che

Digitized by Google

in ogni caso si tratta di varie forme di problemi di integrazione di un sistema di equazioni differenziali e non di applicazioni di postulati o principî fisici diversi da quelli su cui già Newton e Galileo fondarono la meccanica. In altro lavoro riprenderò la questione per sviscerarla meglio nell'aspetto fisico della definizione e della misura delle grandezze fondamentali della meccanica.

Meccanica. — *Sul moto sferico vorticoso di un fluido incomprimibile.* Nota di F. SBRANA, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In questa Nota ci permettiamo di riprendere un argomento già trattato dal prof. Beniamino Segre [2]: lo studio del moto vorticoso indotto in un fluido incomprimibile, che circonda un ostacolo sferico, da una distribuzione di vortici, nella quale le linee vorticose sono dirette secondo raggi uscenti dal centro dell'ostacolo, mentre una famiglia di superficie di corrente è costituita dalle sfere concentriche con l'ostacolo. L'interesse che tale studio presenta per le possibili applicazioni a questioni di meteorologia e di fisica solare, opportunamente messo in vista dal prof. B. Segre, ci sembra possa giustificare la presente ricerca, intesa a determinare le caratteristiche del moto, quando la regione vorticosa è limitata da un cono di rotazione.

2. Fissato un sistema di coordinate polari, col polo nel centro O della sfera, e l'asse polare passante per O, indichiamo con ρ la distanza da O, con τ la colatitudine, e con θ la longitudine di un generico elemento fluido. Rappresentiamo poi con v_ρ, v_τ, v_θ le componenti della velocità $\boldsymbol{v}$ dell'elemento, secondo le linee coordinate ρ, τ, θ, e con $\omega_\rho, \omega_\tau, \omega_\theta$ le analoghe componenti del vortice $\boldsymbol{\omega}$ (doppio della velocità di rotazione). Ricordiamo che si ha [3]

(1) Nella seduta del 24 aprile 1927.

(2) *Sul moto sferico vorticoso di un fluido incompressibile*, « Ann. di Matem. », 1924, pp. 31-55.

(3) In generale, riferendosi a coordinate curvilinee ortogonali x_1, x_2, x_3, rispetto alle quali il quadrato dell'elemento lineare dello spazio sia dato da

$$ds^2 = H_1^2\,dx_1^2 + H_2^2\,dx_2^2 + H_3^2\,dx_3^2,$$

si ha

$$H_1 H_2 H_3 \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x_1}(H_2 H_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(H_3 H_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(H_1 H_2 v_3);$$

$$H_2 H_3 \omega_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}(H_3 v_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(H_2 v_2),$$

e formule analoghe per ω_2, ω_3 (cfr., p. es., RIEMANN-WEBER, *Part. Diff. gleich. der math. Physik*, 1er Bd., 1919, p. 226). Nel caso nostro, basta porre $x_1 = \rho$, $x_2 = \tau$, $x_3 = 0$ e quindi $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = \rho \operatorname{sen} \tau$.

Digitized by Google

$$(1)\qquad \rho^2 \operatorname{sen}\tau \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 v_\rho \operatorname{sen}\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}(\rho v_\tau \operatorname{sen}\tau) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta);$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho^2 \operatorname{sen}\tau\,\omega_\rho = \dfrac{\partial}{\partial\tau}(\rho v_\theta \operatorname{sen}\tau) - \dfrac{\partial(\rho v_\tau)}{\partial\theta}, \\ \rho\omega_\tau = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\tau}\dfrac{\partial v_\rho}{\partial\theta} - \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\theta), \\ \rho\omega_\theta = \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\tau) - \dfrac{\partial v_\rho}{\partial\tau}. \end{cases}$$

Se si suppone il fluido incomprimibile, dev'essere

$$(3)\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0.$$

Se poi il moto è vorticoso in una regione S dello spazio occupato dal fluido, e si conosce in essa la distribuzione dei vortici, subordinata naturalmente alla condizione

$$(4)\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0,$$

le componenti di velocità nel moto indotto devono essere determinate in funzione di $\omega_\rho, \omega_\tau, \omega_\theta$, per modo che siano verificate le (2) (ritenendovi nulli i primi membri al di fuori di S), e la (3).

Supponiamo, per di più,

$$\omega_\tau = \omega_\theta = 0.$$

Dalle (1), (4), si ha subito

$$\omega_\rho = \omega = \frac{f(\theta,\tau)}{\rho^2}\ (1).$$

Se poi è $v_\rho = 0$ (e quindi il moto è *sferico*), dalle (1), (3), segue

$$\rho v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \quad , \quad \rho v_\tau = -\frac{1}{\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.$$

Ma dalla 2ª e 3ª delle (2) risulta che ρv_τ e ρv_θ sono indipendenti da ρ. Ci si può dunque limitare ad esaminare il moto sulla superficie σ di una delle sfere concentriche con l'ostacolo, ritenendo, per semplicità, che essa abbia raggio unitario (2).

Resta da verificare la 1ª delle equazioni (2). Avremo perciò, su σ,

$$(5)\qquad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \quad , \quad v_\tau = -\frac{1}{\operatorname{sen}\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$(6)\qquad \operatorname{sen}\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\operatorname{sen}\tau\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = f(\theta,\tau)\operatorname{sen}^2\tau.$$

(1) Cfr. SEGRE, loc. cit., p. 42.
(2) SEGRE, loc. cit., p. 42.

Digitized by Google

3. La zona vorticosa σ_1 sulla sfera σ sia una calotta, avente per asse l'asse polare, ed in essa la colatitudine varii tra zero ed α ($< \pi$). Dovendo la funzione $f(\theta, \tau)$, che rappresenta la grandezza del vortice nell'elemento (θ, τ), mantenersi uniforme su σ_1, e quindi periodica rispetto a θ, appare naturale ritenere che essa sia sviluppabile in serie di Fourier, come funzione di θ, entro σ_1; similmente è da presumere che la funzione incognita ψ sia della stessa forma, su tutta la superficie σ. Soluzioni particolari del problema (che potremmo chiamare soluzioni *elementari*), si avranno, quando si scelga

$$f = a(\tau) \cos n\theta \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \cdots);$$

ovvero

$$f = b(\tau) \operatorname{sen} n\theta \quad , \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Di queste soluzioni vogliamo appunto occuparci brevemente.

4. Sia anzitutto $f = a(\tau)$.

Ricordiamo che, come ha mostrato il prof. B. Segre [e come si potrebbe agevolmente verificare, con l'aiuto della (6)], l'intensità totale dei vortici su σ_1 è nulla, e quindi

$$\int_{\sigma_1} f d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} f(\theta, \tau) \operatorname{sen} \tau \, d\tau = 0. \tag{7}$$

Nel caso attuale, si avrà la condizione

$$\int_0^{\alpha} a(\tau) \operatorname{sen} \tau \, d\tau = 0. \tag{8}$$

Ad essa si soddisfa, ponendo

$$a(\tau) = u(\tau) - \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \int_0^{\alpha} u(t) \operatorname{sen} t \, dt \ (1),$$

con u funzione arbitraria, che riterremo finita e continua, per $0 \leq \tau \leq \alpha$.

Supposta anche ψ indipendente da θ, dalle (5), (6) si ha subito

$$v_\theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \tau} \int_0^{\tau} a(t) \operatorname{sen} t \, dt \quad ; \quad v_\tau = 0.$$

Il movimento su σ_1 è quindi di rotazione attorno all'asse della calotta vorticosa. Si riconosce poi subito che la velocità è nulla al centro della calotta; ed è anche nulla, a causa della condizione (8), al contorno (cioè per $\tau = \alpha$).

(1) LAURICELLA, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », 1912, 1° sem., p. 18 e segg.

Digitized by Google

Nella regione σ_2, complementare di σ_1 su σ, il moto dev'essere irrotazionale. Deve dunque risultare, per la (6),

$$\frac{d}{d\tau}\left(\operatorname{sen}\tau\,\frac{d\psi}{d\tau}\right) = 0.$$

Se non si hanno discontinuità nel moto, si dovrà ritenere nulla la velocità degli elementi fluidi su tutta la regione σ_2.

Non ci sembra inopportuno rilevare una analogia col fenomeno dei cicloni, al centro dei quali si ha calma, mentre all'intorno il moto atmosferico è rotatorio, e si va spegnendo col crescere della distanza dal centro.

5. Supponiamo ora, p. es.,

$$f = a(\tau)\cos n\theta.$$

La condizione (7) è senz'altro verificata.

Assunto

$$\psi = \mathrm{A}(\tau)\cos n\theta,$$

l'equazione (6) ci dà

$$\operatorname{sen}\tau\,\frac{d}{d\tau}\left(\operatorname{sen}\tau\,\frac{d\mathrm{A}}{d\tau}\right) - n^2\mathrm{A} = a(\tau)\operatorname{sen}^2\tau,$$

ovvero, posto momentaneamente

$$\xi = \log\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}, \tag{9}$$

$$\frac{d^2\mathrm{A}}{d\xi^2} - n^2\mathrm{A} = \mathrm{F}(\xi), \tag{10}$$

[dove il secondo membro rappresenta il prodotto $a(\tau)\operatorname{sen}^2\tau$, espresso in funzione di ξ]. Si ha quindi

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2n}\int_{\xi_0}^{\xi} \mathrm{F}(t)\left[e^{n(\xi-t)} - e^{-n(\xi-t)}\right]dt + c_1 e^{n\xi} + c_2 e^{-n\xi},$$

con ξ_0, c_1, c_2 costanti [1]. Tornando alla variabile τ, e ponendo

$$t = \log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

(1) Sebbene la risoluzione della (10) sia questione elementare, ci permettiamo di segnalare un procedimento che consente di evitare qualche calcolo: vedi F. Sbrana, *Sulla integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », ottobre 1926.

Digitized by Google

si trova

$$(11)\quad A(\tau) = \frac{1}{2n}\int_0^{\tau} a(\varphi)\,\operatorname{sen}\varphi\left[\operatorname{tg}^n\frac{\tau}{2}\cot^n\frac{\varphi}{2} - \cot^n\frac{\tau}{2}\operatorname{tg}^n\frac{\varphi}{2}\right]d\varphi + \\ + c_1\operatorname{tg}^n\frac{\tau}{2} + c_2\cot^n\frac{\tau}{2},$$

dove, per semplicità, si è supposto nullo il limite inferiore dell'integrale.

Poichè dalle (5) segue

$$v_\theta = \frac{dA}{d\tau}\cos n\theta \quad , \quad v_\tau = -n\frac{A}{\operatorname{sen}\tau}\operatorname{sen} n\theta,$$

affinchè la velocità si mantenga finita al centro della calotta vorticosa, occorre che risultino finite, per $\tau = 0$, $\frac{A}{\operatorname{sen}\tau}$ e $\frac{dA}{d\tau}$. Per questo bisogna assumere intanto $c_2 = 0$. Si vede poi subito che $a(\tau)$ *deve annullarsi di ordine* $n - 1$, *per* $\tau = 0$. Viceversa, se ciò si verifica, v_0 e v_τ sono finite entro σ_1.

Per determinare la velocità degli elementi fluidi nella regione σ_2, si ha la condizione

$$\operatorname{sen}\tau\frac{d}{d\tau}\left(\operatorname{sen}\tau\frac{dA}{d\tau}\right) - n^2 A = 0.$$

Dovendo A risultare finita per $\tau = \pi$, si ottiene

$$(12)\qquad A(\tau) = c\cot^n\frac{\tau}{2},$$

con c costante.

Se non si hanno discontinuità nel moto, occorre identificare, per $\tau = \alpha$, le espressioni (11), (12) di A, e quelle che se ne ottengono derivando (rapporto a τ). Queste due condizioni serviranno a determinare le costanti c e c_1, rimaste finora arbitrarie.

Meccanica. — *Sul meccanismo dell'emissione nella meccanica ondulatoria.* Nota di E. Fermi presentata dal Socio O. M. Corbino.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

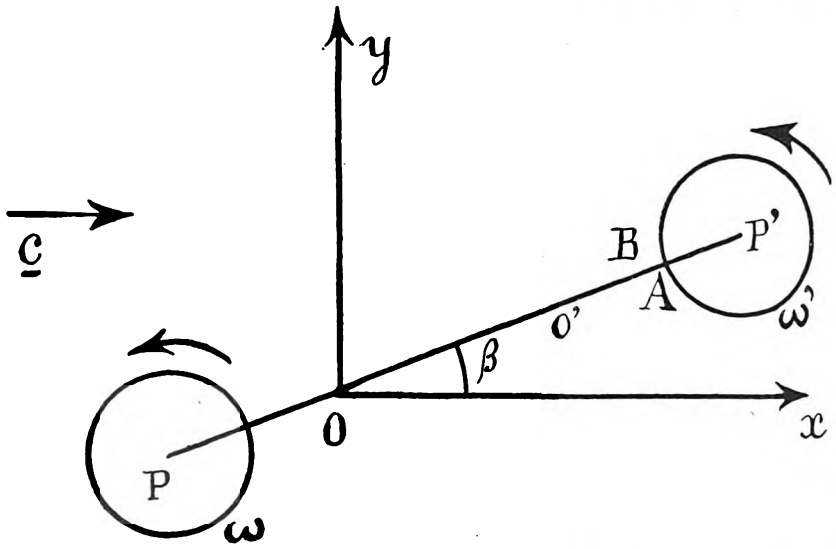
Meccanica. — *Sopra la meccanica relativistica dei sistemi olonomi.* Nota di G. Thomsen presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Idromeccanica. — *Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski.* Nota di B. FINZI, presentata [1] dal Corrisp. U. CISOTTI.

Il prof. Cisotti [2] caratterizzò le azioni dinamiche che si esercitano su di una lamina rettilinea, investita da una corrente piana, irrotazionale, di densità costante ρ, di velocità asintotica c, in presenza di una circolazione C. La risultante delle pressioni dinamiche risulta normale alla lamina (e non alla direzione asintotica della corrente, come vuole il teorema di Kutta-Joukowski)



e di valore $\rho c\,|C|\cos\beta$, se β indica l'angolo che la lamina forma con la direzione asintotica della corrente. La eccezione al teorema di Kutta-Joukowski proviene dal fatto che agli estremi della lamina la velocità diviene infinita [3].

Il prof. Rosenblatt, in una Nota presentata in questa stessa seduta, ritrova il risultato di Cisotti, partendo dalle formule di Blasius, risultato che estende al caso in cui il profilo rigido investito dalla corrente presenti punti angolosi d'apertura 2π.

Il prof. Prandtl osservò, in una lettera diretta al prof. Cisotti (e da questi cortesemente comunicatami), che, per il fatto che la risultante è normale alla lamina, esiste – in generale, cioè quando β è diverso da zero

(1) Nella seduta del 24 aprile 1927.

(2) *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. V, serie 6ª, 1° sem., fasc. I, 1927, p. 16.

(3) Loc. cit., n. 2.

Digitized by Google

e da $\frac{\pi}{2}$ - una componente secondo la direzione asintotica della corrente; dunque un flusso di energia, a cui deve corrispondere un'equivalente emissione di energia. Se tale conclusione, dice il Prandtl, non è contenuta nelle formule di Cisotti, allora è impossibile che la risultante delle pressioni dinamiche abbia la direzione trovata.

In questa Nota - ispirandomi all'osservazione del Prandtl - ricavo una formula che esprime il principio di conservazione di energia, relativa a una corrente traslo-circolatoria irrotazionale, piana, in presenza di un profilo con singolarità al contorno.

Facendone applicazione al caso della lamina rettilinea, trovo, partendo dalle formule di Cisotti, che la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica è uguale a $\rho c^2 C \cos\beta \operatorname{sen}\beta$. Ne concludo che la corrente traslo-circolatoria, nel caso in esame, non è spontanea: per mantenerla occorre un motore di potenza uguale a $\rho c^2 C \cos\beta \operatorname{sen}\beta$.

1. – Potenza.

Una corrente traslo-circolatoria irrotazionale, indefinita, piana, investa, in assenza di forze di massa, un profilo rigido, il quale presenti dei punti salienti d'apertura 2π. Siano: v la velocità, t il tempo, p la pressione; si hanno le note formule:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad} p , \tag{1}$$

$$\rho \frac{v^2}{2} = -p + \text{cost.} \tag{2}$$

È noto che nei salienti la velocità diviene infinita. Isoliamo i salienti con circonferenze (data l'apertura 2π dei salienti stessi [1]) con centro nella singolarità e raggio infinitesimo. Diciamo: ω una generica di queste; γ la parte di profilo rigido da cui sono state escluse le singolarità; σ_∞ una circonferenza di centro finito e raggio infinito. Nel campo τ — limitato da $\gamma, \omega, \sigma_\infty$ — p è (per la (2)) regolare. Moltiplicando la (1) scalarmente per v, ed integrando in τ, si ha, indicando con T l'energia cinetica:

$$\frac{dT}{dt} = -\int \operatorname{grad} p \times v \, d\tau . \tag{3}$$

Sia $v = \operatorname{grad}\varphi$. Il potenziale φ è regolare in τ. Ricordando che $\Delta_2 \varphi = 0$, e applicando il primo lemma di Green, si ha, intendendo n diretta verso τ,

$$\frac{dT}{dt} = \int_\gamma p \frac{d\varphi}{dn} ds + \int_{\sigma\infty} p \frac{d\varphi}{dn} ds + \sum \int_\omega p \frac{d\varphi}{dn} ds , \tag{4}$$

(1) È noto che se l'apertura è diversa da 2π la considerazione dei salienti non muta le conclusioni a cui si perverrebbe trascurandoli, nei riguardi delle azioni dinamiche.

Digitized by Google

la somma andando estesa a tutti gli ω. Ma

$$\frac{d\varphi}{dn} = \text{grad}\,\varphi \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n};$$

introducendo la funzione di corrente ψ, coniugata armonica di φ, se la coppia di direzioni s e n è simmetrica a quella degli assi coordinati, sarà:

$$(4') \qquad \frac{d\mathrm{T}}{dt} = \int_\gamma p\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}\,ds + \int_{\sigma\infty} p\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}\,ds + \sum \int_\omega p\,d\psi.$$

γ è linea di flusso, quindi il primo integrale è nullo. All'infinito $\boldsymbol{v}$ si riduce ad un vettore costante $\boldsymbol{c}$, e quindi

$$\int_{\sigma\infty} p\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}\,ds = \boldsymbol{c} \times \int_{\sigma\infty} p\,\boldsymbol{n}\,ds;$$

come nel procedimento che porta al teorema di Kutta–Joukowski, quest'ultimo integrale è normale a $\boldsymbol{c}$. Si avrà dunque:

$$(5) \qquad \frac{d\mathrm{T}}{dt} = \sum \int_\omega p\,d\psi.$$

Osserviamo che, entro ω, p è infinito, e in più ω non è (in generale) linea di flusso, così che (almeno in generale), in presenza di singolarità al contorno, non può affermarsi essere nullo il secondo membro, e perciò l'energia cinetica della corrente costante [1].

2. - Lamina rettilinea.

Valutiamo la potenza $\left|\frac{d\mathrm{T}}{dt}\right|$ nel caso di una lamina rettilinea. All'uopo valutiamo l'integrale di p rispetto a ψ, lungo due circonferenze ω′ e ω di raggio infinitesimo e centro negli estremi P′ e P della lamina.

Scegliendo gli assi di riferimento con origine nella prora o, e asse delle x diretto come $\boldsymbol{c}$, se $2l$ è la lunghezza della lamina, e si pone

$$(6) \qquad z = le^{i\beta}\left\{\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{e^{i\beta}} + \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)\right\},$$

si ottiene la rappresentazione conforme tra il piano $z = x + iy$, tagliato lungo PP′, ed il piano $\zeta = \xi + i\eta$, forato circolarmente, con centro $\zeta = 0$, e raggio unitario [2].

Sia ε infinitesimo. Poniamo:

$$(7) \qquad \zeta = e^{i\beta} + \varepsilon e^{i\lambda}.$$

(1) Se si considera il campo limitato da $\sigma\infty$ e da una linea di *flusso* γ′ (prossima a γ quanto si vuole), ivi $\dot{\mathrm{T}} = 0$, così che, se la (5) fornisce un valore di $\dot{\mathrm{T}} \neq 0$, la potenza atta a mantenere la corrente è tutta richiesta dall'accumularsi dell'energia sul profilo.

(2) Loc. cit., formula (1).

Digitized by Google

A meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, si ricava dalla (6):

$$\zeta = 2l\cos^2\frac{\beta}{2}\,e^{i\beta} + \frac{l\varepsilon^2}{2}\,e^{i(2\lambda-\beta)}.$$

Facendo variare λ tra $\beta - \frac{\pi}{2}$ e $\beta + \frac{\pi}{2}$ si ottengono tutti i punti della circonferenza ω' di centro P′ e raggio $\frac{l\varepsilon^2}{2}$. Per $\lambda = \beta - \frac{\pi}{2}$ si ha il punto A sulla lamina, per $\lambda = \beta + \frac{\pi}{2}$ il punto B, pure sulla lamina affacciato ad A.

Se $w = v_x + iv_y$, ricordando la (7), e la (6) della Nota citata di Cisotti, si ha, a meno di grandezze infinitesime:

$$w = m\frac{e^{-i\lambda}}{\varepsilon i} + ce^{-2i\beta}, \tag{8}$$

nella quale

$$m = -c\,\mathrm{sen}\,\beta + \frac{C}{2\pi l}. \tag{8'}$$

Risulta allora, a meno di termini finiti,

$$v^2 = \frac{m^2}{\varepsilon^2} - \frac{2cm}{\varepsilon}\,\mathrm{sen}\,(\lambda - 2\beta). \tag{9}$$

Se $f = \varphi + i\psi$, dalla (2) e la (3) della Nota citata di Cisotti, si ha:

$$df = \left\{\frac{lc}{2}\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) + \frac{C}{2\pi i\zeta}\right\}d\zeta.$$

A meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, su ω', si avrà:

$$df = \varepsilon lm e^{i(\lambda-\beta)}\,d\lambda$$

e quindi

$$d\psi = \varepsilon lm\,\mathrm{sen}\,(\lambda - \beta)\,d\lambda. \tag{10}$$

Ricordando la (9), avremo, a meno di termini infinitesimi:

$$\int_{\omega'} v^2\,d\psi = \varepsilon lm\int_{\beta-\frac{\pi}{2}}^{\beta+\frac{\pi}{2}} v^2\,\mathrm{sen}\,(\lambda-\beta)\,d\lambda = cm^2 l\pi\cos\beta.$$

In virtù della (2) allora

$$\int_{\omega'} p\,d\psi = -\frac{\rho}{2}\,cm^2 l\pi\cos\beta$$

e ricordando la (8′)

$$\int_{\omega'} p\,d\psi = -\frac{\rho}{2}\,lc\pi\left(c^2\,\mathrm{sen}^2\,\beta + \frac{C^2}{4\pi^2 l^2} - \frac{cC}{\pi l}\,\mathrm{sen}\,\beta\right)\cos\beta. \tag{11}$$

Digitized by Google

Per ottenere l'analogo integrale esteso ad ω, basterà mutare β in $\beta + \pi$: avremo:

$$(11') \qquad \int_{\omega} p\,d\psi = \frac{\rho}{2} lc\pi \left(c^2 \operatorname{sen}^2 \beta + \frac{C^2}{4\pi^2 l^2} + \frac{cC}{\pi l} \operatorname{sen} \beta \right) \cos \beta.$$

In definitiva allora

$$\int_{\omega} p\,d\psi + \int_{\omega'} p\,d\psi = \rho c^2\, C \cos \beta \operatorname{sen} \beta,$$

e, in virtù della (5):

$$(12) \qquad \frac{dT}{dt} = \rho c^2\, C \cos \beta \operatorname{sen} \beta:$$

così come ho annunciato all'inizio. Osserviamo soltanto che la potenza, necessaria a mantenere la corrente, è precisamente uguale a quella necessaria a far avanzare la lamina con velocità $-c$ in seno al liquido, supposto in quiete all'infinito [1].

Questa conclusione rende più plausibile l'ipotesi del Prandtl del distacco di vortici dalla lamina; distacco dovuto all'accumulo di energia, che la formula (12) fa prevedere; accumulo che, in virtù dell'ultima nota del n. 1, avviene appunto sulla lamina.

Astronomia. — *Sul confronto dei cataloghi colorimetrici di Hagen, Sestini, Osthoff e Kruger.* Nota del dott. G. Armellini-Conti, presentata [2] dal Socio A. Di Legge.

Il P. Hagen, nel suo dotto e paziente lavoro sui colori stellari [3], opera che è nel suo genere una delle più accurate ed estese, offre un confronto tra le proprie osservazioni e quelle di altri astronomi. In tal modo l'A., oltre a mettere in evidenza la precisione delle osservazioni sue, mostra quanto sia opportuna l'adozione di una scala colorimetrica unica e di pratici simboli letterali da lui proposti.

La scala colorimetrica proposta ed adottata dal P. Hagen è sul tipo di quella di Argelander, suddivisa in dieci gradi da Schmidt e già accettata da Osthoff e da altri. Il P. Hagen trasforma ancora leggermente questa scala riducendola a nove gradi essenziali, che egli aggruppa secondo i toni come nella tabella seguente, in cui i simboli letterali stanno ad indicare le iniziali dei nomi dei colori nella lingua inglese [4].

(1) La soluzione è fisicamente accettabile allorchè C cos β è positivo, così che l'azione dinamica esercitantesi sulla lamina ha carattere di resistenza, come appunto è nella natura delle cose.

(2) Nella seduta del 3 aprile 1927.

(3) Cfr. Hagen, *I colori stellari*, « Spec. Astr. Vatic. », III.

(4) L'A. propone l'adozione della lingua inglese, perchè offre minori ambiguità, avendo in essa i nomi dei vari colori iniziali differenti. In italiano, per es., si confonderebbe l'iniziale dell'azzurro con quella dell'arancione, l'iniziale del verde con quella del violetto, ecc.

Digitized by Google

Blue			White			Yellow			Orange			Red		
...	B	WB	BW	W	YW	WY	Y	OY	YO	O	RO	OR	R	VR
	— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Le stime dei vari osservatori presi in considerazione nel catalogo sono confrontabili tra loro, sia perchè riferibili tutte alla suddetta scala, sia perchè eseguite tutte con metodi diretti, alcuni dei quali personali ed ingegnosissimi (1).

Ora se noi facciamo con particolare attenzione il confronto tra i diversi osservatori, notiamo che le differenze tra di essi esistenti, anzichè essere costanti o subire delle oscillazioni irregolari, sono soggette ad una certa legge di periodicità.

Tale legge può essere esaminata, prendendo come base i valori di Hagen e facendo la media dei valori assegnati in corrispondenza di ciascuno di essi da un altro osservatore. Per es., alle stelle alle quali il P. Hagen attribuisce il tono 2, vengono attribuiti dagli altri osservatori toni differenti, benchè di poco. La media dei toni di Osthoff ci dà 2.4; quella di Kruger 2.3; quella di Santini 1.2. Ripetendo tali medie per tutti i toni, potremo compilare una tabella come la seguente, in cui nella prima colonna sono i valori di Hagen, nella seconda quelli di Osthoff, nella quarta quelli di Kruger, nella sesta quelli di Sestini.

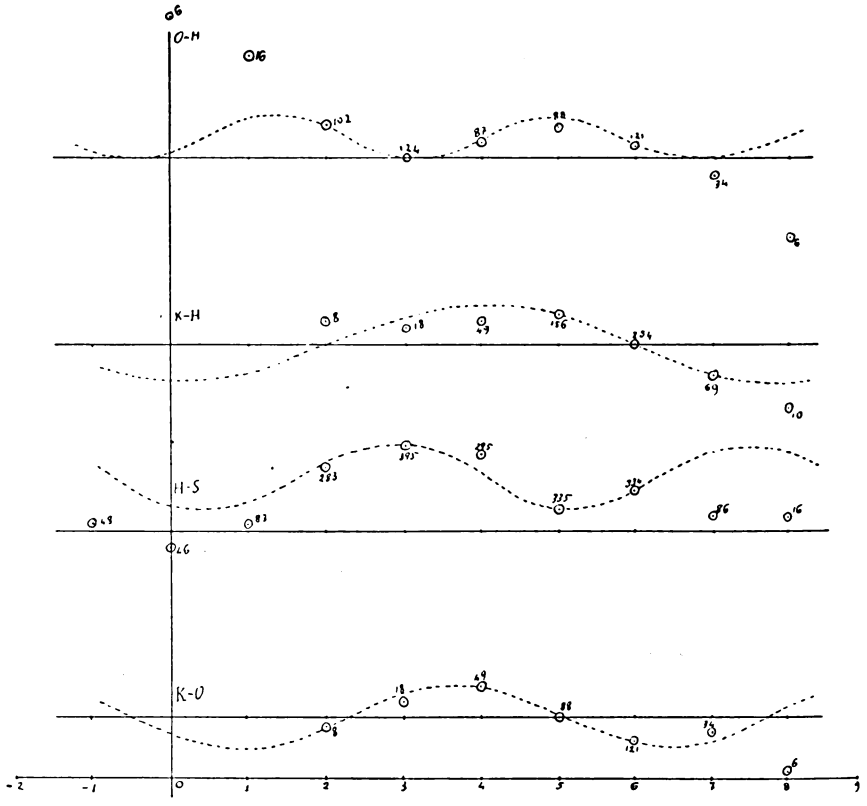
H	O	*n*	K	*n*	S	*n*	O–H	K–H	H–S	K–O
— 2	—	—	—	—	— 1.5	5	—	—	— 0.5	—
— 1	— 3 0	1	—	—	— 1.1	48	— 2.0	—	0.1	—
0	1.8	6	—	—	0.2	46	1.8	—	— 0.2	—
1	2.3	16	—	—	0.9	83	1.3	—	0.1	—
2	2.4	102	2.3	8	1.2	283	0.4	0.3	0.8	— 0.1
3	3.0	124	3.2	18	1.9	395	0.0	0.2	1.1	0.2
4	4.2	87	4.6	49	3.0	295	0.2	0.6	1.0	0.4
5	5.4	88	5.4	166	4.4	335	0.4	0.4	0.6	0.0
6	6.3	121	6.0	254	5.5	334	0.3	0.0	0.5	— 0.3
7	6.8	34	6.6	69	6 8	86	— 0.2	— 0.4	0.2	— 0.2
8	7.9	6	7.2	10	7.8	16	— 0.1	— 0.8	0.2	— 0.7

(1) Il Sestini, per abituare l'occhio alla stima dei colori, si esercitava ad osservare palline argentee o vitree, immerse nelle varie regioni dello spettro solare e proiettate su di

Digitized by Google

Nelle colonne intermedie si riporta il numero di osservazioni su cui si basano i singoli valori. I valori del Sestini, dati dal P. Hagen in simboli letterali inglesi, sono stati facilmente tradotti in numeri, in base alla surriferita scala a nove gradi.

Nell'eseguire le medie, ho scartato le discordanze troppo forti, che possono dipendere da cause occasionali, come perturbazioni atmosferiche, condizioni speciali dell'osservatore, eccessiva diversità di altezza sull'orizzonte, od anche eventuale cambiamento di colore della stella studiata o non esatta identificazione di essa; ed ho tenuto conto della sola prima cifra decimale, non andando oltre la precisione delle varie stime.



Per meglio illustrare questi risultati, servendomi dei valori della tabella, ho tracciato quattro curve che rappresentano le differenze tra le

un fondo oscuro, in modo da dare, per quanto fosse possibile, l'impressione di stelline colorate. Il P. Hagen si è servito per la indicazione dei toni, della scala di Osthoff, e per determinarne senza ambiguità i gradi principali, ha ritrovato i colori corrispondenti sulle ali di farfalle tropicali, delle quali dà, in apposita tabella, indicazioni precise.

Digitized by Google

stime dei diversi osservatori, prendendo sempre per ascisse i gradi di Hagen e per ordinate le differenze Osthoff–Hagen, Kruger–Hagen, Hagen–Sestini e Kruger–Osthoff. Naturalmente queste curve sono disegnate in modo da dare la preferenza ai punti risultanti da un maggior numero di osservazioni, onde, per dare più chiaramente l'idea di questo criterio seguìto, accanto a ciascun punto dei singoli grafici, ho segnato il numero di osservazioni dalle quali esso punto risulta. Appare così chiaramente come le varie curve siano ben definite, e come quei punti che eventualmente se ne scostano siano meno attendibili perchè risultanti da un minor numero di osservazioni.

Le quattro curve risultano molto prossime a sinusoidi, rappresentabili analiticamente con un'espressione del tipo

$$y = \varkappa \operatorname{sen} (\lambda x + m) + b$$

nella quale le costanti $\varkappa$, λ, m, b assumono diversi valori e possono anche annullarsi, quando si passi da un grafico all'altro. Così per la differenza Osthoff–Hagen si ha approssimativamente

$$\varkappa = 0.3 \qquad m = 0 \qquad \lambda = \pi \qquad b = 0.3 ,$$

per la differenza Kruger–Hagen

$$\varkappa = 0.5 \qquad m = -\pi \qquad \lambda = \pi \qquad b = 0 ,$$

per la differenza Hagen–Sestini

$$\varkappa = -0.6 \qquad m = \pi \qquad \lambda = \frac{\pi}{3} \qquad b = 0.9 ,$$

per la differenza Kruger–Osthoff

$$\varkappa = 0.3 \qquad m = 2\pi \qquad \lambda = \frac{2}{3}\pi \qquad b = 0 ,$$

In base a questi valori dei parametri, possiamo ricalcolare i singoli punti delle varie curve e compilare la seguente tabella, in cui nella prima colonna troviamo i gradi di Hagen, e nelle colonne seguenti, ordinatamente, le differenze tra osservazioni e calcolo per i singoli punti delle curve

$$O - H \quad , \quad K - H \quad , \quad H - S \quad , \quad K - O .$$

Nell'ultima riga sono le medie degli scostamenti, il cui valore, come si vede, è assai piccolo, e si annulla quasi sempre in quei punti che hanno maggior peso per la determinazione della curva stessa.

Digitized by Google

H	Osservazioni-calcolo			
	O-H	K-H	H-S	K-O
— 2	—	—	— 1.1	—
— 1	—	—	— 0.5	—
0	—	—	— 0.5	—
1	0.7	—	— 0.3	—
2	0.1	— 0.2	+ 0.2	+ 0.2
3	0.0	+ 0.1	+ 0.2	+ 0.2
4	— 0.1	1.1	+ 0.2	+ 0.1
5	— 0.2	0.4	+ 1.2	+ 0.3
6	0.0	— 0.5	— 0.2	— 0.3
7	— 0.2	— 0.4	— 1.2	+ 0.1
8	— 0.4	— 0.3	+ 1.0	— 0.4
Medie	0.01	0.04	0.10	0.03

Questo studio sul confronto tra le misure di quattro osservatori, non può pretendere di stabilire una legge generale. Ma certo, per quanto concerne gli autori presi in considerazione, vediamo che le differenze tra i vari cataloghi colorimetrici possono svolgersi in funzione periodica precisamente come le differenze di ascensione retta e declinazione tra due cataloghi posizionali.

Ed è importante notare questa analogia tra due specie di cataloghi, pur così differenti tra loro.

Geodesia. — *Collegamento geodetico del vertice di Andrate alla rete di 1° ordine dello Stato.* Nota di U. Barbieri, presentata dal Socio G. Loria.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Aerologia. — *La variazione della velocità del vento dal suolo fino a 4000 m. secondo i sondaggi eseguiti a Vigna di Valle (Roma).* Nota di F. EREDIA, presentata[1] dal Corrisp. L. PALAZZO.

Nella Stazione Aerologica principale di Vigna di Valle (Latit. N. 42° 4′ 41″, 93; longit. E. G. 12°, 12′ 43″, 40; altitudine m. 270) i sondaggi dell'atmosfera con palloncini piloti iniziati sin dal 1° giugno del 1910 proseguono dalle 7^h alle 8^h. Nei mesi estivi l'esplorazione si estende talora oltre 5000 m. e difatti in non pochi casi si raggiunsero altezze anche prossime agli 8000 m., mentre nei mesi invernali, sia per la maggior frequenza di nubi basse, sia per la maggiore intensità delle correnti aeree in vicinanza del suolo (in tali casi, si perde di vista il palloncino prima che esso si porti a grandi altezze) si raggiungono quote minori, e sono piuttosto rari i casi in cui venne superata la quota di 6000 m.

I palloncini impiegati sono di para, hanno una forza ascensionale di gr. 90 e sono seguiti a mezzo di un solo teodolite tipo Salmoiraghi; cosicchè i dati dedotti per la velocità possono considerarsi esatti fino alla quota massima di m. 5000.

I sondaggi così compiuti a Vigna di Valle furono in un primo tempo tempo esaminati dal prof. C. Fabris[2] pel periodo che si estende dal giugno 1910 al maggio 1911, durante il quale si eseguirono 194 lanci.

Il Fabris, limitando l'indagine fino alla quota di 5000 m., dedusse che la media annua della velocità del vento nel mattino cresce molto rapidamente a partire da m. 270 (suolo) fino a 800 m. passando da 3,5 a 5,3 m. al secondo, presenta un massimo secondario intorno a 800 m. ed un minimo intorno ai 1000 m. Da 1000 a 2000 m. la velocità cresce assai lentamente passando da 5,1 a 5,8 m. al secondo per poi mostrare un aumento regolare ed assai notevole oltre i 2000 fino ai 5000 m.

Egli osservò inoltre che il massimo secondario di velocità nell'estate si presenta più in basso che nell'inverno e inoltre nell'estate comincia ad altezze notevolmente minori che nell'inverno, l'aumento regolare della velocità del vento.

Il Fabris, all'intento di rendere più paragonabili i dati relativi alle diverse quote, i quali divengono meno frequenti coll'aumentare dell'altitudine, calcolò separatamente caso per caso, le differenze fra le velocità osservate ad una data altezza e quelle corrispondenti alla altezza successiva, fece quindi

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

(2) FABRIS C., *Risultati di lanci di palloni piloti eseguiti alla Stazione Aerologica di Vigna di Valle (giugno 1910-maggio 1911)*. R. Comitato Talassografico Italiano, Memoria VIII; Venezia 1912.

Digitized by Google

le medie di tali differenze, dando segno positivo (o negativo) a quei numeri che corrispondono ad aumenti (o diminuzioni) della velocità del vento col crescere dell'altezza.

Dedusse così che tanto nell' inverno quanto nell'estate, la velocità del vento va di regola crescendo con l'altezza, escluso l' intervallo compreso fra gli 800 e i 1000 m. in inverno, fra i 600 e i 1000 in estate, nei quali intervalli si presenta una diminuzione; così pure si ha un piccolo abbassamento della velocità del vento, nell' inverno, fra 1600 e 1800 m.

Il Fabris infine, per esaminare la variazione annua, divise lo strato dell'atmosfera preso in esame in altri strati dello spessore di 1000 m. ciascuno e calcolò per i successivi mesi le medie delle velocità osservate alle altezze comprese in ogni strato. Dal confronto delle successive rappresentazioni grafiche risulta che al suolo la variazione annua della velocità è rappresentata da una curva nella quale si possono considerare due tronchi ben distinti, uno leggermente ondulato, corrispondente all' intervallo di tempo compreso fra giugno e dicembre, l'altro che si eleva notevolmente sul primo a costituire un massimo, per poi abbassarsi in un minimo. Le curve relative agli strati d'aria compresi fra 2700 e 2000 m. mostrano un progressivo aumento nelle ampiezze delle ondulazioni del primo tronco ed a partire da 2000 m. fino a 5000 m. le curve manifestano una perfetta analogia fra loro, presentando ciascuna tre massimi (uno in luglio, uno in novembre e l'altro in gennaio o febbraio) e tre minimi (uno in giugno, uno in settembre od ottobre e il terzo in dicembre).

Più tardi il prof. R. Giacomelli [1] esaminò 800 sondaggi, mattutini, compiuti nel trienno 1911-1913 limitandoli alla quota 5000 m. eseguendo i calcoli mediante il sistema delle medie per differenza. E dedusse il forte incremento della velocità del vento fra il suolo e 600 m., cui tien dietro, all' infuori che nell' inverno, una inversione nella variazione di velocità fra 600 e 1000 m. Dopo i 1000 m. l' incremento riprende senza più cessare e si accentua, in tutte le stazioni, con particolare intensità nel tratto fra 2000 e e 3000 m. I più elevati valori della velocità si hanno a tutte le altezze nell'inverno e i più bassi si hanno fino a 3700 m. nell'estate e da 3700 a 5000 m. nell'autunno.

Il Giacomelli calcolò indi il rapporto fra la velocità media del vento ad ogni altezza e la velocità del vento al suolo, deducendo che i più alti valori per la velocità relativa, a tutte le altezze, si hanno nell'estate e i più bassi nell' inverno. Per trovare una velocità doppia di quella al suolo, nell'inverno e nell'autunno devesi salire a m. 2100, nella primavera a m. 550 e nell'estate a m. 450. Una velocità tripla si trova d'inverno e di autunno a m. 4000, di primavera a m. 2900 e d'estate a m. 2000.

(1) GIACOMELLI R. *Il vento a varie altezze nell'atmosfera*, « Bollettino tecnico dell'Aero Club di Roma », N. 3-4; Roma 1915.

Digitized by Google

Con la presente Nota si dà conto dei sondaggi eseguiti a Vigna di Valle dal gennaio 1911 al dicembre 1925. Si è limitata l'indagine alla quota 4000 m. perchè a partire dal 1914 poche volte furono raggiunte quote superiori.

Col dicembre 1925 la esplorazione è stata spinta in varii casi oltre 20 minuti, cosicchè si avrà, fra non molto, sufficiente materiale per estendere la indagine fino alla quota 5000 m.

Nella tabella seguente vengono trascritte le velocità medie per le diverse quote e per i varii mesi, indicando corrispondentemente il numero dei lanci esaminati.

Quote	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Numero dei sondaggi
270	5.0	**5.2**	4.5	4.0	3.3	2.9	2.9	2.8	3.3	3.7	**5.1**	4.6	4757
400	**5.4**	**5.4**	5.1	4.9	4.0	3.6	3.5	3.7	4.3	4.7	**5.7**	5.1	4505
600	**6.5**	6.4	6.2	6.0	5.0	4.4	4.6	4.4	5.3	5.5	**7.0**	6.4	4384
800	**6.5**	6.3	6.3	5.9	5.1	4.4	4.4	4.4	5.1	5.1	**6.7**	6.2	4258
1000	6.1	5.9	**6.3**	5.8	5.0	4.4	4.3	4.4	4.8	5.2	**6.3**	6.1	4069
1200	5.5	5.5	5.3	**5.7**	5.0	4.5	4.5	4.5	5.0	4.8	**6.1**	**6.2**	3690
1400	5.3	5.6	**5.8**	**5.7**	5.1	4.6	4.8	4.6	4.8	4.6	**5.8**	5.6	3500
1600	5.6	5.7	**5.8**	5.7	5.2	4.7	4.9	4.8	4.8	4.6	**6.2**	5.8	3332
1800	5.7	6.0	**6.2**	5.7	5.5	5.2	5.2	5.5	5.1	4.8	**6.1**	6.0	3052
2000	5.9	6.1	**6.6**	6.0	5.7	5.4	5.9	5.3	4.9	4.9	**6.3**	**6.4**	2891
2500	6.3	6.6	**6.7**	6.3	5.9	5.9	6.3	5.9	5.7	5.9	**6.6**	**6.7**	2157
3000	7.2	7.4	**8.1**	6.8	6.8	6.9	7.5	6.9	6.8	6.3	6.7	**7.9**	2025
3500	7.3	7.7	7.8	7.4	7.0	7.9	**8.7**	8.0	7.1	6.6	6.6	**8.8**	1664
4000	8.2	8.2	8.6	7.9	7.6	8.1	**9.7**	8.7	7.2	7.2	6.3	**9.3**	1395

La velocità del vento al suolo presenta il minimo da giugno ad agosto e due massimi pressochè uguali, rispettivamente in febbraio e in novembre.

Alle quote successive, fino alla quota di 1200, continua il minimo ad interessare gli stessi mesi da giugno ad agosto; ma subito dopo si nota in ottobre una diminuzione di velocità, quasi a costituire un debole minimo secondario che a partire dalla quota 1600 si accentua maggiormente, cosicchè da questa quota fino a quella di 2000 il minimo annuale si sposta o in settembre o in ottobre e un ulteriore spostamento verificasi alle quote supe-

Digitized by Google

riori: difatti mentre alla quota 3500 il minimo è in ottobre o in novembre, alla quota 4000 è in novembre.

Anche nel massimo annuale della velocità del vento notasi uno spostamento coll'aumentare della quota, e difatti il massimo di novembre, che si accentua a cominciare dalla quota 400, man mano si sposta per interessare il mese di dicembre.

Nel contempo il massimo di febbraio si attenua con l'aumentare della quota e costituisce un massimo secondario con qualche sbandamento verso gennaio o verso aprile (quota 1200), ma a partire dalla quota 1400 raggiunge il mese di marzo, ed è preponderante a cominciare dalla quota 1800 e tale rimane fino a quella di 3000. Oltre tale quota si trasporta in luglio.

Va quindi rilevato che la velocità del vento presenta un andamento annuale nettamente contrario tra le quote 400-1000 da una parte e le quote 3000-4000 dall'altra, inquantochè al minimo annuale delle prime quote corrisponde il massimo nelle seconde e viceversa.

Seguendo i valori assoluti della velocità nei singoli mesi dal suolo alla quota 2500 appare evidente una certa analogia per alcuni mesi, nel senso che le cifre più elevate prediligono sempre alcuni determinati mesi. A quote superiori questa analogia persiste, quantunque non sia molto spiccata, attesa la minore variazione della velocità da un mese al successivo.

Siffatta analogia consiglia quindi di riunire tutti i mesi in due gruppi distinti che possiamo chiamare, adoperando una dicitura ormai invalsa in lavori del genere, semestre freddo e semestre caldo.

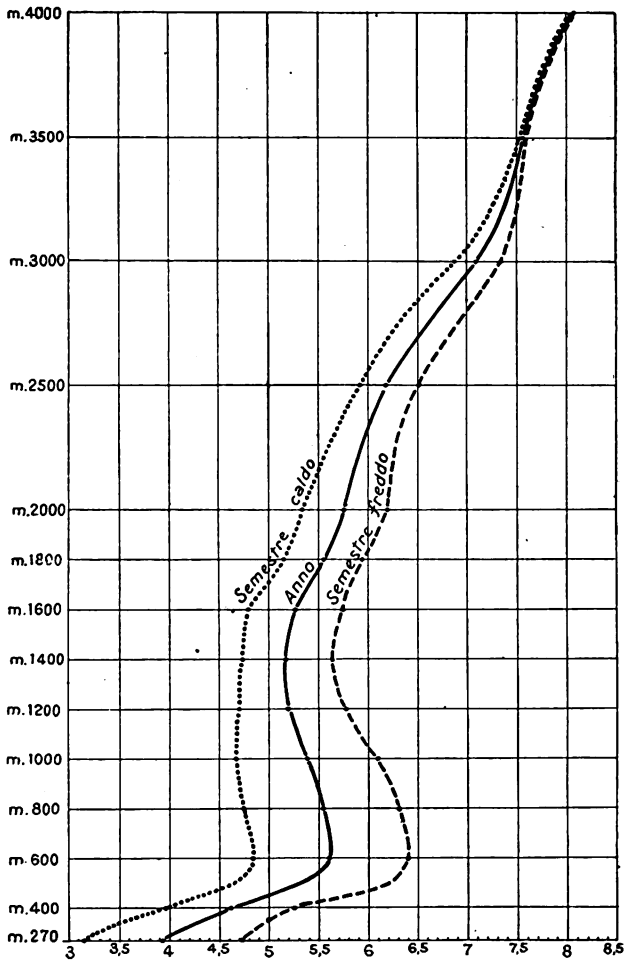
La tabelletta seguente contiene le velocità medie corrispondenti alle diverse quote e ottenute col raggruppamento dei valori relativi ai mesi specificati accanto a ciascun semestre.

Quote in metri	270	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2500	3000	3[illegible]
Semestre freddo . . . . . $\frac{(N+D+G+F+M+A)}{6}$	4.73	5.25	6.40	6.31	6.10	5.70	5.65	5.77	5.95	6.21	6.51	7.35	7[illegible]
Semestre caldo . . . . . $\frac{(M+G+L+A+S+O)}{6}$	3.15	3.97	4.85	4.75	4.67	4.71	4.75	4.80	5.17	5.35	5.93	6.87	7[illegible]
Anno	3.94	4.61	5.63	5.53	5.39	5.20	5.20	5.29	5.56	5.78	6.22	7.11	7[illegible]

La rappresentazione grafica della figura annessa mostra chiaramente le variazioni della velocità con l'altitudine che si individuano in un rapido aumento dal suolo fino a 600 m., segue indi una diminuzione che si protrae fino alla quota 1800 da dove si inizia un graduale aumento, che oltre la quota 3000 m. è quasi identico sia per i due semestri che per l'anno.

Digitized by Google

La variazione della velocità media con l'altitudine da noi così indicata, in parte si ricollega a quanto è già noto [1] e cioè che in media la velocità del vento al suolo aumenta con l'altezza sino a raddoppiarsi ai 500 m., indi, cresce molto lentamente, mentre nelle regioni delle nubi inferiori fra 500 e 2000 m. l'aumento è molto piccolo.



A Vigna di Valle si presenta questa particolarità che tra 1000 e 1800 m. la velocità diminuisce lentamente e costituisce una netta separazione tra lo strato 600-800 di maggiore velocità, rispetto al suolo, e lo strato superiore a 2000 m. da dove si inizia un aumento graduale che diviene più spiccato a quote superiori fino a quella di 3500 m.

Si accordano quindi i nostri risultati con quelli già ottenuti da Humphreys e secondo i quali un rapido aumento della velocità si verifica dal

(1) HAUN J. und SUZING R., « Lehrbuch der Meteorologie », IV Auflage; Leipzig 1926.

Digitized by Google

suolo fino all'altezza di 600 o 700 m., segue una regione di irregolarità ove la variazione con l'altezza è minima, e che si estende fino a 1500 m., da dove si inizia l'aumento costante della velocità con l'aumentare dell'altitudine.

Risultati poco diversi ottenne Chapman [1] che limita l'irregolarità nella variazione della velocità fino all'altitudine da 300 a 400 m.; mentre per altitudini superiori la variazione può essere rappresentata da una curva di particolare tipo.

Fisica. — *Sopra un nuovo tipo di riflessione dei Raggi X.* Nota del prof. N. CARRARA, presentata [2] dal Socio L. PUCCIANTI.

1. In una precedente ricerca [3] fu previsto che superficie piane di corpi cristallizzati o amorfi dovevano riflettere i raggi X, secondo le leggi ordinarie della riflessione, per angoli complementari di incidenza [4], molto piccoli. Questa riflessione, sempre secondo le previsioni teoriche, è diversa dalla riflessione totale di Compton [5], che pure si presenta sotto angoli di incidenza piccolissimi.

In quella, e nella presente ricerca, ho fatto uso della ormai generalmente preferita rappresentazione delle oscillazioni, mediante esponenziali ad esponente immaginario; l'oggetto fisico è misurato dalla parte reale. Le intensità delle oscillazioni risultano con moltiplicazioni per le espressioni complesse coniugate.

Richiamiamo sommariamente quanto allora fu detto.

Consideriamo un reticolo cristallino, e assumiamo una terna di assi coordinati ortogonali, con l'origine nel punto di incidenza, e in guisa che il piano $y\,z$ sia la superficie riflettente, e il solido del cristallo giaccia dalla parte delle x positive. Il reticolo cristallino può essere pensato come l'insieme di tanti parallelepipedi elementari uguali tra loro che con tre convenienti spostamenti, paralleli ai loro spigoli, possono esser portati a coincidere con uno prefissato di essi, qualsivoglia.

Indichiamo con $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ (vettori) gli spostamenti elementari con i quali si consegue di trasportare un parallelepipedo negli adiacenti; $\pm b$, $\pm c$, siano paralleli al piano $y\,z$.

(1) CHAPMAN, E. H., *The variation of wind velocity with Height*, « Meteorological Office-Professional », Notes, n. 6; London 1919.

(2) Nella seduta del 24 aprile 1927.

(3) N. CARRARA, « Nuovo Cimento », 1924.

(4) Chiamo angolo complementare di incidenza il complemento dell'angolo di incidenza comune dell'ottica.

(5) A. H. COMPTON, « Phyl. Mag. », XLV, 1923.

Digitized by Google

Con queste posizioni, l'ampiezza del fascio riflesso ad una distanza r, assai grande, dal luogo di incidenza è data da:

$$\frac{A}{r} S \sum_p e^{-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)d_p} e^{\frac{2\pi i \nu}{c} P_p} \sum_q e^{\frac{2\pi i \nu}{c} Q_q} \sum_r e^{\frac{2\pi i \nu}{c} R_r}.$$

Dove:

A è l'ampiezza riflessa da ogni elemento alla distanza unitaria,

S è un fattore dipendente dagli atomi contenuti in un parallelepipedo elementare,

k, il coefficiente di assorbimento, per la frequenza ν,

$-P = d(l-\alpha) + a_y(m-\beta) + a_z(n-\gamma)$, $\qquad d = a_x$

$-Q = \quad b_y(m-\beta) + b_z(n-\gamma)$,

$-R = \quad c_y(m-\beta) + c_z(n-\gamma)$,

l, m, n sono i coseni di direzione del fascio incidente,

α, β, γ sono i coseni della direzione nella quale si considera la riflessione.

Le somme sono estese a tutti i parallelepipedi elementari.

Il prodotto di $\sum_p$ per il numero complesso coniugato esprime un fattore di intensità del fascio regolamentare riflesso.

Esso risulta:

$$\frac{1}{4 \operatorname{sin h}^2 \frac{k d}{\sin \theta} + 4 \sin^2 \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}}$$

dove θ è l'angolo complementare di incidenza. Tale fattore non solo presenta i massimi quando θ soddisfa alla nota relazione $\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta = n\Pi$, (a meno di un piccolissimo scarto), ma anche quando:

$$\theta^* = \sqrt{\frac{k\lambda}{4\pi}}.$$

Al medesimo risultato si giunge supponendo la superficie riflettente appartenente ad un corpo non cristallizzato.

2. Ci proponiamo ora di trovare l'espressione del coefficiente di riflessione per angoli di incidenza piccolissimi; il calcolo seguente è svolto nel caso che il corpo riflettente sia un cristallo, costituito da atomi di una sola specie. Essendo i procedimenti molto complicati, qui ne è data soltanto la traccia e il risultato.

Sia O la sorgente, r_1 la sua distanza dal luogo di incidenza I, P il posto di osservazione, alla distanza $r_2 = r - r_1$ da I, e tale che il raggio IP soddisfi col raggio IO le leggi ordinarie della riflessione.

Digitized by Google

L'ampiezza del fascio riflesso nel punto P per effetto degli atomi appartenenti ad uno strato parallelo al piano $y\,z$, si può calcolare al seguente modo.

Prendiamo sul primo strato l'origine delle coordinate nel punto di incidenza I, in modo che la sorgente e il punto di osservazione giacciano nel piano x, y.

Siano allora y, z le coordinate del centro di un atomo qualunque, assai prossimo ad I, sullo strato considerato, ed r_1', r_2' le sue distanze da O e da P.

Potremo allora scrivere:

$$r_1' + r_2' = r + \frac{1}{2}\frac{r}{r_1 r_2}(y^2 \sin^2\theta + z^2)$$

L'ampiezza riflessa da tutti gli atomi dello strato sarà data da:

$$A^* \frac{F(\theta,\lambda)}{r_1 r_2} \sum e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\left(ct - r - \frac{1}{2}\frac{r}{r_1 r_2}(y^2 \sin^2\theta + z^2)\right)},$$

dove A^* è l'ampiezza alla distanza uno dalla sorgente. Del fattore $F(\theta,\lambda)$ sarà detto in appresso. Esso rappresenta il comportamento di ciascun atomo. La $\sum$ è estesa a tutti gli atomi dello strato. Essa può essere sostituita da un $\int_{-\infty}^{+\infty}\int$; eseguiti i calcoli si trova:

$$A^* \frac{F(\theta,\lambda)}{r} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct - r)} \frac{N d\lambda}{\sin\theta} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

N = numero degli atomi per unità di volume.

L'intensità nel punto P, riflessa da tutto il cristallo diventa conseguentemente:

$$A^{*2} \frac{F^2(\theta,\lambda)}{r^2} \frac{N^2 d^2 \lambda^2}{\sin^2\theta} \cdot \frac{1}{4 \sin h^2 \frac{kd}{2\sin\theta} + 4 \sin^2 \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}}.$$

Per angoli complementari di incidenza molto piccoli si può semplicemente scriverla:

$$A^{*2} \frac{F^2(\theta,\lambda)}{r^2} \frac{N^2\lambda^2}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{16\pi^2}{k^2\lambda^2}\theta^4}.$$

Siccome l'intensità direttamente trasmessa alla distanza r è $\frac{A^{*2}}{r^2}$, il coefficiente di riflessione cercato (numero puro), ha l'espressione:

$$F^2(\theta,\lambda) \frac{N^2\lambda^2}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{16\pi^2}{k^2\lambda^2}\theta^4}.$$

Digitized by Google

La funzione $\frac{1}{1 + \frac{16\pi^2}{k^2\lambda^2}\theta^4}$, che varia da 1 a zero, mentre θ, varia da zero a ∞, ha un flesso per $\theta^* = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{k\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$, dove il coefficiente angolare della tangente è $\frac{25}{16}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{k\lambda}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ora secondo Debye (1):

$$F^2(\theta, \lambda) = \frac{\varepsilon^4}{m^2 c^4} \frac{1 + \cos^2 2\theta}{2} \sum_n \sum_m \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} s_{n\,m} \sin\theta\right)}{2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} s_{n\,m} \sin\theta},$$

dove ε carica, m, massa dell'elettrone, $s_{n,m}$, distanza fra l'elettrone n, e quello m simo.

Per angoli di incidenza molto piccoli come i nostri, per $F^2(\theta, \lambda)$ potremo scrivere $\frac{\varepsilon^4}{m^2 c^4} \nu^2$, ν = numero totale degli elettroni (numero atomico); sicchè finalmente il coefficiente di riflessione potrà essere scritto:

$$\frac{\varepsilon^4}{m^2 c^4} \nu^2 \frac{N^2\lambda^2}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{16\pi^2}{k^2\lambda^2}\theta^4}.$$

Una valutazione numerica grossolana, in qualche caso permette di affermare che l'ordine di grandezza non è molto inferiore a quello dell'unità, per angoli di qualche millesimo, sicchè questo tipo di riflessione dovrebbe avere intensità apprezzabile. La difficoltà di una verificazione sperimentale consisterà principalmente nello sceverarla dalla riflessione totale di Compton. Questa avviene solamente per le radiazioni il cui indice di rifrazione è < 1, il nuovo tipo è stato qui calcolato supponendo implicitamente l'indice $= 1$.

(1) Debye, « Ann. der Phys. », XLV, p. 809, 1915.

Digitized by Google

Fisica. — *Sulla doppia rifrazione paramagnetica.* Nota di A. CARRELLI presentata[1] dal Socio M. CANTONE.

Recentemente il Ladenburg[2] ha considerato l'effetto di un campo magnetico su di un mezzo paramagnetico per ciò che riguarda la propagazione della luce. Egli è giunto alla conclusione che oltre al potere rotatorio che nelle vicinanze di una riga di assorbimento ha l'andamento ben noto (effetto Macaluso-Corbino), doveva aversi un potere rotatorio di origine paramagnetica che si presenta con particolarità diverse. Ed infatti sperimentalmente è accertato tale comportamento per soluzioni paramagnetiche (sali di Fe, Co, Ni e di terre rare). L'effetto analogo in direzione trasversale rispetto alle linee di forze, cioè l'effetto di doppia rifrazione paramagnetica non è ancora studiato, e di questo appunto si tratta nella presente Nota.

Analogamente a quanto fa il Ladenburg considereremo il fenomeno del paramagnetismo come dovuto alla presenza di orbite elettroniche non compensate dell'atomo o dell'jone il quale risulta per questo fatto dotato di momento magnetico non nullo. Gli oscillatori virtuali che corrispondono alle variazioni degli stati stazionari degli elettroni ruotanti non sono più un numero uguale per i due sensi di rotazione degli elettroni rispetto alla direzione del campo magnetico dopo che la creazione di questo ha generato una orientazione degli assi magnetici.

Quantunque questa orientazione sia ostacolata dall'orientazione termica pure si ottiene nel complesso un numero maggiore di vibratori corrispondenti ad elettroni ruotanti in senso negativo intorno alla direzione positiva del campo magnetico e cioè può dirsi che per la presenza del paramagnetismo vi sarà una differenza fra i due numeri $\mathfrak{N}_+$ e $\mathfrak{N}_-$ che indicano i numeri dei vibratori virtuali dei due sensi. Calcolando quindi il valore della doppia rifrazione generata dal campo bisogna tener conto di questa nuova particolarità che darà origine ad una doppia rifrazione paramagnetica. Le formule che useremo nei calcoli saranno quelle già usate dal Voigt, e cioè le due espressioni dell'indice di rifrazione in direzione parallela e in direzione normale alle linee di forza sono date dalle relazioni

$$\frac{1}{n_{\parallel}^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \frac{1}{n_{\perp}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_+^2} + \frac{1}{n_-^2}\right)$$

dove

$$n^2 = 1 + \sum \frac{\rho}{\nu_0^2 - \nu^2}$$

(1) Nella seduta del 24 aprile 1927.

(2) «Zeit. für Phys.», Bd. 34, p. 898, 1925.

Digitized by Google

$$n_{\pm}^2 = 1 + \sum \frac{\rho}{\nu_0^2 - \nu^2 \pm \frac{r}{m}}$$

con

$$\frac{r}{m} = -\frac{e\nu H}{mc} \qquad \text{e} \qquad \rho = \frac{4\pi e^2 \mathfrak{N}}{m}.$$

La differenza fra ρ_- e ρ_+ è calcolata in base alla teoria cinetica del paramagnetismo ed è data da

$$\rho_- - \rho_+ = \rho \frac{4}{3} \frac{\mu H}{kT}$$

dove μ è il momento magnetico elementare della monade. Si ottiene allora per n_-^2

$$\frac{1}{n_-^2} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{1 + \frac{\rho_+}{\nu_0^2 - \nu^2 + \frac{r}{m}}} + \frac{1}{1 + \frac{\rho_-}{\nu_0^2 - \nu^2 - \frac{r}{m}}} \right\}$$

supponendo che ci sia un unico vibratore che produce l'anomalia nell'indice. Dalla relazione precedente si ricava

$$n_-^2 = 1 + \frac{\rho_- \rho_+ + \left(\frac{\rho_+ + \rho_-}{2}\right)(\nu_0^2 - \nu^2) + \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m}}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 - \frac{r^2}{m^2} + \left(\frac{\rho_+ + \rho_-}{2}\right)(\nu_0^2 - \nu^2) + \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m}}.$$

Ora

$$\rho_- \rho_+ = \rho^2\left[1 - \frac{4}{9}\left(\frac{\mu H}{kT}\right)^2\right] \qquad \frac{\rho_- + \rho_+}{2} = \rho,$$

quindi trascurando $\left(\frac{\mu H}{kT}\right)^2$ rispetto alla unità si ottiene

$$n_-^2 = 1 + \frac{\rho(\nu_0^2 - \nu^2 + \rho) + \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m}}{(\nu_0^2 - \nu^2)(\nu_0^2 - \nu^2 + \rho) - \frac{r^2}{m^2} + \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m}}.$$

Calcolando $n_-^2 - n_\parallel^2$ si ha quindi

$$n_-^2 - n_\parallel^2 = \frac{\rho(\nu_0^2 - \nu^2 + \rho)}{(\nu_0^2 - \nu^2)(\nu^2 - \nu^2 + \rho) - \frac{r^2}{m^2} + \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m}} +$$

$$+ \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right) \frac{\frac{r}{m}}{(\nu_0^2 - \nu^2)(\nu_0^2 - \nu^2 + \rho) - \frac{r^2}{m} + \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)} - \frac{\rho}{\nu_0^2 - \nu^2}$$

Digitized by Google

cioè

$$n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2 = \frac{\rho \frac{r^2}{m^2} + \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m}(\nu_0^2 - \nu^2) - \rho\left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m}}{(\nu_0^2 - \nu^2)\left[(\nu_0^2 - \nu^2)(\nu_0^2 - \nu^2 + \rho) - \frac{r^2}{m^2} + \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m}\right]}.$$

Limitandosi a considerare il fenomeno fuori della zona di assorbimento intenso e cioè nelle condizioni per le quali $\nu_0^2 - \nu^2$ è molto grande rispetto a ρ, r^2 e $\left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right) rm$ si ottiene per $n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2$, l'espressione

$$(1) \qquad n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2 = \frac{\rho r^2}{m^2(\nu_0^2 - \nu^2)^3} - \rho\left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)^3} + \left(\frac{\rho_- - \rho_+}{2}\right)\frac{r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)^2}.$$

Il primo di questi tre termini dà origine alla doppia rifrazione diamagnetica ben nota, gli altri due dipendono dalla differenza $\rho_- - \rho_+$ e quindi dalle proprietà paramagnetiche della sostanza considerata; e poichè

$$\frac{\rho_- - \rho_+}{2} = \frac{2}{3}\frac{\mu H}{kT}$$

la (1) diventa

$$n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2 = \frac{\rho r^2}{m^2(\nu_0^2 - \nu^2)^3} - \frac{\rho^2 r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)^3}\frac{2}{3}\frac{\mu H}{kT} + \frac{\rho r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)^2}\frac{2}{3}\frac{\mu H}{kT}.$$

Indichiamo con Δ la doppia rifrazione totale data da

$$\Delta = \frac{\nu l}{2cn}(n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2)$$

dove l è la lunghezza del percorso della luce di frequenza ν nella sostanza se Δ' è la doppia rifrazione diamagnetica, quella paramagnetica può considerarsi dovuta ai due termini

$$\Delta_1 = -\frac{\nu l}{2cn}\frac{\rho^2 r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)^3}\frac{2}{3}\frac{\mu H}{kT}$$

$$\Delta_2 = \frac{\nu l}{2cn}\frac{\rho r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)^2}\frac{2}{3}\frac{\mu H}{kT}$$

e poichè il potere rotatorio diamagnetico è dato da

$$\chi' = \frac{\nu l}{2cn}\frac{\rho r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)^2}$$

Digitized by Google

si può scrivere per Δ_2

$$\Delta_2 = \frac{2}{3}\frac{\mu H}{kT}\chi'.$$

Confrontiamo ora i nostri risultati con quelli ottenuti da Ladenburg sul potere rotatorio; la formula di questo A. quando si adoperino gli stessi simboli e lo stesso grado di approssimazione può scriversi

$$\chi = \frac{\nu l}{2cn}\frac{\rho}{\nu_0^2 - \nu^2}\left\{\frac{r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)} + \frac{4}{3}\frac{\mu H}{kT}\right\}$$

e la nostra è invece

$$\Delta = \frac{\nu l}{2cn}\frac{\rho r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)^2}\left\{\frac{r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)} - \frac{\rho}{\nu_0^2 - \nu^2}\frac{2}{3}\frac{\mu H}{kT} + \frac{2}{3}\frac{\mu H}{kT}\right\}.$$

Nell'ipotesi fatte ($\rho \ll v_0^2 - v^2$) il secondo termine è trascurabile rispetto al terzo, quindi si vede subito che analogamente a quanto avviene per il potere rotatorio nella doppia rifrazione avrà predominio il termine di dia o paramagnetico a seconda del valore del rapporto delle due quantità

$$\frac{r}{m(\nu_0^2 - \nu^2)} \quad \text{e} \quad \frac{2}{3}\frac{\mu H}{kT}.$$

Le sostanze che presentano un potere rotatorio paramagnetico dovranno presentare una doppia rifrazione paramagnetica e cioè sempre che nel potere rotatorio si notano anomalie dell'andamento teorico, tali anomalie si devono riscontrare anche nella doppia rifrazione e devono essere molto più accentuate a basse temperature per la presenza di T nel denominatore dell'espressione $\frac{\mu H}{kT}$. Ora la dissimmetria nel potere rotatorio si traduce in una diversità d'andamento di χ a sinistra e a destra della zona di assorbimento, analogamente per la doppia rifrazione tenuto conto del fatto che Δ' ha segno diverso dai due lati poichè dipende da $(\nu_0^2 - \nu^2)^3$ mentre Δ_2 ha lo stesso segno poichè dipende da $(\nu_0^2 - \nu^2)^2$ si devono osservare diversità dai due lati sempre che la sostanza è paramagnetica. Se la sostanza presenta soltanto il potere rotatorio paramagnetico (diverso segno di χ dai due lati) deve avere anche soltanto la doppia rifrazione paramagnetica che ha lo stesso segno dai due lati [1]; e cioè in tali sostanze χ si comporta come l'indice di rifrazione e Δ come χ.

Considerando il materiale sperimentale già raccolto può dirsi che non mancano le prove dell'esistenza della doppia rifrazione che qui si studia.

(1) Una di queste sostanze è la soluzione di cloruro di praseodimio studiata per ciò che riguarda χ da Wood.

Digitized by Google

Si consideri infatti un cristallo osservandolo in direzione parallela all'asse ottico; in tali condizioni esso si comporta come un corpo isotropo, e d'altra parte in base a ricerche di numerosi sperimentatori su un gran numero di cristalli risulta che per i paramagnetici si applica ancora la legge di Curie, e cioè per essi è valida la teoria cinetica del paramagnetismo. Si possono applicare ad un cristallo percorso da luce parallelamente all'asse ottico le considerazioni svolte precedentemente. Ora fra le ricerche compiute da Becquerel in magneto-ottica ve ne ha di quelle nelle condizioni precedenti condotte su cristalli di Xenotina alla temperatura dell'aria liquida. Poichè tale cristallo è paramagnetico è da ricercare in tali risultati l'effetto previsto in questa Nota. Ora osservando i risultati relativi ad alcune righe nel verde [1] si nota per alcune di esse un potere rotatorio dissimmetrico e analogamente una dissimmetria nella curva della doppia rifrazione. Tale dissimmetria analogamente a quanto vuole la teoria sopra esposta scompare per gli stessi cristalli cimentati a temperatura ordinaria.

Elettrochimica. — *Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo.* Nota di L. MAZZA [2], presentata [3] dal Corrisp. L. ROLLA.

9. In due Note precedenti [4] ho riferito sull'applicazione del metodo X-spettrografico di Debye-Hull alla questione tanto discussa della natura delle sostanze che si formano durante la carica e la scarica dell'accumulatore a piombo, ed ho dato notizie dei risultati sperimentali raggiunti nell'esame delle piastre positive.

L'indagine sulle piastre negative di cui particolarmente mi occuperò in questa Nota si presenta, già a prima vista, non meno interessante ed altrettanto fruttuosa perchè oltre alla possibilità di stabilire quali siano i prodotti normali che si originano sulla piastra negativa durante il funzionamento dell'accumulatore, si vede quasi la certezza [5] di poter decidere se il piombo spugnoso che costituisce la piastra negativa carica debba essere considerato come una modificazione allotropica nel senso ordinario della parola [6].

(1) Cfr. VOIGT, *Magneto-und Elektroptik*, pp. 228 e 233.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica-fisica nella R. Università di Firenze.

(3) Nella seduta del 24 aprile 1927.

(4) V. questi «Rendiconti», IV, 1926, 2° sem., pp. 215–218; IV, 1927, 1° sem., pp. 117–119.

(5) All'infuori del caso in cui la sostanza si trovi in stato amorfo.

(6) Cioè quando si prescinda da una possibile allotropia cui non corrisponda una modificazione strutturistica rivelabile con i raggi X.

Digitized by Google

10. Per le esperienze ho adoperato, analogamente a quanto è stato detto nei precedenti lavori, delle piastre negative impastate (Faure) di tipo usuale con supporto a griglia [1].

Oltre a queste piastre provenienti dal commercio ho preso in esame una piastra negativa ottenuta impastando dell'ossido di piombo (litargirio), ridotto in polvere, con dell'acido solforico diluito e applicandolo per compressione su di un piccolo sopporto a rete di piombo puro. La piastra così ottenuta è stata sottoposta al solito processo di formazione adoperando come elettrolito dell'acido solforico diluito (peso spec. 1.075) e con una densità di corrente di 0.2 Amp. per dm^2 di superficie apparente. Dopo una durata di elettrolisi sufficiente per ottenere una riduzione praticamente completa, l'acido diluito è stato sostituito con dell'acido solforico del peso specifico di 1.210.

Anche in questo caso ho esaminato coi raggi X dei campioni prelevati su piastre negative: *a*) sottoposte a sovraccarica; *b*) caricate normalmente; *c*) nel periodo medio di scarica; *d*) completamente scariche. Per stabilire con sufficiente precisione il raggiungimento delle precedenti condizioni mi sono valso delle indicazioni fornite dalla misura della densità dell'acido, dalla quantità di elettricità (amp-ora) erogata nella scarica, e soprattutto dalla f. e. m. determinata per rapporto a un elettrodo di confronto costituito da una piccola piastra negativa carica immersa nell'elettrolito dell'accumulatore [2]. La carica e la scarica della piastra è stata sempre eseguita con una densità di corrente di 0.5 amp. per dm^2 di superficie apparente.

I campioni prelevati dalle piastre dopo un lavaggio con acqua distillata furono asciugati rapidamente comprimendoli fra dei fogli di carta assorbente. Generalmente si ottengono così, in breve tempo, dei prodotti finemente polverizzati ed asciutti; soltanto nel caso delle piastre cariche si incontrano talvolta delle difficoltà derivanti dal fatto che il piombo spugnoso ha tendenza ad ammassarsi in particelle piuttosto grosse e poco adatte per l'esame con il metodo delle particelle irregolarmente orientate.

I campioni così preparati introdotti e compressi leggermente in tubicini di carta velina paraffinata di 1 mm. di diametro, furono esaminati con i raggi X adoperando delle camere di precisione del tipo di Debye-Scherrer aventi dei portafilm cilindrici di 57.3 mm. di diametro.

Il tubo per raggi X già descritto in uno dei precedenti lavori fu eccitato con una tensione di 65 KV. max., se munito di anticatodo di rame, oppure di 60 KV. max. se di ferro [3].

(1) Piastre fabbricate dalla Casa Hensemberger di Monza (tipo J 3) e dalla Società Generale Italiana Accumulatori Elettrici di Melzo (tipo La 1).

(2) Una piastra negativa può, in tali condizioni, ritenersi scarica quando la f. e. m. così misurata ha raggiunto il valore di 0.065 Volta.

(3) Tanto in queste esperienze che in quelle precedenti il tubo radiogeno è stato alimentato con correnti pulsanti di forma sensibilmente sinoidale ed in conseguenza le tensioni di eccitazione risultano rispettivamente di circa 46 e 42 KV. eff.

Digitized by Google

Con esposizioni di circa 3000 m. A. minuti è possibile ottenere degli ottimi fotogrammi.

I campioni *a*) e *b*) (piastre negative sovraccaricate, e caricate normalmente) danno dei fotogrammi identici sia rispetto alla posizione che alla intensità delle varie righe. Nella tabella seguente riporto i dati che si riferiscono ad uno dei fotogrammi dei campioni *b*).

TABELLA I.

(Diametro del cilindro portafilm 57.3 mm.).

Radiazioni K del rame				Radiazioni K del ferro			
θ (misurato)	I	θ (misurato)	I	θ (misurato)	I	θ (misurato)	I
29.4°	d	94.3°	dd	37.0°	d	118.2°	f
32.6	f	99.9	m	41.0	f	123.0	f
37.4	f	108.4	m	47.8	m	135.4	m
48.2	dd	113.1	dd	62.2	dd	148.2	t
53.2	f	115.0	dd	68.8	f	—	—
56.4	d	123.5	d	73.6	d	—	—
58.8	dd	125.2	dd	82.4	f	—	—
62.9	ff	134.3	ff	86.8	m	—	—
66.2	m	138.3	m	102.6	d	—	—
78.2	dd	159.7	f	104.4	d	—	—
86.2	m	161.1	d	106.6	d	—	—
88.8	m	—	—	—	—	—	—

... *ff* = fortissima; *f* = forte; *m* = media; *d* = debole; *dd* = debolissima.

La posizione e la intensità delle linee di interferenza è in ottimo accordo con i dati ottenuti per il piombo da precedenti autori.

Il semplice confronto di questi fotogrammi con quelli da me eseguiti con il piombo massiccio mette in evidenza la identità di essi.

In alcuni fotogrammi dei campioni *a*) e *b*) si riscontra inoltre qualche punteggiatura sovrapposta alle righe: ciò dipende del trattamento meccanico cui sono stati sottoposti i campioni per polverizzarli ed asciugarli (compressione fra fogli di carta da filtro).

Nei fotogrammi dei campioni *c*) si osserva la presenza di tutte le righe esistenti nei fotogrammi dei precedenti campioni ed inoltre la comparsa di

Digitized by Google

alcune nuove righe. Queste nuove righe, che appaiono leggermente allargate, possono identificarsi facilmente con le più intense del $PbSO_4$.

I fotogrammi che si ottengono con i campioni *d*) (piastre negative scariche) mostrano un maggiore numero di linee dei precedenti.

Nella tabella II sono indicate la posizione e la intensità delle linee osservate.

TABELLA II.

(Radiazioni K del rame - Diametro del cilindro portafilm 57.3 mm.).

θ (misurato)	I	Osservazioni	θ (misurato)	I	Osservazioni
22.0°	d	$PbSO_4$	75.1°	dd	?
24.5	d	»	79.1	m	$PbSO_4$
27.8	m	»	83.7	d	»
29.4	dd	Pb	86.2	m	Pb
30.8	m	$PbSO_4$	87.5	dd	$PbSO_4$
32.7	m	Pb	88.8	m	Pb
33.7	d	$PbSO_4$	93.1	d	$PbSO_4$
37.4	m	Pb	95.0	dd	$PbSO_4$
40.6	d	$PbSO_4$	100.0	m	Pb
44.8	f	»	106.3	dd	?
45.8	m	»	108.4	m	Pb
46.9	d	»	113.4	dd	$PbSO_4$
48.3	dd	Pb	118.2	dd	$PbSO_4$
51.9	d	$PbSO_4$	121.8	m	»
53.2	f	Pb-$PbSO_4$	123.5	dd	Pb
54.9	d	$PbSO_4$	124.4	d	$PbSO_4$
56.3	d	Pb-$PbSO_4$	127.1	m	»
57.8	m	$PbSO_4$	129.7	m	»
62.9	f	Pb-$PbSO_4$	134.3	f	Pb
64.3	dd	$PbSO_4$	135.6	m	$PbSO_4$
66.1	m	Pb-$PbSO_4$	138.4	m	Pb
67.5	d	$PbSO_4$	146.9	m	$PbSO_4$
69.1	d	»	159.7	m	Pb
70.5	d	»	—	—	—

Digitized by Google

La tabella II mostra che quasi tutte le linee osservate si lasciano identificare e provengono soltanto dal Pb e dal $PbSO_4$. La identificazione di tali linee oltre che sulla posizione è basata sulla loro intensità. Soltanto due righe, del resto debolissime, non si sono potute identificare con certezza. Le linee che appartengono al $PbSO_4$ sono, anche in questo caso, lievemente allargate e talune di esse sono totalmente o parzialmente sovrapposte a quelle del Pb.

11. I risultati sperimentali che ho descritto permettono di stabilire che il piombo spugnoso che costituisce la materia attiva della piastra negativa dell'accumulatore a piombo ha una struttura cristallina che non si differenzia, nè per la forma nè per le dimensioni del reticolo, da quella del piombo ordinario. Inoltre dalla larghezza delle linee di interferenza si deve dedurre che le particelle cristalline del piombo spugnoso sono assai piccole ma non di dimensioni colloidali: considerando le particelle cristalline come cubiche, la lunghezza media dello spigolo sarebbe compresa fra 1000 e 100.000 Å. Poichè sorge legittimo il dubbio che la semplice compressione fra fogli di carta assorbente cui sono stati sottoposti i campioni per asciugarli e polverizzarli possa aver fatto variare le dimensioni delle particelle cristalline ho eseguito alcuni fotogrammi (pure col metodo di Debye-Hull) su due campioni di filo di piombo puro di 1 mm. di diametro, sottoposti a formazione Planté e lasciati poi asciugare in essiccatore dopo un lavaggio con acqua. I fotogrammi ottenuti sono del tutto simili a quelli dei campioni *a*) e *b*).

Le esperienze sulle piastre negative parzialmente scariche e scariche (campioni *c*) e *d*)) hanno dimostrato che l'unica sostanza – rivelabile con i raggi X – che si forma durante la scarica come prodotto di reazione del piombo spugnoso è il $PbSO_4$. Inoltre l'allargamento, per quanto piccolo, delle righe appartenenti al $PbSO_4$ sta ad indicare che questo composto, quale si origina in condizioni normali di scarica sull'elettrodo negativo, appare assai suddiviso. Infine il confronto della intensità delle righe dei fotogrammi dei campioni *d*) (elettrodi scarichi) con quella delle righe dei fotogrammi del Pb e del $PbSO_4$ mostra che anche in questo caso la trasformazione del piombo spugnoso in $PbSO_4$ è soltanto parziale.

12. *Conclusioni.* — 1° La teoria di Gladstone e Tribe (doppia solfatazione) riceve da queste esperienze una conferma notevole, mentre le altre teorie chimiche risultano totalmente o parzialmente invalidate.

2° La sostanza attiva che costituisce l'elettrodo positivo (carico) dell'accumulatore a piombo è composta di PbO_2 identico per la sua struttura cristallina (forma e costanti reticolari della cella elementare, struttura microcristallina) al PbO_2 ottenuto per via chimica. Il colore quasi nero mostrato dalle piastre positive sottoposte a lunga sovraccarica dipende unicamente dalla maggiore dimensione delle particelle cristalline del PbO_2.

3° Il piombo spugnoso che costituisce l'elettrodo negativo carico dell'accumulatore a piombo ha la stessa struttura cristallina del piombo mas-

Digitized by Google

siccio. L'allotropia (corrispondente ad un polimorfismo) del piombo spugnoso deve essere scartata in base ai risultati ottenuti con l'esame X. Lo spigolo del cubo elementare (reticolo cubico a facce centrate) calcolato con i dati da me trovati (v. tabella I) introducendo le correzioni per il diametro del preparato e per la divergenza del fascio di raggi X, è di 4.92 Å [1] e la densità 11.48 [2].

4° Nella scarica dell'accumulatore, tanto sull'elettrodo positivo che su quello negativo, si forma un prodotto identificabile per la sua struttura cristallina col $PbSO_4$, prodotto che nei due casi appare assai suddiviso (probabilmente di dimensioni colloidali) e mescolato con notevoli quantità di PbO_2 oppure Pb rispettivamente. Si può inoltre escludere la presenza di altri eventuali composti del piombo a meno che questi non si trovino presenti in piccola quantità o in stato amorfo.

Chimica. — *Il Sistema* $Fe(NO_3)_3$ — $Al(NO_3)_3$ — H_2O *a 25°*. Nota di G. MALQUORI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *L'influenza della concentrazione sulla perdita in peso di giovani anguille allevate a digiuno in soluzioni di cloruro di sodio* [3]. Nota di U. D'ANCONA, presentata [4] dal Socio G. FANO.

In una mia Nota precedente [5] dimostravo che, *almeno in determinate condizioni di concentrazione e di temperatura, le giovani anguille resistono meglio al digiuno in date soluzioni saline (metalli alcalini e alcalino terrosi) che non in acqua dolce e che in quelle subiscono un minor decremento in peso totale, in peso secco e in quantità complessiva di sostanza inorganica.*

Allo scopo di precisare l'influenza della concentrazione ho eseguito nell'inverno dell'anno scorso altre esperienze. Il 15 dicembre 1925 ho iniziato un *quinto esperimento* sempre con giovani anguille (cieche) provenienti da

(1) In buon accordo con i valori trovati per il piombo da vari autori: L. VEGARD, « Phil. Mag. », 1916, *32*, p. 65; E. A. OWEN, G. D. PRESTON, « Proc. Phys. Soc. », 1923, *35*, p. 101; G. R. LEVI, « Nuovo Cimento », 1924, p. 137; W. C. PHEBUS, F. C. BLAKE, « Phys. Rev. », 1925, *25*, p. 107; WHEELER P. DAVEY, « Zeit. f. Kristall. », 1926, *63*, p. 316.

(2) Introducendo nel calcolo numerico: N (numero di Avogadro) = 6.06×10^{23}; peso atomico del piombo = 207.20.

(3) Dall'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Roma.

(4) Nella seduta del 1° maggio 1927.

(5) *Dell'influenza di soluzioni saline sulla resistenza al digiuno delle giovani anguille.* « Rend. Accad. Lincei », vol. II, ser. VI, p. 443, 1925.

Digitized by Google

Maccarese [1]. Si trattava di esemplari appartenenti agli stadi 4–9 di Grassi, tutti più o meno pigmentati. Le cieche furono allevate in cristallizzatori di vetro uguali contenenti ciascuno 3 litri d'acqua; in ognuno furono messe 50 cieche. Gli allevamenti vennero fatti come nei casi precedenti in Acqua Marcia cui fu aggiunto del NaCl nelle proporzioni del 0.5, 1, 3 e 5 ‰; un allevamento di controllo fu fatto in Acqua Marcia senza aggiunta di sali. Il passaggio alle soluzioni più concentrate fu fatto gradualmente aumentando la concentrazione di 1 ‰ al giorno. Il 20 dicembre tutti gli allevamenti si trovavano nelle condizioni iniziali dell'esperimento. L'acqua veniva cambiata ogni due giorni, in modo da impedire la formazione di depositi organici.

L'esperimento continuò fino al 20 febbraio 1926. La temperatura dell'acqua si mantenne in questo periodo tra 2.5 e 16° C.; come si vede fu più bassa che negli esperimenti precedenti.

Il 20 febbraio furono prese e pesate 20 cieche di ciascun allevamento, poi, dopo seccate alla stufa, ne fu determinato il peso secco e infine, dopo calcinate, il peso in ceneri. I risultati di questo esperimento sono riassunti nel seguente specchietto, in cui le 20 cieche di ciascun allevamento sono divise in due gruppi, uno delle 10 più piccole e uno delle 10 più grandi.

Allevamento	Lunghezza media mm.	Peso medio totale gr.	Peso medio normale gr.	Decremento %	Peso medio secco		Peso medio ceneri	
					gr.	% del peso totale	gr.	% del peso totale
Acqua sola	63.3	0.173	0.205	15.61	0.035	20.23	0.0045	2.60
» »	68.5	0.226	0.259	12.74	0.047	20.79	0.0054	2.39
NaCl 0.5 ‰	62.7	0.165	0.199	17.09	0.032	19.33	0.0040	2.42
»	68.3	0.215	0.257	16.34	0.045	20.93	0.0049	2.28
NaCl 1 ‰	64.2	0.190	0.214	11.21	0.041	21.58	0.0043	2.26
»	69.1	0.231	0.266	13.16	0.050	21.64	0.0053	2.29
NaCl 3 ‰	63.3	0.161	0.205	21.46	0.034	21.12	0.0043	2.67
»	67.5	0.195	0.248	21.37	0.042	21.54	0.0047	2.41
NaCl 5 ‰	62.4	0.135	0.196	21.12	0.026	19.26	0.0037	2.73
»	66.4	0.168	0.236	28.81	0.033	19.64	0.0044	2.62

Da questi dati emergono i seguenti fatti:

1. Il decremento % del peso totale è minimo per le cieche allevate

(1) Devo ringraziare vivamente il prof. Torquato Chiappi, direttore del R. Stabilimento Ittiogenico di Roma, che gentilmente mi fornì il materiale per queste esperienze.

Digitized by Google

in NaCl 1 °/₀₀; per quelle allevate in NaCl 3 e 5 °/₀₀ invece è maggiore che per quelle allevate in acqua senza sale.

2. Il peso secco espresso in °/₀ del peso totale è massimo per le cieche allevate in NaCl 1 e 3 °/₀₀, è minimo per quelle allevate in NaCl 5 °/₀₀.

3. La percentuale di sostanze inorganiche è minima per le cieche allevate in NaCl 1 °/₀₀.

4. Tanto il decremento del peso totale, quanto quello del peso secco e della quantità complessiva di sostanza inorganica vanno diminuendo nelle cieche allevate in deboli concentrazioni (1 °/₀₀) di NaCl, tornano invece ad aumentare negli allevamenti a concentrazioni più forti (3-5 °/₀₀).

Come si spiega questo fatto? Probabilmente ammettendo la sovrapposizione di due fenomeni di natura diversa:

1. Il fatto su cui ho insistito nella Nota precedente, cioè l'acidosi causata dal digiuno, che viene neutralizzata dalla presenza di cationi metallici.

2. Il fenomeno osmotico determinato dalla concentrazione salina [1].

Si possono spiegare così le condizioni che si osservano nelle cieche allevate al 5 °/₀₀ in confronto a quelle tenute a una concentrazione dell' 1 °/₀₀. La maggior perdita percentuale di peso totale si spiega appunto come dovuta a un fenomeno osmotico, la maggior quantità di sostanze inorganiche è poi dovuta alla minore decalcificazione in conseguenza dell'acidosi da digiuno.

Anche da questa esperienza risultano dunque confermate le conclusioni cui arrivavo nella mia Nota precedente.

In quanto poi al riferimento che in quella Nota facevo di questo fatto fisiologico alla biologia dei pesci esso è stato confermato da recenti mie osservazioni sulle squame dell'*Alosa finta*, osservazioni, i cui risultati vengono pubblicati altrove.

La conclusione che io traggo da quelle ricerche e dalle suddette esperienze è che nei pesci, in conseguenza di una diversa intensità metabolica, si ha nel corso dell'anno l'alternanza di periodi in cui l'acidosi dei liquidi organici è minore o maggiore. È maggiore durante la riproduzione e nell'inverno. In conseguenza di quest'acidosi in questi periodi si ha un minore o un diverso sviluppo delle parti scheletriche e delle squame e ossa cutanee.

Questo ritmo metabolico che lascia tracce sui tessuti contenenti sali di calcio è quello che offre la possibilità di determinare l'età degli organismi stessi.

(1) Si vedano in proposito le esperienze di GUYLARD, *Variations de poids de l'Epinoche passant de l'eau douce dans des solutions de chlorure de sodium à différentes concentrations*, « C. R. Soc. Biol. », t. LXXXVII, p. 969, 1922.

In successive esperienze si potranno tener distinti i due fenomeni allevando le cieche parte in NaCl e parte in una soluzione di un cristalloide non elettrolite (zucchero) o in soluzoini miste.

Digitized by Google

Noi vediamo così che è esatta la definizione del Jackson [1]: che lo scheletro è un magazzino di sostanze minerali di riserva. Esse vi si immagazzinano quando sono in eccesso, quando invece la concentrazione degli idrogenioni aumenta esse vengono utilizzate a neutralizzare questi ultimi e allora o non si depositano nelle parti scheletriche o addirittura vengono tolte da queste [2].

Naturalmente questo non è che un lato del problema. I risultati di questa mia esperienza dimostrano la possibilità della sovrapposizione di fenomeni diversi e oltre ai due che appaiono nei risultati dell'esperienza stessa ce ne possono essere anche degli altri, come io già accennavo nella Nota precedente e come appare da tutta la vasta letteratura sul metabolismo minerale, che qui sarebbe troppo lungo ricordare.

Patologia vegetale. — *Intorno alla peronospora del Lillà (Phytophthora Syringae, Klebahn).* Nota di V. PEGLION e M. SACCHETTI, presentata [3] dal Corrisp. L. PETRI.

La prima constatazione della presenza in Italia di questo parassita del Lillà risale al luglio 1926.

Furono inviate dal dott. Samoggia della Cattedra ambulante di Agricoltura di Parma alcune piantine deperenti o morte per necrosi diffusa del tessuto corticale dal piano di saldatura dell'innesto in su. Compromesso quindi il nesto, sano il soggetto.

Sezioni condotte in corrispondenza delle zone corticali imbrunite rivelarono la presenza di filamenti miceliali e di oospore che evocavano alla mente la prima descrizione del parassita data dal Klebahn nel 1905, in base alla quale egli aveva proposto il nuovo genere *Phlocophthora*.

Estendemmo allora le indagini ai Lillà coltivati nei dintorni di Bologna, ma durante i mesi caldi nessun reperto riuscì positivo. Soltanto coll'approssimarsi dell'autunno, con non poca sorpresa, ci venne fatto di appurare proprio nelle piantagioni adiacenti al nostro Istituto, sopratutto nei rigetti, polloni o piantine da seme, numerose lesioni foliari, che a prima vista potevano scambiarsi con lesioni da freddo, ma che l'esame microscopico rivelò di natura tipicamente parassitaria, rinvenendovi precisamente il micelio, le fruttificazioni conidiali e successivamente le oospore di *Phyt. Syringae*.

(1) JACKSON C. M., *The effects of inanition and malnutrition upon growth and structure.* London, 1925.

(2) Vedi pure: BLUM L., DELAVILLE M. et VAN CAULAERT, *Sur les rapports entre l'état physico-chimique des humeurs et les phenomènes d'ossification et de decalcification*, «C. R. Ac. Sc.», t. CLXXX, p. 974, 1925.

(3) Il 1° maggio 1927.

Digitized by Google

Il micelio che serpeggia negli spazi intercellulari non presenta caratteristiche specifiche da porre in evidenza. Sono le solite ife che conformano il proprio calibro sui meati dei tessuti attraverso i quali vanno insinuandosi progressivamente. Si determinano nelle foglie ampie aree imbrunite, localizzate generalmente ad un settore apicale, ma che si estendono talvolta ad oltre metà della lamina. I tessuti si affloscianо e, nel volgere di pochi giorni, le foglie si disarticolano e cadono.

Poste le foglie infette in camera umida, poche e rare ife fruttifere, indivise, brevi, spuntano dagli stomi, differenziando conidi che misurano 33-45 per 11-19 micromillimetri; nello spessore dei tessuti è rapida invece la formazione di innumerevoli oospore che misurano 24 ÷ 35 micromillimetri.

Siamo riusciti a provocare abbondante e regolare formazione di conidi con un metodo semplicissimo. Asportando dei dischetti di parenchima foliare invaso da micelio e ponendoli a galleggiare sull'acqua in cristallizzatoi di vetro, dopo 12-18 ore di permanenza la periferia del dischetto si ricopre di una efflorescenza di filamenti fruttiferi ed i voluminosi conidi limoniformi, papillati, bruni, olivescenti, differenziati in grande abbondanza vengono espulsi, per così dire, a fascetti che galleggiano, formando talvolta minuscole chiazze a fior d'acqua che si possono prelevare con un'ansa di platino e trasferire in altra sede.

Tanto i rari conidi che si riesce a rintracciare sulle macchie foliari in natura o nelle consuete condizioni di incubazione in camera umida, quanto questi che in assai maggior numero, si formano a contatto dell'acqua liquida, si disarticolano dall'ifa fruttifera conservando un filamento o peduncolo notevolmente lungo, che sembra sia sfuggito a coloro che precedentemente illustrarono questo parassita. Non ne fa cenno il Leonian nei suoi studi fisiologici sulle *Phytophthorae*. È segnalato invece ed illustrato da nitide microfotografie dal Curzi in una specie morfologicamente affine, la *Ph. hydrophila*, parassita del *Capsicum*.

La formazione rapida e profusa di conidi dai frammenti di tessuto sommersi in acqua lascia supporre di trovarsi di fronte ad un parassita la cui diffusione è prevalentemente *idrocora*. I conidi stessi permanendo a contatto con l'acqua germinano, dando origine a zoospore, voluminose, agili che escono in seguito a distacco della papilla apicale del conidio.

Se l'acqua in cui sono sospesi i conidi si arricchisca, per diffusione, di materie organiche, o, meglio, se si trasportano i conidi in substrati nutritivi (agar di Leonian) la germinazione procede per tubi miceliali. Ogni conidio ne genera uno o più che si sviluppano rapidamente nei substrati nutritivi in un micelio assai rigoglioso.

Trasportando goccioline d'acqua in cui siano zoospore appena schiuse su foglie sane di Lillà l'infezione è palese dopo due o tre giorni; ampie aree di parenchima foliare imbruniscono ed avvizziscono. Mantenendo il materiale sotto campana di vetro si rinvengono i nuovi conidiofori dopo quattro o cinque giorni.

Digitized by Google

Le oospore si formano in numero ragguardevole nelle foglie e si liberano in seguito al disfacimento dei tessuti. A tutt'oggi non ci è riuscito di seguirne la germinazione.

Ne seguiamo tuttora le vicende anche in vista di stabilire sperimentalmente se, come risulterebbe dalle osservazioni compiute in precedenza da Autori, questa specie polifaga sia realmente da ritenersi come una nuova entità parassitaria distinta da *Ph. omnivora*.

La prima segnalazione fornita dal materiale proveniente dal vivaio di Ponte Taro sollevò il dubbio di trovarsi di fronte ad un nuovo parassita conseguente all'incauta introduzione in Italia di piante infette. I ragguagli avuti dalla Cattedra di Parma ci inducono ad escludere quest'ipotesi, dacchè sembra che dall'estero, e precisamente dall'Olanda, sia stato importato soltanto del seme di Lillà non già delle piantine. Con questo seme sono state ottenute le piante selvatiche sulle quali, innestate le varietà selezionate, durante la permanenza in vivaio si è manifestata l'infezione.

Ora il fatto che anche nell'orto della Palazzina della Viola, dove non si sono importate piante di Lillà da oltre un ventennio, si sia constatata la presenza del parassita sia nella forma corticale che in quella foliare sta ad accreditare la supposizione che non si tratti di un malanno nuovo bensì di una entità parassitaria finora sfuggita alle indagini.

Comunque si tratta di un parassita che tanto più merita di essere seguito nelle sue vicende in quanto è prospettato come polifago e come tale potrebbe figurare nel quadro eziologico di talune manifestazioni patologiche di piante arboree tuttora incompletamente note.

Genetica. — *Come si scinde un seminutante.* Nota di R. Savelli, presentata [1] dal Socio B. Longo.

Si ritiene generalmente che il *mutationskoeffizient*, per ogni singola mutazione considerata, debba essere sempre assai basso, ed è stata precisata anche qualche cifra per assegnargli un limite superiore insorpassabile.

Ma, una volta ammesso il principio della mutazione (cioè che una pianta appartenente a stirpe pura possa dare una certa frazione di gameti aberranti), e considerando la completa oscurità delle ragioni fisiologiche che promuovono questa evenienza, si rimane perplessi nel riconoscere un valore razionale a questo criterio di voler fissare un limite massimo al *mutationskoeffizient*. Per es. a chi volesse dire che questo limite è il 5 %, si potrebbe domandare: perchè proprio il 5 e non il 5 e un mezzo?

In effetto l'idea di un limite molto basso deriva da quel che si è visto finora nei casi più noti, i quali concordano per questa generale bassezza del

(1) Nella seduta del 24 aprile 1927.

Digitized by Google

mutationskoeffizient; ma questa constatazione è valida fino a prova contraria. I rilievi empirici fatti finora al riguardo sono bensì parecchi relativamente alle scarse conoscenze di venti anni fa, ma sono certamente ancora troppo pochi di fronte alla presumibile vastità del fenomeno naturale. D'altra parte è già evidentissimo lo sforzo di molti sperimentatori, segnatamente Americani e Giapponesi, di spostare gli equilibri genetici con interventi sperimentali, come: elevamenti di temperatura, azione di radiazioni, ecc. Questo ricorda da vicino quel che fa il chimico quando, riscaldando, accelera le reazioni che in condizioni ordinarie si compirebbero assai lentamente. Sicchè non sembra esistere una vera ragione teorica contro la possibilità di un *mutationskoeffizient* elevato.

Bisogna però notare che quando in natura si son viste mutazioni producentisi in proporzione del 15–20 %, cioè – come si dice tecnicamente – *in massa,* si è ricorsi alla geniale ipotesi della *semimutazione*, dicendo che le piante producenti queste mutazioni in massa provenivano dall'unione di un gamete mutato con uno normale, costituendo così un *ibrido di mutazione* la cui scissione deve naturalmente produrre un'alta proporzione di mutanti, che non può confondersi col *mutationskoeffizient* originario, il quale segna la produzione di mutanti provenienti direttamente da una pianta generata da gameti normali, non da una pianta eterozigota. Questa ipotesi è posta fuori dubbio da tutta una serie di prove.

Senonchè non è difficile rintracciare nella letteratura anche dei casi di produzione di mutanti in proporzione talmente eccedente che, pur volendoli interpretare come prodotti dalla scissione di un semimutante, la loro percentuale esorbiterebbe pur sempre dalla teoria. Così è per certi fatti di gigantismo comparsi in *Nicotiana Tabacum* [1].

L'idea che il *mutationskoeffizient* si tenga sempre entro limiti assai bassi, appare in realtà piuttosto arbitraria. D'altra parte io credo che la trattazione quantitativa dell'argomento non sia stata spinta sino in fondo e presenti alcune deficienze che - irrilevanti finchè il *mutationskoefficient* si tenga bassissimo - hanno un'influenza che sale molto rapidamente con l'accrescersi di esso. Dando alla teoria una espressione quantitativamente rigorosa, si vedono scaturire comportamenti che a tutta prima sembrerebbero aberranti, e invece per tal via appaiono necessarie conseguenze delle premesse più semplici e più comunemente accettate.

*
* *

Considerando il processo di fecondazione in una pianta che produce un dato per cento di gameti mutanti, noi vediamo che la formazione di un

(1) ALLARD, *Gigantism in* « *N. Tab.* » etc. « The American Naturalist » vol. 53, n. 626, 1919.

Digitized by Google

embrione mutante richiede che un gamete maschile mutato si incontri proprio con un gamete femminile del pari mutato, per formare il relativo omozigoto; chè se invece un gamete mutato si incontra con uno normale si forma un eterozigoto, geneticamente diverso dal mutante, e che fenotipicamente può persino essere identico alla pianta normale quando la mutazione è recessiva.

La *frequenza* del caso di incontro tra due gamenti mutanti è d'ordinario molto minore della *frequenza* di incontro tra un gamete mutato e uno normale, e questa differenza tra le due frequenze è naturalmente tanto più grande quanto più è bassa la percentuale dei gameti mutati, la massima parte dei quali viene allora consumata nella produzione di eterozigoti. Se la produzione dei gameti mutati è del 2 %, i mutanti - nella discendenza da autofecondazione, - si dovrebbero trovare con una frequenza teorica del 0.04 %, alla quale ci avvicineremo tanto più quanto più grande sarà il numero dei discendenti esaminati. All'atto pratico, pöi, se trattisi di una pianta che dia pochi semi, la *probabilità* di questa evenienza diventa assai scarsa ed è molto facile che la pianta non produca neppure un mutante, pur avendone l'intrinseca capacità. Più probabile è la formazione di semimutanti, che nel caso considerato ha una frequenza teorica del 3.92 %.

I rapporti che ricollegano queste grandezze non vengono abitualmente espressi in una forma aritmetica di compiuta esattezza, la quale nondimeno merita d'esser fissata per le ulteriori deduzioni.

Siccome le formule debbono servire ai genetici, che abitualmente esprimono in percentuali i prodotti dei loro allevamenti, così darò espressioni tali che presentino i risultati del calcolo direttamente in *percento*.

Indicando con K il *percento* dei gameti mutati, con M il *percento* dei discendenti mutanti, con S il *percento* dei semimutanti; e considerando la discendenza *in regime di autofecondazione*, si ha che:

$$M = \frac{K^2}{100} \qquad S = 2K - \frac{K^2}{50}$$

E, se si vuole una espressione che rileghi direttamente S con M:

$$S = \sqrt{400\,M} - 2\,M$$

Per un esempio, ponendo che le forme *nanella* si generino da *Oenothera gigas* nella proporzione del 2 %, si vede che la corrispondente proporzione dei gameti è del 14 % circa, e che vi è necessariamente collegata la formazione di circa un 24 % di semimutanti.

In quei casi in cui la mutazione non è completamente recessiva, ed anche i semimutanti sono perciò direttamente riconoscibili (come nel caso della famosa mutazione *apetala* del Tabacco di Klebs, che assume la forma *apetala* in condizione omozigotica, e la forma *lacerata* in condizione etero-

Digitized by Google

zigotica) può tornar comodo di calcolare K sulla base di ambedue le grandezze direttamente determinabili nelle culture, mediante la formula:

$$K = M + \frac{S}{2}$$

Si deve tuttavia tener sempre presente che generalmente i mutanti e forse anche i semimutanti sono di costituzione più debole delle piante normali; perciò la mortalità, distribuendosi in modo ineguale fra le diverse categorie di piante, ne può alterare le proporzioni in maniera anche molto sensibile.

Queste formule ci sono utili sopratutto per farci avvertiti che se è vera, nel caso più comune, la preponderanza numerica dei semimutanti sui mutanti, è pur vero che quando K si avvicinasse al valore di 66.66 la frequenza dei mutanti uguaglierebbe quella dei semimutanti, ambedue corrispondendo al valore di circa 44.4 %, e le piante normali si troverebbero ridotte ad una scarsa minoranza. Qualora K crescesse ancora, i semimutanti diventerebbero meno frequenti dei mutanti.

*
* *

Noi, ordinariamente, rileviamo l'esistenza di una stirpe mutante non già con l'osservazione dei gameti, bensì con quella degli individui *mutanti* che appaiono nella discendenza; tanto più che nel caso ordinario di una mutazione recessiva, i semimutanti sfuggono all'osservazione diretta ed anche S perciò diventa una incognita.

Ma in realtà il fatto fondamentale, più prossimo all'origine della mutazione, e da cui gli altri fatti derivano come conseguenze, è la produzione dei gameti mutati, e la grandezza che lo esprime è quella che per ogni processo mutativo ben caratterizzato ha un vero valore teorico e può meglio assumere – *ceteris paribus* – il valore di una *costante*.

Difatti la produzione degli individui mutanti e quella dei semimutanti, costituisce un fatto successivo e derivato, e sulle grandezze che lo rappresentano possono interferire influenze secondarie estranee al fatto originario della mutazione, come per es. il modo di fecondazione e la mortalità degli embrioni.

Il termine di riferimento più fisso, qualora si potesse determinare direttamente, sarebbe proprio il numero dei gameti mutati, ed a questa grandezza soltanto va attribuito il più alto valore teorico. La cifra che esprime il numero dei mutanti prodotti ha un valore pratico: essa riguarda il fatto mediante il quale la mutazione si svela ai nostri occhi. Così vediamo che, fra le grandezze esaminate, K ed M, sono le più importanti. Ma volendo denominarle ci troviamo subito di fronte ad una difficoltà terminologica. È pur evidente che, nella realtà delle cose, se noi ci proponiamo di rap-

Digitized by Google

presentare quantitativamente la produzione dei mutanti, K assume nel fenomeno il valore di un *coefficiente*, proprio nel senso esatto della parola, cioè nel senso di un fattore la cui efficienza dipende dal concorso di altre circostanze. Difatti la grandezza K riguarda i gameti considerati prima di ogni processo di loro unione: soltanto quando questa unione interviene si ha effettiva generazione di mutanti, la quale dipende dalle modalità di tale unione e varia con esse. Così la produzione dei mutanti si verifica in misura diversa a seconda che si tratti di autofecondazione, di fecondazione col polline di un mutante, o col polline di un semimutante; e se volessimo esprimere quantitativamente i risultati di tutti i casi dovremmo elaborare formule diverse in cui il K è la sola cosa il cui valore non cambia: dunque è proprio questo, come dicevamo, il valore di maggior portata teorica ed a cui ben converrebbe il nome di *coefficiente di mutazione*; mentre M non potrebbe meritare nome più appropriato di quello di *indice di mutazione* in quanto riguarda la comparsa dei mutanti, ossia appunto il fenomeno che indica all'osservatore la esistenza della mutazione. Ma nei classici lavori del de-Vries e della sua Scuola, la grandezza che ricorre più frequentemente, la sola cui si sia dato un nome particolare, è proprio M, denominato *mutationskoeffizient*. Ma io credo di potere, se non nella lettera certo nello spirito, dimostrarmi meglio ossequente al principio della importanza teorica della cifra che si è voluta considerare come costante, riferendola non già alla produzione dei mutanti, ma alla produzione dei gameti mutati, riconducendone il senso ai criteri su esposti e permettendomi di tradurre liberamente il termine *mutationskoeffizient* con quello di *indice di mutazione* che resta dunque corrispondente alla grandezza M; mentre la grandezza K verrà denominata *coefficiente di mutazione*. La grandezza S potrà dirsi *indice di semimutazione*.

Dal valore dell'indice di mutazione, empiricamente determinabile con un numero sufficiente di osservazioni, si può risalire al valore del coefficiente di mutazione, essendo:

$$K = \sqrt{100\,M}$$

*
* *

Domandiamoci come si scindono nella successiva generazione i semimutanti generati dall'incontro di un gamete normale con uno mutante: la risposta più comune è che si scindono con la norma mendeliana del monoibrido: mutanti 25 %, semimutanti 50 %, normali 25 %. Ma per rilevare la scarsa esattezza di questa deduzione basta considerare l'ulteriore discendenza delle piante normali. Esse derivano dall'unione di gameti normali, ma non di meno appartengono ad una stirpe mutante e come tali ricominciano ad ogni gametogenesi a produrre gameti mutanti nella percentuale propria della loro stirpe. Ora il tacito principio fondamentale su cui

Digitized by Google

poggia la genetica ordinaria, mendeliana, è quello che gli organismi omozigoti producono gameti tutti simili fra loro e simili a quelli da cui derivarono

Su questo caposaldo si basa il concetto della *purezza* e della *costanza* delle forme omozigote che possono ricavarsi in F_2. Ma il fatto della mutazione costituisce una flagrante eccezione a questo principio, perchè un gamete maschile normale di *O. Lamarckiana* unito ad uno femminile pure normale di *O. Lamarckiana*, produce una pianta che alla gametogenesi darà bensì ancora una maggioranza di gameti *Lamarckiana*, ma anche tutto uno sciame di gameti in vario senso aberranti. In questo appunto consiste la mutazione, e allora evidentemente non è possibile di trasportare senz'altro a questo caso la semplice formula del monoibrido, o meglio essa si può ed anzi si deve applicare anche a questo caso, ma introducendovi un elemento di correzione che tenga conto di un fenomeno straordinario che viene a sovrapporvisi.

Se noi consideriamo, nel caso normale, due gameti ambedue forniti di una caratteristica e che si uniscono a formare uno zigoto, noi possiamo trascurare tutto lo sviluppo di esso zigoto e dire che tali gameti, alla nuova gametogenesi daranno il cento per cento di gameti muniti di quella data caratteristica. Se però questi due gameti avevano caratteristiche diverse, per es. *bianco* e *nero*, il 50 % dei nuovi gameti sarà *bianco* e il 50 % *nero*. Sicchè possiamo dire che ciascun gamete è responsabile delle caratteristiche di una metà dei nuovi gameti prodotti. Se i gameti uguali riuniti nel primo caso appartenevano ad una stirpe mutante, per es. a quella particolare razza di Tabacco del Klebs, citata, essi gameti non produrranno più come nel caso normale il cento per cento di gameti a loro uguali, e cioè della forma *typica*, ma produrranno una grande percentuale di gameti di forma *typica* e insieme una piccola percentuale di gameti *apetala*. Se si ammette che due gameti di forma *typica* incontratisi fra loro hanno la facoltà di produrre, alla nuova gametogenesi, un certo numero di gameti *apetala*, è ben chiaro che ciascuno di questi due gameti, non ha nessun motivo di non esplicare questa facoltà anche nel caso in cui si incontri con un gamete di forma *apetala* per formare l'eterozigoto. La scissione di questo eterozigoto dunque non deve dare, come comunemente si crede, il 50 % di gameti *apetala*; ma bensì un 50 % per conto del gamete *apetala* e, per di più, un piccolo per cento che vi si aggiunge per conto del gamete *typica* il quale avrebbe saputo dare origine ad una simile produzione anche se si fosse trovato in condizione omozigotica.

Se i genetici non hanno sentito il bisogno di precisare col calcolo l'entità di questo elemento di correzione, ciò si deve al convincimento, non sempre esatto, ch'esso sia trascurabile. Perciò diamo senz'altro le formule nella cui deduzione si ammettono due cose: 1) che il coefficiente di mutazione sia uguale nei due sessi, cioè che la proporzione dei granelli pollinici

Digitized by Google

mutati sia uguale a quella degli ovuli mutati; 2) che il coefficiente di mutazione sia indipendente dalle condizioni di formazione dello zigoto della precedente generazione. Ciò significa considerare, in prima approssimazione, il caso più semplice. Ed allora, sempre indicando con K il coefficiente di mutazione originario, indicheremo con M′ e S′ rispettivamente le piante mutanti e le semimutanti che escono dalla disgiunzione del semimutante. Volendo sempre mantenere la consuetudine di esprimere in *per cento*, si ha:

$$M_1 = 25 + \frac{K^2}{400} + \frac{K}{2} \qquad S_1 = 50 - \frac{K^2}{200}$$

Per avere un'idea concreta di quanto sia differente la scissione di un semimutante da quella di un tipico monoibrido mendelliano, possiamo considerare la semimutazione nel caso in cui l'indice di mutazione avesse valore 3, prossimo a quello che in realtà esiste in alcuni casi. I mutanti sono 34.8 %, i semimutanti 48.4 %, i normali 16.8 %. Si vede che l'elemento di correzione introdotto è specialmente sensibile e sperimentalmente apprezzabile per quel che riguarda l'innalzamento della frequenza dei mutanti. Generalmente, nella scissione di un semimutante, tende ad accrescersi la proporzione dei mutanti mentre la proporzione dei semimutanti tende ad abbassarsi: le due cifre si incontrano nel caso di un semimutante prodotto da una stirpe in mutazione il cui *indice* avesse un valore di 11.11 che non è poi così straordinariamente alto da non potersi ritenere possibile in natura. Allora si hanno: mutanti 44.44 %, semimutanti 44.44 %, e solo 11.12 % di piante normali; dal che si vede dove vanno a finire, in questo caso, i rapporti mendeliani. Questi rapporti, nel caso della disgiunzione di un semimutante, costituiscono naturalmente un *caso limite* al quale tanto più ci si accosta quanto più il valore di K tende verso zero. Il caso concreto di una tale evenienza è forse quello della genesi della mutante *nanella* da *O. Lamarckiana*.

Come si vede i fattori di correzione qui considerati riconducono pienamente nella teoria casi che altrimenti si sarebbero potuti credere assolutamente aberranti. Un botanico che raccogliesse in natura una pianta e che messala in coltura osservasse una disgiunzione nella misura: 4.5 : 4.5 : 1 si troverebbe probabilmente sconcertato e stenterebbe a indovinare che questa pianta possa essere nata da una fusione di due gameti differenti per un sol carattere, che sia cioè un monoibrido. Pure l'origine e il comportamento di monoibrido c'è, sebbene mascherato per effetto della mutazione; e le cifre stesse si comportano in tal modo non in deroga, ma anzi in ossequio agli stessi principî donde scaturiscono le note e semplici proporzioni mendeliane.

Digitized by Google

Idrobiologia. — *Ricerche sulle variazioni stagionali dei composti inorganici di azoto esistenti nelle acque del Lago di Castelgandolfo.* Nota della sig.na dott.ssa S. CAMPANILE presentata [1] dal Socio N. PARRAVANO.

Importa sommamente al biologo la conoscenza del contenuto di azoto delle acque dolci e marine sopratutto per la importanza che è riconosciuta specialmente ai nitrati per la nutrizione del fitoplancton, base generale di vita e di sviluppo degli organismi viventi nell'acqua.

Miglior disciplina può avere uno studio fondamentale sopra questo argomento quando sia fatto in un lago chiuso.

Dietro consiglio del prof. Brunelli, ho iniziato delle ricerche periodiche sui composti inorganici di azoto esistenti nelle acque del Lago di Castelgandolfo. Detti composti hanno uno speciale interesse per determinare le condizioni nelle quali si verificano le variazioni quantitative del fitoplancton e quindi indirettamente del nutrimento dei pesci.

La importanza di una ricerca di questo genere risalta quando si pensi che questi composti, che si trovano sempre nelle acque in minima quantità, fanno parte di quelle indispensabili materie nutritive (CO_2) , sali di NH_3, sali di acido nitroso e nitrico, acido silicico, sali dell'acido fosforico, cui è appunto legata la produzione di forme vegetali nelle acque dolci e salmastre.

Le ricerche di Apstein sopra i laghi di Holstein, dal punto di vista del tenore delle acque in acido nitrico, mostrano che i laghi ricchi in plancton contengono molti nitrati e nitriti, e che i laghi poveri in plancton sono egualmente poveri in nitrati, sicchè la quantità di plancton da una parte, il tenore in nitrati dall'altra, nelle acque di lago, sarebbero sensibilmente proporzionali.

Perciò la scarsità o l'abbondanza di azoto utile nell'acqua di un lago è uno dei fattori determinanti direttamente la dotazione in esso di fitoplancton; questo stesso fattore è pure uno tra i principali determinanti delle differenze caratteristiche che si riscontrano nel fitoplancton contenuto nei diversi laghi.

Quindi studi di questa natura se presentano difficoltà nella determinazione di questi composti di azoto, che si trovano in minima quantità in tutti i tempi, sono in compenso di una utilità scientifica e pratica veramente considerevole.

(1) Nella seduta del 5 dicembre 1926.

Digitized by Google

Sui composti inorganici di azoto presenti nei laghi, se si eccettuino alcune analisi eseguite dal Raben nelle acque dei laghi Dobersdorfer e Selenter, possiamo dire che fino ad ora non sono state condotte ricerche scientifiche. Per i composti inorganici di azoto esistenti nelle acque marine abbiamo osservazioni più numerose, ma si tratta sempre di analisi eseguite sporadicamente e con mezzi non esatti.

Nulla però mi risulta sia stato fino ad ora pubblicato in merito alle variazioni quantitative di questi composti in funzione del variare delle stagioni.

Nel Lago di Castelgandolfo, privo assolutamente di immissari, le acque subiscono quasi solo le variazioni prodotte dalle evaporazioni e dalle precipitazioni atmosferiche. Perciò in questo specchio d'acqua, che è fornito solo di un emissario sotterraneo, le variazioni in tenuta di composti di azoto, in relazione con le vicende metereologiche e stagionali, possono essere studiate con presunzione di risultati esatti.

Tale studio fu da me iniziato nell'anno 1925, in pieno della stagione delle pioggie, e più precisamente nel mese di febbraio. Le determinazioni furono eseguite in linea generale due o tre volte e, più frequentemente, nei giorni 1 e 15 di ciascun mese all'incirca alla stessa ora. I campioni furono sempre prelevati direttamente da me e sempre negli stessi posti: centro-riva sud-ovest, e, contemporaneamente al prelevamento dei campioni, era presa la temperatura dell'acqua e dell'aria sovrastante. L'acqua da analizzare è stata sempre filtrata, onde escludere, agli effetti dell'analisi del contenuto di essa, la presenza di microrganismi.

Accludo le tabelle dei risultati ottenuti: è da notare che i valori si riferiscono ad un litro di acqua:

Media di 2-4 osservazioni Mesi	N_2O_5		N_2O_3	t°		Osservazioni
	riva	centro		acqua	aria sovrastante	
Febbraio . .	1	0.854	tracce sensibili	9°.2	12°	Lago calmo
Marzo . . .	0.863	0.708	» »	11°.5	14°.4	Lago mosso, direzione vento: levante
Aprile . . .	0.652	0.603	tracce minime	12°.3	13°.5	Lago leggermente mosso
Maggio . . .	0.503	0.435	» »	17°.1	20°.2	Lago calmissimo
Giugno . . .	0.257	0.325	0	20°.5	22°.3	» »
Luglio . . .	0.201	0.250	0	25°.2	27°	» »
Agosto . . .	0.125	0.239	0	26°.3	22°.5	Lago leggermente mosso
Ottobre . . .	0.357	0.301	tracce minime	20°	22°	Lago calmo
Novembre . .	0.602	0.517	» »	17°.2	21°.5	Lago mosso, direzione vento: scirocco
Dicembre . .	0.821	0.781	tracce sensibili	11°	17°.4	Lago leggermente mosso
Gennaio . .	1.321	0.863	» »	9°	11°.3	» » »

Digitized by Google

I valori espressi in tabella sono rappresentati dai diagrammi seguenti:

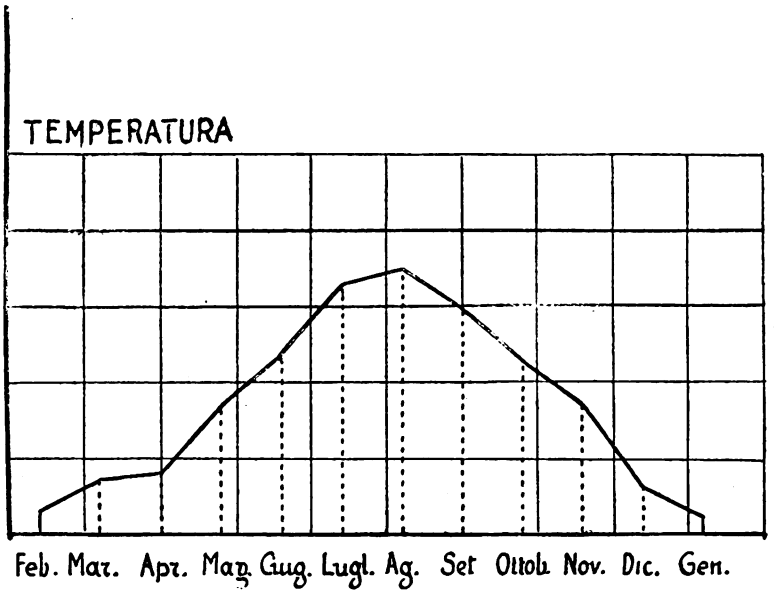


Diagramma 1.

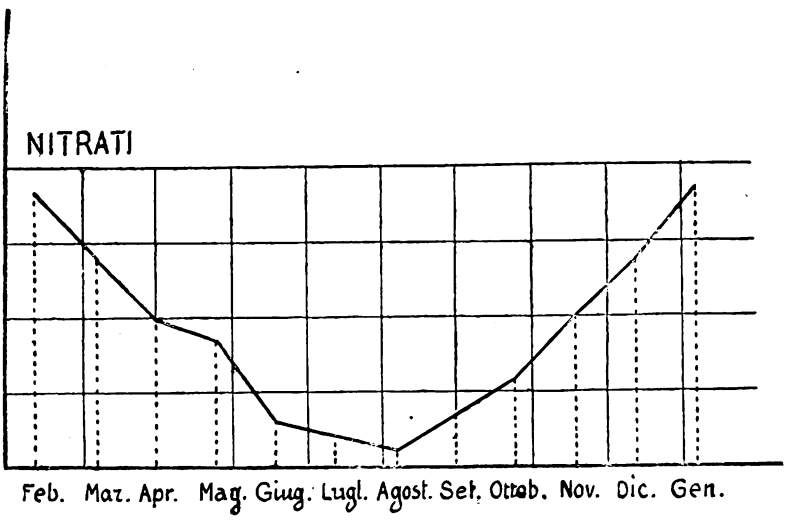


Diagramma 2.

*
* *

Per trarre più ampie conclusioni, è necessario compiere osservazioni per un periodo di tempo molto più lungo ed io infatti mi riserbo di continuare ed approfondire le ricerche di cui è oggetto la presente nota. Ad

Digitized by Google

ogni modo con i risultati a disposizione possiamo fin da oggi stabilire alcuni punti fermi non privi d'interesse.

Dai dati riportati risulta che nei mesi di gennaio-maggio, ottobre-dicembre, la quantità dei nitrati presente nell'acqua è maggiore alle rive che al centro del lago; invece nei mesi di giugno, luglio, agosto, tale diminuzione dei nitrati verso il centro va scomparendo: la quantità dei nitrati nelle acque al centro del lago è uguale e più spesso superiore a quella constatata presso la riva.

Come risulta dalla seguente tabella, le determinazioni eseguite nel 1926 hanno dato risultati in perfetta concordanza con quelli ottenuti nell'anno precedente:

30 giugno 1925			**30 giugno 1926**		
riva	temp. 23.5	nitrati mg. 0.157	riva	temp. 22.4	nitrati mg. 0.201
centro	» 23	» » 0.225	centro	» 22	» » 0.450
16 luglio 1925			**17 luglio 1926**		
riva	temp. 25.3	nitrati mg. 0.250	riva	temp. 24.5	nitrati mg. 0.20
centro	» 25	» » 0.250	centro	» 24	» » 0.20
18 agosto 1925			**22 agosto 1926**		
riva	temp. 26.6	nitrati mg. 0.125	riva	temp. 26.3	nitrati mg. 0.157
centro	» 26.2	» » 0.239	centro	» 26	» » 0.225

Comunemente il fatto che verso la riva i nitrati si trovano in più abbondante quantità che non al centro di uno specchio di acqua è interpretato come legato ad un inquinamento delle acque a contatto della riva stessa, inquinamento che va attenuandosi naturalmente verso il centro del lago.

Il fatto contrario da me rilevato nei mesi caldi nelle acque del lago di Castelgandolfo deve essere evidentemente determinato da fattori biologici in connessione con la maggiore temperatura dell'ambiente: vicino alle coste, per la più elevata temperatura che si raggiunge in estate dai terreni a contatto con le acque, viene maggiormente attivata la vita dei microrganismi viventi nell'acqua e specialmente del plancton: perciò più attivi fenomeni di riduzione, maggiore consumo di nitrati da parte del plancton, sempre del resto più abbondante vicino alla riva che in pieno lago.

Per quanto riguarda il variare del contenuto in nitrati con il variare delle stagioni, fino ad ora non è stato condotto nessuno studio sperimen-

Digitized by Google

tale: non si hanno quindi delle notizie bibliografiche esatte, ma solo vaghe conoscenze o piuttosto vere ipotesi, secondo le quali i composti inorganici di azoto sarebbero presenti in quantità maggiore nei mesi freddi. Queste ipotesi sono in relazione alla scoperta di Baur (1902) circa la presenza di batteri denitrificanti nelle acque ed il Brandt (1899), che per primo le emise, attribuirebbe appunto alla differenza di sviluppo di questi batteri e all'influenza che essi esercitano sopra il tenore delle acque in composti azotati, la causa della ricchezza in plancton dei mari polari e la povertà dei tropicali.

Questo autore spiega questa diversa ricchezza di flora e di fauna, ammettendo la distruzione dei nitrati dell'acqua per il metabolismo dei batteri denitrificanti. Nei mari caldi questo metabolismo avrebbe luogo con più intensità che nei mari freddi, sicchè questi sarebbero più atti alla produzione del plancton, contenendo le materie nutritive azotate in più grande quantità.

Alla teoria di Brandt furono però fatte varie obiezioni, prima tra tutte l'obiezione che la diffusione del plancton nei mari non corrisponde a quella da lui prospettata. La ricchezza in plancton, constatata nel golfo di Messina, la grande abbondanza di plancton delle spiagge equatoriali, costituiscono per esempio già dei fatti che infirmano la ipotesi di questo autore.

Nelle analisi da me fatte è risultato che costantemente la quantità dei nitrati è minore quando aumenti la temperatura dell'ambiente: questo risultato apparisce come una completa conferma sperimentale delle ipotesi emesse al riguardo.

È bene mettere questo risultato in relazione con quanto è stato da altri osservato circa la diffusione del plancton nelle acque a seconda delle stagioni: il contenuto planctonico delle acque sarebbe massimo nel periodo primaverile-estivo, minimo nel periodo invernale: da novembre a marzo le acque risultano cioè molto povere in organismi galleggianti.

I risultati delle mie ricerche mettono in evidenza una chiara relazione tra il contenuto in plancton delle acque da un lato, ed il tenore in nitrati dall'altro. Infatti nel periodo invernale, in cui si ha un minore contenuto in plancton, si ha un maggiore contenuto in nitrati. Viceversa nel periodo primaverile-estivo, i due valori si presentano invertiti: si viene quindi a riscontrare una diminuzione di contenuto in nitrati rispetto all'inverno.

La diminuzione dei nitrati in questo periodo sarebbe dovuta essenzialmente al risveglio della attività vegetativa e quindi all'attiva utilizzazione che da parte della flora viene in quel periodo fatta delle sostanze nutritive accumulatesi nei mesi invernali: l'accumulo in sostanze azotate era invece determinato in inverno dalla meno intensa fotosintesi e per la ridotta attività dei batteri denitrificanti. In primavera si viene riscontrando una diminuzione dei nitrati che va accentuandosi con l'aumento della vegetazione: la moltiplicazione abbondante della flora che trova così all'inizio nel mezzo

Digitized by Google

i materiali sufficienti per il suo nutrimento, esaurisce, al giungere della estate, le acque. Però a questo gruppo di cause, cioè alla maggiore attività della vegetazione bisogna forse, anche per ispiegarsi le variazioni del contenuto in nitrati delle acque in estate, aggiungere la maggiore attività dei batteri denitrificanti, che ad alte temperature si riproducono più attivamente.

In autunno si riscontra di nuovo un aumento nel contenuto in nitrati delle acque; ma a questo aumento, come vedremo, non sono estranee le pioggie. Viene infine l'inverno in cui le acque, per la povertà di organismi galleggianti e per la paralizzata attività di tutti gli organismi in genere, e forse per il decomporsi dei residui planctonici periti con il freddo, si arricchiscono di nuovo in sostanze azotate.

Dovrebbe, però, anche essere esaminata per il lago di Castelgandolfo la questione dei batteri nitrificanti e denitrificanti. Tale studio sarà fatto successivamente e, se le ricerche daranno risultati positivi, si potrà esaminare l'attività nitrificante delle acque del lago nei diversi periodi dell'anno e vedere se il risveglio della vegetazione sia collegato ad una attività più grande di questi batteri in primavera.

*
* *

Ma come più sopra ho accennato è per me importante nello studio del tenore di nitrati delle acque, specialmente di un lago, la pioggia caduta, la quale è capace di determinare variazioni apprezzabili.

Pensai che tale fatto potesse essere messo in evidenza con rilievi sopra il lago di Castel Gandolfo pel quale, per non avere immissari, la dipendenza pioggie-quantità di nitrati avrebbe dovuto essere più chiara e più diretta che altrove.

Come è noto e come fu dimostrato dagli studi di Liebig, Boussingault, Gilbert, Lawes, tutte le acque piovane, fatta eccezione di rarissime, contengono nitrati in proporzioni che possono oscillare con le stagioni o con la direzione dei venti e che variano da pioggia a pioggia, ecc.

L'aumento del contenuto in nitrati dopo le pioggie, è di particolare interesse specialmente ove risulti ridotta o nulla l'azione di batteri nitrificanti e denitrificanti.

È perciò molto interessante, seguire per almeno un anno continuate analisi delle acque del lago dopo giorni di pioggia, analisi che sole ci possono far valutare, con una certa approssimazione, la quantità di azoto combinato che, con tale mezzo, viene portata al lago.

Tale studio è stato da me fatto sopra le acque di Castel Gandolfo, portandomi in esso subito dopo giorni di abbondante pioggia e dopo temporali.

Dai rilievi che saranno riportati per esteso in un lavoro di prossima pubblicazione risulta molto chiara l'influenza delle precipitazioni atmosferiche sopra la quantità di N_2O_5.

Digitized by Google

Conclusioni.

1° Nel Lago di Castelgandolfo, si osserva nei mesi caldi, contrariamente al fatto generalmente rilevato, che i nitrati si trovano alla riva in quantità minore che non al centro: tale rilievo trova spiegazione nel fatto che presso la riva può svilupparsi nella stagione tiepida una più ricca vegetazione planctonica, il cui consumo di nitrati non è compensato da un corrispondente accumulo per inquinamento, essendo questo lago privo d'immissari.

2° Più accentuate sono le differenze in nitrati rilevate con il variare delle stagioni o piuttosto delle temperature ambiente: i due valori « tenore in nitrati » delle acque e « contenuto di plancton » si presentano invertiti: nel periodo invernale infatti il contenuto in nitrati si presenta notevolmente maggiore. La flora planctonica, che si risveglia in primavera e che va attivamente moltiplicandosi, viene utilizzando le sostanze nutritive, che si erano venute accumulando durante l'inverno.

3° La variazione in nitrati delle acque del lago è in gran parte connessa con la caduta delle acque meteoriche, particolarmente di quelle temporalesche, come dai dati di ricerche apposite rapportate in successivo studio, chiaramente si rileva.

Deve naturalmente anche essere ammessa la formazione di sostanza azotata come risultato del catabolismo vegetale ed animale del lago e forse anche come risultato di attività batterica, così come nel processo di riduzione di nitrati l'attività batterica ha forse un ruolo notevole; ma in ogni caso le mie osservazioni danno all'acqua meteorica, nel rifornimento in nitrati dell'acqua del lago, un valore di primo ordine.

Biologia. — *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina.* – II. *Modificazioni della struttura ultramicroscopica del cristallino per azione di sali, alcali ed acidi.* Nota di D. Cattaneo, presentata [1] dal Socio A. Dionisi.

In una Nota precedente ho descritto la struttura ultramicroscopica del cristallino normale esaminato a fresco, quale appare usando il condensatore bicentrico a specchio B per campo oscuro di Leitz.

In ispecial modo ho messo in rilievo come negli strati superficiali della corteccia si dimostra costantemente in una sostanza indifferenziata, otticamente omogenea, che rappresenta il protoplasma fondamentale della fibra lenticolare, una parte differenziata, non visibile coi mezzi ottici ordinari, costituita da

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

Digitized by Google

filamenti distinti, rinfrangenti, orientati secondo la direzione delle fibre stesse, i quali per i caratteri morfologici ricordano il condrioma descritto nei tessuti fissati e nelle culture in vitro.

Ora ho studiato le modificazioni che intervengono nella struttura ultramicroscopica, allorquando si tengono cristallini per tempi variabili in soluzioni diversamente concentrate di un sale (NaCl), di una base (NaOH) e di un acido (HCl).

Le esperienze sono state eseguite su cristallini di bue enucleati immediatamente dopo la morte e trattati quindi alla distanza di una o due ore.

A scopo di controllo per poter distinguere le alterazioni riscontrate da quelle semplicemente postmortali, si sono anche esaminati contemporaneamente occhi normali ad una distanza varia dalla morte, corrispondente cioè al periodo di immersione nelle soluzioni sperimentate.

Azione delle soluzioni ipotoniche, isotoniche ed ipertoniche di NaCl.

Secondo Manca ed Ovio per il cristallino di bue è isosmotica la soluzione all' 1.2 °/₀ di NaCl.

Io ho sperimentato con soluzioni al 0.25 °/₀ = 0.0427 N, al 0.50 °/₀ = = 0.0855 N, all' 1 °/₀ = 0.171 N, all' 1.20 °/₀ = 0.205 N, al 3 °/₀ = 0.513 N, al 5 °/₀ = 0.855 N, al 7 °/₀ = 1.368 N, al 10 °/₀ = 1.710 N, e fatto l'esame dopo 1 ora, 3 ore, 4 ore, 7 ore, 24 ore, 35 ore.

Come è noto, l'imbibizione varia secondo le diverse concentrazioni (Bottazzi e Scalinci).

Nelle soluzioni ipotoniche il cristallino si rigonfia ed aumenta di peso, nelle isotoniche si conserva inalterato variando poco di peso, nelle ipertoniche in un primo periodo diminuisce di peso, in un secondo raggiunge il suo peso iniziale, in un terzo periodo aumenta progressivamente di peso.

I fenomeni che si rilevano all'ispezione, già descritti da Manca ed Ovio, consistono inizialmente nella formazione di chiazze bianche che si estendono negli strati superficiali, tanto più intense quanto maggiore è la concentrazione; in un secondo tempo le opacità vanno risolvendosi lentamente. Nelle mie esperienze ho rilevato che, scomparse nelle prime ore le chiazze bianche, dopo 24 ore nelle soluzioni più diluite il cristallino è perfettamente trasparente, in quelle di media concentrazione si hanno talora lievissimi intorbidamenti superficiali, nelle più concentrate si nota lieve opacità.

I reperti all'esame ultramicroscopico sono i seguenti:

Nei cristallini tenuti in soluzione al 0.25 °/₀, 0.50 °/₀ anche dopo 24 ore nell'epitelio i nuclei permangono otticamente vuoti, il citoplasma rinfrangente con evidente struttura granulosa; negli strati superficiali della corteccia i condriosomi o sono conservati sotto la forma di filamenti talvolta intercalati

Digitized by Google

da anellini, o si presentano sotto l'aspetto di granuli sia isolati sia disposti in serie lineari.

Le soluzioni all'1 %, 1.20 % conservano la struttura ultramicroscopica quale si osserva nei cristallini normali. Dopo 3, 4 ore nell'epitelio i nuclei sono sempre oscuri, il citoplasma è forse un po' più rinfrangente della norma; nelle fibre superficiali i condriosomi sono rappresentati da filamenti regolari, lisci o granulosi, mentre le fibre profonde, come di norma, sono otticamente vuote. Anche dopo 35 ore di permanenza nella soluzione si osservano ancora negli strati superficiali condriosomi sotto il solito aspetto di filamenti spesso con anellini isolati o intercalati sul decorso dei filamenti stessi.

Diverso invece è l'aspetto ultramicroscopico dei cristallini tenuti in soluzioni concentrate. Quale che sia il periodo di immersione (da 1 ora a 35 ore), si osservano nelle fibre corticali numerose formazioni simili a vacuoli di dimensioni notevoli che appaiono come grossi anelli rotondi od ovali ad orlo splendente, cosicchè impartiscono una notevole rinfrangenza alle fibre. Nei punti dove essi sono meno numerosi si osservano ancora i condriosomi, ma in tutti i casi profondamente trasformati, ed è possibile seguire le fasi della trasformazione. Anche solo dopo 1 ora di immersione rarissimi sono i condriosomi che conservano la forma di filamenti, per lo più si hanno granuli distinti e anellini isolati che differiscono peraltro dai grossi vacuoli sopra accennati per essere assai più fini. Quando l'immersione viene prolungata nelle soluzioni al 5, 7, 10 %, i filamenti scompaiono pressochè completamente; permangono solo granuli e anellini sottili. Le fibre del nucleo sono sempre otticamente vuote.

Sembra quindi di poter conchiudere che, mentre nelle soluzioni isotoniche i condriosomi anche dopo parecchio tempo mantengono perfettamente la loro forma e struttura normale, nelle ipotoniche almeno fino ad un certo punto sono conservati, nelle soluzioni ipertoniche invece, pur non scomparendo totalmente, subiscono profonde modificazioni morfologiche.

Azione degli alcali.

Ho usato soluzioni di NaOH a diverse concentrazioni (N = 4.0008 %, 0.1 N = 0.4 %, 0.02 N = 0.08 %, 0.01 N = 0.04 % e 0.005 N = 0.02 %), in ognuna delle quali tenni le lenti cristalline per tempi diversi (1 ora, 2 ore, 3 ore, 4 ore, 5 ore, 8 ore, 24 ore).

In tutte le soluzioni adoperate le lenti rimangono sempre trasparenti. L'imbibizione è notevole, la capsula tende a sollevarsi, qualche volta si rompe e allora la sostanza corticale fa ernia attraverso la breccia; nelle soluzioni più concentrate la sostanza corticale tende a spappolarsi.

È forse in conseguenza della rapida e intensa imbibizione che all'esame ultramicroscopico spesso non è possibile osservare l'epitelio. Nelle soluzioni più diluite, però, fino a 0.02 N, nelle prime ore si possono ancora osservare

Digitized by Google

i nuclei oscuri; il citoplasma più rinfrangente non lascia rilevare però una distinta struttura granulosa.

Il reperto più notevole che si si rileva costantemente all'esame della corteccia anteriore e posteriore, sia usando soluzioni più diluite, sia soluzioni più concentrate, anche dopo brevi periodi di immersione, è la tendenza dei condriosomi a scomparire nelle fibre superficiali. Già nella soluzione 0.01 N dopo 1 ora di immersione i condriosomi con la forma di filamenti sono molto diminuiti: si notano in genere filamenti granulosi e anellini intercalati sul decorso dei filamenti. Nella soluzione 0.02 N dopo 3 ore la involuzione dei condriosomi è più avanzata; accanto a più rari filamenti, corti, di spessore ineguale si osservano frammenti granulosi, anellini, granuli. In seguito si giunge al punto in cui i condriosomi sono completamente scomparsi, rimane la sostanza fondamentale omogenea, otticamente vuota. Le fibre profonde della corteccia, come di norma, hanno un contenuto oscuro e sono delimitate da linee più rinfrangenti; la sostanza del nucleo si presenta sempre otticamente vuota.

Per azione degli alcali dunque nelle fibre lenticolari la parte differenziata che costituisce il condrioma, all'osservazione ultramicroscopica scompare, mentre rimane otticamente immutata la parte fondamentale omogenea.

Azione degli acidi.

Analogamente a quanto ho fatto per le soluzioni alcaline ho studiato gli effetti rilevabili all'ultramicroscopio delle soluzioni acide sulla lente cristallina, ricorrendo a soluzioni di HCl di differente concentrazione (N = 3.646 %, 0.1 N = 0.364 %, 0.02 N = 0.0729 %, 0.01 N = 0.0364 %, 0.005 N = = 0.0182 %). Dopo intervalli variabili di ora in ora fino a 5 ore, poi ad 8, 12, 24 ore si sono praticati gli esami.

L'imbibizione, meno intensa che nelle soluzioni di NaOH, è pur tuttavia manifesta anche nelle soluzioni di HCl. Per effetto dell'imbibizione se si lede la capsula dalla soluzione di continuo fa ernia la sostanza corticale rigonfiata. A differenza poi di quanto si è notato nelle soluzioni alcaline, nelle soluzioni acide il cristallino subisce un'opacificazione più o meno intensa a seconda della concentrazione e del tempo di immersione. Qualche volta si ha una opalescenza diffusa; per lo più le opacità, limitate agli strati superficiali, hanno l'aspetto di strie radiali.

Le modificazioni strutturali rilevabili all'indagine ultramicroscopica sono assai manifeste anche nell'epitelio. I nuclei, che conservano una forma regolare, ovale o rotonda, spiccano nel campo oscuro perchè sono assai rinfrangenti e presentano una struttura finemente granulosa, risultando costituiti da regolari distinti granuli minutissimi, che appaiono all'ultramicroscopio grigio–argentei. Il citoplasma al contrario è assai meno rinfrangente. Questo reperto è costante e si osserva anche usando soluzioni diluite.

Digitized by Google

Negli strati superficiali nella corteccia anteriore e posteriore i condriosomi tendono a scomparire; in certi casi si assiste alla trasformazione dei filamenti in granuli isolati, anellini o ammassi granulosi; dopo alcune ore di immersione anche nella soluzione 0.01 N non rimane più traccia di filamenti.

Di pari passo si modifica la sostanza fondamentale delle fibre lenticolari, in condizioni normali sempre oscura ed omogenea; si comincia cioè a notare una maggior rinfrangenza del contenuto delle fibre, fino a che queste diventano tutte brillanti e assomigliano a nastri grigio-argentei. L'osservazione ultramicroscopica a forte ingrandimento rivela una struttura finissimamente granulare.

Questo aspetto si manifesta anche nelle fibre più profonde della corteccia nelle quali normalmente non si osservano condriosomi. Spesso appare a tratti, per cui in certe fibre si hanno delle zone ancora oscure otticamente omogenee e delle zone rinfrangenti granulose; in tutti i casi il fenomeno è dovuto a modificazioni del protoplasma fondamentale, non mi sembra in rapporto con la trasformazione e con la involuzione dei condriosomi.

*
* *

Dalle esperienze fatte risulta dunque che per azione di soluzioni di NaCl, di NaOH, di HCl si modifica variamente la struttura ultramicroscopica delle fibre lenticolari.

Le modificazioni, che precipuamente si manifestano nelle fibre corticali come quelle che maggiormente risentono l'azione degli agenti esterni, possono riguardare la parte differenziata, quella che abbiamo considerato il condrioma, e la parte fondamentale omogenea, il protoplasma in senso stretto.

Mentre le modificazioni della parte differenziata sono compatibili con la perfetta trasparenza del cristallino, almeno da quanto si rileva all'ispezione e risulta coi mezzi ottici ordinari, le modificazioni della parte fondamentale implicano un'opacificazione più o meno intensa delle fibre.

I condriosomi attraversano una serie di passaggi involutivi che vanno dalla trasformazione dei filamenti in serie lineari di granuli, in anellini, ammassi di granuli, frammentazioni irregolari, fino alla scomparsa più o meno completa.

Questi fenomeni si possono spiegare, almeno in parte, col processo di imbibizione che interessa tanto la sostanza fondamentale, quanto la parte differenziata. Nelle soluzioni di NaOH, dove rapidamente i condriosomi scompaiono, si deve ammettere verosimilmente che la imbibizione assai notevole, prevalga ancor più nella parte differenziata, onde per la rapida idratazione i condriosomi perdono la loro caratteristica rinfrangenza e non si rendono più otticamente differenziabili della sostanza fondamentale.

Digitized by Google

Inversamente la maggior rinfrangenza che si osserva in certi casi nei condriosomi (per esempio, nel caso più semplice, esaminando preparati a fresco dopo mezz'ora, un'ora dall'allestimento), è da riferirsi a perdita d'acqua da parte precisamente del colloide che li costituisce.

Le alterazioni della parte fondamentale, che si accompagnano con opacificazione delle fibre, si rivelano all'esame ultramicroscopico col fatto che essa, in condizioni normali otticamente vuota, diventa rinfrangente con trasformazione della struttura omogenea in struttura granulosa.

Questa granulificazione del protoplasma che nelle esperienze riferite in questa Nota si è verificata per azione delle soluzioni di HCl, si ottiene verosimilmente con tutti quei fattori che portano le proteine lenticolari verso il punto isoelettrico (*optimum* di precipitazione).

Già fin dal 1908 Mayer e Schaeffer, paragonando il protoplasma ad un gel alcalino o negativo, avevano fatto rilevare che esso si intorbida per azione degli acidi, si omogenizza per alcalinizzazione: cioè gli acidi, e cogli acidi i sali dei metalli pesanti, i disidratanti (calore, alcool), agiscono sul protoplasma facendovi apparire dei granuli che precipitano.

Poichè nei gel i granuli colloidali se esistono si possono considerare come imbibiti dal solvente in modo da formare con questo una massa omogenea, ogni azione che diminuisce questo legame fa apparire delle granulazioni ultramicroscopiche prima fini poi sempre più grosse.

Nelle fibre lenticolari diciamo dunque che per azione degli acidi si ha una precipitazione del colloide che costituisce il protoplasma fondamentale, il quale da omogeneo diventa granuloso.

Questo fenomeno che possiamo definire *processo di granulificazione del protoplasma lenticolare*, è l'espressione ultramicroscopica di un intorbidamento delle fibre e probabilmente interviene in tutte le forme artificiali e naturali di opacificazione del cristallino.

BIBLIOGRAFIA

Bottazzi e Scalinci, *Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina.* Atti della R. Accademia dei Lincei, « Rendiconti della Classe di Scienze fisiche », 1908 e 1909.

Cattaneo, *Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina.* - I. *La struttura ultramicroscopica del cristallo normale.* Atti della R. Accad. dei Lincei, « Rendiconti della Classe di Scienze fisiche », 1927.

Manca ed Ovio, *Studi intorno alla cataratta artificiale*, « Arch. di Ottalm. », V, 1897.

Mayer et Schaeffer, *Sur la structure des gels. Application à l'étude de la constitution du protoplasma animal et des liquides de l'organisme*, « C. rend. Soc. de Biol. », LXIV, 1908.

Digitized by Google

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. FANO comunica un telegramma del sen. A. GARBASSO, il quale si scusa di non poter intervenire alla seduta.

Annuncia quindi la morte, avvenuta a Washington il 19 febbraio 1927, del geologo CARLO WALCOTT, Socio straniero dell'Accademia fin dall'aprile 1901.

Comunica all'Assemblea che il Socio Straniero HAGEN ha, giorni or sono, compiuto il suo ottantesimo anno. Presenta all'insigne Socio le più vive felicitazioni dell'Accademia e formula l'augurio che ancora per lunghi anni venga conservata alla scienza la sua preziosa attività.

L'Assemblea applaude vivamente.

Il Socio Straniero HAGEN ringrazia degli auguri il Presidente ed i Colleghi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio T. LEVI-CIVITA, anche a nome del prof. U. AMALDI, fa omaggio del volume II (Parte seconda), delle loro *Lezioni di Meccanica razionale*, accompagnandone la presentazione colle parole seguenti:

« Questo volume $(II)_2$ consta di sei capitoli. I primi tre si riferiscono alla dinamica dei solidi. In essi, accanto agli sviluppi classici e ad una indagine alquanto approfondita dei movimenti più comuni e della loro stabilità, abbiamo incluso una spiegazione, che ci lusinghiamo ridotta al massimo di semplicità, dei fenomeni giroscopici elementari, nonchè, seguendo il Crocco, alcuni cenni sulla stabilità longitudinale degli aeroplani, e, seguendo il Volterra, le proprietà generali della rotazione dei solidi con moti ciclici interni (la quale si collega tra altro alla questione della variazione delle latitudini). Gli altri tre capitoli sono ordinatamente dedicati ai sistemi canonici, ai principi variazionali, al moto impulsivo. Vi abbiamo fatto figurare anche i nostri modesti contributi originali concernenti: la costruzione di soluzioni particolari in base alla conoscenza di integrali o di relazioni invarianti; le sestuple canoniche nel problema dei due corpi e relative trasformazioni; l'indipendenza degli argomenti nel principio dell'azione variata. Inoltre abbiamo ripreso (e, a nostro avviso, perfezionato) la interpretazione ottica dei sistemi canonici omogenei, la quale può avere qualche interesse di attualità di fronte alla nuova meccanica ondulatoria di De Broglie e di Schrödinger ».

L'Accademico Segretario G. CASTELNUOVO presenta le opere giunte in dono all'Accademia, segnalando l'« Annuario statistico dell'emigrazione italiana per gli anni 1869-1925 » pubblicato a cura del Commissariato generale dell'Emigrazione; « The Pacific-Russian Scientific. Investigations » a cura dell'Academy of sciences dell'Unione S. S. R.; gli opuscoli « Studi sugli Aphelininae » del Socio SILVESTRI; vari opuscoli del Socio Straniero WASHINGTON, del Socio D'ACHIARDI, e di altri.

Digitized by Google

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente sen. FANO presenta un plico suggellato del sig. NARCISO DESIRELLO da conservarsi negli archivi dell'Accademia, e da aprirsi dopo venti anni.

COMMISSIONI

Il Presidente sen. FANO dà lettura di una lettera del Ministero con la quale si prega l'Accademia di dare il suo parere sulle proposte per la Riforma del Calendario elaborate dalla Commissione speciale della Società delle Nazioni.

L'Assemblea dà mandato alla Presidenza di nominare una Commissione per lo studio di dette proposte e per la compilazione del parere richiesto all'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° maggio 1927

ALDEN H. L. — Apparent Orbit of μ Persei. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXVI, n. 11). Albany, 1925, fol.

ALDEN H. L. — Distant Companion of γ Ceti. (From the « Astronomical Journal », n. 837). Albany, 1924, fol.

ALDEN H. L. — The Parallax of Delta Trianguli. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXVI, n. 6). Albany, 1925, fol.

ALDEN H. L. — The Proper-Motion of Barnard's Star in *Ophiuchus*. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXV, n. 17). Albany, 1924, foll.

ALDEN H. L. — Trigonometric Parallaxes of thirty Stars. (From the « Astronomical Journal », n. 851). Albany, 1925, fol.

ALDEN H. L. and DE KAMP (van) P. — Faint Stars of Appreciable Proper-Motion. (From the « Astronomical Society ». Vol. XXXV, n. 21). Albany, 1924, fol.

ALDEN H. L. and DE KAMP (van) P. — The Solar Motion derived from the Proper-Motions of Tenth Magnitude Stars. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXVI, n. 3). Albany, 1924, fol.

ALDEN H. L. and MITCHELL. S. A. — Photometric Sequence in the Pleiades. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXVI, n. 10). Albany, 1925, 4°, pp. 1-4.

ALDEN H. L. and others. — Observations of *Nova Cygni*. (From the « Astronomical Journal », n. 840). Albany, 1920, fol.

Annuario statistico dell'emigrazione italiana dal 1876 al 1925. Roma, 1926. 8°, pagine I-XXI, 1-740.

BATTAGLIA M. — L'edema nelle infezioni da tripanosomi. (Estr. dalla Rivista « Pathologica », n. 424). Genova, 1927. 8°, pp. 1-2.

CHAPIN E. A. — The Beetles of the Family Cleridae collected an the Mulford Biological Exploration of the Amazon Basin, (1921-1922). Washington, 1927, 8°, pp. 1-10.

Digitized by Google

Colizza C. — Il verme dei garofani (Tortrix pronubana Hb.). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XX, pp. 42-59). Portici, 1927, 8°.

Cushman J. — Foraminifera of the Genus Ehrenbergina and its Species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927, 8°, pp. 1-7.

D'Achiardi G. — Il ritrovamento dell'anidrite nella regione dei soffioni boriferi a Castelnuovo Val di Cecina (Pisa). (Estr. dai « Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXV). Pisa, 1926, 8°, pp. 1-7.

D'Achiardi G. — L'industria mineraria e metallurgica in Toscana al tempo degli Etruschi. (Estr. dalla Rivista mensile illustrata « La Miniera Italiana », n. 3). Roma, 1927, 4°, pp. 1-3.

De Kamp (van) P. — Note on the Proper Motion of υ Leonis–Boss. 3058. (From the « Astronomical Journal ». Volume XXXVI, n. 24). Albany, 1926, fol.

De Kamp (van) P. — Note on the Solar Motion with Respect to Tenth Magnitude Stars. (From the « Astronomical Journal », n. 864). Albany, 1926, fol.

Dyar H. G. and Shannon R. C. — The North American Two-Winged Flies of the Family Simuliidae. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1927, 8°, pp. 1-54.

Forbes E. B. and Swiet R. W. — The Efficiency of Utilization of Protein in Milk Production as indicated by Nitrocen Balance Experiments. (Reprint from « Journal of Dairy Science ». Vol. VIII, pp. 15-27). Pennsylvania, 1925, 8°.

Foshag W. F. and Berman H. M. — The Occurrence and Properties of Chlorophoenicite, a new Arsenate from Franklin, New Jersey. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927, 8°, pp. 1-6.

Giannotti C. — Forma cristallina di alcune sostanze organiche. (Estr. dai « Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXV). Pisa, 1926, 8°, pp. 1-8.

Giannotti C. — Il tracciamento degli assi nel disegno ortografico dei cristalli per mezzo dei monogrammi. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXVII). Pisa, 1926, 8°, pp. 1-30.

Giannotti C. — Wollastonite nella formazione granitica di Gavorrano. (Estr. dai « Processi Verbali della Società Toscana di Scienze Naturali ». Vol. XXXIII). Pisa, 1924, 8°, pp. 1-7.

Healey Dall W. — Diagnoses of undescribed New Species of Mollusks in the Collection of the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927, 8°, pagine 1-11.

Howell A. B. — Contribution to the Anatomy of the Chinese Finless Porpoise Neomeris Phocaenoides. (From the « Proceedings of the United State National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927, 8°, pp. 1-43.

Kirk E. — Tanaodon, a new Molluscan Genus from the Middle Devonian of China. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 70). Washington, 1927, 8°, pagine 1-4.

Laidlaw F. F. — Description of a new Dragon Fly from Lower Siam Belonging to the Genus Urothemis. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927, 9°, pp. 1-3.

Levi-Civita T. e Amaldi U. — Lezioni di Meccanica razionale. Vol. II. Bologna, 1927, 8°, pp. I-IX, 1-684.

Merrill G. P. — A Stony Meteorite from Forksville, Mecklenburg County Virginia. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Volume 70). Washington, 1927, 8°, pp. 1-4.

Digitized by Google

MITCHELL S. A. — McCormick Parallaxes of Stars of *b* Type. (Reprint. from the « Publications of the Astronomical Society of the Pacific ». Vol. XXXVIII, pp. 101-105). s. l., 1926, 8°.

MITCHELL S. A. — Trigonometric Parallaxes of Forty Seven Stars. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXVI, n. 17-18). Albany, 1926, fol.

MUCSEBECK C. F. V. — A Revision of the Parasitic Wasps of the Subfamily Braconinae Occurring in America North of Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1927, 8°, pp. 1-71.

OLIVIER C. P. — A revised List of the Olivier Double Stars. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXV, nn. 2-3). Albany, 1923, 4°, pp. 1-4.

OLIVIER C. P. — Measures of 100 Double Stars made with the 26-Inch Refractor of the Leander McCormick Observatory. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXVI, n. 846). Albany, 1925, 4°, pp. 1-3.

OLIVIER C. P. — Parallaxes of Fifty Stars. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXV, n. 24; vol. XXXVII, n. 4). Albany, 1924, 1926, fol.

RANZI S. — La circolazione del liquido perivitellino nell'uovo dei Cefalopodi durante lo sviluppo embrionale. (Estr. dal « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli ». Vol. XVIII, pp. 99-107). Napoli, 1926, 8°.

RANZI S. — L'organo di senso spiracolare dei Selaci. (Estr. dalle « Pubblicazioni della Stazione Zoologica di Napoli ». Vol. VII, pp. 37-76). s. l., 1926, 8°.

RANZI S. — Ricerche di morfologia sperimentale nei Cefalopodi. (Estr. dal « Bollettino della Società di Biologia Sperimentale di Napoli ». Vol. I, fasc. III). Napoli, 1926, 8°, pp. 1-3.

SILVESTRI F. — Studi sugli Aphelininae (*Hymenoptera Chalcididae*). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XX, pp. 36-41). Portici, 1926, 8°.

VYSSOTSKY A. — Proper Motions of Three Hundred and Eighteen Faint Stars in *Cygnus*. (From the « Astronomical Journal ». Vol. XXXVIII, n. 13). Albany, 1927, 4°, pp. 1-14.

WASHINGTON H. S. — Granites of Central Spain. (Reprint. from « Journal of the Washington Academy of Sciences ». Vol. XVI, n. XV, pp. 409-412). Washington, 1926, 8°.

WASHINGTON H. S. — La costituzione della terra. (Extr. du « Bulletin Volcanologique ». N. 5 et 6, 1925). Napoli, 1926, 8°, pp. 1-39.

WASHINGTON H. S. — L'eruzione di Santorino del 1925. (Extr. du « Bulletin Volcanologique ». Nn. 7-8). Napoli, 1926, 8°, pp. 1-11.

WASHINGTON, H. S. — Santorini Eruption of 1925. (Reprint. from the « Bulletin of the Geological Society of America ». Vol. XXXVII, pp. 349-384.) Washington, 1925, 8°.

WASHINGTON H. S. and AUROUSSEAU M. — The Lavas of Etna. (From « American Journal of Science ». Vol. XII, pp. 371-408). Washington, 1926, 8°.

WASHINGTON H. S. and KEYES M. G. — Petrology of the Hawahan Islands: V. The Leeward Islands. (From « American Journal of Science ». Vol. XII, pp. 336-352). Washington, 1926, 8°.

WASHINGTON H. S. and KEYES M. G. — Rocks of Eastern China. (Reprint. from « Journal of the Washington Academy of Sciences ». Vol. XVI, n. XI, pp. 291-301). Washington, 1926, 8°.

G. C.

Digitized by Google

ARMELLINI-CONTI G. - Sul confronto dei cataloghi colorimetrici di Hagen, Sestini, Osthoff e Kruger (pres. dal Socio *A. Di Legge*) . . . . . Pag. 670
BARBIERI U. - Collegamento geodetico del vertice di Andrate alla rete di 1° ordine dello Stato (pres. dal Socio *G. Loria*) 674
EREDIA F. - La variazione della velocità del vento dal suolo fino a 4000 m. secondo i sondaggi eseguiti a Vigna di Valle (Roma) (pres. dal Corrisp. *L. Palazzo*) . 675
CARRARA N. - Sopra un nuovo tipo di riflessione dei Raggi X (pres. dal Socio *L. Puccianti*) 680
CARRELLI A. - Sulla doppia rifrazione paramagnetica (pres. dal Socio *M. Cantone*). 684
MAZZA L. - Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo (pres. dal Corrisp. *L. Rolla*). 688
MALQUORI G. - Il sistema $Fe(NO_3)_3 - Al(NO_3)_3 - H_2O$ a 25° (pres. dal Socio *N. Parravano*) 693
D'ANCONA U. - L'influenza della concentrazione sulla perdita in peso di giovani anguille allevate a digiuno in soluzioni di cloruro di sodio (pres. dal Socio *G. Fano*) . . . . . »
PEGLION V. e SACCHETTI M. - Intorno alla peronospera del Lillà - (Phytophthora Syringae, Klebahn) (pres. dal Corrisp. *L. Petri*) 696
SAVELLI R. - Come si scinde una semimutante (pres. dal Socio *B. Longo*) . . . 698
CAMPANILE S. - Ricerche sulle variazioni stagionali dei composti inorganici di azoto esistenti nelle acque del lago di Castelgandolfo (pres. dal Socio *N. Parravano*) 705
CATTANEO D. - Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. - II. Modificazioni della stuttura ultramicroscopica del cristallino per azione di sali, alcali ed acidi (pres. dal Socio *A. Dionisi*) 711

PERSONALE ACCADEMICO

FANO G. (Presidente). - Annuncia la morte del Socio Straniero Carlo Walcott . . 717
ID. - Fa gli auguri dell'Accademia al Socio HAGEN che compie l'ottantesimo anno »
HAGEN G. - Ringrazia degli auguri . . . . . »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

LEVI-CIVITA T. - Presenta anche a nome del prof. AMALDI il vol. II (parte seconda) delle loro *Lezioni di Meccanica razionale* . . . . . »
CASTELNUOVO G. (Segretario). - Presenta le opere giunte in dono all'Accademia segnalando volumi e opuscoli dei Soci SILVESTRI, D'ACHIARDI e WASHINGTON »

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

FANO G. (Presidente) - Presenta un plico suggellato del sig. NARCISO DESIRELLO . »

COMMISSIONI

FANO G. (Presidente). - Comunica alla Classe una lettera con la quale il Ministero chiede il parere dell'Accademia sulla Relazione della Commissione speciale della Società delle Nazioni per la Riforma del calendario 718
CASTELNUOVO G. (Segretario). - Propone che si dia mandato alla Presidenza di nominare una Commissione . . . . . »

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° maggio 1927 . . . . . »

Digitized by Google

RENDICONTI - Maggio 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° maggio 1927 (Anno V)

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

CARTAN E. - Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes . . . . Pag. 609
BURGATTI P. – Sulle cause della luminosità delle stelle cadenti 614
ABETTI G. - Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1926 618
MAJORANA Q. - Su di un nuovo metodo di telefonia ottica con luce ordinaria o con luce ultravioletta 622
NASINI R. e PORLEZZA C. – Determinazione della concentrazione in idrogeno ioni attivi in acque minerali italiane . . . . . »
FRANCHI S. - La « falda di ricoprimento del Monte Rosa » di Emile Argand e l'anticlinale permo-triasica Acceglio-Col Longet, nelle Alpi Cozie meridionali . . 628
ZAMBONINI F. e CAGLIOTI V. – I solfati doppî dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. IX. Solfati di neodimio e di rubidio 630
CAMBI L. e SZEGÖ L. – Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro . . . 636
ID. - Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro. La reazione fra nitroprussiato e alcali 641
CAMBI L. - Sui diazoidrati . . . . . »
BRUNI G. e GEIGER E. – Nuovi derivati del caucciù 642
BAGLIONI S. - Ricerche di fisiologia umana presso la Scuola centrale di Educazione fisica . . . . . »

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

ASCOLI G. - Sul problema di Dirichlet nei campi sferici e ipersferici (pres. dal Corrisp. *G. Fubini*) 647
PINI E. - Sulla ricerca delle funzioni primitive per le funzioni di più variabili (presentata dal Socio *L. Tonelli*) 650
DUBOURDIEU J. - Sopra le coordinate cartesiane lungo un curva (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 654
BERWALD L. – Sui differenziali secondi covarianti (pres. *Id.*) 655
BOSSOLASCO M. – Sui sistemi di funzioni di Tchebycheff che sono ortogonali (presentata dal Socio *C. Somigliana*) 656
PACELLA B. – Sulla ricerca della forma delle onde luminose dall'esame delle frangie d'ombra (pres. dal Socio *A. Garbasso*) . . . . . »
PINI E. - Ancora sulla ricerca della funzione primitiva per le funzioni di più variabili (pres.dal Corrisp. *L. Tonelli*) . . . . . »
POLI C. - Sui principi della meccanica analitica (pres. dal Socio *C. Somigliana*) . »
SBRANA F. - Sul moto sferico vorticoso di un fluido incomprimibile (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 661
FERMI E. - Sul meccanismo dell'emissione nella meccanica ondulatoria (pres. dal Socio *O. M. Corbino*) 665
THOMSEN G. – Sopra la meccanica relativistica dei sistemi olonomi (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) . . . . . »
FINZI B. - Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski (pres. dal Corrisp. *U. Cisotti*) 666

(*Segue in terza pagina*).

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 maggio 1927 (anno V).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astrofisica. — *Sulle relazioni fra le eruzioni solari e le tempeste magnetiche terrestri.* Nota [1] del Corrisp. GIORGIO ABETTI.

Lo studio delle relazioni che passano fra i fenomeni di attività solare e le perturbazioni del magnetismo terrestre porta sempre più a stabilire quello che già da tempo Tacchini aveva supposto e che Hale più tardi confermava.

Il Tacchini infatti così chiaramente si esprime [2]: « ... se al passaggio sul disco di una grande macchia si verifica un disturbo magnetico sulla terra, ciò vorrà dire che su quella macchia e regioni attigue ebbero luogo fenomeni straordinari di protuberanze, eruzioni solari, aurore, ecc., che indussero il disturbo suddetto, se invece nel magnetismo nulla si osserva di anormale, la grande macchia o gruppo passò in istato di calma ». Hale avendo dimostrato che l'intensità del campo nelle macchie decresce rapidamente, dal livello della fotosfera verso la cromosfera, conclude [3] essere improbabile, come indica la teoria, « che le tempeste magnetiche terrestri sieno causate direttamente dai campi magnetici delle macchie solari. La loro origine può venire cercata con maggiore speranza di successo nelle eruzioni visibili sugli spettroeliogrammi nelle regioni che circondano le macchie ».

L'uso dello spettroeliografo ha finora permesso, soltanto in qualche caso, ancora raro ed isolato, sia per il tempo relativamente breve da che questo

(1) Presentata nella seduta del 24 aprile 1927.
(2) « Mem. Spettr. Ital. », vol. 23, p. 5, 1894.
(3) « Astrophys. Journ. », vol. 28, p. 341, 1908.

Digitized by Google

strumento è entrato nel pratico uso delle osservazioni solari, sia per la rapidità dei fenomeni stessi per cui riesce difficile di assicurarne il momento di massimo sviluppo, di stabilire con una certa probabilità la corrispondenza fra una determinata eruzione solare e una determinata tempesta magnetica terrestre.

Scopo della Nota presente è di mettere in evidenza alcuni di questi casi più notevoli, che, confermando l'ipotesi di Tacchini ed Hale, danno anche un valore probabile del tempo impiegato dalle perturbazioni per giungere alla terra dal sole.

Che l'azione solare sul magnetismo terrestre si manifesti con un ritardo rispetto ai fenomeni dell'attività solare è stato dimostrato più volte da Riccò [1], il quale assume, come momento di partenza dal sole degli elementi perturbanti, l'istante del passaggio di grandi macchie attive al meridiano centrale del sole, pensando essere questo il momento più favorevole per la recezione da parte della terra. Il Maunder [2], che ha fatto una vasta trattazione statistica della presenza delle macchie in relazione alle burrasche magnetiche terrestri, trova che queste cominciano in un intervallo fra 34 ore avanti il passaggio di un gruppo di macchie per il meridiano centrale del sole e 86 ore dopo, in media 26 ore dopo. Pare dunque che esista una determinata zona sul disco per la quale di preferenza può avvenire il fenomeno.

Se le perturbazioni magnetiche sulla terra sono dovute a sciami di corpuscoli proiettati da limitate regioni della superficie solare attorno alle macchie è evidente, che questi non potranno giungere sulla terra che quando queste regioni si troveranno in posizione adatta, cioè ad angoli, con la direzione del raggio del sole, che si possono dedurre, come nota Evershed [3], dai resultati ottenuti da Maunder. Questi angoli infatti dovrebbero raramente sorpassare 34° nel senso delle longitudini perchè l'intervallo di tempo sopra trovato corrisponde ad un angolo totale di 68° in longitudine. Prendendo la posizione occidentale media delle macchie al principio delle burrasche, cioè 26 ore ad ovest del meridiano, sarà questo il tempo di trasmissione impiegato dai corpuscoli per passare dal sole alla terra con possibili inclinazioni massime, all'est o all'ovest della visuale, di 34°. Sembrerebbe dunque che gli sciami di corpuscoli possano venire emessi dalle macchie o dalle regioni circonvicine in qualsiasi direzione con la velocità media di 1600 km/sec., entro i limiti di un cono, del quale l'apice, di 68° circa, è situato nella macchia e l'asse è in direzione di un raggio.

Queste considerazioni sono altresì confermate dalle relazioni trovate da Cortie [4] fra la presenza delle macchie e le tempeste magnetiche conside-

(1) « Mem. Spettr. Ital. », vol. 33, p. 38, 1904, e vol. 38, p. 157, 1909.

(2) « Monthly Not. R. A. S. », vol. 64, p. 205, 1904 e vol. 65, p. 2, 1904.

(3) « The Observatory », vol. 27, p. 129, 1904.

(4) « Monthly Not. R. A. S. », vol. 73, p. 52 e 539, 1912-1913, e vol. 76, p. 15, 1915.

Digitized by Google

rando la latitudine eliografica delle prime. Infatti egli trova che la posizione di un'area perturbata sul sole diventa più importante in efficenza magnetica quando, dopo il massimo, la latitudine delle macchie va avvicinandosi all'equatore. Poichè la latitudine eliografica della terra varia fra ± 7°, essa è allora situata in posizione più favorevole per essere influenzata dalle perturbazioni solari. Di più Cortie stabilisce che le perturbazioni magnetiche sono più frequenti agli equinozi, ed infatti in questi la terra raggiunge i massimi valori della latitudine eliografica ed è quindi rivolta più favorevolmente verso le regioni di massima frequenza delle macchie. È meno influenzata in giugno e dicembre quando attraversa l'equatore solare. La causa del fenomeno deve essere quindi l'inclinazione dell'asse del sole sul piano dell'equatore cioè, in accordo a quanto si è trovato per le longitudini, la posizione favorevole della terra rispetto alla zona delle macchie.

Che le eruzioni solari attorno alle macchie, debbano essere la causa delle tempeste magnetiche si può arguire anche dal fatto, che spesso queste avvengono a ondate, ed inoltre dall'esame dei raggi coronali in vari eclissi, dal quale si può concludere, che il modo di propagazione della influenza solare sul magnetismo terrestre è nella forma di fasci di raggi divergenti ed emananti da fuochi determinati nelle regioni solari perturbate.

Vediamo ora quali sono i casi più tipici di osservazioni di eruzioni solari in supposta relazione diretta con tempeste magnetiche terrestri.

Classiche sono le eruzioni osservate visualmente da Carrington e Hodgson il 1° settembre 1859, e da Young il 3 e 5 agosto 1872, accompagnate appunto da notevoli burrasche magnetiche. Ma la mancanza di una registrazione completa del fenomeno solare non permette un completo confronto, quale è stato possibile poco dopo l'invenzione dello spettroeliografo da parte di Hale, che appunto il 15 luglio 1892 (1) poteva fotografare una eruzione di eccezionale splendore, variabile molto rapidamente di forma e di intensità. Secondo l'esame fattone da W. J. S. Lockyer (2), fra il tempo della massima attività dell'eruzione solare, il principio della burrasca magnetica e la sua massima attività, passarono rispettivamente $21^h.3$ e $25^h.3$.

Un'altra osservazione di cui è stato seguìto presumibilmente con lo spettroeliografo tutto lo sviluppo, che portò a collegare due macchie situate in opposti emisferi con estese masse di idrogeno, è quella del 10 settembre 1908 (3). Tutto il fenomeno durò meno di quattro ore, e fra il suo massimo di intensità, ed il principio di una grande tempesta magnetica segnalata sulla terra, trascorsero 26^h. Il suo massimo di intensità venne registrato 43^h dopo quello della eruzione solare.

(1) « Astronomy and Astrophysics », vol. XI, p. 917, 1892.
(2) « Monthly Not. R. A. S. », vol. 70, p. 18, 1919.
(3) Fox e Abetti, *Interaction of sun-spots*, « Astrophys. Journ. », vol. 29, p. 40, 1909.

Digitized by Google

Il 24 settembre 1909, spettroeliogrammi presi a South Kensington [1], con la riga K del calcio, su di un gruppo di macchie molto attivo, mostrano lo sviluppo di una notevole eruzione. Il fenomeno solare si può seguire su quelli, come pure su di un altro eseguito da Slocum [2] all'Osservatorio Yerkes, e si può concludere, che nel gruppo di macchie orientali il suo massimo sia stato raggiunto circa alle $10^h\ 5^m$ T. M. Greenwich, essendo già alle $11^h\ 11^m$ in decrescenza. Una forte tempesta magnetica veniva registrata sulla terra col suo principio 26^h dopo, e il suo massimo 30^h dopo, la massima attività dell'eruzione del sole.

Nell'attuale massimo di attività solare altri casi simili sono stati osservati con lo spettroeliografo, e visualmente con lo spettroelioscopio da Hale.

Royds [3] a Kodaikanal, in una serie di spettroeliogrammi presi con le righe H_α e K_{23}, ha registrato il 22 febbraio 1926, dei filamenti e dei flocculi molto più luminosi dei flocculi ordinari sopra una macchia attiva, il cui massimo sviluppo può venire stabilito a circa $14^h\ 30^m$ T. M. Greenwich. Il 23 febbraio si aveva sulla terra una tempesta magnetica [4], che aveva inizio $23^h\ 30^m$ dopo il massimo di attività dell'eruzione solare e $50^h\ 30^m$ dopo raggiungeva il suo massimo di intensità.

All'Osservatorio di Meudon, d'Azambuja e Grenat [5] ottenevano spettroeliogrammi nella riga H_α di un gruppo di macchie, che passò al meridiano il 15 ottobre 1926, su cui aveva luogo una eruzione di eccezionale intensità. Il fenomeno sembra essere stato anche in questo caso molto rapido ed il suo massimo essere avvenuto alle $13^h\ 15^m$ T. M. Greenwich del 13 ottobre. Circa un'ora dopo, già in fase di diminuzione, venivano registrate, con lo spettroeliografo delle velocità, masse di idrogeno discendenti o ridiscendenti sul sole con una velocità dell'ordine di 130 km/sec. Una violenta tempesta magnetica aveva inizio sulla terra 31^h dopo e raggiungeva il massimo di intensità 56^h dopo l'eruzione.

Con lo spettroelioscopio, il 24 gennaio 1926, Hale [6] poteva osservare visualmente una grande eruzione su di un vasto gruppo di macchie, che fu pure seguìta da una burrasca magnetica e da una brillante aurora boreale. Essendo allora lo strumento ancora in stato sperimentale, mancano i dati completi per poter fissare il massimo sviluppo dell'eruzione, ma facilmente si comprende come l'impiego dello spettroelioscopio costituirà un indispensabile complemento e supplemento alle registrazioni fotografiche con lo spettroeliografo.

(1) « Monthly Not. R. A S. », vol. 70, p. 12, 1909.
(2) « Astrophys. Journ. », vol. 31, pl. IV, p. 26, 1910.
(3) « Monthly Not. R. A. S. », vol. 86, p. 380, 1926,
(4) « Nature », n. 2942, p. 416, 20 marzo 1926.
(5) « Bull. Soc. Astr. de France », 40e année, p. 489, 1926.
(6) « Proceed. Nat. Ac. of Sciences », vol. 12, p. 290, 1926.

Digitized by Google

Riepilogando i casi osservati con lo spettroeliografo, sopra descritti si ha:

ERUZIONE SOLARE Data e T. M. Gr. della massima attività	TEMPESTA MAGNETICA	
	Principio	Massimo
	dopo l'eruzione solare	
15 luglio 1892, 5^h7	21^h3	25^h3
10 settembre 1908, 8.0	26 -	43 -
24 settembre 1909, 10.6	26 -	30 -
22 febbraio 1926, 14.5	23.5	50.5
15 ottobre 1926, 13.2	31 -	56 -
Media . . .	25.6	41 -

Mentre vi è una considerevole oscillazione per il ritardo di 41^h fra la massima attività dell'eruzione e la massima intensità della tempesta magnetica, forse dipendente dalla difficoltà di fissare la seconda per i varî elementi del magnetismo misurati, il ritardo di 25^h6 col principio della tempesta magnetica sembra abbastanza ben precisato, anche pel fatto del suo accordo col valore dianzi trovato considerando il passaggio della macchia al meridiano centrale. Parrebbe dunque che la velocità di circa 1600 km/sec., per la trasmissione della perturbazione dal sole alla terra, sia sufficientemente accertata da questo genere di osservazioni.

Milne [1], in un notevole studio teorico sulla possibilità di emissione di atomi ad alta velocità dal sole e dalle stelle, giunge al calcolo della velocità limite con la quale essi, sotto l'influenza della pressione di radiazione, possono uscire fuori dal campo gravitazionale del sole. Per il caso particolare degli atomi di Ca^+, considerando la riga K, egli trova una velocità di 1630 km/sec., risultato che è dello stesso ordine di grandezza anche per atomi di altri elementi, come per es. H, He, Ti^+, Sr^+, Mg, e qualunque altro che sia in condizioni da essere sostenuto dalla pressione di radiazione nella cromosfera.

La coincidenza nel valore teorico con quello osservato, rende probabile l'ipotesi, che si abbia una emissione di atomi dalle regioni perturbate del sole a sciami, i quali producono le conseguenti perturbazioni nel magnetismo terrestre, quando la loro direzione sia tale da investire la terra.

(1) « Monthly Not. R. A. S. », vol. 86, p. 459, 1926.

Digitized by Google

Concludendo, si vede quanto sia importante il sistematico studio di questi fenomeni; ma mentre che per il magnetismo terrestre si fanno registrazioni continue, per seguire l'attività del sole bisogna, almeno fino ad oggi, contare sulle osservazioni discontinue, che si possono fare con lo spettroeliografo e lo spettroelioscopio, e quindi ne risulta la necessità di intensificarle in numerosi Osservatorî, ben situati per condizioni di clima, e ben distribuiti in longitudine [1].

Fisica. — *Su di un nuovo metodo di telefonia ottica con luce ordinaria o con luce ultravioletta.* Nota [2] del Socio Q. MAJORANA.

Fra i varî mezzi di telecomunicazione, ed in particolare tra quelli mediante radiazioni di lunghezza d'onda con carattere ottico propriamente detto, non ne esisteva finora uno che permettesse la trasmissione della parola, mediante radiazioni ultraviolette.

Mi sono proposto da qualche tempo, di risolvere tale problema che può presentare interessi pratici evidenti e dei quali non discuterò in questa Nota, limitandomi allo studio tecnico del problema.

Questo si differenzia da altri più o meno analoghi, da tempo risoluti, per le ragioni seguenti. Anzitutto i vecchi e ben conosciuti sistemi di radiofonia utilizzavano le onde luminose meno refrangibili dello spettro o addirittura quelle calorifiche. Ricordo, che i migliori resultati furono ottenuti mediante l'uso, nell'apparecchio trasmittente, dell'arco cantante, grazie ai lavori di Simon, Cram e Hayes, Ruhmer. Questi autori adoperavano, come congegno ricevente, un termofono o una cellula a selenio. Nella trasmissione, non venivano così ulilizzate le regioni estreme dello spettro verso il violetto e l'ultravioletto, giacchè, per queste radiazioni, tanto i ricevitori cosidetti termici, che le comuni cellule al selenio, non sono sensibili o per lo meno non lo sono molto.

D'altro canto, sarebbe stato desiderabile di utilizzare appunto le radiazioni ultraviolette per una trasmissione radiofonica perchè con ciò, oltre ad ottenere la visibilità ad occhio del fascio di onde destinate a convogliare la parola, è a prima indagine sperabile una sensibilità ed una prontezza di recezione rimarchevoli, grazie all'eventuale uso di cellule fotoelettriche, la cui tecnica costruttiva si è in questi ultimi tempi notevolmente perfezionata.

(1) In un ottimo e completo riassunto sulle ricerche di fisica solare eseguite nel 1926 pubblicato da d'Azambuja, nel Bollettino della Società Astronomica di Francia dell'aprile 1927, mentre questa Nota era in corso di stampa, sono discusse le eruzioni e tempeste magnetiche del 1926 e la loro mutua relazione con speciale menzione alle ipotesi avanzate da Deslandres.

(2) Presentata nella seduta del 1° maggio 1927.

Digitized by Google

Certamente, il servirsi della luce ultravioletta, quale mezzo di segnalazione a distanza, non è cosa nuova; basta ricordare oltre che il dispositivo di Zickler, utilizzante onde ultraviolette molto brevi (e per conseguenza situate molto al di là del violetto), le ricerche di Wood, che hanno condotto questi a realizzare delle comunicazioni con raggi ultravioletti abbastanza prossimi al violetto. In entrambi questi casi, si tratta di segnalazioni telegrafiche mediante l'alfabeto o codice Morse. Osservo, a proposito di questi due metodi di segnalazione, come il secondo, cioè quello immaginato dal Wood, sia di molto superiore, per il fatto che esso utilizza lunghezze d'onda notevolmente maggiori, e cioè intorno a 3650 A., le quali sono assai meno assorbite dall'atmosfera di quelle realizzate da Zickler. Mentre questi non potè arrivare con le sue trasmissioni che a una distanza di poco superiore al chilometro, il Wood è riuscito a superare distanze da due a cinque miglia.

Se dunque la luce ultravioletta ha permesso di realizzare nuovi sistemi di radiotelegrafia, non mi consta che prima d'ora sia stato tentato l'uso di tali radiazioni per lo studio di un nuovo sistema di radiotelefonia.

È precisamente per colmare questa lacuna che ho eseguite le ricerche di cui dirò nella presente Nota, accennando successivamente ai congegni di trasmissione, a quelli di recezione ed infine ai resultati pratici ottenuti.

Apparato trasmittente. — Per quanto l'arco voltaico costituisca una ottima sorgente di luce ultravioletta, che può venire facilmente modulata mediante i circuiti cosidetti *dell'arco cantante*, studiati da Simon, Duddell, Ruhmer ed altri, ne scartai, fin dal principio di queste ricerche, l'uso, in conseguenza della sua instabilità, delle difficoltà derivanti dal suo regolaggio, dall'eccessivo calore che esso sviluppa, ecc.; ed ho eseguito una serie numerosa di tentativi, per ottenere la modulazione di una sorgente di luce ultravioletta e di luce comune ad un tempo, che presentasse notevoli vantaggi sull'arco stesso. E, non uscendo beninteso dai dispositivi fondati sulla conduzione elettrica gassosa, ho fermato la mia attenzione sulla utilizzazione dell'arco a mercurio in un tubo chiuso. Tubi o lampade di tal genere tanto in vetro che in quarzo, si sarebbero prestate allo scopo, ma è sempre preferibile adoprare quelle in quarzo. E ciò, non per il fatto che il quarzo a differenza del vetro, sia trasparente alla luce ultravioletta, ma perchè le lampade in quarzo, come è noto, resistono assai meglio alla sopraelevazione di temperatura e possono dare intensità luminose assai maggiori, che non quelle in vetro.

Ho così preso in esame il problema della modulazione della corrente di alimentazione di una lampada a mercurio, mediante una corrente telefonica, riflettendo sin dal principio di queste ricerche, come il comportamento, sotto tal riguardo, di una lampada a mercurio, possa essere notevolmente differente da quello di un arco voltaico comune, fra carboni nell'aria atmosferica. Ed infatti, mentre in quest'ultimo caso le variazioni di temperatura

Digitized by Google

corrispondentemente a quelle dell'intensità di corrente modulata, possono o debbono essere notevolissime (in causa delle correnti di convezione dell'aria circostante), nel caso dell'arco a mercurio, rimaneva *a priori* il dubbio che il fenomeno della modulazione potesse, se non del tutto mancare, svolgersi in modo più debole o insufficiente. Ciò non pertanto, svariati tentativi furono fatti per provocare la modulazione dell'arco a mercurio mediante le fluttuazioni di una corrente microfonica. E da essi ho potuto concludere che realmente ciò è possibile, adottando uno dei dispositivi già adoprati dai precedenti autori per la modulazione di un comune arco fra carboni nell'aria. Ma la modulazione resulta così, forse alquanto più debole, dipendentemente dalle circostanze diverse in cui i due tipi di arco si svolgono.

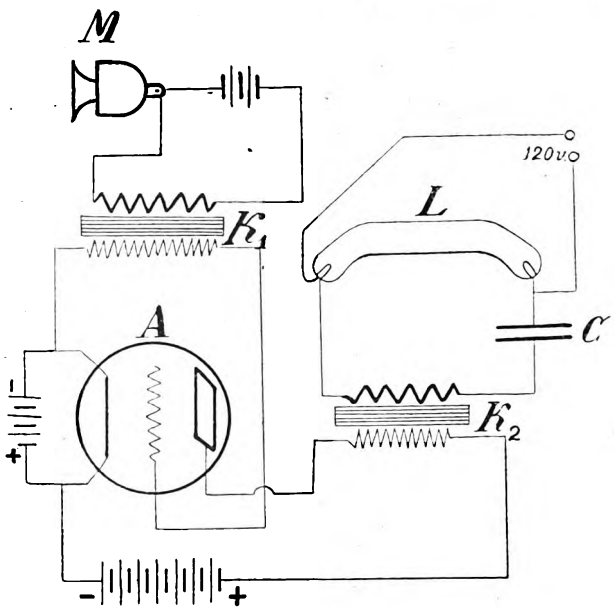


Fig. 1.

In vista di ciò, e volendo rendere più cospicui gli effetti, decisi di fare agire sull'arco una corrente microfonica, preventivamente ampliata mediante una valvola termojonica. Il dispositivo che mi ha dato i migliori resultati è quello schematicamente indicato nella fig. 1. M è un microfono alimentato da 4 Volts, attraverso il primario di un rocchetto di induzione K_1. Il secondario di questo rocchetto, ad alto numero di spire, agisce fra filamento e griglia di un audion A. La corrente, così amplificata, traversa il primario di un secondo rocchetto di induzione K_2; il cui secondario, a basso numero di spire, agisce sulla lampada a mercurio a traverso una capacità C di più microfarads. La lampada a mercurio è alimentata da corrente continua, con tensione di un centinaio di Volts. L'uso di bobine strozzatrici sulla linea di questa corrente si è addimostrato non necessario o non molto efficace.

Digitized by Google

Parlando o producendo dei suoni davanti al microfono, la intensità di corrente dell'arco che è di pochi ampères, fluttua intensamente persino per un sesto o per un quinto del suo valore. Naturalmente, per evitare eccessiva deformazione nella parola trasmessa, non si deve spingere troppo l'intensità di tale modulazione; e quel valore rappresenta perciò il limite desiderabile o tollerabile, al di là del quale non sarebbe conveniente spingersi. È inutile perciò pensare ad adoprare più di un audion per l'amplificazione preventiva della corrente microfonica. L'intensità di modulazione è stata controllata sia con l'oscillografo che con l'esame dell'arco allo specchio girante. I massimi ed i minimi di luce da questa emessi appaiono così, non solo evidentissimi ma anche assai marcati.

Non è però da credere che tutte le varie lampade a mercurio, che si trovano in commercio, diano resultati egualmente buoni. Senza dare per ora notizie più precise, dirò che mi è apparso essere condizione favorevole alla buona modulazione, la maggior pressione del gas inerte che insieme col mercurio è di solito racchiuso nella lampada. Alcune lampade, forse per la deficienza di tale pressione, mi si sono appalesate come quasi insensibili alla modulazione. Ma sullo studio di tale argomento tornerò in seguito.

È nota la struttura delle linee emesse da un arco a mercurio. Nello spettro visibile fra le più notevoli se ne hanno due gialle, una verde, una violetta e una nel violetto estremo. Poi, al principio dell'ultravioletto, si ha un forte gruppo di quattro righe, le cui lunghezze d'onda si aggirano intorno a 3655 angstrom (appartenenti alla prima e alla seconda serie accessorie). Altre righe intense si hanno inoltre, ma con lunghezze d'onda più brevi e che non ci interessano.

Al fluttuare della corrente dell'arco, fluttuano naturalmente le intensità luminose corrispondenti a ciascuna di tali righe e principalmente, nella luce visibile, tale fluttuazione corrisponde, per il nostro occhio, a quella della riga verde 5460,76. Nella trasmissione effettuata con l'arco a mercurio, in luce visibile è questa dunque la riga utile. Volendosi servire nella trasmissione di luce, soltanto ultravioletta, basterà sopprimere le cinque righe citate nello spettro visibile, e lasciar passare il gruppo delle quattro righe dell'ultravioletto. Ora, ciò è possibile grazie alle accurate ricerche di Wood, che ha trovato essere il vetro all'ossido di nichel trasparente per tali lunghezze d'onda. Ponendo davanti alla lampada a mercurio uno di tali vetri, rimane assorbita tutta la luce visibile ed anche la ultravioletta estrema; passano a traverso, le radiazioni generate dalle dette quattro righe e da qualche debole altra riga anch'essa invisibile ad occhio, immediatamente vicina.

Con l'uso dunque della lampada ad arco a mercurio, ho così potuto realizzare un ottimo trasmettitore radiofonico, tanto per luce visibile che per luce ultravioletta. Notisi poi che tale luce ultravioletta è poco assorbita dall'atmosfera essendo le sue lunghezze d'onda assai prossime a quelle dell'estremo violetto. È poi ovvio che mediante opportuni sistemi di lenti o

Digitized by Google

di specchi, si possa concentrare a distanza la luce emessa dalla lampada a mercurio modulata.

Apparato ricevente. - Come ho già accennato, questo si basa sull'uso di una cellula fotoelettrica. Non mi resulta che sinora sia stata adoprata o anche solo proposta tale cellula, quale ricevitore telefonico della parola. Ma è evidente che la prontezza e la delicatezza del fenomeno fotoelettrico lasciano sperare *a priori* un buon successo in un impiego del genere. Il dispositivo da me adottato, fra tanti che ho sottoposto ad esperimento, è indicato schematicamente nella fig. 2. La cellula C è connessa col suo elettrodo negativo alla griglia di un audion, mentre il filamento della cellula

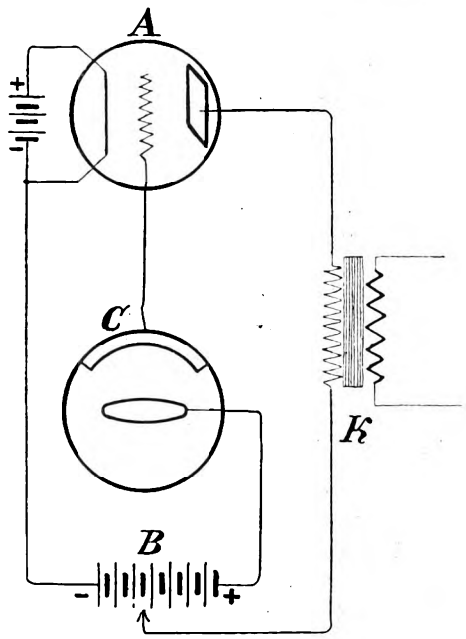


Fig. 2.

attraverso una batteria B è connessa la griglia dello stesso audion. La stessa batteria B serve da batteria anodica di questo. Il secondario del trasformatore K è poi connesso ad un amplificatore ad una o più valvole, che non è indicato in figura, e che fa capo al telefono ricevente.

In queste notizie necessariamente sommarie, non riporto i tentativi fatti per scegliere nel modo più opportuno la cellula che meglio si presti allo scopo. Dirò solo che quelle che si trovano in commercio, presentano requisiti variabili per sensibilità alle differenti radiazioni. A seconda dello scopo che si vuol raggiungere, va adoprato un tipo piuttosto che un altro di tali cellule.

Per completare la descrizione dell'apparato ricevente, dirò ancora che quando la distanza fra la stazione trasmittente e quella ricevente supera

Digitized by Google

qualche centinaio di metri, occorre servirsi di una lente o di uno specchio per concentrare le radiazioni sulla cellula. Ciò è tanto più necessario se la luce della lampada trasmittente è schermata con vetro all'ossido di nichel, in guisa da lasciar passare soltanto le radiazioni ultraviolette.

Resultati. – Il descritto dispositivo fu cominciato a sperimentare negli ultimi mesi dell'anno decorso, nei locali dell'Istituto fisico " Augusto Righi " in Bologna, da me diretto. Fu subito constatato, che lungo il corridoio di esso di circa 100 m. e malgrado due riflessioni su specchi di vetro argentato, la recezione di suoni e parole era ottima, tanto in luce ordinaria che in luce ultravioletta.

Incoraggiato da questo primo successo, cominciai ad eseguire esperimenti fra il detto Istituto e varie località dei dintorni di Bologna e così, cercando di superare distanze successivamente crescenti, ho potuto constatare l'ottima recezione della parola fra l'Istituto e

Villa Aldini	a Km.	2,670
Villa Sarti o Casa Bianca . .	»	6,300
Croara	»	6,600
Monte Calvo	»	8,250
Varignana	»	16,200

La stazione trasmittente inviava sempre un fascio di radiazioni concentrato in lontananza mediante una lente di circa 50 cm. di apertura e altrettrettanti di distanza focale. Col crescere della distanza ho cercato di perfezionare in vario modo ed in punti secondari i dispositivi; ma principalmente ho accresciuto ogni volta le dimensioni dell'obbiettivo o lente destinata a concentrare la luce nella stazione ricevente sulla cellula fotoelettrica. Così, mentre a Villa Aldini mi servivo di una lente di 18 cm. circa di apertura, a Varignana ne ho adoprata una di cm. 50.

La recezione in tutti i casi era più debole con il fascio della sola luce ultravioletta, ma pur sempre comprensibile.

Rilevo ancora come, anche alla massima distanza di Km. 16 da me raggiunta, non apparisca che la luce ultravioletta impiegata rimanga sensibilmente affievolita per assorbimento dell'atmosfera.

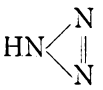
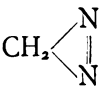
Dirò inoltre, che tale distanza non rappresenta il limite massimo raggiungibile, e ritengo che, solo le difficoltà che vi sono di disporre di stazioni in libera visuale diretta a grande distanza, serviranno in avvenire a fissare tale limite.

Termino, segnalando l'opera intelligente del dott. Giorgio Todesco, mio assistente, che, con essa, per quanto riguarda gli artifici adottati nell'uso di cellule fotoelettriche e di valvole termojoniche, ha contribuito notevolmente al successo pratico delle ricerche di cui è oggetto questa Nota.

Digitized by Google

Chimica. — *Sopra le azidi.* Nota [1] del Socio A. ANGELI.

Come è noto, all'acido azotidrico ed alle azidi che da esso derivano sono state attribuite strutture nelle quali gli atomi di azoto sono disposti ad anello chiuso ed in modo analogo vennero assegnate formole ad anello al diazometano ed ai diazocomposti alifatici:

Solamente più tardi sono state prese in considerazione formole nelle quali gli atomi di azoto, invece che ad anello, sarebbero disposti a catena aperta:

$$HN=N=N \qquad\qquad CH_2=N\equiv N$$

ma contro questo modo di vedere si è opposto vivacemente Hantzsch [2] il quale dopo di avere preso in esame le reazioni di tali composti ed alcuni dei loro caratteri fisici, quali gli spettri di assorbimento, ecc., viene alla conclusione che tutti i fatti conosciuti parlano in favore della forma ciclica e che in ogni caso una dimostrazione della struttura a catena aperta non è stata finora data. Egli aggiunge che la forma a catena aperta, con un atomo di azoto pentavalente, renderebbe i diazocomposti alifatici analoghi ai diazonioderivati aromatici e che, contrariamente a questa interpretazione, sta il fatto che i diazoniocomposti sono sali e precisamente sali di basi ammoniche forti, i quali possiedono caratteri di composti inorganici. I diazocomposti alifatici invece, sempre secondo Hantzsch, sono piuttosto da comparsi ai diazoidrati normali, di cui rappresentano le anidridi e che contengono esclusivamente atomi di azoto trivalenti. Dice infine che, secondo la formola a catena aperta, l'acido azotidrico e le azidi dovrebbero rappresentare composti straordinariamente instabili, capaci di reagire con la massima facilità, mentre ciò non corrisponde ai fatti, tanto vero che la fenilazide è una sostanza molto stabile, che reagisce con una certa difficoltà e che perciò anche per questa ragione la forma ciclica è quella che sta meglio in accordo con i dati sperimentali.

Sebbene queste asserzioni non siano in armonia col fatto che sopra le reazioni delle azidi sono fondati numerosi processi di sintesi che procedono in modo facile e netto e per quanto le argomentazioni di Hantzsch sieno ingegnose ed egli abbia avuto cura di scegliere gli esempi che, secondo lui,

(1) Presentata nella seduta del 15 maggio 1927.
(2) *Die Diazoverbindungen*, Berlin 1921, p. 107.

Digitized by Google

stanno in appoggio alle sue vedute, negli ultimi anni e da parte di vari autori sono stati scoperti fatti di ordine chimico e fisico i quali sono in aperta contraddizione con quanto Hantzsch sostiene.

La struttura ciclica dei diazocomposti alifatici è stata smentita dai lavori di I. Sureda Blanes [1] e dai successivi studi di Standiuger [2] sopra le reazioni con le fosfine. Per quanto riguarda le azidi, I. A. Cranston e A. Y. Livingstone [3] studiando la densità e l'indice di rifrazione di soluzioni diluite di KN_3, NaN_3, KCNO e NaCNO in alcool diluito, la densità dei sali solidi, le loro solubilità nei vari solventi, le loro conducibilità in alcool metilico, sono venuti alla conclusione che le proprietà dei rispettivi sali sodici e potassici sono molto simili fra di loro e che perciò negli ioni cianici ed azidici devono essere contenuti gli stessi aggruppamenti atomici ed elettronici; del pari F. E. Kendall e W. Albert Noyes [4] trovano che la formola di Angeli, interpretata elettronicamente, è quella che meglio dà ragione di tutti i fatti conosciuti. Ma vi ha di più ancora: B. Sterling e Linus Pauling [5] studiando col metodo röntgenografico i sali di potassio e sodio dell'acido azotidrico, hanno potuto stabilire che *questi sali contengono ioni trinitrici costituiti da tre atomi di azoto collineari e non già disposti ad anello.*

Questi fatti sperimentali ben stabiliti, sono d'altra parte in accordo con alcuni dei modi di formazione delle azidi, p. es.:

$$C_6H_5\cdot N:N\cdot NH_2 + O \longrightarrow C_6H_5\cdot N:N:N$$
$$C_6H_5\cdot N_2Cl + NH_2\cdot OH \longrightarrow C_6H_5\cdot N:N:N \text{ [6]}.$$

(1) « Journ. Chem. Soc. » (1919), p. 78.
(2) « Helvetica Acta », *4* (1921), p. 213 e sg.; ibid., *5* (1922), p. 75.
(3) « Journ. Chem. Soc. », (1926), p. 501.
(4) « Journ. Amer. Soc. », *48* (1926), p. 2404.
(5) Ibid., *47* (1925), p. 2904.
(6) In questo caso, con tutta probabilità, si forma come termine intermedio:

$$C_6H_5\cdot N:N\cdot NH\cdot OH$$

analogo al diazoamminobenzolo:

$$C_6H_5\cdot N:N\cdot NH\cdot C_6H_5 .$$

Io ho trovato pure che la fenilazide, assieme a diazoidrato normale, difenilammina ed altre sostanze che ancora non ho tutte caratterizzate, si forma anche quando si fa reagire l'idrossilammina sopra il nitrosobenzolo. Sebbene, a prima vista, questa reazione sembri alquanto strana, essa si spiega facilmente per mezzo delle considerazioni che io ho svolte a suo tempo (« Gazzetta Chimica », *46* (1916), II, p. 70) circa la possibilità delle reazioni:

$$R'\cdot NO + R''\cdot NH\cdot OH \rightleftharpoons R'\cdot NH\cdot OH + R''\cdot NO .$$

Basta ammettere che in una prima fase avvenga (ed infatti la reazione è accompagnata da sviluppo di N_2O):

$$C_6H_5\cdot NO + NH_2\cdot OH \longrightarrow C_6H_5\cdot NH\cdot OH + ONH$$

e successivamente, come io ho dimostrato molti anni or sono [« Berichte », *37* (1904), 2390]

Digitized by Google

Non sarebbe invece d'accordo col modo di formazione della fenilazide a partire dalla nitrosofenilidrazina. A quest'ultima sostanza spetta la struttura:

$$C_6H_5 \cdot N(NO) \cdot NH_2$$

e si prepara per azione dell'acido nitroso sopra la fenilidrazina. È noto che l'acido nitroso reagisce sopra l'atomo di azoto meno idrogenato e d'altra parte Curtius ha trovato che p. es. la nitrosobenzilidrazina:

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot N(NO) \cdot NH_2$$

per trattamento con benzaldeide fornisce un fenilidrazone normale:

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot N(NO) \cdot N = CH \cdot C_6H_5 \ .$$

Ciò parlerebbe in favore della forma ciclica della fenilazide, giacchè nella nitrosofenilidrazina il residuo benzolico non è congiunto ad uno degli atomi di azoto terminali: resta quindi da stabilirsi come proceda la reazione:

$$C_6H_5 \cdot N(NO) \cdot NH_2 \longrightarrow R \cdot N : N : N \ .$$

A tale scopo basta ricorrere ad una interessante trasposizione scoperta molti anni or sono da I. Thiele [1] e che si riferisce alla possibilità di migrazione del gruppo — NO nei derivati dell'idrazina; questo eminente chimico ha trovato infatti che il nitrosoderivato che si ottiene dalla benzilmetilidrazina, per azione di piccole quantità di acidi, si isomerizza con tutta facilità secondo l'eguaglianza:

$$C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot N(NO) - NH \cdot CH_3 \longrightarrow C_6H_5 \cdot CH_2 \cdot NH - N(NO) \cdot CH_3 \ .$$

le ultime due reagiscono fra di loro per dare diazoidrato normale, il quale con l'idrossilammina ancora presente fornisce fenilazide, come prima si è detto. La formazione intermedia di diazoidrato normale rende molto probabile che a questo modo sia da intendersi la interessante reazione scoperta da Bamberger [« Berichte », *28* (1895), 1218], fra nitrosobenzolo ed idrossilammina, giacchè secondo la sua interpretazione sarebbe da aspettarsi isodiazoidrato.

(1) « Liebig's Annalen », *376* (1910), p. 264.

Digitized by Google

E siccome la fenilazide si forma appunto per azione degli acidi sopra la nitrosofenilidrazina [1] ne risulta provata anche la possibilità delle trasformazioni successive:

$$\begin{matrix} C_6H_5\cdot N\cdot NH_2 \\ | \\ NO \end{matrix} \longrightarrow C_6H_5\cdot NH\cdot NH\cdot NO \longrightarrow C_6H_5\cdot N : N : N \ .$$

Non solo, ma in questa maniera si può spiegare anche un'altra interessante reazione della nitrosofenilidrazina; questa sostanza può fornire un sale sodico, il quale deriva senza dubbio dalla forma tautomera:

$$\begin{matrix} C_6H_5\cdot N = NOH \\ \| \\ NH \end{matrix}$$

il quale per azione dei nitriti alcoolici fornisce subito isodiazotato [2] con sviluppo di protossito di azoto; probabilmente come termine intermedio si forma una nitrosoimmina instabilissima:

$$\begin{matrix} C_6H_5\cdot N = NOH \\ \| \\ NH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_6H_5\cdot N = NOH \\ | \\ N\cdot NO \end{matrix} \longrightarrow C_6H_5\cdot N = N\cdot OH + N_2O \ .$$

Questa scissione è del tutto analoga a quella che può subire, p. es., l'acido azotidrico:

$$N_3H + HNO_2 = N_2 + N_2O + H_2O \ .$$

Considerata da questo punto di vista la forma tautomera della nitrosofenilidrazina entra a fare parte di un gruppo di sostanze le quali, unito all'anello aromatico, contengono un atomo di azoto pentavalente, quali p. es.:

(1) È noto che la nitrosofenilidrazina per riscaldamento con solventi indifferenti [Thiele, «Berliner Berichte», *41* (1908), p. 2806] si scinde nettamente in anilina e protossido di azoto:

$$C_6H_5\cdot(N_2O)\cdot NH_2 = N_2O + C_6H_5\cdot NH_2$$

e si rileva subito l'analogia di questa reazione con le scissioni scoperte da Sandmeyer, p. es.:

$$C_6H_5\cdot N_2\cdot Cl = N_2 + C_6H_5\cdot Cl$$

e con l'altra osservata da Dimroth:

$$C_6H_5\cdot N_2\cdot NH_2 = N_2 + C_6H_5\cdot NH_2 \ .$$

(2) Thiele, «Berichte», *41* (1908), p. 2806. In questa circostanza Thiele ha fatto anche l'interessante osservazione che gli isodiazotati danno complessi con alcuni metalli, ciò che non sono in grado di fare i diazotati normali. Questo è contrario alle previsioni di Hantzsch [«Berichte», *60* (1927) p. 668].

Digitized by Google

(1) $C_6H_5 \cdot N = O$ (O)

(2) $C_6H_5 \cdot N = H_2$ (O)

(3) $C_6H_5 \cdot N = NH$ (O)

(4) $C_6H_5 \cdot N = NOH$ (O)

(5) $C_6H_5 \cdot N = N \cdot R$ (O)

(6) $C_6H_5 \cdot N = NOH$ (NH)

(7) $C_6H_5 \cdot N = CH \cdot R$ (O)

(1) Nitrobenzolo. (2) Forma tautomera della fenilidrossilammina (ossido dell'anilina), quella cioè che assume nelle reazioni con le aldeidi e nitrosoderivati aromatici (formazione di nitroni ed azossicomposti). Le (3), (4), (5), (6) e (7) sono le forme che ho attribuite rispettivamente ai diazoidrati normali, alla nitrosofenilidrossilammina, agli azossiderivati, ai sali della nitrosofenilidrazina ed ai nitroni. Tali analogie di struttura giustificano le rassomiglianze del comportamento. Oltre a quelle che ho posto in rilievo altrove, è rimarchevole il fatto che tanto la (4) quanto la (6):

$$C_6H_5 \cdot N = NOH \ (O) \longrightarrow C_6H_5 \cdot N = NOH \longleftarrow C_6H_5 \cdot N = NOH \ (NH)$$

forniscono nettamente isodiazotato e ciò porta una nuova conferma alle considerazioni che ho esposte.

Digitized by Google

Chimica. — *Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro. La reazione fra nitroprussiato ed alcali* [1]. Nota II [2] del Corrispondente L. CAMBI e di L. SZEGÖ.

Il ferronitropentacianuro ed il nitroprussiato sono fra loro collegati, come è noto, dalla reazione reversibile:

$$[Fe(CN)_5NO]'' + 2OH' \rightleftarrows [Fe(CN)_5NO_2]'''' + H_2O \ .$$

È noto altresì che alcune reazioni del nitroprussiato si manifestano anche nelle soluzioni del nitritocianuro stechiometricamente neutre, mentre scompaiono con eccesso d'alcali. Si deve cioè ammettere che l'equilibrio in parola sia alquanto spostato verso sinistra nelle soluzioni del sale $Na_4[Fe(CN)_5NO_2]$ predetto [3].

L'azione degli alcali sul nitroprussiato interessava per tutte le reazioni cui questo sale partecipa in ambiente alcalino. Noi ci proponemmo di definire l'equilibrio cui dà luogo con lo studio degli spettri d'assorbimento.

Nella Nota precedente abbiamo riportato i valori di log ε del nitroprussiato e del nitritocianuro. I coefficienti ε mostrano un andamento affatto caratteristico, rispettivamente per i due sali: essi hanno in comune l'assorbimento fondamentale da 310 a 250 mμ, ma il nitritocianuro mostra inoltre una banda d'assorbimento con il massimo molto accentuato a 405 mμ, a differenza del nitroprussiato che in questa regione è quasi completamente trasparente. Aggiungendo alcali in concentrazioni crescenti il massimo d'assorbimento si sposta fino a raggiungere un valore limite $\log \frac{I_o}{I} = 1,3$ (conc. nitroprussiato = 0.0008 mol/lit.) praticamente raggiunto, nella concentrazione da noi sperimentata, col rapporto 1 mol. nitroprussiato : 500 NaOH.

Per il calcolo dello stato d'equilibrio ci siamo basati sulle determinazioni $\left(\log \frac{I_o}{I}\right)$, riportate nella tabella I, eseguite a 15° con lo stesso dispositivo descritto nella nostra Nota precedente. Alleghiamo la tavola II che riporta tre dei nostri fotogrammi a maggiore illustrazione delle nostre esperienze.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Presentata nella seduta del 1° maggio 1927.

(3) Non tutti gli AA. hanno compreso l'intervento dell'equilibrio in parola e taluni confusero le reazioni del nitroprussiato con quelle del nitritocianuro. (Vedi A. UNGARELLI, «Gazz. Chim. Ital.», LV (1925), 118; N. TARUGI, «Ann. Chim. App.», 16 (1926) 407.

Digitized by Google

I coefficienti ε riferentisi ai diagrammi delle fig. 1 sono stati dedotti dai valori predetti [1].

Come risulta dallo stesso diagramma ad alta alcalinità, in NaOH 10 n, il massimo del coefficiente d'estinzione a 405 mμ si eleva oltre il valore limite predetto. Ma per l'applicazione della legge di massa non potevamo certo estenderci a queste concentrazioni in cui, inoltre, non erano da escludersi trasformazioni chimiche oltre quella considerata. Per contro la costanza del massimo entro i rapporti su indicati fra alcali e nitroprussiato giustificava i calcoli che riassumiamo.

Poteva avanzarsi il dubbio di una dissociazione sensibile del nitritocianuro con formazione dell'idroxosale $Na_4[Fe(CN)_5OH]$, ma a parte le reazioni caratteristiche delle soluzioni di nitritocianuro, il massimo di queste si manifesta con valori del coefficiente d'estinzione assai più elevati che non per quelle alcaline di acquocianuro [2].

In base alla legge di Beer, data la concentrazione costante complessiva dei due prussiati, abbiamo assunto $\log \frac{I_o}{I}$, per 405 mμ, come proporzionale alla concentrazione del nitritoferrocianuro presente all'equilibrio, riferendo il valore $\log \frac{I_o}{I}$ alla trasformazione completa del nitroprussiato nel sale in parola. Dalle concentrazioni risultanti deducemmo quella dell'alcali libero, che trasformammo nelle attività corrispondenti, tenendo conto dei coefficienti noti per questo alcali [3].

Per il calcolo della costante, dato l'errore d'osservazione del nostro metodo, procedemmo per via grafica in base ai valori riportati nelle tre ultime colonne della tabella. Dalle equazioni

$$K_c = \frac{[\text{Nitrop.}]\ a^2_{OH'}}{[\text{Nitric.}]}\ ;\ \frac{K_c}{a^2_{OH'}} = (1.3 \pm 0.05)\ \frac{1}{\log \frac{I_o}{I} \pm 0.05} \quad -(1)\ [4]$$

abbiamo dedotto i valori estremi entro cui sono compresi quelli possibili della costante a 15° e precisamente $K_c = (1.353 \pm 0.025) \cdot 10^{-4}$. Da questi

(1) $\varepsilon = \frac{1}{c.\ d.} \log \frac{I_o}{I}$; $c = 0.0008$ mol./lit ; $d = 1$ cm.

(2) Vedi L. Cambi e L. Szegö, Nota I. Questi «Rendiconti».

(3) H. S. Harned, «J. Am. Chem. Soc.», 47 (1925), 676. Abbiamo assunto tale attività, trascurando l'influenza degli anioni del nitroprussiato e del nitritocianuro ed assumendo in via approssimativa la loro attività eguale ad 1.

(4) Come è ovvio per $x = 1/a^2_{OH'}$, e $y = 1/\log \frac{I_o}{I}$ l'equazione corrisponde ad una retta. Abbiamo già indicato nella Nota precedente che gli intervalli fra due misure di valori per $\log \frac{I_o}{I}$ sono di 0.1, l'errore d'osservazione possibile è dunque ± 0.05.

Digitized by Google

valori si calcola che nella soluzione 0.1 mol. il ferronitritocianuro, stechiometricamente neutro, sarebbe dissociato in nitroprussiato per il 13.2 %.

Ci siamo limitati ad una sola serie di misure, non avendosi, almeno per ora, la possibilità di risalire ai valori esatti delle attività degli ioni che partecipano all'equilibrio, particolarmente a più alte concentrazioni. Le nostre determinazioni dimostrano comunque la reale esistenza dell'equilibrio discusso. Il valore approssimato ottenuto per la costante a 15° è in accordo con il comportamento chimico delle soluzioni che si ottengono facendo reagire gli alcali sul nitroprussiato.

TAVOLA I.

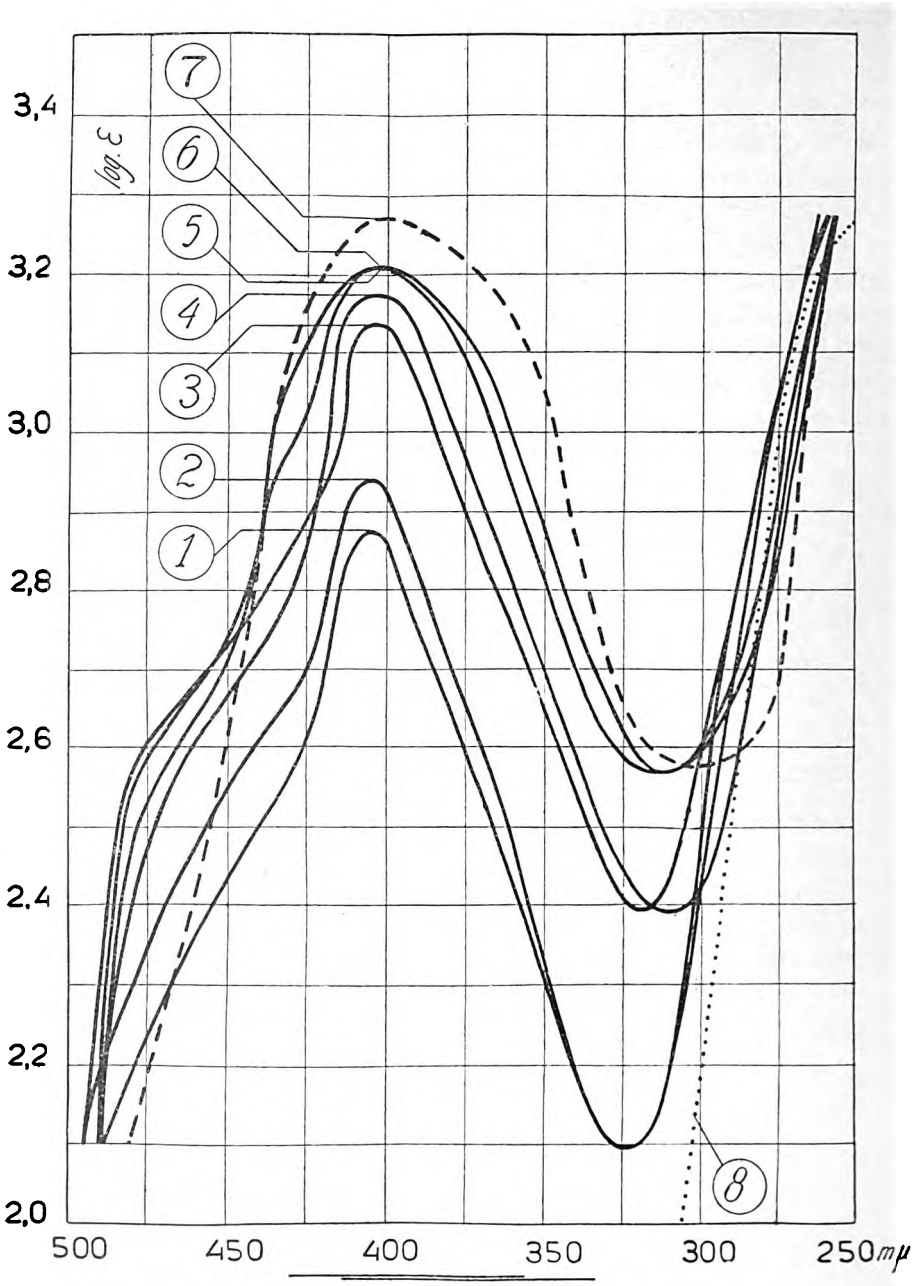
$Na_2[Fe(CN)_5NO]$ concentrazione iniziale = 0.0008 mol/lit.
Temp. 15°.

Conc. NaOH iniziale	$\log \frac{I_o}{I}$ ($\lambda = 405$ mμ) osservato	Conc. NaOH non combinato calcolato	Coeff. d'attiv. $\gamma_{HO'}$	$\frac{1}{a^2_{OH'}}$	$\frac{1}{\log \frac{I_o}{I} + 0.05}$	$\frac{1}{\log \frac{I_o}{I} - 0.05}$
0.800 n	1.3	0.798 n	0.680	3.398	0.741	0.800
0.400	1.3	0.398	0.700	[12.874]	0.741	[0.800]
0.080	1.2	0.079	0.793	(257.6)	(0.800)	0.870
0.040	1.1	0.039	0.841	952.6	0.870	0.952
0.016	0.7	0.015	0.895	(5487)	(1.334)	1.539
0.012	0.6	0.011	0.915	[9426]	1.539	[1.819] (1)

$$K_c = \frac{[\text{Nitrop.}]\, a^2_{OH'}}{[\text{Nitric.}]} = (1.353 \pm 0.025) \cdot 10^{-4}$$

(1) Le cifre segnate entro parentesi corrispondono alle coordinate delle due rette estreme da cui abbiamo dedotto il valore della K_c.

Digitized by Google



Spettri di assorbimento delle soluzioni di Nitroprussiato di sodio (0,0008 mol/lit.) in soda di varie concentrazioni.

1) NaOH 0,012 mol/lit.	5) NaOH 0,400 mol/lit.
2) NaOH 0,016 " "	6) NaOH 0,800 " "
3) NaOH 0,040 " "	7) NaOH conc. (ca 10 mol/lit.)
4) NaOH 0,080 " "	8) Nitroprussiato in H_2O

Fig. 1.

Digitized by Google

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Reti di Cebiceff e sistemi coniugati nelle* V_n *riemanniane.* Nota di E. BORTOLOTTI, presentata [1] dal Socio L. BIANCHI.

In una recente Nota di G. Corbellini [2] vengono considerate le V_n riemanniane nelle quali esistono delle n-ple di congruenze di curve dotate di *mutuo parallelismo*, tali cioè che *le direzioni delle curve di una qualunque delle n congruenze uscenti dai punti di una curva di un'altra qualunque delle congruenze stesse, siano parallele* (nel senso di Levi-Civita) in V_n.

A questo stesso argomento, e ad altri che ad esso si connettono, erano dedicate alcune mie ricerche svolte nel 1923 [3]; darò qui brevemente conto dei risultati allora ottenuti e di altri più recenti che li completano.

1. Sia fissato in V_n un sistema di coordinate curvilinee u^i. Se supponiamo che le direzioni delle linee u^i che escono da una generica linea u^k siano parallele, lungo essa, in V_n ($i, k = 1, 2, \cdots, n, i \neq k$), da note proprietà del parallelismo di Levi-Civita abbiamo facilmente che l'angolo delle linee u^i, u^k deve essere funzione soltanto di u^i, u^k, e inoltre, che la lunghezza d'arco di una linea u^i deve dipendere da u^i solamente. Ciò porta a concludere che all'elemento lineare di V_n, riferito a una tale rete coordinata, che diremo, per ovvia generalizzazione, una *rete di Cebiceff* in V_n, si può sempre dare la forma (notata anche dal Corbellini)

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_1^n{}_i \, du^{i^2} + 2 \sum_{(i \neq k)}^{1 \cdots n}{}_{i,k} \, a_{ik} \, du^i \, du^k$$

ove $a_{ik} = \cos \omega_{ik} = \cos (u^i, u^k)$ è funzione delle u^i ed u^k soltanto.

Dalla (1) stessa seguono subito, direttamente, tutti i risultati indicati dal Corbellini, che non starò a ripetere: noterò soltanto che se ne ricava, per una V_n riferita ad un'eventuale rete di Cebiceff,

$$(2) \qquad \begin{cases} (ik, rt) = 0 \text{ per } r, \textit{ oppure } t, \text{ diverso da } i \text{ e da } k, \\ (ik, ik) = \dfrac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u^i \partial u^k} - \sum_1^n{}_{r,s} \, a^{rs} \dfrac{\partial a_{ir}}{\partial u^i} \dfrac{\partial a_{ks}}{\partial u^k} . \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 15 maggio 1927.

(2) *Di una classe di varietà caratterizzate per mezzo del parallelismo*, « Rend. Lincei », serie 6ª, vol. IV, 1926, pp. 92-99.

(3) Un abbozzo di queste fu da me inviato, nel giugno 1923, al prof. Bianchi.

Digitized by Google

Queste formule (7) ci mostrano che esistono in effetto delle V_n non euclidee (per quanto specializzate, se $n > 2$), che ammettono delle reti di Cebiceff.

Per la ricerca di queste reti e delle V_n che le ammettono si trova subito un sistema di equazioni che generalizza quello ben noto di Servant per le reti di Cebiceff in V_2. Essendo sempre u^i le coordinate che dànno al ds^2 di V_n la forma (1), e x^i altre coordinate qualunque, dalle note formule di Christoffel ricaviamo il sistema

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^r \partial u^s} + \sum_{1}^{n}{}_{h,k} \left\{ \begin{matrix} hk \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^h}{\partial u^r} \frac{\partial x^k}{\partial u^s} = 0 ,$$

ove i simboli di Christoffel vanno calcolati in coordinate x^i. Le condizioni di integrabilità di questo sistema sono

$$(4) \qquad \begin{cases} \sum_{1}^{n}{}_{h,k,l} \{ hi, kl \} \frac{\partial x^h}{\partial u^r} \frac{\partial x^k}{\partial u^s} \frac{\partial x^l}{\partial u^t} = 0 , \\ (i, r, s, t = 1, 2, \cdots, n \quad ; \quad r \neq s \neq t) . \end{cases}$$

Le (4) non sono identicamente soddisfatte, per $n > 2$, che se la V_n è un R_n euclideo; dunque *soltanto nelle varietà euclidee, per $n > 2$, si hanno reti di Cebiceff dotate della massima generalità*, in relazione con la forma del sistema (3): cioè, reti di cui si possono assegnare ad arbitrio le n linee uscenti da un punto iniziale (secondo n direzioni indipendenti).

Escluso il caso euclideo, generalmente le (3), (4) non formano ancora un sistema integrabile. *Le V_n che ammettono reti di Cebiceff sono caratterizzate dal fatto, che in esse il sistema formato dalle* (3), (4) *e dalle loro conseguenze differenziali è compatibile.*

2. Le (4) hanno un interessante significato geometrico: Posto

$$\overset{r}{X}{}^h = \text{vers} \frac{\partial x^h}{\partial u^r} ,$$

esse ci mostrano che in ciascun punto P di V_n, ognuna delle direzioni $(\overset{r}{X})$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ che ne escono è l'*asse* (secondo Bompiani) [1] di tutte le faccette $(\overset{s}{X}, \overset{t}{X})$ $(s \neq t \neq r)$, e quindi, anche, è l'asse di *tutte* le faccette (piane) uscenti dal punto P considerato nell'$(n - 1)$ — piano contenente le direzioni $(\overset{s}{X})$ $(s \neq r)$; mentre ogni faccetta $(\overset{r}{X}, \overset{s}{X})$ ha per asse ciascuna delle rette uscenti da P nell'$(n - 2)$ — piano delle direzioni $(\overset{t}{X})$ $(t \neq r \neq s)$. Ciò mostra come, per $n > 3$, la condizione di contenere una rete di Ce-

(1) Ved. E. BOMPIANI, *Studi negli spazi curvi: Del parallelismo in una varietà qualunque*, « Atti Ist. Veneto », t. 80, parte 2ª, anno 1920–21, pp. 355-386 e 839-859, p. 840.

Digitized by Google

biceff sia, per la V_n, grandemente restrittiva. Per $n = 3$, è facile vedere che (in ogni caso) *le faccette uscenti da un punto e gli assi relativi si corrispondono nella polarità rispetto ad un cono quadrico, che ha per generatrici gli assi delle faccette a curvatura nulla* (le quali, come ha mostrato il Bompiani, contengono il proprio asse) ed è inviluppato dalle faccette medesime. Ora: *se il sistema coordinato è una rete di Cebiceff, il triedro delle direzioni delle linee coordinate uscenti da* P *è un triedro autoconiugato rispetto al cono* K_2 *ora detto.*

In ogni V_3 esistono infinite terne di congruenze per le quali quest'ultima condizione è soddisfatta: ma essa naturalmente è soltanto necessaria, non sufficiente, perchè le congruenze formino una rete di Cebiceff.

3. Nelle mie ricerche del 1923 mi ero occupato anche di un altro tipo di reti coordinate, che possono considerarsi in classi particolari di varietà riemanniane. Queste reti coordinate (che comprendono, per $n > 2$, le reti di Cebiceff come caso particolare), sono definite da questa condizione: che *su ogni* V_2 *coordinata le linee coordinate formino un sistema coniugato.* Come fa il Darboux pel caso $n = 3$, tali reti possono dirsi *sistemi* n-pli *coniugati* (o *a linee coniugate*).

La condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (u^i) sia un sistema n-plo coniugato è questa [1]: che le serie di direzioni $\sum_{(ik)}$ delle linee u^i che escono da una generica linea u^k abbiano gli stessi vettori associati $v_{(ik)}$ sia considerate in V_n che considerate nelle V_2 coordinate (u^i, u^k) a cui appartengono.

È notevole il fatto che la precedente condizione equivale a quest'altra: che *le curvature associate* $\frac{1}{R_{(ik)}}$ (secondo Bianchi) *alle serie* $\sum_{(ik)}$ *abbiano gli stessi valori sia calcolate sulle* V_2, *che sulle* V_3 *coordinate.* In particolare: se le linee (u^i) formano un sistema (n-plo) coniugato in V_n, esse formano anche un sistema coniugato su ogni V_3 coordinata (e viceversa); e anche su ogni V_m coordinata $(3 \leq m \leq n)$.

La proprietà ora accennata può verificarsi mediante la seguente formula [2], nella quale le a_{ik} ed i simboli di Christoffel sono relativi alla metrica della varietà nella quale $\frac{1}{R_{(ik)}}$ è calcolata:

$$(5) \qquad \frac{1}{R^2_{(ik)}} = \frac{1}{a^2_{ii}a_{kk}} \sum_{r,s} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{is} \\ a_{ri} & a_{rs} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix};$$

(1) Cfr. la mia Nota: *Su di una generalizzazione della teoria delle curve e sui sistemi coniugati di una* V_2 *in* V_n. «Rend. Ist. Lombardo», vol. 58, 1925, pp. 413-459 e il lavoro *Studi sugli spazi curvi: La seconda forma fondamentale di una* V_m *in* V_n di E. Bompiani, «Atti Ist. Veneto», t. 80, parte 2ª, anno 1920-21, pp. 1113-1145.

(2) Questa formula si trova indicata nella mia Nota: *Su di una generalizzazione ecc.*, ora citata: p. 433, form. (20).

Digitized by Google

la quale mostra anche che *la condizione perchè le linee* (u^i) *formino un sistema* (n-plo) *coniugato è espressa dalle formule*

$$(6)\qquad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} ik \\ i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} ik \\ i \end{matrix} \right\}_b \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} ik \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} ik \\ k \end{matrix} \right\}_b \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} = 0 \\ (i, k, l = 1, 2, \cdots, n \quad ; \quad i \neq k \neq l), \end{cases}$$

ove $\left\{ \begin{matrix} ik \\ i \end{matrix} \right\}_b$, $\left\{ \begin{matrix} ik \\ k \end{matrix} \right\}_b$ s'intendono calcolati nella metrica della V_2 coordinata (u^i, u^k).

Dalle note formule di Christoffel abbiamo, per la ricerca degli eventuali sistemi coniugati in V_n, il sistema di equazioni

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^r \partial u^s} + \sum_{1}^{n}{}_{b,k} \left\{ \begin{matrix} bk \\ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^b}{\partial u^r} \frac{\partial x^k}{\partial u^s} = \left\{ \begin{matrix} rs \\ r \end{matrix} \right\}'_b \frac{\partial x^i}{\partial u^r} + \left\{ \begin{matrix} rs \\ s \end{matrix} \right\}'_b \frac{\partial x^i}{\partial u_s},$$

ove i simboli $\left\{ \begin{matrix} rs \\ r \end{matrix} \right\}'_b$ vanno calcolati in coordinate u^t, sulle $V_2(u^r, u^s)$.

Una V_n generica per $n > 3$ non contiene sistemi n-pli coniugati.

Gli (eventuali) sistemi n-pli *ortogonali* in V_n sono particolari sistemi coniugati: anzi, si vede immediatamente che: *se un sistema n-plo coniugato in* V_n *possiede due delle seguenti proprietà:*

1ª *di essere ortogonale,*

2ª *di essere una rete di Cebiceff,*

3ª *di essere composto di geodetiche,*

esso possiede anche la rimanente, e la V_n *è necessariamente euclidea.*

4. Verrò ora a considerazioni di carattere più generale relative alle coordinate curvilinee in V_n; dalle quali trarrò poi, fra l'altro, conseguenze relative ai casi particolari finora trattati.

Siano $\overset{i}{X}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ i vettori (unitari, indipendenti) di un' n-pla di congruenze (qualunque) in una V_n riemanniana.

Siano $\overset{i}{Y}$ i vettori unitari dell' n-pla *supplementare*, tale cioè che *in ogni punto gli* n-edri $\overset{i}{X}, \overset{i}{Y}$ *siano supplementari.* Ciò equivale a dire che $(\overset{i}{Y})$ è la direzione normale all' $(n-1)$-piano di $\overset{1}{X}, \overset{2}{X}, \cdots \overset{i-1}{X}, \overset{i+1}{X}, \cdots, \overset{n}{X}$. Se $\overset{i}{\eta}_\lambda$ è l'elemento reciproco di $\overset{i}{X}{}^\lambda$ nel determinante delle $\overset{i}{X}{}^\lambda$ (non nullo per ipotesi), onde

$$(8)\qquad \sum_\mu \overset{i}{X}{}^\mu \overset{k}{\eta}_\mu = \alpha_{(ik)} \quad , \quad \sum_i \overset{i}{X}{}^\lambda \overset{i}{\eta}_\mu = \alpha^\lambda_\mu \ (1)$$

(1) Ove $\alpha_{(ik)} = 1, 0$, secondo che $i = k$, $i \neq k$; e così $\alpha^\lambda_\mu = 1, 0$ secondo che $\lambda = \mu$, $\lambda \neq \mu$.

Digitized by Google

posto $\theta_k = (\overset{k}{\mathrm{X}}\,\widehat{,}\,\overset{k}{\mathrm{Y}})$ si ha

$$\overset{i}{\mathrm{Y}}_\lambda = \overset{i}{r}_{l\lambda} \cos\theta_i \,. \tag{9}$$

Ciò premesso: la condizione perchè le congruenze $\overset{i}{\mathrm{X}}$ formino un sistema di coordinate curvilinee in V_n è, ovviamente, che le congruenze $\overset{i}{\mathrm{Y}}$ dell' n -pla supplementare siano normali [1].

Il Corbellini ha espresso recentemente questa condizione con un sistema di formule [2] che può scriversi semplicemente così:

$$\left(\frac{\delta^\circ \overset{i}{\mathrm{X}}}{\delta s_k} - \frac{\delta^\circ \overset{k}{\mathrm{X}}}{\delta s_i}\right) \times \overset{h}{\mathrm{Y}} = 0 \qquad (i,k,h = 1,2,\cdots,n \;\; ; \;\; i \neq k \neq h) \tag{10}$$

ove l'operatore $\dfrac{\delta^\circ}{\delta s_i} = \overset{i}{\mathrm{X}} \times \nabla^\circ$ indica *differenziazione tensoriale* (ordinaria, cioè di Ricci) *nella direzione* $(\overset{i}{\mathrm{X}})$ e ∇° è il simbolo di *derivazione covariante* (di Ricci), (s'intende, rispetto alla metrica di V_n).

Le (10) hanno questo interessante significato geometrico:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l' n -pla $(\overset{i}{\mathrm{X}})$ *possa essere assunta ad* n -pla *coordinata è che* (per $i \neq k$ qualunque) *il vettore* $\dfrac{\delta^\circ \overset{i}{\mathrm{X}}}{\delta s_k} - \dfrac{\delta^\circ \overset{k}{\mathrm{X}}}{\delta s_i}$ *giaccia nel piano dei vettori* $\overset{i}{\mathrm{X}}, \overset{k}{\mathrm{X}}$.

A questa condizione può darsi un'altra forma, introducendo la *connessione affine di Weitzenboeck-Vitali* [3] determinata in V_n dalla condizione di *ammettere le* n *congruenze dell'* n -pla $(\overset{i}{\mathrm{X}})$ *come congruenze a parallelismo completo*: tale cioè che sia identicamente

$$\delta \overset{i}{\mathrm{X}}{}^\lambda = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad \nabla_\mu \overset{i}{\mathrm{X}}{}^\lambda = 0 \qquad (i,\mu,\lambda = 1,2,\cdots,n); \tag{11}$$

(1) Ved. G. Corbellini, *Sopra i sistemi di coordinate di una varietà qualunque*, « Rend. Lincei », Serie V, vol. 32, 1925, 1° semestre, pp. 112–114.

(2) G. Corbellini, *Di una classe di varietà, ecc.*, già cit., p. 94, form. (4).

(3) R. Weitzenböck, *Invariantentheorie* (P. Noordhoff, 1923, Groningen) p. 320; G. Vitali, *Una derivazione covariante formata coll'ausilio di n sistemi covarianti del I ordine*, « Atti Soc. Ligustica », vol. 2°, 1924, pp. 248–253, e *Intorno ad una derivazione nel calcolo assoluto*, ibid., vol. 4°, 1925, pp. 287–291. Ved. le mie Note: *Parallelismi assoluti nelle* V_n *riemanniane*, « Atti Ist. Veneto », t. 86, parte 2ª, anno 1926-27, pp. 455-465, e *On metric connexions with absolute parallelism*, « Proceedings Akad. Wet. Amsterdam, vol. 30, 1927), nelle quali mi occupo del caso particolare delle connessioni *euclidee* di Weitzenboeck-Vitali; ved. anche le tesi: *Differentialinvarianten von systemen von vektoren*, di G. F. C. Griss (P. Noordhoff, Groningen, 1925) e *Differentiaalinvarianten von troee covariante-vektorvelden met vier veranderlijken*, di M. Euwe (ibid., 1926).

Digitized by Google

ove δ, ∇ sono i simboli di derivazione e differenziazione tensoriale relativi a tale connessione. Essendo sempre δ^0, ∇^0 gli analoghi simboli per la *connessione di Levi-Civita* relativa alla metrica di V_n, abbiamo

$$(12) \qquad \begin{cases} \delta \xi^\lambda = \delta^0 \xi^\lambda + \sum T_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} \xi^\mu \, du^\nu , \\ \delta \xi_\lambda = \delta^0 \xi_\lambda - \sum T_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot\mu} \xi_\mu \, du^\nu , \end{cases}$$

ove

$$(13) \qquad T_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda} = - \sum_i^n \nabla_\nu^0 \overset{i}{X}{}^\lambda \cdot \overset{i}{\eta}_\mu .$$

Dalle (8), (13) si ha

$$(14) \qquad \nabla_\mu^0 \overset{i}{X}_\lambda = - \sum_\nu T_{\nu\mu\lambda} \overset{i}{X}{}^\nu \quad , \quad \nabla_\mu^0 \overset{i}{\eta}_\lambda = \sum_\nu T_{\lambda\mu\nu} \overset{i}{\eta}{}^\nu ;$$

si ha poi

$$(15) \qquad \nabla_\mu \overset{i}{\eta}{}^\lambda = \sum_{\nu,\tau} a^{\lambda\tau} (T_{\tau\mu\nu} + T_{\nu\mu\tau}) \overset{i}{\eta}{}^\nu .$$

Il tensore $P_{\lambda\mu\nu} = T_{\lambda\mu\nu} + T_{\nu\mu\lambda}$, il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè la connessione affine (12) sia una *connessione euclidea* (secondo Cartan), è nullo soltanto se le n congruenze $(\overset{i}{X})$ sono *isogonali* cioè *se le loro linee si tagliano mutualmente secondo angoli costanti* (lungo ciascuna linea). Infatti si ha

$$(16) \qquad P_{\lambda\mu\nu} = \sum_{k,l}^n \frac{\partial \cos \omega_{kl}}{\partial u^\mu} \overset{k}{\eta}_\lambda \overset{l}{\eta}_\nu \quad ; \quad \frac{\partial \cos \omega_{kl}}{\partial u^\nu} = \sum_{\mu,\lambda} P_{\mu\nu\lambda} \overset{k}{X}{}^\mu \overset{l}{X}{}^\lambda ,$$

ove

$$\omega_{kl} = (\overset{k}{X}, \overset{l}{X}) .$$

Il significato geometrico di questa connessione euclidea relativa a un'n-pla isogonale è ovvio, e si riduce a quello notato dal Vitali (l. c.) nel caso in cui l'n-pla sia ortogonale. Le (15) mostrano che *soltanto nel caso in cui l'* n -pla $(\overset{i}{X})$ *è isogonale la connessione di Weitzenbock-Vitali relativa ad essa ha anche le congruenze* $\overset{i}{Y}$ *come congruenze a parallelismo completo.*

Tornando al caso generale: la connessione affine (12) è in ogni caso *a curvatura nulla*, cioè *a parallelismo assoluto*: invece non è generalmente, *a torsione nulla*. Precisamente, il *vettore di torsione* relativo alla faccetta $(\overset{i}{X}, \overset{k}{X})$ è

$$(17) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen} \omega_{ik}} \left(\frac{\delta^0 \overset{i}{X}{}^\lambda}{\delta s_k} - \frac{\delta^0 \overset{k}{X}{}^\lambda}{\delta s_i} \right) .$$

Digitized by Google

Confrontando con le (10) possiamo concludere: *Tra le* n *-ple* $\overset{i}{X}$ *di congruenze che si possono considerare in una varietà riemanniana, quelle che possono essere assunte ad* n *-ple coordinate sono caratterizzate dal fatto che per la corrispondente connessione di Weitzenböck-Vitali il vettore di torsione relativo alla faccetta* $(\overset{i}{X}, \overset{k}{X})$ *giace nella faccetta stessa.*

Le varietà riemanniane che *contengono* n *-ple di congruenze isogonali,* o in particolare *ortogonali,* sono caratterizzate dal fatto di *ammettere una connessione di Weitzenböck-Vitali dotata della proprietà ora indicata,* e inoltre *euclidea.*

Torniamo a considerare la condizione (10). Si presentano naturalmente questi *tre casi particolari,* nei quali tale condizione è certo soddisfatta:

1) Si ha, per $i \neq k \neq h$ qualunque,

$$\frac{\delta \overset{i}{X}}{\delta s_k} \times \overset{h}{Y} = 0 . \tag{18}$$

Ciò esprime che il vettore associato $\dfrac{\delta \overset{i}{X}}{\delta s_k}$ giace nel piano $(\overset{i}{X}, \overset{k}{X})$, cioè, che le direzioni $(\overset{i}{X})$ sono, sulla superficie formata dalle linee $(\overset{i}{X})$ che escono da una linea $\overset{k}{X}$, *coniugate* alle direzioni di quest'ultima linea. Dunque si ha allora un *sistema* n *-plo coniugato in* V_n.

2) Per $i \neq k$ qualunque è identicamente

$$\frac{\delta \overset{i}{X}}{\delta s_k} - \frac{\delta \overset{k}{X}}{\delta s_i} = 0 . \tag{19}$$

Allora le direzioni di $\dfrac{\delta \overset{i}{X}}{\delta s_j}, \dfrac{\delta \overset{k}{X}}{\delta s_i}$ coincidono in una direzione normale alla faccetta $(\overset{i}{X}, \overset{k}{X})$, e quindi, *su ogni* V_2 *coordinata le linee coordinate formano una rete di Cebiceff.* È notevole il fatto che in questo caso *la connessione affine di Weitzenböck-Vitali associata all'* n *-pla è a torsione nulla.*

3) Infine, possono essere soddisfatte insieme le condizioni dei due casi precedenti, cioè può aversi

$$\frac{\delta \overset{i}{X}}{\delta s_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \cdots n ; i \neq k). \tag{20}$$

Si ricade allora ovviamente nel caso delle *reti di Cebiceff di* V_n, e si ritrova il risultato, notato dal Corbellini, che *una eventuale* n *-pla di congruenze dotata di mutuo parallelismo è sempre atta a definire un sistema di coordinate in* V_n.

Digitized by Google

Matematica. — *Sui sistemi di funzioni di Tchebycheff che sono ortogonali.* Nota del dott. M. Bossolasco, presentata [1] dal Socio C. Somigliana.

1. Ricordo che S. Bernstein [2] dice che le funzioni

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x), \cdots,$$

limitate e continue su di un segmento finito od infinito (a, b), formano un *sistema di Tchebycheff* (sistema T) allorchè qualunque sia l'intero n, una equazione della forma:

$$(1) \qquad F_n(x) \equiv a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_n \varphi_n(x) = 0,$$

in cui tutti i coefficienti $a_0, a_1, \cdots a_n$, non sono contemporaneamente nulli, *ammette al più n radici o zeri in* (a, b), considerando come doppia una radice interna ad (a, b), quando $F_n(x)$ non cambia di segno passando per essa. Affinchè ciò avvenga è necessario che il determinante:

$$D(x, x_1, \cdots x_n) \equiv \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots \varphi_n(x) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} = A_0 \varphi_0(x) + A_1 \varphi_1(x) + \cdots + A_n \varphi_n(x)$$

non possa annullarsi per alcun valore di x dell'intervallo (a, b), diverso da $x_1, x_2, \cdots x_n$, e che esso cambi di segno passando per questi valori.

2. Per le funzioni $\varphi_i(x)$ di un qualunque sistema T sussiste la proposizione seguente:

« *Se la funzione* $g(x)$, *continua in* (a, b), *soddisfa ivi alle* $n + 1$ *condizioni di ortogonalità, rispetto alla funzione di segno costante* $\theta(x)$:

$$\int_a^b \theta(x)\, g(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0, \qquad (i = 0, 1, \cdots n)$$

allora per gli zeri di $g(x)$ *si può asserire che dentro l'intervallo* (a, b) *la* $g(x)$ *si annulla in almeno* $n + 1$ *punti cambiandovi segno* ».

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

(2) S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.* Paris 1926, p. 1.

Digitized by Google

Infatti, se si annullasse in soli n punti, potrei determinare le costanti a_i in guisa che F_n avesse gli stessi zeri; allora $\theta(x)\,g(x)\,F_n(x)$ avrebbe un segno costante, mentre il suo integrale è nullo.

Per quanto mi proponga di ritornare in un altro lavoro sul problema dell'approssimazione mediante funzioni di un sistema T voglio sin d'ora dimostrare una proprietà dei polinomi generalizzati $F_n(x)$ che approssimano al senso del metodo dei minimi quadrati una funzione assegnata. Si tratta di determinare, fra tutte le F_n di egual indice, quella che rende minimo l'integrale:

$$I_n = \int_a^b \theta(x)\,[f(x) - F_n(x)]^2\,dx\,,$$

$f(x)$ essendo una funzione continua data nell'intervallo $(a\,,\,b)$. Esplicitando le condizioni di minimo, coll'eguagliare a zero le derivate di I_n rispetto ai coefficienti che compaiono in F_n, segue che $f(x) - F_n(x)$ è ortogonale, rispetto a $\theta(x)$, alle $n+1$ funzioni $\varphi(x)\,,\varphi_1(x)\,,\cdots\varphi_n(x)$ e quindi, per il risultato precedente, si conclude che:

« *Il polinomio generalizzato* $F_n(x)$ *di migliore approssimazione quadratica per una funzione continua* $f(x)$ *interseca questa in almeno* $n+1$ *punti* »[1].

3. Sia ora $\varphi_0(x)\,,\varphi_1(x)\,,\cdots\varphi_n(x)\,,\cdots$ un sistema di Tchebycheff *ortogonale* in $(a\,,\,b)$, rispetto alla funzione $\theta(x)$ di segno costante. Da quanto sopra risulta che la funzione $\varphi_n(x)$ di un tal sistema, come ortogonale alle $\varphi_0\,\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}$ che la precedono, ammette almeno n zeri in $(a\,,\,b)$; ma φ_n, come particolare F_n, non può avere più di n radici e si conclude che:

« *Ogni* φ_n *ammette esattamente* n *radici* ».

Ciò premesso, dico che:

« *Due* φ *successive, e siano* φ_n *e* φ_{n+1}, *non possono avere alcuna radice comune* ».

È evidente che φ_0 e φ_1 non hanno radici comuni: per dimostrare che due φ successive generiche $\varphi_n\,,\varphi_{n+1}$ non hanno alcuna radice comune mi servirò del metodo d'induzione, supponendo già stabilita tale proprietà per φ_{n-1} e φ_n.

Sia, per assurdo, $\varphi_n(\xi) = \varphi_{n+1}(\xi) = 0$. Essendo $\varphi_{n-1}(\xi) \neq 0$, è possibile definire il polinomio generalizzato seguente:

$$P_{n-1}(x) \equiv \frac{\varphi_0(\xi)}{\int_a^b \theta\,\varphi_0^2\,dx}\,\varphi_0(x) + \cdots + \frac{\varphi_{n-1}(\xi)}{\int_a^b \theta\,\varphi_{n-1}^2\,dx}\,\varphi_{n-1}(x)\,,$$

(1) Osservo che questo risultato era già stato ottenuto dal prof. Picone nel caso particolare dei polinomi trigonometrici. V. « Atti Accad. Torino », 1924, p. 679.

Digitized by Google

che certamente non si annulla per $x = \xi$. Ciò posto, si può altresì determinare il polinomio:

$$F_{n+1}(x) \equiv a_0 \varphi_0(x) + \cdots + a_{n-1} \varphi_{n-1}(x) + a_n \varphi_n(x) + a_{n+1} \varphi_{n+1}(x)$$

colla condizione di annullarsi per $x = \xi$; a causa dell'ipotesi fatta basterà scegliere a_0 in guisa che:

$A_{n-1}(\xi) = 0$, ove è: $A_{n-1}(x) \equiv a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_{n-1} \varphi_{n-1}(x) = 0$,

allorchè si siano fissati i rimanenti coefficienti $a_1, a_2 \cdots a_{n-1}$: cosa che riesce possibile essendo ovunque $\varphi_0(x) \neq 0$. Osservo che per la particolare scelta del polinomio P_{n-1}, quando quest'ultima condizione $A_{n-1}(\xi) \neq 0$ è soddisfatta, i due polinomi $A_{n-1}(x)$ e $P_{n-1}(x)$ sono ortogonali in (a, b) (rispetto a $\theta(x)$). Ne segue così che qualunque siano le costanti

$$a_1, a_2, \cdots a_{n-1} \quad , \quad a_n, a_{n+1}$$

si ha

$$\int_a^b \theta(x) P_{n-1}(x) F_{n+1}(x)\, dx = 0 . \tag{2}$$

Indico con $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ le radici di $P_{n-1}(x)$, intendendo che quando tali radici sono in numero $r < n - 1$ i rimanenti $n - r - 1$ punti siano punti arbitrari di (a, b) distinti però fra di loro, nonchè dalle radici suddette di P_{n-1} e da ξ.

Si possono allora determinare le costanti $a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$, in guisa che risulti, supposto, ad es. $a < x_1 < \cdots x_i < \xi < x_{i+1} < \cdots < x_{n-1} < b$:

$$\int_a^{x_1} \theta P_{n-1} F_{n+1}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \theta P_{n-1} F_{n+1}\, dx = \cdots = \int_{x_i}^{\xi} \theta P_{n-1} F_{n+1}\, dx =$$

$$= \int_{\xi}^{x_{i+1}} \theta P_{n-1} F_{n+1}\, dx = \cdots = \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} \theta P_{n-1} F_{n+1}\, dx = 0 .$$

Queste n relazioni unite alla (2) forniscono:

$$\int_{x_{n-1}}^{b} \theta P_{n-1} F_{n+1}\, dx = 0 .$$

A causa della permanenza del segno di $P_{n-1}(x)$ in ogni intervallo d'integrazione, risulta di qui che $F_{n+1}(x)$ deve annullarsi in ognuno di essi almeno una volta, cioè deve ammettere $n + 1$ radici oltre alla ξ, quindi complessivamente almeno $n + 2$, il che è impossibile.

4. Si può inoltre provare che:

« *Ogni* φ_n *cambia di segno fra due successive radici di* φ_{n+1} ».

Digitized by Google

Siano ξ_1, ξ_2 due radici successive di φ_{n+1}; nell'interno dell'intervallo (ξ_1, ξ_2) φ_{n+1} avrà segno costante, ad es., positivo. Ammetterò, per assurdo, che φ_n abbia pure segno costante in (ξ_1, ξ_2), ad es., anch'esso positivo; agli estremi ξ_1, ξ_2, $\varphi_n(x)$ non può annullarsi ed assumerà perciò ancora valori positivi.

Considero la combinazione: $F_{n+1}(x) \equiv \varphi_n(x) - \lambda\varphi_{n+1}(x)$ e immagino rappresentate graficamente le due funzioni φ_n e φ_{n+1} in (ξ_1, ξ_2); per continuità, è evidente che esisterà almeno un numero positivo λ_0 per cui moltiplicando per esso tutte le ordinate di φ_{n+1} si ottenga una curva, di equazione $y = \lambda_0\varphi_{n+1}(x)$, che abbia almeno un punto in comune colla curva rappresentativa di $\varphi_n(x)$ senza attraversarla.

Questo ragionamento intuitivo si può rendere rigoroso nel modo seguente: la funzione: $\lambda(x) = \dfrac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)}$ è una funzione continua nell'interno di (ξ_1, ξ_2), ivi costantemente positiva, e che, per le ipotesi fatte, non si annulla mai e diventa infinita agli estremi. Per un teorema di Weierstrass essa raggiungerà il suo minimo valore in almeno un punto x_0 di (ξ_1, ξ_2). Sia $\lambda_0 = \lambda(x_0)$: dico allora che la curva di equazione $y = \lambda_0\varphi_{n+1}(x)$ è in (ξ_1, ξ_2) tutta situata al disotto della curva $Y = \varphi_{n+1}(x)$ e che non attraversa questa nel punto comune di ascissa $x = x_0$. Invero, poichè $\lambda_0 = \lambda(x_0)$ è il minimo valore di $\dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}$ si avrà che per un altro punto qualunque x_1 di (ξ_1, ξ_2) è:

$$\frac{\varphi_n(x_1)}{\varphi_{n+1}(x_1)} \geqq \lambda_0 \quad , \quad \text{cioè: } \varphi_n(x_1) \geqq \lambda_0\varphi_{n+1}(x_1),$$

l'eguaglianza sussistendo quando $x_1 = x_0$, cioè nel punto, o nei punti, in cui $\lambda(x)$ raggiunge il suo minimo valore.

In corrispondenza al numero λ_0, ora determinato, la funzione

$$F_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - \lambda_0\varphi_{n+1}(x)$$

dovrà annullarsi in almeno un punto interno a (ξ_1, ξ_2), conservandosi però, in tutto questo intervallo, non negativa e diversa da zero agli estremi. D'altra parte $F_{n+1}(x)$ come ortogonale a $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_{n-1}$ deve annullarsi in almeno n punti cambiando ivi di segno; ciò dovrà accadere, per l'ipotesi fatta, esternamente a (ξ_1, ξ_2) e quindi $F_{n+1}(x)$ si annullerebbe in $n+1$ punti senza cambiare segno in uno di essi, il che è in contraddizione colla definizione delle funzioni di un sistema di Tchebycheff.

5. La proposizione ora dimostrata e quella immediatamente precedente portano a conchiudere che:

« *Per un sistema* T *ortogonale* $[\varphi_i]$ *gli zeri di due* φ *consecutive si succedono alternativamente* ».

Digitized by Google

Riguardo alla distribuzione relativa delle radici di tutte le funzioni del sistema si può osservare che essa dipende dalla completezza del sistema ortogonale medesimo. Invero, M. Plancherel ha dimostrato che: « Per un sistema ortogonale *chiuso* di funzioni continue (non necessariamente T), l'insieme di tutti gli zeri delle funzioni del sistema è ovunque denso nell'intervallo di ortogonalità » [1].

Matematica. — *Sulla ricerca della forma delle onde luminose dall'esame delle « frangie d'ombra »* [2]. Nota del dott. G. B. Pacella, presentata [3] dal Socio A. Garbasso.

Nella prova dei sistemi ottici coi reticoli di diffrazione, secondo il metodo del prof. Vasco Ronchi [4], rimane ancora insoluta la questione della forma dell'onda nel caso più generale [5]. In seguito all'azione dei reticoli sull'onda emergente dal sistema ottico in esame, questa viene scomposta in diverse copie identiche e ruotate di un certo angolo una rispetto all'altra, intorno al tratto medio del reticolo come asse. Le « frangie d'ombra » ci rivelano le differenze di cammino ottico fra determinati punti di due di queste onde diffratte. In questa Nota esponiamo un procedimento analitico e uno geometrico, mediante i quali da queste differenze, dedotte dalle « frangie d'ombra », si risale a determinare la forma dell'onda.

Il problema dunque si può enunciare nella maniera seguente: una superficie ignota subisce una rotazione attorno ad un asse a; determinarla analiticamente o geometricamente nell'ipotesi che le distanze di due punti delle due superficie, esistenti sulla stessa perpendicolare ad un piano fisso per a si conosca su un numero discreto di tali perpendicolari. La medesima questione, quando si voglia una sezione della superficie normale all'asse in luogo della superficie stessa, può consistere nella ricerca di una curva piana tale che le differenze tra le ordinate della curva da determinare e quelle dell'altra che si ottiene dalla precedente mediante una rotazione attorno ad un punto del piano, siano assegnate in corrispondenza di un certo numero di punti dell'asse delle ascisse. C'interesseremo per prima proprio di questo problema di geometria piana, sia perchè la ricerca se ne avvantaggia, sia perchè le misure offerte dall'esame fisico della questione sono date per le curve e non per le superficie.

(1) V. « Math. Annalen », Bd. 68, 1910, p. 273.

(2) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Trieste.

(3) Nella seduta del 1° maggio 1927.

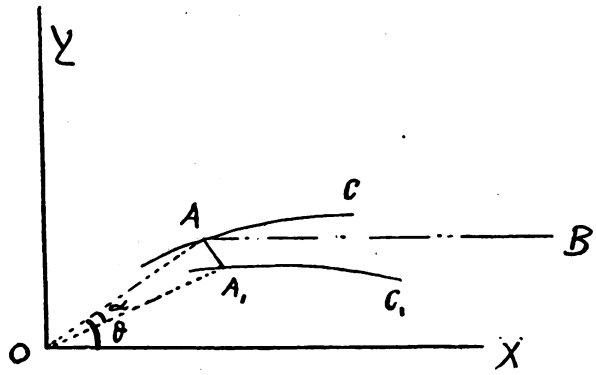
(4) V. Ronchi, *La prova dei sistemi ottici*. Bologna, Zanichelli, 1925.

(5) V. Ronchi, *Sur la nature interférentielle des franges d'ombre dans l'essai des système optiques*. « Revue d'optique », V, p. 441, 1926.

Digitized by Google

Qui trova posto il riferire che un problema del tutto analogo a quello citato dianzi consiste nel ricercare una superficie nel caso si conoscano le differenze fra le distanze da un piano dei suoi punti e quelle analoghe di una seconda superficie ottenuta dalla precedente mediante una traslazione parallela a quel piano, e ciò in un numero discreto di punti del piano. L'esamineremo in fondo e non nei dettagli, sebbene in ordine di tempo questa questione c'interessò prima dell'altra, perchè oggi sembra meno utile ai fini fisici; del resto la trattazione è analoga all'altra che esporremo, e la soluzione ne è più semplice.

Sia dunque $y = f(x)$ l'equazione da determinarsi di una curva C riferita ad un sistema ortogonale XY; considerata come rigida ed ancora rigidamente unita all'origine O degli assi, ruoti attorno a questa, ed in seguito



ad una rotazione α dia luogo ad una curva C_1: Se A è un punto di C ed A_1 è il corrispondente in C_1 ed xy, x_1y_1 sono le rispettive coordinate avremo le relazioni:

$$x_1 = x + \overline{AA_1} \cos A_1AB$$
$$y_1 = y - \overline{AA_1} \operatorname{sen} A_1AB,$$

e però indicando con θ l'angolo XOA, con α quello AOA_1, con r la misura di OA le precedenti si potranno scrivere:

$$x_1 = x + 2r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{sen} \theta \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \theta \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right)$$
$$y_1 = y - 2r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left(\cos \theta \cos \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right).$$

A questo punto abbiamo bisogno d'imporre una condizione, ma che non è una limitazione del problema che abbiamo in vista, a causa della natura e delle risorse della questione da cui deriva; ammetteremo cioè che α sia sufficientemente piccolo sì da poterne trascurare la seconda potenza e

Digitized by Google

che r sia e si mantenga finito. Queste condizioni permettono di scrivere le due formole precedenti nel modo più semplice:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x + \alpha r \operatorname{sen}\theta \\ y_1 &= y - \alpha r \cos\theta \end{aligned}$$

L'eliminazione di x ed y fra le (1) e l'altra $y = f(x)$ ci fornisce l'equazione della seconda curva:

$$y_1 + r\alpha\cos\theta = f(x_1 - r\alpha\operatorname{sen}\theta)$$

cioè

$$(2) \qquad y_1 = f(x_1 - r\alpha\operatorname{sen}\theta) - r\alpha\cos\theta\,.$$

Se poniamo $Y = f(x_1)$, con che Y rappresenta l'ordinata della C in x_1, e teniamo conto che la differenza $y_1 - Y = \Delta(x)$ è da ritenersi una funzione nota di x, otterremo l'equazione:

$$(3) \qquad f(x_1 - r\alpha\operatorname{sen}\theta) - r\alpha\cos\theta - f(x_1) = \Delta(x_1)\,,$$

ed ancora, sviluppando $f(x)$ in serie di Taylor, tenendo conto delle condizioni imposte dianzi:

$$(3\text{ bis}) \qquad -r\alpha\operatorname{sen}\theta f'(x_1) - r\alpha\cos\theta = \Delta(x_1)\,^{(1)}$$

che è una prima forma dell'equazione differenziale a cui deve soddisfare la f. Una forma più opportuna si ottiene osservando che

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad ; \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

(1) Qui riteniamo trascurabile precisamente l'espressione

$$r\alpha\operatorname{sen}\theta\,[f'(x_1) - f'(x_1 - h\,r\alpha\operatorname{sen}\theta)] \quad , \quad \text{con } 0 < h < 1$$

il che non è lecito quando f' assume valori grandi oltre ogni limite, od almeno tali da fare assumere all'espressione dianzi segnata valori non più trascurabili. D'altra parte f ed f' non si conoscono e ben si comprende quanto sia utile l'avere un criterio che *a priori* permetta di stabilire se sia o meno opportuno servirsi dello sviluppo di Taylor nel modo esposto. Un criterio può discendere dall'esame dell'equazione

$$-r\alpha\operatorname{sen}\theta f'(x_1 - h\,r\alpha\operatorname{sen}\theta) - r\alpha\cos\theta = \Delta(x_1)$$

che si ottiene dalla (3) con una trasformazione sempre legittima: tenendo conto infatti che $r\alpha\operatorname{sen}\theta$ ed $r\alpha\cos\theta$ sono da ritenersi funzioni finite e continue ne risulta che al crescere oltre ogni limite di f' deve corrispondere un egual fatto per $\Delta(x)$, sicchè dalla maniera di variare di questa funzione, nota del resto, si ha la possibilità di risalire all'andamento della f' e di giudicare quindi la legittimità dello sviluppo di cui ci siamo serviti. A complemento di queste considerazioni ci sembra opportuno aggiungere che se in un certo intervallo f' non si mantiene finita possiamo interessarci della funzione inversa della $y = f(x)$.

Digitized by Google

ed in base a ciò infatti sono possibili le seguenti trasformazioni dell'equazione (3 bis)

$$-\alpha x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\operatorname{sen}\theta f'(x_1)-\alpha x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\cos\theta=\Delta(x_1)$$

$$-\alpha y f'(x_1)-\alpha x=\Delta(x_1)$$

l'ultima delle quali, per le (1), facilmente dà luogo all'altra:

$$-\alpha y_1 y_1'-\alpha x_1=\Delta(x_1)$$

o più semplicemente:

$$-\alpha y y'-\alpha x=\Delta(x)$$

di cui l'integrale generale è

$$\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2)+\int\Delta(x)\,dx=\text{costante}. \tag{4}$$

Finora abbiamo supposto $\Delta(x)$ una funzione assegnata della x, ma nella ricerca di natura sperimentale da cui procede l'attuale problema $\Delta(x)$ è conosciuta solamente per un numero discreto di punti, per modo che è necessario risalire intanto da questi valori isolati alla Δ atta a figurare nell'integrale precedente; eccone il semplice processo:

Indichiamo con

$$h_0\,h_1\,h_2\cdots h_n$$

i valori assunti da $\Delta(x)$ in $n+1$ punti

$$x_0\,x_1\,x_2\cdots x_n$$

opportunamente distribuiti, e poniamo

$$\begin{aligned}
&a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n=h_0\\
&a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_1+a_n=h_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_0x_n^n+a_1x_n^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_n+a_n=h_n\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Queste sono $n+1$ equazioni lineari numeriche nelle incognite

$$a_0\,a_1\,a_2\cdots a_n$$

ed atte perciò a determinare quest'ultime, le quali attraverso il polinomio

$$a_0x^n\,a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

daranno un'espressione approssimata di $\Delta(x)$. La curva C dunque è rappresentabile analiticamente.

Digitized by Google

Arrivati a questo punto ci sarà facile ottenere anche l'equazione della superficie. Il ragionamento seguìto sin qui infatti, si può considerare, così qual'è, valido per z costante, del resto qualunque (con z indichiamo un asse perpendicolare al piano XY), per modo che per un valore di z diverso dal precedente si potranno ottenere misure analoghe alle $h_0\, h_1 \cdots h_n$ ed in corrispondenza dei valori pure analoghi per le incognite $a_0\, a_1 \cdots a_n$; facendo ciò complessivamente m volte si otterranno, con simboli a doppio indice, le m serie di misure:

$$\begin{aligned} &h_{1.0}\ h_{1.1} \cdots h_{1.n} \\ &h_{2.0}\ h_{2.1} \cdots h_{2.n} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &h_{m.0}\ h_{m.1} \cdots h_{m.n}, \end{aligned}$$

e si potranno calcolare le m serie di coefficienti

$$\begin{aligned} &a_{1.0}\ a_{1.1} \cdots a_{1.n} \\ &a_{2.0}\ a_{2.1} \cdots a_{2.n} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &a_{m.0}\ a_{m.1} \cdots a_{m.n}, \end{aligned}$$

ed in conseguenza $\Delta(x)$, rappresentata precedentemente per z = costante, pur conservando la sua forma, si potrà scrivere:

$$\Delta(x, z) = A_0\, x^n + A_1\, x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}\, x + A_n$$

in cui le A_i sono da considerarsi funzioni della z e tali da assumere i valori

$$a_1\, i\ a_2\, i \cdots a_m\, i$$

per i valori

$$z_1\ z_2 \cdots z_m .$$

Posto perciò

$$A_i = b_{i.0}\, z^m + b_{i.1}\, z^{m-1} + \cdots + b_{i.m}$$

si potranno determinare in un'unica maniera le $b_{i.0}\, b_{i.1} \cdots b_{i.m}$ bastando per ciò sostituire in questa a z, uno alla volta, i valori numerici $z_1\ z_2 \cdots z_m$ e cambiare in corrispondenza il primo membro in $a_{1.i}\, a_{2.i} \cdots a_{m.i}$. Ritornando dunque all'equazione (4) possiamo concludere assegnando alla superficie che c'interessa l'equazione

$$\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + \int \Delta(x, z)\, dx = K(z),$$

dove $K(z)$ è una funzione arbitraria la cui determinazione è da farsi con l'esperienza.

Digitized by Google

Passando alla portata pratica della soluzione data al problema osserviamo che anche volendo accontentarci della sola sezione piana della superficie, cioè della curva (4), pel metodo seguìto è necessario risolvere il sistema (5); se si vuole però che $\Delta(x)$ assuma un'espressione molto prossima alla vera, anche quando non si voglia ricorrere ad un sistema sovrabbondante ed al metodo dei minimi quadrati, occorre che il sistema (5) sia formato da un buon numero d'equazioni e si comprende come s'impongano dei controlli e come intervengano difficoltà di calcolo non lievi. Ad evitare ciò, che potrebbe costituire una vera fatica, soccorre la seguente costruzione geometrica che può servire bene ove si voglia costruire per punti la curva (4).

Con una interpolazione grafica costruiamo geometricamente la $\Delta(x)$. Mediante un integrafo od un planimetro potremo ottenere da questa curva l'integrale che figura nella (4), ed allora, ponendo per brevità $\int \Delta(x)\,dx = \mathrm{I}(x)$, dalla (4) stessa otterremo

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{\alpha}(k - \mathrm{I}(x))^2.$$

Questa equazione permette di tracciare la C per punti ciascuno dei quali è intersezione di una retta parallela all'asse Y e di un cerchio con centro in O; infatti il secondo membro dell'ultima equazione assume un valore numerico per ogni valore $\bar{x}$ attribuito ad x, valore che, per la forma del primo membro della medesima equazione, rappresenta il quadrato della distanza dall'origine del punto della curva di ascissa $\bar{x}$.

*
* *

Passiamo ora al caso della traslazione e sia $y = f(x)$ l'equazione della curva C da ricercarsi: $y = f(x + k)$ allora sarà quella di una curva identica alla precedente ed ottenuta dalla medesima mediante una traslazione di ampiezza $-k$ parallela all'asse X. Assegnando ad x un certo valore, ne conseguono due per y, uno da ciascuna delle due equazioni, la differenza dei quali, per un numero discreto di valori x, è un dato del problema; e si avrà, se le misure sono in numero di $n + 1$,

$$f(x_i + k) - f(x_i) = b_i \qquad (i = 0, 1, \cdots n).$$

Sostituendo alle b_i isolate una funzione continua interpolatrice avremo

$$f(x + k) - f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

in cui le $a_0\, a_1 \cdots a_n$ vanno determinate da un sistema lineare del tutto identico al sistema (5).

Digitized by Google

Ammetteremo ora, come nel caso precedente, che k sia un infinitesimo, anzi qui supporremo, giacchè è possibile senza che i calcoli ulteriori si complichino, che sia trascurabile la terza potenza di k e trarremo dalla relazione precedente l'altra

$$kf'(x) + \frac{k^2}{2} f''(x) = \sum_r a_{n-r} x^r$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti di cui la soluzione ci fornirà l'equazione della C.

Poichè $y_1 = 1$ ed $y_2 = e^{-\frac{2}{k}x}$ sono due integrali dell'equazione senza secondo membro,

$$Y_1 + Y_2 e^{-\frac{2}{k}x} + \text{costante}$$

con Y_1 ed Y_2 funzioni di x da ricercarsi, sarà l'integrale generale dell'equazione completa. Seguendo un procedimento noto, le Y_1 ed Y_2 si determinano con le equazioni

$$Y_1' + e^{-\frac{2}{k}x} Y_2' = 0$$

$$-\frac{2}{k} e^{-\frac{2}{k}x} Y_2' = \frac{2}{k^2} \sum_r a_{n-r} x^r$$

per cui

$$Y_2 = -\frac{1}{2} e^{\frac{2}{k}x} \sum a_{n-r} \left\{ x^r - r\frac{k}{2} x^{r-1} + r(r-1)\frac{k^2}{4} x^{r-2} \cdots \right\};$$

$$Y_1 = \frac{1}{k} \sum \frac{a_{n-r}}{r+1} x^{r+1};$$

e però l'integrale generale che si domanda, cioè l'equazione della curva sarà

$$y = \frac{1}{k} \sum \frac{a_{n-r}}{r+1} x^{r+1} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum a_{n-r} \left\{ x^r - r\frac{k}{2} x^{r-1} + r(r-1)\frac{k^2}{4} x^{r-2} \right\} + \text{costante}$$

in cui sono stati già trascurati i termini superiori al secondo ordine.

Un processo del tutto identico a quello mostrato nel caso della rotazione permette di ottenere l'equazione della superficie, ed esso, com'è naturale, viene taciuto.

All'egregio amico prof. Ronchi, che ci ha offerto l'occasione d'interessarci di questo problema, vadano i più sentiti ringraziamenti.

Digitized by Google

Analisi matematica. — *Sulle trasformazioni* (m, n) *che mutano* $m+n+2$ *integrali di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti in integrali di un'equazione analoga.* Nota di B. COLOMBO, presentata [1] dal Socio Corrisp. G. FUBINI.

§ 1. Le trasformazioni (m, n)

$$(1)\quad \theta = C(x,y)\zeta + A_1(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial x} + A_2(x,y)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \cdots + A_m(x,y)\frac{\partial^m\zeta}{\partial x^m} +$$

$$+ B_1(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial y} + B_2(x,y)\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \cdots + B_n(x,y)\frac{\partial^n\zeta}{\partial y^n} \quad (m, n \geqq 1),$$

che mutano ogni integrale ζ dell'equazione

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} + \alpha(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \gamma(x,y)\zeta = 0$$

nell'integrale di un'equazione analoga

$$(2')\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \alpha'(x,y)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \beta'(x,y)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \gamma'(x,y)\theta = 0,$$

sono caratterizzate dall'annullarsi identico del secondo membro per $m+n$ integrali particolari ζ_h di (2), tali che la matrice

$$(3)\qquad \left\| \zeta_h \frac{\partial\zeta_h}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta_h}{\partial x^2}\cdots\frac{\partial^m\zeta_h}{\partial x^m}\frac{\partial\zeta_h}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta_h}{\partial y^2}\cdots\frac{\partial^n\zeta_h}{\partial y^n} \right\| \quad (h = 1, 2, \cdots m+n)$$

riesca diversa da zero. Questo risultato è dovuto al Darboux [2].

Il Guichard [3] ha occasione di considerare una trasformazione $(1,1)$ nel problema geometrico seguente: « Dato il punto $P(x,y)$ variabile in una superficie di S_4, sulla quale le coordinate x, y determinano un sistema coniugato, individuare sul piano tangente in P un punto $Q(x,y)$ che descriva una superficie analoga ». Le coordinate omogenee $\zeta_0, \zeta_1, \cdots \zeta_4$ di P

(1) Nella seduta del 15 maggio 1927.

(2) *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Livre IV, chapitre VIII: *La résolution des équations linéaires les unes par les autres.*

(3) *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques.* « Annales de l'Ecole Normale Supérieure », 3me série, t. 14-15, années 1897-1898.

Digitized by Google

soddisfino all'equazione (2); le coordinate $\theta_0, \theta_1, \cdots \theta_\nu$ di Q soddisfino alla (2'); valgono relazioni del tipo:

$$(1_1) \qquad \theta = C\zeta + A\frac{\partial \zeta}{\partial x} + B\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

per $\zeta = \zeta_k$ e $\theta = \theta_k$ $(k = 0, 1, \cdots \nu)$, sicchè la (1_1) trasiorma $\nu + 1$ soluzioni di (2) in soluzioni di (2'). Il Guichard [1] afferma che il secondo membro della (1_1) si annulla per due soluzioni particolari della (2) e ricava in conseguenza i mutui rapporti di A, B, C. Ora l'affermazione di Guichard è giusta per $\nu + 1 > 4$, cioè per $\nu > 3$, mentre è falsa per $\nu = 3$ [2].

Io dimostro infatti nei §§ 2 e 3 di questa Nota che *le trasformazioni* (m, n), *le quali mutano* $m + n + 3$ *integrali particolari* ζ_h *di* (2) *in integrali di* (2'), *si annullano per* $m + n$ *soluzioni particolari della* (2), *supposto diverso da zero il determinante*

$$(3_1) \qquad \left| \zeta_h \frac{\partial \zeta_h}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta_h}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial^{m+1} \zeta_h}{\partial x^{m+1}} \frac{\partial \zeta_h}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta_h}{\partial y^2} \cdots \frac{\partial^{n+1} \zeta_h}{\partial y^{n+1}} \right| (h = 1, 2, \cdots m + n + 3);$$

invece *le trasformazioni* (m, n), *le quali mutano* $m + n + 2$ *integrali particolari* ζ_h *di* (2) *in integrali di* (2'), *non si annullano necessariamente per* $m + n$ *soluzioni particolari della* (2), *anche supposta diversa da zero la matrice*

$$(3_2) \qquad \left\| \zeta_h \frac{\partial \zeta_h}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta_h}{\partial x^2} \cdots \frac{\partial^{m+1} \zeta_h}{\partial x^{m+1}} \frac{\partial \zeta_h}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta_h}{\partial y^2} \cdots \frac{\partial^{n+1} \zeta_h}{\partial y^{n+1}} \right\| (h = 1, 2, \cdots m + n + 2).$$

Al § 4 studio poi il problema di Guichard in S_3, in cui si presenta in modo diverso ed ammette soluzioni del tutto nuove.

§ 2. Sostituendo nella (2') l'espressione di θ fornita dalla (1), si ottiene un'equazione, di cui il primo membro contiene le derivate della ζ all'ordine massimo $m + 1$ rispetto ad x ed all'ordine massimo $n + 1$ rispetto ad y, sicchè è riducibile ad una espressione $(m + 1, n + 1)$, mediante la (2), che permette di eliminare le derivate miste; si ottiene insomma, con tale sostituzione, un'equazione del tipo:

$$(4) \quad L\zeta + H_1\frac{\partial \zeta}{\partial x} + H_2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \cdots + H_{m+1}\frac{\partial^{m+1} \zeta}{\partial x^{m+1}} + K_1\frac{\partial \zeta}{\partial y} + K_2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \cdots + K_{n+1}\frac{\partial^{n+1} \zeta}{\partial y^{n+1}} = 0.$$

(1) Loc. cit. Chapitre III, § 16. Avverto di avere riferite le considerazioni di Guichard solo nella sostanza, ma di avere usate notazioni del tutto diverse, ed essenzialmente di essermi valso di coordinate omogenee, mentre Guichard si vale di coordinate non omogenee.

(2) Come sospettava il prof. Fubini.

Digitized by Google

Se la (1) muta $m + n + 3$ integrali z_h della (2) in integrali della (2'), è vera la (4) per $z = z_h$; esiste cioè un sistema di $m + n + 3$ equazioni lineari omogenee, a cui soddisfano le $m + n + 3$ funzioni H, K, L, le quali riescono identicamente nulle, supposto diverso da zero il determinante (3_1); di conseguenza la (4) è un'identità. Si ha così il:

TEOREMA. *Se la* (1) *muta* $m + n + 3$ *integrali* z_h *della* (2) *in integrali della* (2'), *muta di conseguenza ogni integrale della* (2) *in un integrale della* (2'), *supposto diverso da zero il determinante* (3_1). Si può quindi applicare il teorema di Darboux.

§ 3. Considero la trasformazione

$$(5)\quad \theta = \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\zeta + \left[\varphi_1 - \frac{1}{1!\,x^m y^{n+1}}\right]\frac{\partial z}{\partial x} + \left[\varphi_2 + \frac{1}{2!\,x^{m-1}y^{n+1}}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} +$$

$$+ \cdots + \left[\varphi_m + (-1)^m \frac{1}{m!\,x\,y^{n+1}}\right]\frac{\partial^m z}{\partial x^m} + \left[\psi_1 - \frac{1}{1!\,x^{m+1}y^n}\right]\frac{\partial z}{\partial y} +$$

$$+ \left[\psi_2 + \frac{1}{2!\,x^{m+1}y^{n-1}}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \cdots + \left[\psi_n + (-1)^n \frac{1}{n!\,x^{m+1}y}\right]\frac{\partial^n z}{\partial y^n},$$

nella quale le φ e ψ sono funzioni arbitrarie rispettivamente della sola x e della sola y. Essa muta $z = x^p\,(p = 1, 2, \cdots m)$ in

$$\frac{1}{x^{m-p+1}y^{n+1}}\left[\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \cdots + (-1)^p\binom{p}{p}\right] + \Phi_p = \Phi_p,$$

essendo Φ_p una funzione della sola x, che dipende dalle φ; inoltre muta $z = x^{m+1}$ in

$$\frac{1}{y^{n+1}}\left[\binom{m+1}{0} - \binom{m+1}{1} + \binom{m+1}{2} - \cdots + (-1)^m\binom{m+1}{m}\right] +$$

$$+ \Phi_{m+1} = \frac{(-1)^m}{y^{n+1}} + \Phi_{m+1},$$

essendo Φ_{m+1} una fuzione della sola x. Analogamente la (5) trasforma $z = y^q (q = 1, 2, \cdots n)$ in una funzione Ψ_q della sola y, e trasforma $z = y^{n+1}$ in $\frac{(-1)^n}{x^{m+1}} + \Psi_{n+1}$, essendo Ψ_{n+1} una funzione ancora della sola y.

La (5) muta adunque gli integrali particolari $x, x^2, \cdots x^{m+1}$, $y, y^2, \cdots y^{n+1}$ dell'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$, i quali non annullano la matrice (3_2), in integrali particolari di $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\,\partial y} = 0$ e di nessun'altra equazione (2'), perchè, imponendo alla (2') di essere soddisfatta da questi trasformati, si ricava $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$, a meno che le φ e ψ verifichino particolari equa-

Digitized by Google

zioni (1), che facilmente si provano non identiche. Siccome poi la (5) muta 1, integrale di $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, in $\frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}$, che non è integrale di $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = 0$, non può trasformare ogni integrale di $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ nell'integrale di un'equazione del tipo (2').

Dall'esempio precedente si trae il:

TEOREMA. *Se la* (1) *muta* $m + n + 2$ *integrali* z_b *della* (2) *in integrali della* (2'), *non muta di conseguenza ogni integrale della* (2) *in un integrale di un'equazione dello stesso tipo (in particolare della* (2') *stessa), anche se è diversa da zero la matrice* (3_2).

§ 4. Il problema di Guichard in S_3 consiste, come si è detto, nel trovare tutte le possibili trasformazioni (1_1), le quali mutano quattro integrali assegnati z_0, z_1, z_2, z_3 della (2) in integrali $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ di un'equazione del tipo (2'). Ora, imponendo ai trasformati di soddisfare (2'), si vengono a stabilire quattro equazioni lineari in α', β', γ', la cui eliminazione conduce ad un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine per A, B, C, lineare in $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}$ e priva di altre derivate seconde. Essa, quando si fissino arbitrariamente A e B, si riduce ad una equazione alle derivate parziali del secondo ordine in C, e lineare nell'unica derivata seconda $\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}$; perciò individua C, se, ad esempio, se ne danno ancora ad arbitrio i valori per $x =$ cost. e per $y =$ cost. Così pure, quando si faccia $C = 1$ e si dia una relazione in termini finiti $f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = 0$ fra i trasformati, da cui si possa ricavare B in funzione di A, x, y, l'equazione in A, B, C si riduce ad un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine in A, e lineare nell'unica derivata seconda $\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}$; perciò individua A, se ne sono dati ad arbitrio i valori per $x =$ cost. e per $y =$ cost. Interpretando geometricamente i risultati, e ricordando che A, B, C hanno significato di coordinate omogenee nel piano tangente, si ha il:

(1) Se le φ e ψ sono tutte identicamente nulle, i trasformati si riducono a $0, \frac{(-1)^m}{y^{n+1}}, \frac{(-1)^n}{x^{m+1}}$, e perciò soddisfano a infinite equazioni (2'), perchè allora α', β', γ' sono vincolate soltanto a verificare due equazioni lineari omogenee. Conviene anzi osservare che in tal caso, siccome il secondo membro della (5) si annulla per gli integrali particolari $x, x^2 \cdots x^m, y, y^2 \cdots y^n$ dell'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, i quali rendono diversa da zero la matrice (3), la (5) stessa muta ogni integrale di $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ nell'integrale di una ben determinata equazione (2'), che evidentemente non è $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = 0$.

Digitized by Google

TEOREMA. *S'individua una soluzione del problema di Guichard in* S_3:

1° *assegnando per ogni punto* P *della superficie considerata una retta tangente a cui debba appartenere il trasformato* Q, *ed inoltre dando le trasformate di due linee coordinate di sistemi diversi.*

2° *assegnando la superficie trasformata, ed inoltre dando le trasformate di due linee coordinate di sistemi diversi (e naturalmente appartenenti alla superficie trasformata).*

Matematica. — *Sui differenziali secondi covarianti* (Estratto di una lettera al prof. T. Levi-Civita). Nota di L. BERWALD, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Mi consenta di mettere in chiaro la relazione che corre fra il trasporto per parallelismo da me indagato [2] in base ad un criterio puramente analitico della sig.na E. Nöther [3] e i differenziali secondi invarianti da Lei introdotti [4].

1. La sig.na Nöther considera funzioni

$$f(x, dx) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n \;;\; dx^1, dx^2, \cdots, dx^n)$$

delle n variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e dei loro differenziali $dx^1, dx^2, \cdots, dx^n$, analitiche (non necessariamente reali) rispetto alle due serie di argomenti x, dx, e inoltre omogenee di grado k (qualsivoglia) rispetto ai dx.

Siano

$$(1) \qquad \Omega_i(x, dx) = d\left(\frac{\partial f}{\partial(dx^i)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

i binomi lagrangiani provenienti da una di tali f. La sig.na Nöther pone le seguenti condizioni invarianti:

$$(2) \quad \Omega_i(x, dx + \lambda\delta x) = (d + \lambda\delta)\left(\frac{\partial f(x, dx + \lambda\delta x)}{\partial(dx^i)}\right) - \frac{\partial f(x, dx + \lambda\delta x)}{\partial x_i} = 0,$$

dalle quali, per l'ipotesi dell'omogeneità, scende altresì

$$(3) \qquad (d + \lambda\delta) f(x, dx + \lambda\delta x) = 0$$

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

(2) *Ueber zweidimensionale allgemeine metrische Räume*, « Journal für die reine und angewandte Mathematik », B. 156, 1927, S. 191-210.

(3) *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*, « Göttinger Nachrichten », 1918, S. 37-44.

(4) *Differenciales segundas que se comportan de modo invariantivo*, « Revista Mat. Hispano-Americana », t. V, 1923, pp. 165-176.

Digitized by Google

semprechè sia $k \neq 1$. Per $k = 1$, la (3) si associa come condizione addizionale, il che è lecito in quanto in tal caso le (2) si riducono a sole $n - 1$ condizioni indipendenti.

Ciò posto, la sig.na Nöther eguaglia a zero nelle (2) - nelle (2) e nella (3), ove sia $k = 1$ - i coefficienti delle potenze 0, 1, 2, di λ, e ottiene così tre sistemi di equazioni invarianti atti a definire i differenziali secondi d^2x, $d\delta x = \delta dx$, $\delta^2 x$ in funzione dei differenziali primi, purchè soltanto non si annullino certi determinanti che si potrebbero esplicitare in modo ovvio. Altri sistemi invariantivi, che si otterrebbero differenziando i tre ora detti, valgono a definire tutti i differenziali d'ordine superiore al secondo per mezzo dei differenziali primi.

2. Nella citata Nota Ella prende le mosse da una funzione $\Lambda(x \mid dx \mid \delta x)$ dei $3n$ argomenti x, dx, δx, la quale (oltre a ritenersi dipendente in modo regolare, o addirittura analitico, da tutti i suoi argomenti) si suppone omogenea di grado μ rispetto ai dx, di grado ν rispetto ai δx. Posto per brevità

$$\{\Lambda(x \mid dx \mid \delta x)\}_{\delta x = dx} = L(x \mid dx) \quad , \quad \{\Lambda(x \mid dx \mid \delta x)\}_{dx = \delta x} = L^*(x \mid \delta x),$$

nell'ipotesi che i determinanti

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial (dx^i)\, \partial (dx^k)} \right\| \quad , \quad \left\| \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial (dx^i)\, \partial (\delta x^k)} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial (\delta x^i)\, \partial (dx^k)} \right\|;$$

e per conseguenza anche $\left\| \frac{\partial^2 L^*}{\partial (\delta x^i)\, \partial (\delta x^k)} \right\|$ siano diversi da zero, Ella definisce in modo invariante i differenziali secondi d^2x, $d\delta x = \delta dx$, $\delta^2 x$ mediante i tre sistemi di equazioni:

$$(4) \qquad d\left(\frac{\partial L}{\partial (dx^i)}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,$$

$$(5) \qquad d\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial (dx^i)}\right) + \delta\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial (\delta x^i)}\right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = 0,$$

$$(6) \qquad d\left(\frac{\partial L^*}{\partial (\delta x^i)}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

In modo preciso i d^2x e $\delta^2 x$ si ricavano rispettivamente dalle (4) e (6), dopo di che le (5) forniscono i differenziali misti $d\delta x$.

3. Per confrontare i due procedimenti della sig.na Nöther e Suo, basta eseguire effettivamente le operazioni indicate dalla Nöther. Sviluppando $f(x, dx + \lambda\delta x)$ in serie di potenze di λ si ha

$$(7) \quad \begin{cases} f(x, dx + \lambda\delta x) = \Lambda_0(x \mid dx \mid \delta x) + \lambda\Lambda_1(x \mid dx \mid \delta x) + \\ \qquad \frac{1}{2}\lambda^2 \Lambda_2(x \mid dx \mid \delta x) + \cdots + \frac{1}{n!}\lambda^n \Lambda_n(x \mid dx \mid \delta x) + \cdots, \end{cases}$$

Digitized by Google

in cui

$$(8)\qquad \Lambda_0(x\,|\,dx\,|\,\delta x) = f(x\,,dx)\quad,\quad \Lambda_q(x\,|\,dx\,|\,\delta x) =$$

$$= \frac{\partial^q f(x\,,dx)}{\partial(dx^{i_1})\,\partial(dx^{i_2})\cdots\partial(dx^{i_q})}\,\delta x^{i_1}\,\delta x^{i_2}\cdots\delta x^{i_q}\qquad (q = 1\,,2\,,\cdots).$$

Le equazioni (2) divengono in conformità

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}&(d+\lambda\delta)\left\{\frac{\partial}{\partial(dx^i)}\left(\Lambda_0+\lambda\Lambda_1+\cdots+\frac{\lambda^n}{n!}\Lambda_n+\cdots\right)\right\}\\&\qquad -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Lambda_0+\lambda\Lambda_1+\cdots+\frac{\lambda^n}{n!}\Lambda_n+\cdots\right)=0.\end{aligned}\right.$$

L'identificazione dei coefficienti di λ^q porge

$$(10)\qquad \frac{1}{q!}\,d\left(\frac{\partial\Lambda_q}{\partial(dx^i)}\right)+\frac{1}{(q-1)!}\,\delta\left(\frac{\partial\Lambda_{q-1}}{\partial(dx^i)}\right)-\frac{1}{q!}\,\frac{\partial\Lambda_q}{\partial x_i}=0.$$

Ora si ha

$$(11)\qquad \frac{\partial\Lambda_{q-1}}{\partial(dx^i)} = \frac{\partial^q f(x\,,dx)}{\partial(dx^{i_1})\,\partial(dx^{i_2})\cdots\partial(dx^{i_{q-1}})\,\partial(dx^i)}\,\delta x^{i_1}\,\delta x^{i_2}\cdots\delta x^{i_{q-1}} = \frac{1}{q}\,\frac{\partial\Lambda^q}{\partial(\delta x^i)}\,;$$

perciò il confronto dei coefficienti di $\lambda^q (q = 1\,,2\,,\cdots)$ conduce in definitiva alle formule

$$(12).\qquad d\left(\frac{\partial\Lambda_q}{\partial(dx^i)}\right)+\delta\left(\frac{\partial\Lambda_q}{\partial(\delta x^i)}\right)-\frac{\partial\Lambda_q}{\partial x_i}=0\qquad (i=1\,,2\,,\cdots,n),$$

che rimangono valide anche per $q = 0$.

Ove si ponga

$$\{\Lambda_q(x\,|\,dx\,|\,\delta x)\}_{\delta x = dx} = \mathrm{L}_q(x\,|\,dx)$$

e si tenga presente che $f(x\,,dx)$ è omogeneo di grado k rispetto agli argomenti dx, risulta dalle (8)

$$(13)\quad \mathrm{L}_q(x\,|\,dx) = k(k-1)\cdots(k-q+1)f(x\,,dx)\qquad (q=1\,,2\,,\cdots),$$

e quindi in particolare, per valori di k interi e non negativi, $\mathrm{L}_q = 0$ ogniqualvolta sia $q \geqq k+1$. Analogamente, dalla posizione

$$\{\Lambda_q(x\,|\,dx\,|\,\delta x)\}_{dx=\delta x} = \mathrm{L}_q^*(x\,|\,\delta x)$$

segue

$$(14)\quad \mathrm{L}_q^*(x\,|\,\delta x) = k(k-1)\cdots(k-q+1)f(x\,,\delta x)\qquad (q=1\,,2\,,\cdots).$$

4. Si vede oramai come il procedimento suggerito dalla sig.na Nöther possa farsi rientrare nel Suo quale caso particolare, ogniqualvolta il grado

Digitized by Google

di omogeneità k sia diverso da zero e da uno. All'uopo basta far coincidere la Sua funzione $\Lambda(x\,|\,dx\,|\,\delta x)$ con $\Lambda_1(x\,|\,dx\,|\,\delta x)$, cioè assumere

$$(15)\qquad \Lambda(x\,|\,dx\,|\,\delta x) = \Lambda_1(x\,|\,dx\,|\,\delta x) = \frac{\partial f(x,dx)}{\partial(dx^k)}\,\delta x^k.$$

Si ha allora

$$(16)\qquad L(x\,|\,dx) = L_1(x\,|\,dx) = kf(x,dx).$$

Risultando in queste condizioni $\Lambda(x\,|\,dx\,|\,\delta x)$ lineare nei differenziali δx e quindi ogni $\frac{\partial\Lambda}{\partial(\delta x^i)}$ indipendente dai δx stessi, le equazioni (5) non contengono alcun differenziale secondo del tipo $\delta^2 x$; perciò le (4) e (5), *indipendentemente da ogni determinazione dei* $\delta^2 x$, somministrano i differenziali dei tipi d^2x, $d\delta x$ sotto la stessa forma della sig.na Nöther.

Invece i $\delta^2 x$ vanno ricavati, secondo la Sua definizione, da

$$(18)\qquad \delta\left(\frac{\partial f(x,\delta x)}{\partial(\delta x^i)}\right) - \frac{\partial f(x,\delta x)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n);$$

secondo la definizione della sig.na Nöther, dalla (12) per $q = 2$, il che è quanto dire, a norma delle (8), da

$$(19)\qquad \left.\begin{aligned} & d\left(\frac{\partial^3 f(x,dx)}{\partial(dx^i)\,\partial(dx^k)\,\partial(dx^l)}\,\delta x^k\,\delta x^l\right) + 2\delta\left(\frac{\partial^2 f(x,dx)}{\partial(dx^i)\,\partial(dx^k)}\,\delta x^k\right) \\ & \quad - \frac{\partial^3 f(x,dx)}{\partial x_i\,\partial(dx^k)\,\partial(dx^l)}\,\delta x^k\,\delta x^l = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\}$$

in cui, al posto dei d^2x e $d\delta x$ vanno sostituiti i valori precedentemente ottenuti.

I due algoritmi per la determinazione dei $\delta^2 x$ sono dunque in generale diversi.

5. Mi permetta ancora di rilevare che il trasporto per parallelismo da me definito per spazi generali si riattacca al criterio della sig.na Nöther.

Nei miei lavori io considero una funzione $f(x,dx)$ – che viene ivi per lo più designata con $F^2(x,dx)$ – la quale è omogenea di secondo grado rispetto ai dx. k ha allora il valore 2. Io pongo

$$(20)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(x,dx)}{\partial(dx^i)\,\partial(dx^k)} = g_{ik}(x,dx)$$

e mi riferisco al caso generale in cui il determinante $\|g_{ik}\|$ è diverso da zero.

Si può allora, precisamente come nel caso classico di una forma differenziale quadratica, definire il sistema reciproco g^{ik}, nonchè i simboli di Christoffel $\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}$, $\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}$. Va notato soltanto che le g_{ik}, g^{ik}, $\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}$, $\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}$ dipen-

Digitized by Google

dono in generale non soltanto dalle x, ma anche dai differenziali dx, e sono in ogni caso omogenei di grado zero rispetto a questi ultimi.

Le equazioni

$$(1') \qquad \Omega_i(x, dx) = d\left(\frac{\partial f}{\partial (dx^i)}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

possono allora, come quando f è forma quadratica, essere presentate sotto la forma

$$(21) \qquad g_{ik}\left(d^2 x^k + \left\{\begin{matrix} pq \\ k \end{matrix}\right\} dx^p\, dx^q\right) = 0,$$

essendosi omesso un inessenziale fattore numerico; od anche, in quanto si ponga

$$(22) \qquad \left\{\begin{matrix} pq \\ k \end{matrix}\right\} dx^p\, dx^q = \varphi^k(x, dx)$$

sotto la forma

$$(23) \qquad g_{ik}(x, dx)\left(d^2 x^k + \varphi^k(x, dx)\right) = 0.$$

Io introduco i differenziali secondi $d^2 x$, $d\delta x$, $\delta^2 x$, assumendo

$$(24) \qquad d^2 x^i = -\varphi^i(x, dx),$$

$$(25) \qquad d\delta x^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi^i(x, dx)}{\partial (dx^k)}\delta x^k,$$

$$(26) \qquad \delta^2 x^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi^i(x, dx)}{\partial (dx^k)\,\partial (dx^l)}\delta x^k\, \delta x^l \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

nelle quali il fattore $\frac{1}{2}$ proviene dal fatto che le φ^i sono per loro definizione omogenee di secondo grado rispetto ai dx.

I miei $d^2 x$ sono evidentemente identici a quelli della sig.na Nöther. Ma è facile riconoscere che lo stesso segue anche per i $d\delta x$, $\delta^2 x$ definiti dalle (25), (26). A tale scopo occorre soltanto mostrare che si ottengono precisamente questi $d\delta x$, $\delta^2 x$, se si applica il procedimento della sig.na Nöther esposto al n. 1, ossia se si sviluppano le

$$(2) \qquad \Omega_i(x, dx + \lambda\delta x) = 0$$

secondo le potenze di λ e si eguagliano a zero i coefficienti di λ e di λ^2. Le equazioni (2) divengono, colle notazioni attuali,

$$(27) \qquad g_{ik}(x, dx + \lambda\delta x)\left\{(d + \lambda\delta)\left[(d + \lambda\delta)\, x^k\right] + \varphi^k(x, dx + \lambda\delta x)\right\} = 0$$

Digitized by Google

(dove ancora una volta abbiamo omesso un fattore numerico); ossia, sviluppando secondo le potenze di λ,

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left\{ g_{ik} + \lambda \frac{\partial g_{ik}}{\partial (dx^l)} \delta x^l + \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial (dx^l)\, \partial (dx^m)} \delta x^l \delta x^m + [\lambda^3] \right\} \cdot \\ &\left\{ d^2 x^k + \varphi^k + 2\lambda \left(d\delta x^k + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^k}{\partial (dx^p)} \delta x^p \right) + \right. \\ &\qquad \left. + \lambda^2 \left(\delta^2 x^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial (dx^p)\, \partial (dx^q)} \delta x^p \delta x^q \right) + [\lambda^3] \right\} = 0, \end{aligned} \right.$$

in cui $[\lambda^3]$ sta per il complesso dei termini che contengono λ^3 a fattore, ed è sottointeso che le funzioni dipendono dagli argomenti x e dx.

Se, nello sviluppo del primo membro, si eguagliano a zero i coefficienti di λ e di λ^2 si ottiene ordinatamente:

$$(29)\quad 2 g_{ik} \left(d\delta x^k + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^k}{\partial (dx^l)} \delta x^l \right) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial (dx^l)} \delta x^l (d^2 x^k + \varphi^k) = 0,$$

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &g_{ik} \left(\delta^2 x^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial (dx^l)\, \partial (dx^m)} \delta x^l \delta x^m \right) + 2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial (dx^l)} \delta x^l \left(d\delta x^k + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^k}{\partial (dx^m)} \delta x^m \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial (dx^l)\, \partial (dx^m)} \delta x^l \delta x^m (d^2 x^k + \varphi^k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned} \right.$$

Siccome i $d^2 x$ sono definiti dalle (24), le (29) si riducono a

$$(31)\quad g_{ik} \left(d\delta x^k + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^k}{\partial (dx^l)} \delta x^l \right) = 0$$

e danno ulteriormente, per essere $\| g_{ik} \| \neq 0$, le espressioni (25) delle $d\delta x$. Se queste, unitamente alle (24), si introducono nelle (30), rimane

$$(32)\quad g_{ik} \left(\delta^2 x^k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial (dx^l)\, \partial (dx^m)} \delta x^l \delta x^m \right) = 0,$$

donde seguono per i $\delta^2 x$ precisamente i valori (26).

Oltre al trasporto per parallelismo testè caratterizzato mediante i differenziali secondi della sig.na Nöther, di cui mi occupai nel vol. 34 (1925), pp. 213-219 dell'« Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. », ne ho indicato un altro (« Math. Zeitschrift », B. 25, 1926, pp. 40-73) di cui però sarebbe agevole mostrare la sostanziale coincidenza col primo.

Digitized by Google

Matematica. — *Sur les orbites périodiques et les lignes géodésiques fermées.* Nota del prof. N. MOUSKHELICHVILI presentata [1] dal Socio Corrisp. L. TONELLI.

On doit à M. E. T. Whittaker l'énoncé d'un remarquable critère d'existence des orbites périodiques. La démonstration de l'auteur lui-même, fondée su l'ordre d'idées analogues à celles suivies par Riemann pour établir le principe de Dirichlet, n'est pas entièrement rigoureuse. C'est à MM. Tonelli [2] et A. Signorini [3] qu'on doit les démonstrations rigoureuses, indépendantes l'une de l'autre.

Il est à remarquer que sous la forme adoptée primitivement par M. Whittaker [4], le critère en question conduit aux résultats inexacts, ce que nous allons établir ci-dessous. Nous donnons ensuite une interprétation géométrique du critère (exact) de M. Whittaker et nous en tirons un très simple critère d'existence des lignes géodésiques fermées. L'interprétation géométrique donne au critère de M. Whittaker une forme invariante, ce qui permet, à son tour, de l'appliquer aux systèmes dynamiques quelconques à deux dégrés de liberté (sous la seule condition que le principe de la moindre action de Maupertuis-Jacobi soit applicable à ce système).

1. Commençons par rappeler l'énoncé du critère de M. Whittaker (sous la forme exacte, telle qui figure dans les démonstrations rigoureuses de MM. Tonelli et Signorini).

Soit A une aire finie *multiplement connexe* du plan Oxy, limitée par un contour L, formé par *plusieurs* courbes fermées simples. Soit un point matériel qui se meut dans le plan Oxy et qui est sollicité par une force dérivant d'une fonction de forces $U(x, y)$, uniforme dans A. Limitons-nous à envisager les mouvements qui correspondent à une valeur déterminée de la constante des forces vives h et supposons que l'expression $U + h$ soit positive dans A (le contour y compris). Cela étant, si l'expression

$$T = 2\frac{U + h}{\rho} - \frac{\partial U}{\partial n} \tag{1}$$

(1) Nella seduta del 3 aprile 1927.

(2) L. TONELLI, *Sulle orbite periodiche*, ces «Rendiconti», 5e sér., vol. XXI (1° sem., 1912), pp. 251 et 332 (Deux notes).

(3) A. SIGNORINI, *Esistenza di un'estremale chiusa* etc., «Rendiconti del C. M. di Palermo», to. XXXIII, 1912, p. 187.

(4) E. T. WHITTAKER, *On Periodic Orbits*, «Monthly Notices R. A. S.», LXII, 1902, p. 186. Dans son livre *A Treatice on the Analytical Dynamics* (2e édition, Cambridge, 1917), M. Whittaker donne le critère sous la forme exacte, sans rien dire de l'exactitude de la forme primitive.

Digitized by Google

est *positive* sur tout le contour L, alors parmi les lignes fermées, tracées dans A et non réductibles à des points par déformation continue, il existe celles qui rendent *minimum* l'intégrale d'action

$$(2) \qquad I = \sqrt{2}\int \sqrt{U + h}\, ds \qquad (ds^2 = dx^2 + dy^2);$$

ces courbes sont, en même temps, des orbites périodiques [1].

Nous avons désigné par n la normale au contour, dirigée *vers l'intérieur de l'aire* A, et par ρ le rayon de courbure du contour, compté positivement si le centre de courbure est placé sur la normale positive, et négativement dans le cas contraire.

Convenons d'adopter comme sens positif de la tangente τ à une courbe faisant partie du contour, celui qui forme avec la normale positive le système d'axes (τ, n), qui est (dans l'ordre écrit) orienté de la façon des axes Ox, Oy.

Convenons aussi que dans la représentation paramétrique de chaque courbe du contour

$$x = x(q) \quad , \quad y = y(q)$$

la croissance du paramètre q corresponde au sens positif de la tangente. Cela étant, on aura pour le calcul de la valeur de T sur L:

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\left(\frac{\partial U}{\partial y}x' - \frac{\partial U}{\partial x}y'\right).$$

2. Comme nous l'avons dit dès le commencement, la forme que M. Whittaker a donnée primitivement à son critère est différente de celle qui est exposée ci-dessus. A savoir, le critère primitif affirme l'existence des orbites périodiques, étant remplie la condition $T < 0$ sur tout le contour.

Cette affirmation est fondée sur l'existence supposée de *maximum* de l'intégrale d'action (le critère exacte est fondé sur l'existence du *minimum*). « La quale esistenza », dit M. Tonelli dans sa Note citée, « non si vede come possa essere rigorosamente stabilita » [2]. Nous allons voir, en effet, que dans un cas très simple, le critère primitif ($T < 0$ sur L) n'assure pas l'existence des orbites périodiques.

Considérons le mouvement sous l'action de la fonction des forces

$$U = -\frac{1}{2}(\mu x^2 + \nu y^2),$$

(1) Nous n'insistons pas sur les conditions (assez générales) de régularité, qu'on a imposées à la fonction U et le contour L pour pouvoir démontrer le critère en question. Cfr. les notes citées. Dans la deuxième des notes citées, M. Tonelli a donné un autre critère, relatif aux domaines *infinis*, limités par un contour fermé.

(2) Loc. cit., p. 252.

Digitized by Google

μ et $\nu = \mu + \varepsilon$ étant des constantes positives.

Soit C une circonférence de rayon r ayant l'origine O pour centre. On aura pour C (en comptant ρ et n positivement vers le centre)

$$\overline{T} \equiv 2\frac{U + h}{\rho} - \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{-\mu r^2 + 2h}{r} - \mu r + \varepsilon\varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ désignant une fonction bornée dans tout domaine borné.

Soit $h > 0$ et soient r_1 et r_2 les constantes vérifiant les conditions

$$0 < r_1 < \sqrt{\frac{h}{\mu}} < r_2 < \sqrt{\frac{2h}{\mu}}.$$

Alors dans l'anneau circulaire, compris entre les circonférences C_1, de rayon r_1 et C_2 de rayon r_2, on aura $U + h > 0$, pourvu que ε soit suffisamment petit; sur C_2 et C_1 on aura respectivement (ε étant toujours suffisamment petit)

$$T = \overline{T} < 0 \quad , \quad T = -\overline{T} < 0.$$

(Sur C_1 on a $T = -\overline{T}$, d'après les conventions adoptées sur le signe de ρ et le sens de la normale positive). Les conditions du critère primitif de M. Whittaker sont donc remplies pour l'anneau envisagé. Or, dans le cas envisagé, les équations du mouvement ont la forme (on suppose que la masse est égale à 1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = 0 \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \nu y = 0,$$

d'où

$$x = A\cos\left(\sqrt{\mu}\, t + \alpha\right) \quad , \quad y = B\cos\left(\sqrt{\nu}\, t + \beta\right),$$

A, B, α, β étant des constantes arbitraires. On peut toujours choisir ε de telle façon que le rapport $\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\nu}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu + \varepsilon}}$ soit irrationnel. Alors, pour que l'orbite soit périodique, il faut que l'une des constantes A, B soit nulle. Or, dans ce cas l'orbite passera nécessairement par l'origine O; elle doit donc nécessairement sortir du domaine considéré.

3. Cela étant, nous n'envisagerons que la forme définitive du critère de M. Whittaker ($T > 0$ sur L).

Considérons l'expression

$$d\sigma^2 = (U + h)(dx^2 + dy^2) \tag{4}$$

comme définissante l'élément linéaire d'une certaine surface Σ.

Digitized by Google

Rappelons-nous la formule générale de Beltrami [1] pour la courbure géodésique d'une courbe $u = u(q)$, $v = v(q)$ tracée sur une surface d'élément linéaire

$$(5) \qquad d\sigma^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad \left(W = \sqrt{EG - F^2} > 0\right),$$

qui voici:

$$(6) \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{W} \cdot \frac{\Gamma}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

où l'on a posé

$$\Gamma = W^2(u'v'' - u''v') + (Eu' + Fv')\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)u'^2 + \frac{\partial G}{\partial u}u'v' + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}v'^2\right]$$
$$-(Fu' + Gv')\left[\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + \frac{\partial E}{\partial v}u'v' + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)v'^2\right].$$

D'après cette formule on obtient pour la courbure géodésique de la ligne $x = x(q)$, $y = y(q)$ tracée sur notre surface Σ:

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{2(U + h)^{\frac{3}{2}}}\left\{2(U + h)\frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\left(\frac{\partial U}{\partial y}x' - \frac{\partial U}{\partial x}y'\right)\right\}.$$

Tenant compte de formules (1) et (3) on conclue immédiatement que

$$(8) \qquad T = \frac{2(U + h)^{\frac{3}{2}}}{\rho_g}.$$

Si l'on se rappelle de plus, qu'étant remplies certaines conditions générales, l'élément linéaire de toute surface peut être mis sous la forme particulière (4), on déduit des considérations précédentes le critère que voici:

Soit B une portion finie de surface bilatérale, limitée par *plusieurs* courbes fermées simples. Si la courbure géodésique de toutes ces courbes est toujours positive, alors il existe dans B une géodésique fermée. Le signe de la courbure géodésique en question est définie par la formule (6) elle-même; on suppose que la représentation paramétrique $u = u(q)$, $v = v(q)$ de chaque courbe du contour est telle, que la tangente à cette courbe (menée dans le sens de q croissant) forme avec la normale géodésique, dirigée vers l'intérieur de B, le systéme d'axes qui est orienté (sur la surface) de la façon des tangentes aux courbes coordonnées, menées dans le sens des u croissant, v croissant (dans l'ordre indiqué).

(1) BELTRAMI, *Œuvres*, I, p. 178 (cité d'après BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, I, 1921, p. 117).

Digitized by Google

On peut rendre l'énoncé du critère encore plus simple, en se servant de la courbure géodésique-vecteur (1). Alors la condition en question se réduit à ce que la courbure géodésique en chaque point du contour doit être dirigé vers l'intérieur de B.

Ajoutons, qu'il serait facile d'établir ce critère directement par les méthodes de MM. Tonelli et Signorini, en partant de l'expression de la variation d'un arc, tracé sur une surface donnée.

4. Revenons au problème de Dynamique. Soit un système holonome à deux dégrés de liberté assujetti à des liaisons indépendantes du temps et soumis à des forces dérivant d'une fonction $U(u, v)$; on a désigné par u et v les paramètres définissant la position du système. D'après le principe de la moindre action, le problème du mouvement, qui correspond à une valeur déterminée de la constante des forces vives h, est équivalent à la recherche des géodésiques sur la surface d'élément linéaire

$$d\sigma^2 = (U + h)(a_{11}\,du^2 + 2\,a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv^2),$$

si par $a_{11}u'^2 + 2\,a_{12}u'v' + a_{22}v'^2$ on désigne la force vive du système. On obtient donc un critère simple pour la recherche des mouvements périodiques (2).

Matematica. — *Sul calcolo funzionale lineare.* Nota di A. WEIL, presentata (3) dal Socio V. VOLTERRA.

Vorrei in questa Nota definire alcune nozioni nuove nel calcolo funzionale, che sono applicabili a diverse questioni analitiche. L'Analisi lineare ha per fondamento astratto il concetto, dovuto al Fréchet (4), di spazio topologico affine. Sono stato costretto a definirlo in una maniera un po' diversa da quella del Fréchet:

Un insieme (E) di elementi P, Q, ⋯, è detto *spazio affine*, i cui punti sono gli elementi P, Q, ⋯, se si è definita in (E) l'addizione, che ad ogni coppia di punti P, Q fà corrispondere un punto P + Q, e la moltiplicazione scalare, che a un punto P e a un numero reale k fà

(1) Cfr. par ex. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma, 1925), p. 155.

(2) La note précédente été déjà sous presse, lorsque j'ai appris, grâce à l'amabilité de M. Kibel (de Leningrad) que l'énoncé du critère géométrique du n° 3 de cette note se trouve déjà dans le mémoire de M. G. D. Birkhoff, *Dynamical systems with two degrees of freedom*. « Trans. Amer. Math. Soc. », vol. 18, p. 199, que je ne connaisais pas car il été impossible de procurer ces « Transactions » ici (à Tiflis).

(3) Nella seduta del 15 maggio 1927.

(4) « Acta math. », t. 47, p. 25.

Digitized by Google

corrispondere un punto $k \cdot P$, di modo che siano soddisfatte le proprietà assiomatiche ben note:

$$\begin{cases} P + Q = Q + P \quad , \quad (P + Q) + R = P + (Q + R) \quad , \quad k(lP) = kl \cdot P; \\ k(P + Q) = kP + kQ \quad , \quad (k + l)P = kP + lP, \\ o \cdot P = o \cdot Q \quad , \quad 1 \cdot P = P. \end{cases}$$

(E) è detto di più *spazio topologico affine* se è affine, e se la nozione di limite, cioè di successione convergente, vi è definita colle seguenti proprietà:

1° la successione $P, P, P \cdots$ converge verso P; se $P_1, P_2, P_3 \cdots$ converge verso P, ogni successione parziale $P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3} \cdots$ converge verso P; se $P_1, P_2, P_3 \cdots$ e $P'_1, P'_2, P'_3 \cdots$ convergono tutt'e due verso P, la successione mista $P_1, P'_1, P_2, P'_2, \cdots$ converge pure verso P;

2° se $P_1, P_2, P_3 \cdots$ e $Q_1, Q_2, Q_3 \cdots$ convergono rispettivamente verso P e Q, e se $\lim_{n=\infty} k_n = k$, $\lim_{n=\infty} l_n = l$, allora $k_1 P_1 + l_1 Q_1$, $k_2 P_2 + l_2 Q_2$, $k_3 P_3 + l_3 Q_3 \cdots$ converge verso $kP + lQ$.

Due spazî topologici affini sono detti *simili* se si può stabilire fra essi una corrispondenza biunivoca che conservi l'addizione, la moltiplicazione e le successioni convergenti.

Questo premesso, è chiaro che i campi funzionali che vengono considerati nell'Analisi possono essere considerati senz'altro come spazî affini. Parecchi di essi sono stati definiti dal Fréchet (loc. cit.) come spazî topologici affini; ci proponiamo di dare una regola che conduca allo stesso scopo per un campo funzionale M dato ad arbitrio.

Supponiamo che ad ogni funzione f di M si possa far corrispondere una successione di numeri $(a_1, a_2, a_3 \cdots)$ di modo che, se $(a_1, a_2, a_3 \cdots)$ e $(b_1, b_2, b_3 \cdots)$ corrispondono a f e g, $(ka_1 + lb_1, ka_2 + lb_2, \cdots)$ corrisponda a $kf + lg$ e che di più i numeri $a_1, a_2, a_3 \cdots$ non possano essere nulli tutti insieme senza che la funzione corrispondente sia identicamente nulla. Allora, se chiamiamo $\mathfrak{A}$ lo spazio affine, i cui punti sono le successioni di numeri reali $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3 \cdots)$, M sarà in corrispondenza biunivoca con un certo insieme contenuto in $\mathfrak{A}$: per ragione di semplicità, considereremo questo insieme come identico con M stesso.

M sarà dunque una *molteplicità lineare* in $\mathfrak{A}$, cioè un insieme tale, che se $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3 \cdots)$ e $\mathfrak{b} = (b_1, b_2, b_3 \cdots)$ appartengono ad M, $k\mathfrak{a} + l\mathfrak{b} = (ka_1 + lb_1, ka_2 + lb_2, \cdots)$ vi appartiene pure. Consideriamo le funzioni lineari seguenti dell'elemento $\mathfrak{a}$ di M:

$$\mathfrak{F}_0[\mathfrak{a}] = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n;$$

una tale funzione sarà chiamata *un funzionale di Baire di classe zero in* M.

Digitized by Google

Sia $\mathfrak{F}_0', \mathfrak{F}_0'', \mathfrak{F}_0''' \cdots$ una successione di siffatti funzionali, scelta in modo tale che il limite

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{F}_0^{(n)}[a] = \mathfrak{F}_1[a]$$

esista qualunque sia il punto a di M. Allora $\mathfrak{F}_1[a]$ è una funzione lineare di a, definita in M (ma in generale non in tutto $\mathfrak{A}$): se non è uguale a un funzionale di classe zero, sarà chiamata un *funzionale di Baire di classe 1 in* M. Similmente, se i funzionali di classe 1, $\mathfrak{F}_1'[a], \mathfrak{F}_1''[a], \cdots$ sono tali che $\lim_{n=\infty} \mathfrak{F}_1^{(n)}[a] = \mathfrak{F}_2[a]$ esista per ogni a di M e non sia uguale, nè a un funzionale di classe 0 nè ad uno di classe 1, $\mathfrak{F}_2[a]$ sarà detto un funzionale di Baire di classe 2. E così di seguito, transfinitamente.

Può darsi che esistano funzionali di classe α per ogni α finito o transfinito di seconda classe; allora M è detta di categoria Ω. Nel caso contrario, ci sarà un numero λ tale che esistono funzionali di classe α per $\alpha < \lambda$ e non per $\alpha \geqq \lambda$: M è detta di categoria λ. La maggior parte dei campi funzionali dell'Analisi appartiene alla categoria 2.

Diciamo che una successione di funzionali di Baire in M:

$$\mathfrak{F}'[a], \mathfrak{F}''[a], \mathfrak{F}'''[a], \cdots$$

converge verso $\mathfrak{F}[a]$ se si ha, per ogni a in M:

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{F}^{(n)}[a] = \mathfrak{F}[a].$$

Similmente, una successione di punti $a_1, a_2, a_3, \cdots$ di M sarà detta convergente verso a se si ha, per ogni funzionale di Baire $\mathfrak{F}[a]$ in M:

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{F}[a_n] = \mathfrak{F}[a].$$

La molteplicità M e l'insieme $\mathfrak{S}$ degli $\mathfrak{F}[a]$ sono così definiti come spazî topologici affini.

Sia poi $\Phi[\mathfrak{F}]$ una funzione lineare e continua dell'elemento $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{S}$, tale cioè che si abbia:

$$\Phi[k\mathfrak{F} + l\mathfrak{F}'] = k\Phi[\mathfrak{F}] + l\Phi[\mathfrak{F}'],$$

e

$$\Phi[\mathfrak{F}] = \lim_{n=\infty} \Phi[\mathfrak{F}^{(n)}] \quad \text{se} \quad \mathfrak{F}', \mathfrak{F}'', \mathfrak{F}''' \cdots \text{ converge verso } \mathfrak{F}.$$

Pigliamo, in particolare, per $\mathfrak{F}$ il funzionale di classe 0 $\mathfrak{F}_0^{(k)}[a] = a_k$, e poniamo:

$$\Phi\left[\mathfrak{F}_0^{(k)}\right] = a_k^*, \quad \text{e} \quad a^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*, \cdots).$$

Digitized by Google

Ad ogni Φ corrisponde così un punto a^* di $\mathfrak{A}$, e, se Φ percorre l'insieme delle funzioni lineari e continue di $\mathfrak{F}$, a^* percorrerà una certa molteplicità lineare M^*. Inoltre, se a è un punto fisso di M e $\mathfrak{F}$ un elemento variabile di $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}[a]$ è una funzione lineare e continua di $\mathfrak{F}$, alla quale corrisponde quindi un punto di M^*, che non è altro che a stesso, come si vede subito. M è dunque contenuta in M^*.

M^* è chiamata una molteplicità lineare *completa*; se M non è identica con M^*, è detta una molteplicità *incompleta*. Le molteplicità che vengono considerate nell'Analisi sono quasi tutte complete. Una molteplicità incompleta sarebbe per esempio l'insieme dei punti $(a_1, a_2, a_3 \cdots)$ di $\mathfrak{A}$ tali che gli a_n si esprimono linearmente e con coefficienti razionali mediante un numero finito di essi. Nel calcolo funzionale, occorre sempre escludere le molteplicità incomplete, che non sono altro che molteplicità artificialmente ristrette.

Più generalmente, sia $\mathfrak{E}$ uno spazio topologico affine, e $P', P'', P''' \cdots$ una successione di punti di $\mathfrak{E}$, scelta in modo tale che, essendo $\mathfrak{E}_0$ l'insieme dei punti $k_1 P' + k_2 P'' + \cdots + k_n P^{(n)}$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$, cioè delle combinazioni lineari di punti $P^{(n)}$ in numero finito, ogni punto di $\mathfrak{E}$ appartenga ad uno dei derivati successivi di $\mathfrak{E}_0$. Sia allora $\Phi[P]$ una funzione lineare e continua del punto P in $\mathfrak{E}$, e poniamo:

$$a_n = \Phi[P^{(n)}] \quad , \quad a = (a_1, a_2, a_3, \cdots);$$

quando $\Phi[P]$ percorre l'insieme delle funzioni lineari e continue in $\mathfrak{E}$, a percorre in $\mathfrak{A}$ una molteplicità lineare M, e si vede subito che M è completa.

Prima di dare esempî, osserviamo che le nostre definizioni sono indipendenti in un largo modo dalla scelta delle « coordinate » $a_1, a_2, a_3 \cdots$ Sia infatti $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots)$ un altro sistema di coordinate in M: ci sarà una corrispondenza biunivoca e lineare fra $(a_1, a_2, a_3 \cdots)$ e $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots)$. Ciascuno degli α_n sarà dunque una funzione lineare di a in M. Supponiamo ora:

1° che le α_n siano funzionali di Baire in M;

2° che ogni funzionale di Baire in M si possa dedurre da combinazioni lineari finite $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n$, per mezzo di passaggi al limite in numero finito o infinito.

In questo caso, che è sempre verificato nelle applicazioni, i funzionali di Baire, la definizione di successione convergente in M e in $\mathfrak{E}$, la proprietà di essere completa, sono invarianti quando si passa dalle coordinate $(a_1, a_2, a_3 \cdots)$ alle $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots)$.

Diamo alcuni esempî di molteplicità complete che hanno importanza nell'Analisi; prenderemo sempre per coordinate $(a_1, a_2, a_3 \cdots)$ i coefficienti di Fourier delle funzioni in parola:

Digitized by Google

a) l'insieme delle funzioni $\varphi(x)$ di quadrato sommabile; i funzionali di Baire sono gli integrali di Lebesgue:

$$\mathfrak{F}[\varphi] = \int_0^1 \varphi\omega\, dx,$$

dove ω è pure di quadrato sommabile. La convergenza indicata dalle regole precedenti è la cosiddetta convergenza debole, dove ciascuno dei coefficienti di Fourier tende verso un limite, mentre $\int_0^1 \varphi_n^2\, dx$ rimane limitata. L'insieme è di categoria 2.

b) l'insieme delle funzioni continue $f(x)$; i funzionali di Baire sono gli integrali di Stieltjes:

$$\mathfrak{F}[f] = \int_0^1 f\, d\lambda(x),$$

dove λ è a variazione limitata. La convergenza è pure la convergenza debole, dove $f_n(x)$ converge semplicemente verso il limite $f(x)$, mentre $|f_n|$ rimane limitata $< M$. L'insieme è di categoria 2.

c) l'insieme delle funzioni $f(z)$ analitiche nell'interno di un campo C; i funzionali di Baire sono gli integrali di Cauchy:

$$\mathfrak{F}[f] = \int_\gamma f(z)\,\varphi(z)\, dz,$$

dove $\varphi(z)$ è una funzione analitica e regolare sul contorno di C, avente singolarità arbitrarie nell'interno di C, e dove γ è un contorno chiuso interiore a C e abbastanza vicino al contorno di C perchè $\varphi(z)$ vi sia regolare [1]. Una successione convergente di funzioni $f(z)$ è qui una successione uniformemente convergente in ogni campo C_1 completamente interiore a C. L'insieme è di categoria 2.

d) L'insieme delle funzioni a variazione limitata $\theta(x)$. I funzionali di Baire sono gli integrali di Stieltjes:

$$\mathfrak{F}[\theta] = a\theta(0) + \int_0^1 f(x)\, d\theta(x),$$

dove $f(x)$ è una funzione misurabile (B) di modulo limitato. Non definiremo la convergenza, che risulta un po' complicata. L'insieme è di categoria Ω.

(1) Cfr. i lavori di FANTAPPIÈ, « Rend. dei Lincei », voll. I, II, III, IV, V, s. 6ª, 1925-26-27, dove si tratta di tali funzionali e anche L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*, Memoria riassuntiva pubblicata nei « Rend. del Seminario Matematico della R. Università di Roma », vol. IV, s. 2ª, 1925-26.

Digitized by Google

Matematica. — *Sulle funzioni di Green a campi pluriconnessi.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sopra la meccanica relativistica dei sistemi olonomi.* Nota di G. THOMSEN, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Se noi determiniamo il moto d'un pianeta intorno al sole mediante le soluzioni delle equazioni gravitazionali dell'Einstein trovate dallo Schwarzschild, noi trattiamo il pianeta come un punto materiale, che non disturba il campo. Noi non ne otteniamo alcuna indicazione sulla eventuale rotazione del pianeta durante il moto, cioè sulla orientazione istantanea d'una terna di assi rigidamente collegata col pianeta.

In questa Nota ci proponiamo di assegnare un principio meccanico, che ci permetterà - [attraverso gli sviluppi che esporremo in Note successive] - di tener conto anche delle variazioni dell'orientazione del pianeta durante il moto. Il punto di partenza per una tale ricerca mi è stato suggerito dal prof. T. Levi-Civita, che mi fu largo di incoraggiamenti e di consigli.

Occorre anzitutto fissare il concetto di corpo rigido nella teoria della relatività generale. Fisicamente appare indubbio, che qualche cosa di molto prossimo agli ordinari corpi solidi debba potersi definire in modo preciso anche nella meccanica relativista, almeno in un campo sufficientemente piccolo - [che potrà matematicamente ridursi ad un intorno infinitesimo]. Del resto sappiamo già dalla geometria riemanniana che, all'infuori degli spazi a curvatura costante, non esistono sistemi continui di punti suscettibili di muoversi (con sei gradi di libertà) conservando configurazione inalterata. Questa condizione si può verificare soltanto nell'infinitesimo, cioè nell'ipotesi che il campo occupato dal sistema si tratti come infinitesimo.

Secondo questo punto di vista si riguarda il pianeta come un corpo di prova, che non disturba il campo, le dimensioni di esso corpo essendo assai piccole rispetto a quelle del campo, in cui si svolge il movimento. L'intorno infinitesimo occupato dal solido si tratta come un sistema di punti materiali vincolati, dovendosi, ben inteso, definire i vincoli in modo adeguato sotto il duplice aspetto matematico e meccanico, in particolare rispettando i canoni fondamentali della concezione relativista. Di ciò in una

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

Digitized by Google

prossima Nota. Intanto giova premettere alcune considerazioni generali sulla introduzione di vincoli olonomi nella meccanica relativistica. Il risultato essenziale è contenuto, come vedremo, nella formola (8), della quale passiamo ora a spiegare l'origine e il significato.

2. Nella meccanica classica siamo abituati a rappresentare i legami olonomi, cui sottostà un sistema di N punti materiali x_ν [$\nu = 1 \cdots N$] di coordinate x_ν^α [$\alpha = 1, 2, 3$] e di masse m_ν mediante equazioni della forma

$$x_\alpha^\nu = \varphi_\alpha^\nu (q_1, q_2 \cdots q_n, t), \tag{1}$$

dove, essendo n il grado di libertà del sistema, $q_1, q_2, \cdots q_n$ rappresentano coordinate lagrangiane e t il tempo (nella sua accezione abituale). Come è noto, si può allora determinare il moto del sistema dal principio variazionale dell'Hamilton.

$$\delta \int (U + T)\, dt = 0 \tag{2}$$

con (2 *a*)

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} T_\nu$$

dove (2 *b*)

$$T_\nu = \frac{1}{2} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2} m_\nu \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{dx_\nu^\alpha}{dt} \right)^2$$

è l'energia cinetica del $\nu =$ es.^{mo} punto materiale e U il potenziale complessivo di tutte le forze (supposte conservative), direttamente applicate ai vari punti del sistema. La (2) va intesa nella maniera seguente: Si devono esprimere T e U mediante (1), per le q, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ e t e ritenere in (2) sottoposte a variazioni le n funzioni q (t). Se ne traggono le equazioni differenziali atte a definire tutte le possibili linee orarie del moto vincolato. Notariamente il principio fondamentale (2) è equivalente al principio dei lavori virtuali e rappresenta l'unica ipotesi nuova, che si deve aggiungere ai principî della meccanica dei punti liberi, quando si procede alla considerazione generale dei sistemi olonomi.

3. Per introdurre nella nostra meccanica relativistica un postulato, che corrisponda alla precedente ipotesi, noi partiamo dal fatto, che per un punto materiale libero x^i ($i = 0, 1, 2, 3$) i moti possibili in un dato campo gravitazionale sono determinati come estremali del principio variazionale

$$\delta \int ds = 0 \qquad \left[ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \right]. \tag{3}$$

Digitized by Google

Se noi attribuiamo al punto x un coefficiente di massa (massa di riposo) costante, ammettendo che il punto stesso non disturbi sensibilmente il campo, noi possiamo scrivere invece di (3) anche

$$\delta \int m\, ds = 0. \tag{4}$$

In prima approssimazione da (3) o (4) scende, come è noto [1], la legge

$$\delta \int (U + T)\, dt = 0\,, \tag{5}$$

che nella meccanica classica determina il moto del punto materiale di forza viva T nel campo di forza derivante dal potenziale U.

Se abbiamo N punti liberi x_ν colle masse (di riposo) m_ν, vale per ognuno di essi, a norma della (4), la legge del moto

$$\delta \int m_\nu\, ds_\nu = 0\,. \tag{6}$$

Passando ora ai sistemi con vincoli olonomi, ci possiamo imaginare i legami dati nella forma

$$x_\nu^i = \varphi_\nu^i (q_1 \cdots q_n) \qquad \begin{bmatrix} i = 0\,,\, 1\,,\, 2\,,\, 3 \\ \nu = 1 \cdots N \end{bmatrix}, \tag{7}$$

dove le coordinate temporali figurano in una maniera del tutto generale assieme alle coordinate spaziali.

Nella meccanica classica dal principio (5), che vale per ogni punto libero, si passa *additivamente* al principio (2) per sistemi vincolati. In modo analogo procederemo nella meccanica relativistica, assumendo, invece di (6) il principio variazionale additivo

(I) $$\delta \int \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\, ds_\nu = 0\,, \tag{8}$$

in cui naturalmente

$$ds_\nu^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\,(x_\nu)\, dx^i\, dx_\nu^k \tag{9}$$

è il quadrato dell'elemento lineare, spettante alla linea oraria del punto x_ν.

Mediante le (7) noi dobbiamo esprimere in (9) le x_ν per le q; e si

(1) Cfr. per es. LEVI-CIVITA, *The absolute differential calculus* (Glasgow: Blackie, 1927), pp. 287-294.

Digitized by Google

ricava così, introducendo sotto l'integrale in (8), quale variabile indipendente un parametro ausiliare τ, una espressione della forma

$$\delta \int L(q, \dot{q})\, d\tau = 0 \qquad \left[\dot{q} = \frac{dq}{d\tau}\right], \tag{10}$$

donde l'enunciato:

Le linee orarie di un sistema di punti sottoposti ai vincoli (7) sono le estremali del principio variazionale (10) - [relativo alle funzioni $q(\tau)$].

4. Per giustificare l'ammissione della (8) basterà mostrare, che dà essa si ricava la formola (2) della meccanica ordinaria dei sistemi vincolati, colla stessa approssimazione che consente di assimilare (4) e (5).

Notoriamente si può assumere (in prima approssimazione) l'elemento lineare sotto la forma [1]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)(dx^0)^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\sum_{\alpha=1}^{3}(dx^\alpha)^2 \tag{11}$$

dove è U una funzione delle coordinate spaziali x^1, x^2, x^3 (armonica in ogni regione esterna alle masse potenzianti) e c la velocità della luce.

Ponendo

$$x^0 = c \cdot t \tag{12}$$

ricaviamo

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2}(2U + v^2) + \frac{1}{c^4}(\cdots) \tag{13}$$

dove intendiamo $v^2 = \sum_\alpha \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)^2$ e trascuriamo i termini d'ordine superiore del terzo rispetto al rapporto $v : c$.

Da (13) viene

$$m\frac{ds}{dx^0} = \frac{m}{c}\frac{ds}{dt} = m - \frac{1}{c^2}\left(mU + \frac{m}{2}v^2\right) + \cdots \tag{14}$$

Per il punto libero ciò permette appunto di passare da (4) alla formola (5) con $T = \frac{m}{2}v^2$ e col potenziale U.

Per un sistema di N punti abbiamo analogamente dalla (14):

$$\frac{1}{c} m_\nu\, ds_\nu = m_\nu - \frac{1}{c^2}(m_\nu U_\nu + T_\nu)\, dt_\nu + \cdots \tag{15}$$

(1) Vedi per es.: T. Levi-Civita, loc. cit., cap. XII, n. 6.

Digitized by Google

dove T_ν secondo la (2ª) rappresenta l'energia cinetica del ν^{esimo} punto e si è posto

$$x_\nu^0 = c\, t_\nu .$$

Veramente nella meccanica ordinaria si considerano soltanto vincoli olonomi della forma speciale

$$(16) \qquad \begin{cases} x_\nu^\alpha = \varphi_\nu^\alpha (q_1 \cdots q_m , t) & [\alpha = 1 , 2 , 3] \\ x_\nu^0 = c \cdot t_\nu = c \cdot t & \text{per tutti i } \nu \end{cases}$$

con gli $n + 1$ parametri lagrangiani $q^1 \cdots q_n$ e t. Tenendo conto di ciò e delle (14), ricaviamo dalle (15):

$$(17) \qquad \frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, ds_\nu = \sum_\nu m_\nu - \frac{1}{c^2} \left[\sum_\nu (m_\nu U_\nu + T_\nu) \right] dt + \cdots$$

con che a causa della costanza di $\sum_\nu m_\nu$ e di c si ottiene da (8) precisamente la formola (2) della meccanica classica, in cui si assuma

$$U = \sum_\nu m_\nu U_\nu .$$

5. Merita speciale menzione il caso particolare d'un unico punto x alle cui coordinate siano imposti i legami

$$(18) \qquad x^i = x^i (q_1 , q_2 , q_3) \qquad [i = 0 , 1 , 2 , 3],$$

il che è quanto dire punto costretto a muoversi su una ipersuperficie del cronotopo [1]. Il principio (8) fornisce come linee orarie del punto x le linee geodetiche della ipersuperficie. Si ricava un risultato analogo supponendo, che il punto sia costretto a muoversi su una superficie di due dimensioni.

6. Esistono già due lavori, che trattano sistemi olonomi nella meccanica relativista. L'uno [2] tratta il caso speciale del nostro numero 5 nella relatività speciale. L'altro [3] tratta il caso generale, ricorrendo sostanzialmente al principio (8), però in modo puramente formale, senza alcuna giustificazione meccanica.

(1) Affinchè si tratti di effettivo movimento, la ipersuperficie (18) deve avere un elemento lineare indefinito.

(2) P. ADAM, *Resolución de algunos problemas elementales en mécanica relativista restringida.* (Publicaciones del laboratorio y seminario matemático. Madrid, 1923).

(3) TH. DE DONDER, *Application de la relativité aux systèmes atomiques et moléculaires.* «Comptes Rendus», t. 182, 1926, pp. 1380-1382.

Digitized by Google

Meccanica. — *Sulla cinematica dei corpi rigidi nella relatività generale.* Nota di G. THOMSEN, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idromeccanica. — *Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali.* Nota di U. CRUDELI presentata[1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Si tratta di presentare (almeno teoricamente), entro tubi verticali cilindrici (rotondi), una categoria di moti stazionari (non lenti) dei liquidi viscosi (omogenei) pesanti, i quali moti conducono ad una *portata* suscettibile di ridursi (nel senso che vedremo) alla portata del Poiseuille *senza che la struttura dei filetti liquidi si riduca a quella del regime di Poiseuille.*

Col significato dei simboli della mia precedente Nota di questi « Rendiconti » (1927), denotando con 2Ω la proiezione della rot $\boldsymbol{v}$ sopra un asse ad essa parallelo, vogliamo intanto che si abbia, come nel regime di Poiseuille,

$$\Omega = -\alpha r,$$

dove α designi una costante. Poichè per noi

$$2\Omega = -\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r},$$

essendo (ricordiamolo per incidenza) la F legata[2] alla funzione ψ di corrente mediante la relazione

$$\psi = r\frac{\partial F}{\partial r},$$

avremo adesso

$$\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r} = 2\alpha r;$$

quindi potremo scrivere

$$\Delta_2 F = \alpha r^2 + \beta, \tag{1}$$

dove la β (a priori funzione arbitraria di z) verrà da noi supposta costante.

(1) Nella seduta del 3 aprile 1927.
(2) Cfr. la mia precedente Nota, superiormente citata.

Digitized by Google

Ciò premesso si osservi subito che la nostra equazione indefinita generale del movimento (trovata nella precedente Nota),

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial \zeta}\,\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Delta_2 F}{\partial r}\right)=\nu\,\frac{\partial \Delta_4 F}{\partial r},$$

può dirsi fin d'ora soddisfatta, tenuto conto che (vedasi quella Nota)

$$\frac{dr}{dt}=v_r=-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta\,\partial r}$$

ed inoltre tenuto conto della (1).

La (1) può anche scriversi

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(F-\frac{\alpha}{16}r^4-\frac{\beta}{4}r^2\right)\right\}+\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(F-\frac{\alpha}{16}r^4-\frac{\beta}{4}r^2\right)=0.$$

Ora, si ponga

$$F=\frac{r^2}{4}\left(\frac{\alpha}{4}r^2+\beta\right)+G(r)\,H(\zeta); \tag{2}$$

avremo

$$\frac{H}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dG}{dr}\right)+G\,\frac{d^2 H}{d\zeta^2}=0,$$

alla quale potremo soddisfare scrivendo

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\,\dfrac{d}{dr}\left(r\,\dfrac{dG}{dr}\right)=-c^2 G\\[2ex] \dfrac{d^2 H}{d\zeta^2}=c^2 H,\end{cases} \tag{3}$$

con c^2 costante per noi positiva.

Dalla seconda delle (3) viene

$$H=Ae^{c\zeta}+Be^{-c\zeta},$$

con manifesto significato dei simboli. Della prima delle (3), cioè della equazione

$$\frac{d^2 G}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dG}{dr}+c^2 G=0,$$

si consideri l'integrale $J_0(cr)$, denotando con J_0 la funzione del Bessel d'indice zero.

Digitized by Google

Riserbandomi di venire da ultimo allo *sviluppo di* $F - \frac{\alpha}{16} r^4 - \frac{\beta}{4} r^2$ *in serie di soluzioni semplici*, avremo intanto, in corrispondenza ad una generica di coteste soluzioni semplici [tenendo presente la (2)],

$$v_r = -\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial r} = -\frac{dH}{dz}\frac{dJ_0(cr)}{dr} = cJ_1(cr)\frac{dH}{dz},$$

rappresentando con J_1 la funzione d'indice uno del Bessel.

La v_r, come si vede, si annulla per $r = 0$; però, dovendo essa annullarsi anche sulla parete del tubo, del quale R rappresenta il raggio, *la c va presa in modo che si abbia*

$$J_0'(cR) = 0 \quad , \quad \text{cioè} \quad J_1(cR) = 0. \tag{4}$$

Inoltre [tenendo ancora presente la (2)] avremo

$$v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \beta + \alpha r^2 - c^2 H(z) J_0(cr) \tag{5}$$

come componente assiale della velocità.

Nei riguardi dello sforzo specifico che il liquido esercita sulla parete σ del tubo (sforzo che, in corrispondenza ad ogni punto della parete medesima, risulta situato nel piano passante per detto punto e per l'asse di simmetria del moto) la sua componente assiale viene

$$-\mu\left\{\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_\sigma \cos\widehat{nx} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_\sigma \cos\widehat{ny}\right\},$$

manifesto essendo il significato dei simboli, fra i quali μ designa la viscosità del liquido. Ma

$$v_x = \frac{x}{r} v_r \quad , \quad v_y = \frac{y}{r} v_r,$$

per cui la componente assiale del suddetto sforzo diventa $-\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)_\sigma$

cioè

$$-2\mu\alpha R,$$

tenendo presente che $J_0'(cR) = 0$.

Invece la componente radiale, dello sforzo specifico che il liquido esercita sulla parete del tubo, risulta essere

$$p_\sigma - 2\mu c^2 \frac{dH}{dz} J_0(cR),$$

Digitized by Google

dove p_σ designa la pressione isotropa p in corrispondenza alla parete medesima. Invero, tenendo presente che, per noi,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}v_r\right) \quad , \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r}v_r\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r}v_r\right) \quad , \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}v_r\right)$$

e ricordando la (4), si ottiene

$$\left\{\left(p - 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_\sigma \cos\widehat{nx} - \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_\sigma \cos\widehat{ny}\right\}\cos\widehat{nx} +$$

$$+\left\{-\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_\sigma \cos\widehat{nx} + \left(p - 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_\sigma \cos\widehat{ny}\right\}\cos\widehat{ny} =$$

$$= p_\sigma - 2\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_\sigma = p_\sigma + 2\mu\frac{dH}{dz}\left[\frac{d^2 J_0(cr)}{dr^2}\right]_{r=R} =$$

$$= p_\sigma - 2\mu c^2 \frac{dH}{dz} J_0(cR).$$

Per il principio di reazione, lo sforzo specifico che il liquido esercita sulla parete del tubo viene equilibrato dalla reazione (specifica) che la parete del tubo stesso esercita sul liquido; il componente assiale del predetto sforzo che il liquido esercita sul tubo, componente al quale compete la misura $-2\mu\alpha R$, trovasi pertanto equilibrato da una *reazione viscosa* (dicitura che usiamo per contrapposto alla consueta nozione di attrito) nella tacita ipotesi che il contatto fra liquido e parete del tubo consenta un'esplicazione del tipo in discorso. Vedremo (in particolare) la nozione di *aderenza in media* fra liquido e parete del tubo (generalizzazione della nozione di aderenza completa che figura nella teoria del regime di Poiseuille). Giova subito dire che la nozione di aderenza completa, oppure quella consueta di attrito fra parete e liquido come figura nel regime laminare, non sarebbe compatibile con la presente trattazione *generale*, poichè, come si vede facilmente, condurrebbe alla conclusione $A = B = 0$ cioè ai filetti liquidi rettilinei (1).

Veniamo, infine, alla *portata* (diciamola Q)

$$Q = -2\pi\int_0^R v_z r\,dr.$$

(1) Incompatibilità analoghe alla suddetta furono rilevate altrove (sebbene in corrispondenza a moti lenti); vedansi:

U. CRUDELI, *Sul moto dei solidi nei fluidi viscosi* [« Nuovo Cimento », 1° sem., 1912, p. 449].

P. ALIBRANDI, *Sopra alcune questioni idrodinamiche* [« Nuovo Cimento », 2° sem., 1913, p. 223].

Digitized by Google

Si osservi che in base alla (4) ed all'essere $J_0(cr)$ soluzione della prima delle (3), segue

$$-c^2\int_0^R rJ_0(cr)\,dr = \left[r\frac{dJ_0(cr)}{dr}\right]_{r=0}^{r=R} = 0;$$

quindi, tenendo presente la (5), avremo

$$Q = -\frac{\pi}{2}R^2(2\beta + \alpha R^2). \tag{6}$$

Nell'ipoteri $\beta = -\alpha R^2$ si ha

$$Q = \frac{\pi}{2}\alpha R^4. \tag{7}$$

Ciò premesso, chiamando (con notazione tosto manifesta) $p_1 - p_2$ la differenza delle pressioni p agli estremi *dell'asse* del tubo, il quale venga supposto di lunghezza l, e ritenendo (eventualmente) per $4\mu\alpha$ la espressione *approssimata* $\frac{p_1 - p_2}{l}$, viene[1]

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu l}(p_1 - p_2), \tag{8}$$

cioè la stessa portata che, una volta attribuiti gli opportuni significati a p_1 e p_2, figura nel regime del Poiseuille.

Nel regime di Poiseuille la $\beta = -\alpha R^2$, la quale in cotesto regime conduce (con gli opportuni significati di p_1 e p_2) senz'altro alla (8) (quando venga trascurata la relativa influenza della gravità), implica la completa aderenza fra liquido e parete del tubo. Invece noi, con $\beta = -\alpha R^2$, abbiamo

$$\begin{cases} (v_r)_{r=R} = 0 \\ (v_z)_{r=R} = -c^2 H(z) J_0(cR); \end{cases}$$

d'altra parte, intendendo (per fissare le idee) che il tubo si estenda ugualmente, da una parte e dall'altra, nelle due regioni separate dal piano (x, y), si ha

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} H(z)\,dz = \frac{A + B}{c}(e^{c\lambda} - e^{-c\lambda}),$$

con manifesto significato dei simboli; allora per $A + B = 0$ viene *l'aderenza in media* fra liquido e parete del tubo. Giova notare che, se unita-

(1) Mi riservo di esaminare cotesta eventuale approssimazione. La formula esatta della nostra portata è quella generale (6) oppure la particolare (7), nella quale però α abbia [come nella (6) in cui lo stesso può dirsi della β] il primitivo significato di costante *a priori* arbitraria.

Digitized by Google

mente con $A + B = o$ si avesse la v_r nulla per un valore di ζ (ad esempio per $\zeta = \lambda$), la v_r sarebbe ovunque nulla; con che si ricadrebbe nel regime di Poiseuille. Invero, per $B = -A$, risulta

$$v_r = -cA\,(e^{c\zeta} + e^{-c\zeta})\,\frac{dJ_o(cr)}{dr};$$

per cui allora $A = B = o$.

Venendo poi al caso generale, si chiami con $c_n R$ (per fissare le idee $c_n > o$) la generica radice positiva della equazione

$$J_o'(\tau) = o \quad , \quad \text{cioè della } J_1(\tau) = o,$$

dove $J_o'(\tau)$ denota la $\frac{dJ_o(\tau)}{d\tau}$ mentre J_1 rappresenta al solito la funzione d'indice uno del Bessel. Si ponga poi

$$H_n(\zeta) = A_n e^{c_n \zeta} + B_n e^{-c_n \zeta};$$

avremo

$$(9) \qquad \begin{cases} v_r = -\sum \frac{dH_n}{d\zeta}\,\frac{dJ_o(c_n r)}{dr} = \sum c_n J_1(c_n r)\,\frac{dH_n}{d\zeta} \\ v_\zeta = \beta + \alpha r^2 - \sum c_n^2 H_n(\zeta)\, J_o(c_n r). \end{cases}$$

La componente assiale dello sforzo specifico che il liquido esercita sulla parete del tubo risulta tuttora

$$-2\mu\alpha R;$$

mentre la componente radiale di esso sforzo viene espressa da

$$p_\sigma - 2\mu \sum c_n^2 J_o(c_n R)\,\frac{dH_n}{d\zeta}.$$

Avremo ancora la espressione generale della portata

$$Q = -\frac{\pi}{2} R^2 (2\beta + \alpha R^2);$$

per cui, nell'ipotesi $\beta = -\alpha R^2$ e (per avventura) con l'approssimato $\alpha = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l}$, si ottiene anche adesso la portata

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu l}(p_1 - p_2).$$

Inoltre per $A_n + B_n = o$ si perviene, con $\beta = -\alpha R^2$, all'aderenza in media fra liquido e parete del tubo [avendo supposto, per fissare le idee,

Digitized by Google

che il tubo si estenda ugualmente, da una parte e dall'altra, nelle due regioni separate dal piano (x, y)].

Ritornando alle (9), osserveremo che, per cose note sulle funzioni del Bessel, si ottiene

$$\begin{cases} A_n e^{c_n z} - B_n e^{-c_n z} = \dfrac{2}{c_n^2 R^2 J_2^2(c_n R)} \displaystyle\int_0^R r v_r J_1(c_n r)\, dr \\ A_n e^{c_n z} + B_n e^{-c_n z} = \dfrac{2}{c_n^2 R^2 J_2^2(c_n R)} \left\{ \dfrac{2\alpha R^2}{c_n^2} J_0(c_n R) - \displaystyle\int_0^R r v_z J_0(c_n r)\, dr \right\}, \end{cases}$$

tenuto conto che, essendo $J_0'(c_n R) = -J_1(c_n R) = 0$, si ha

$$\int_0^R r J_0(c_n r)\, dr = 0 \quad , \quad \int_0^R r^3 J_0(c_n r)\, dr = \frac{2R^2}{c_n^2} J_0(c_n R)$$

ed inoltre

$$2\int_0^R r J_0^2(c_n r)\, dr = 2\int_0^R r J_1^2(c_n r)\, dr = R^2 J_2^2(c_n R),$$

dopo avere anche rilevato che, per cose ben note, può scriversi

$$c_n r J_0(c_n r) = \frac{d}{dr}\left\{ r J_1(c_n r) \right\}.$$

Con J_2 abbiamo, com'è chiaro, designato la funzione d'indice due del Bessel.

Posto $r = R\gamma$, $c_n R = \gamma_n$ [per cui γ_n rappresenta la generica radice positiva della equazione $J_1(\gamma) = 0$], potremo scrivere

$$\begin{cases} A_n e^{c_n z} - B_n e^{-c_n z} = \dfrac{2R^2}{\gamma_n^2 J_2^2(\gamma_n)} \displaystyle\int_0^1 \gamma v_r J_1(\gamma_n \gamma)\, d\gamma \\ A_n e^{c_n z} + B_n e^{-c_n z} = \dfrac{2R^2}{\gamma_n^2 J_2^2(\gamma_n)} \left\{ \dfrac{2\alpha R^2}{\gamma_n^2} J_0(\gamma_n) - \displaystyle\int_0^1 \gamma v_z J_0(\gamma_n \gamma)\, d\gamma \right\} \end{cases}$$

dove ora naturalmente v_r e v_z vanno pensate funzioni di γ e z.

Biologia matematica. — *Conservazione e diffusione dei caratteri mendelliani.* I. *Caso pamnittico.* II. *Caso generale.* Due Note di B. DE FINETTI presentate dal Socio Corrisp. C. FOÀ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Geodesia. — *Collegamento geodetico del vertice di Andrate alla rete di 1° ordine dello Stato.* Nota di U. BARBIERI, presentata[1] dal Corrisp. G. LORIA.

Il collegamento di cui è oggetto la presente Nota, fu eseguito contemporaneamente alle altre operazioni di indole astronomico-geodetica, compiute ad Andrate, nell'agosto-settembre 1926.

Sarebbe stato mio desiderio determinare un vertice di piramide nell'ex-centro già usato per le suddette operazioni, servendomi di diversi punti di 1° ordine, visibili sull'orizzonte della stazione, ma, subordinata la condotta del mio lavoro ad esigenze di tempo e di economia, dovetti abbandonare l'idea di servirmi del vertice di M. Tersiva, difficile di accesso, di M. Colma di Mombarone, nascosto dalle montagne interposte fra esso e Andrate, e di M. Vesco, di deficiente visibilità (due o tre tentativi al riguardo, andarono sempre frustrati per la foschia e per le nebbie).

Mi servii così degli unici vertici rimasti a disposizione per il mio scopo, e cioè di Superga e M. Soglio, punti di 1° ordine, e di Ripa Vercelli, punto di 2° ordine: i valori delle coordinate di Andrate, quale vertice di 4° ordine, dati dall'Istituto geografico militare, avrebbero poi servito come controllo.

Le collimazioni a Superga avvennero direttamente; quelle su M. Soglio e Ripa Vercelli, con l'aiuto di un elioscopio collocato in centro. Fu scelta come direzione origine quella determinata dalla visuale a Brosso, vertice di 4° ordine ben visibile e in posizione acconcia, già adoperato nelle determinazioni di azimut.

Nelle misure angolari, compiute in giorni differenti per i varî vertici, fu usato l'Universale Bamberg, già in sito per le determinazioni di latitudine e azimut; ogni angolo fu misurato 18 volte, con reiterazione di 10°, ciascun valore essendo la media dei risultati ottenuti nelle due posizioni coniugate dello strumento.

Indicati con α e β gli angoli nell'ex-centro di Andrate, rispettivamente fra le direzioni a Superga-Ripa Vercelli, e Ripa Vercelli-M. Soglio, succedentisi nell'ordine da sinistra a destra, si ebbe, come risultato finale

$$\alpha = 29^\circ 56' 33''.94 \pm 0''.7 \quad ; \quad \beta = 17^\circ 39' 55''.72 \pm 0''.4 .$$

A trasportare in centro (campanile del paese) questi valori, oltre gli elementi di riduzione

$$e = 190^m.781 \qquad \varepsilon = 33^\circ 03' 30'' ,$$

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

Digitized by Google

già dati nelle precedenti operazioni di latitudine e azimut [1], occorse avere le distanze da Andrate centro, dei due vertici Superga e M. Soglio, essendo Ripa Vervelli direttamente collegato per l'Istituto, con Andrate e M. Soglio.

Il calcolo delle due incognite si effettuò partendo dagli elementi seguenti, forniti dall'Istituto geografico

$$\text{Andrate} \begin{cases} \varphi_A = 45^\circ 31' 38''.902 \\ \theta_A = -4^\circ 34' 42''.693 \end{cases} \qquad \text{Superga} \begin{cases} \varphi_S = 45^\circ 04' 49''.196 \\ \theta_S = -4^\circ 41' 05''.815 \end{cases}$$

$$\text{M. Soglio} \begin{cases} \varphi_0 = 45^\circ 22' 17''.196 \\ \theta_0 = -4^\circ 55' 19''.196 \end{cases}$$

e con le formole [2] note

$$\log(\varphi_0 - \varphi') = \log \Delta\theta^2 \operatorname{sen}\varphi_0 \cos\varphi_0 \frac{N_0 \operatorname{sen} 1''}{2\rho_0} - \frac{M \operatorname{sen}^2 1''}{12}\Delta\theta^2 + \frac{M \operatorname{sen}^2 1''}{2}\Delta\theta^2 \operatorname{sen}^2\varphi_0$$

$$\log X = \log \Delta\theta N_0 \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi_0 + G_0 X^2$$

$$\log Y = \log(\varphi_0 - \varphi)\rho_m \operatorname{sen} 1'' + H(\varphi_0 - \varphi)^2$$

$$\log s \operatorname{sen}\chi = \log X + [0.84623]\frac{Y^2}{2\rho N \operatorname{sen} 1''}$$

$$\log s \cos\chi = \log Y - [1.14726]\frac{X^2}{2\rho N \operatorname{sen} 1''}$$

$$\log \operatorname{tg}\chi = \log s \operatorname{sen}\chi - \log s \cos\chi$$

$$\log s = \log s \operatorname{sen}\chi - \log \operatorname{sen}\chi = \log s \cos\chi - \log\cos\chi .$$

Si ottenne così

$$\log AS = 4.7022770 \quad ; \quad \log AO = 4.5048154.5.$$

Per completare i dati necessarî al calcolo del vertice di piramide, era ancor necessario conoscere la distanza Superga-Ripa Vercelli, e l'azimut, in quest'ultimo vertice, della visuale al primo, onde dedurre poi, con differenza dall'azimut noto di M. Soglio ((RO) = 245° 47' 05".84) l'angolo, in Ripa Vercelli, fra le due direzioni a Superga e M. Soglio.

La deduzione anzidetta si effettuò con le medesime formole (1) ottenendosi

$$\log SR = 4.6180564.5 \qquad (RS) = 182^\circ 16' 22''.56$$

(1) Vedi Note relative, di recente pubblicazione, in questi « Rendiconti ».
(2) Vedi p. es. N. JADANZA, *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche.*

Digitized by Google

essendo noti per l'Istituto

$$\varphi_R = 45^\circ\,27'\,12''.614 \qquad \theta_R = -\,4^\circ\,39'\,50''.552.$$

In definitiva si ebbero per il calcolo del vertice di piramide, i dati seguenti

$$\log RS = 4.6180564.5 \qquad \log RO = 4.3454525$$

$$\alpha_1 = 29^\circ\,34'\,23''.56 \;\; ; \;\; SOR = 296^\circ\,29'\,16''.72 \;\; ; \;\; \beta_1 = 18^\circ\,08'\,15''.04$$

essendo log OR dato dall'Istituto, ed α_1, β_1 i due angoli α, β, ridotti al centro: per il calcolo effettivo, i tre angoli suddetti andarono poi naturalmente diminuiti di un terzo dell'eccesso sferico.

A deduzioni ultimate, indicati con φ e ψ gli angoli nei vertici S ed O, risultò

$$\varphi = 7^\circ\,14'\,20''.16 \qquad \psi = 8^\circ\,33'\,45''.04$$

$$\log AS = 4.7023057.2 \;\; ; \;\; \log AR = 4.0251366.5 \;\; ; \;\; \log AO = 4.5048306.2.$$

Gli elementi dedotti consentono di passare alla determinazione delle coordinate geografiche di Andrate, riferendosi ai tre vertici direttamente collimati.

Il calcolo sui due vertici di Superga e M. Soglio fu compiuto con le formole

$$3\varepsilon = \frac{s^2 \operatorname{sen} z \cos z}{2\,\rho_m\,N_m \operatorname{sen} 1''}$$

$$X = s \operatorname{sen}(z - \varepsilon) \qquad Y = s \cos(z - 2\varepsilon)$$

$$\log(\varphi_0 - \varphi) = \log \frac{Y}{\rho \operatorname{sen} 1''} - KY - LY^2$$

$$\log(\varphi_0 - \varphi') = \log \frac{X^2}{2\,\rho_0 N_0 \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tg}\varphi_0 - EX^2$$

$$\log(\theta' - \theta) = \log \frac{X}{N_0 \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi_0} - GX^2$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2} m = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta' - \theta)\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}$$

$$z' = z + m + 180 + \frac{e^2}{24}\,\frac{s^3}{a^3 \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} z;$$

Digitized by Google

mentre per Ripa Vercelli, data la sua maggior vicinanza con Andrate, si impiegarono le relazioni semplificate:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \varphi' - \varphi = \dfrac{s\cos z}{\rho \operatorname{sen} 1''} - \dfrac{(s \operatorname{sen} z)^2}{2\,\rho N \operatorname{sen} 1''} \operatorname{tg}\varphi \\ \Delta\theta = \theta' - \theta = \dfrac{s \operatorname{sen} z}{N \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi'} \\ m = \Delta\theta \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}(\varphi + \varphi') \\ z' = 180 + z + m. \end{cases}$$

Gli elementi impiegati nei calcoli furono i seguenti

da Superga
$$\begin{cases} \log s = 4.7023057.2 \\ z = (SR) + \varphi + \varepsilon \\ \quad = 9^\circ\,29'\,49''.56 \\ \theta = -\,4^\circ\,41'\,05''.815 \end{cases}$$

da M. Soglio
$$\begin{cases} \log s = 4.5048306 \\ z = (OR) - (\psi + \varepsilon) \\ \quad = 57^\circ\,02'\,19''.36 \\ \theta = -\,4^\circ\,55'\,19''.196 \end{cases}$$

da Ripa Vercelli
$$\begin{cases} \log s = 4.0251366.5 \\ z = [(RO) + ORA + \varepsilon] - 360^\circ \\ \quad = 39^\circ\,05'\,05''.94 \\ \theta = -\,4^\circ\,39'\,50''.552. \end{cases}$$

Si ottennero così per le coordinate geografiche di Andrate (asse del campanile del paese) e per gli azimut delle direzioni in esso concorrenti, i valori seguenti

da Superga
$$\begin{cases} \varphi_A = 45^\circ\,31'\,38''.930 \\ \theta_A = -\,4^\circ\,34'\,42''.665 \\ (AS) = 189^\circ\,34'\,21''.936 \end{cases}$$

da M. Soglio
$$\begin{cases} \varphi_A = 45^\circ\,31'\,38''.930 \\ \theta_A = -\,4^\circ\,34'\,42''.662 \\ (AO) = 237^\circ\,17'\,00''.556 \end{cases}$$

da Ripa Vercelli
$$\begin{cases} \varphi_A = 45^\circ\,31'\,38''.934 \\ \theta_A = -\,4^\circ\,34'\,42''.665 \\ (AR) = 219^\circ\,08'\,45''.508 \end{cases}$$

le longitudini essendo riferite al meridiano di Roma (M. Mario).

Come media si ha in definitiva

$$\varphi_A = 45^\circ\,31'\,38''.931$$

$$\theta_A = -\,4^\circ\,34'\,42''.664.$$

Digitized by Google

L'Istituto geografico militare assegna per Andrate, quale punto di 4° ordine, e come già avemmo occasione di ricordare, i valori seguenti

$$\varphi_A = 45^\circ\,31'\,38''.902$$
$$\theta_A = -\,4^\circ\,34'\,42''.693$$
$$(AR) = 219^\circ\,08'\,47''.60\,;$$

l'accordo di queste cifre con quelle da noi determinate, mentre offre un controllo indiretto per l'esattezza delle nostre deduzioni, dimostra eziandio quanto accurate siano le operazioni del nostro massimo Istituto.

Approfittando del collegamento, testè compiuto, di Andrate alla rete di 1° ordine dello Stato, siamo ora in grado di dedurre i valori definitivi dell'attrazione locale nel detto vertice.

Richiamando il risultato delle osservazioni astronomiche eseguite nell'estate 1926 nel paese stesso, e di cui demmo relazione in questi « Rendiconti », abbiamo pertanto

latitudine di Andrate	astronomica	$\varphi_a =$	$45^\circ\,31'\,09''.9$
	geodetica	$\varphi_g =$	$38''.9$
		$\varphi_a - \varphi_g =$	$-\,29''.0$
azimut della direzione Andrate-Ripa Vercelli	astronomico	$A_a =$	$219^\circ\,09'\,04''.5$
	geodetico	$A_g =$	$08'\,45''.5$
		$A_a - A_g =$	$+\,19''.0$

Segue

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g = -\,29''.0 \quad ; \quad \eta = (A_a - A_g)\,\mathrm{cotg}\,\varphi_a = +\,18''.66\,,$$

da cui l'azimut ellissoidico e l'attrazione locale ad Andrate

$$A = 147^\circ\,14'\,34''$$
$$\theta = \quad 34''.48\,.$$

Digitized by Google

Fisica. — *Sul meccanismo dell'emissione nella meccanica ondulatoria.* Nota di E. FERMI, presentata [1] dal Socio O. M. CORBINO.

Lo scopo di questo lavoro è lo studio del meccanismo dell'emissione della luce nella meccanica ondulatoria; tale studio ci porterà in particolare alla determinazione della larghezza naturale delle righe di emissione e della loro forma.

È noto come, nella teoria di Schroedinger [2] tutte le volte che in un atomo si trovano ad essere eccitati contemporaneamente due stati quantici i ed l il momento elettrico dell'atomo contiene una componente variabile col tempo con la frequenza $(E_i - E_l)/h$; secondo la teoria elettro-magnetica classica, questa variazione del momento elettrico ha per conseguenza una irradiazione di luce avente la stessa frequenza. Noi faremo vedere in questo lavoro come la reazione della radiazione emessa abbia per effetto di alterare le intensità di eccitazione dei due stati quantici, in senso tale che, trascorso un certo tempo, resta eccitato soltanto lo stato di energia più piccola; ed allora si arresta anche il processo dell'emissione. Cosicchè il meccanismo di un salto quantico può descriversi al modo seguente. Supponiamo che, inizialmente, sia eccitato, nell'atomo che si considera, soltanto uno stato quantico di energia E_i. In queste condizioni il momento elettrico dell'atomo è costante e quindi l'atomo non può irradiare energia. Supponiamo ora che una piccola perturbazione esterna produca una piccola eccitazione di un altro stato di energia E_l minore di E_i. Comincerà allora subito una debole irradiazione con la frequenza $(E_i - E_l)/h$; e la reazione di questa irradiazione avrà per effetto di aumentare l'intensità di eccitazione dello stato l ai danni di quella dello stato i. Il processo proseguirà finchè l'atomo non è passato completamente dallo stato i nello stato l.

Indichiamo con ψ lo scalare di campo della teoria di Schroedinger, e con $\bar{\psi}$ il suo complesso coniugato. Secondo Schroedinger la densità elettrica sarà allora espressa da

$$e\psi\bar{\psi} \tag{1}$$

essendo e la carica elettronica, ed avendo normalizzato ψ in modo che sia

$$\int_{\tau} \psi\bar{\psi}\, d\tau = 1 . \tag{2}$$

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

(2) E. SCHROEDINGER, « Ann. d. Phys. », *79*, pp. 361, 489, 734; *80*, p. 437; *81*, p. 109, 1926.

Digitized by Google

Il momento elettrico del sistema resterà allora espresso da

$$p = e \int_\tau \vec{r}\, \psi \bar{\psi}\, d\tau \quad . \tag{3}$$

dove con $\vec{r}$ si è indicato il raggio vettore dell'elemento di volume $d\tau$.

Se il potenziale V_0 del sistema è indipendente dal tempo l'equazione di Schroedinger

$$\Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V_0 \psi - \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

ammetterà come soluzione generale una combinazione lineare a coefficienti costanti di soluzioni fondamentali del tipo

$$u_k \exp(2\pi i \nu_k t) \quad ; \quad \nu_k = E_k/h \tag{5}$$

dove le u_k non dipendono da t e sono soluzioni dell'equazione

$$\Delta u_k + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_k - V_0)\, u_k = 0 \tag{6}$$

soddisfacienti alle condizioni di normalizzazione

$$\int u_k^2\, d\tau = 1 .$$

Le E_k sono gli autovalori della (6). In questo caso particolare ψ prenderà dunque la forma

$$\varphi = \sum \lambda_k u_k \exp(2\pi i \nu_k t) \quad ; \quad \sum \lambda_k \bar{\lambda}_k = 1 \tag{7}$$

essendo le λ dei parametri costanti. Il momento elettrico (3) prenderà con ciò l'espressione

$$p = e \sum \lambda_k \bar{\lambda}_s r_{ks} \exp 2\pi i (\nu_k - \nu_s) t \tag{8}$$

dove con r_{ks} si sono indicati i vettori

$$r_{ks} = \int r u_k u_s\, d\tau . \tag{9}$$

Di qui si riconosce in particolare che se tutte le λ, ad eccezione di una, si annullano, il momento elettrico diventa costante e quindi non si ha irradiazione. Nel caso generale esso risulta invece somma di funzioni sinusoidali del tempo aventi le frequenze $\nu_k - \nu_r$; e questa variazione di p dà luogo alla emissione di luce avente le stesse frequenze, la cui intensità è espressa, conformemente alla elettrodinamica classica, da

$$2\ddot{p}^2/3c^3 . \tag{10}$$

Digitized by Google

Nelle considerazioni fin qui svolte abbiamo trascurata la reazione della radiazione emessa; per tener conto anche di questa, noi vogliamo ammettere che essa, conformemente alla elettrodinamica classica, sia rappresentata da una forza

$$(11) \qquad \frac{2}{3}\frac{e}{c^2}\dddot{p}.$$

Per poter introdurre nella equazione di Schroedinger la considerazione di questa forza dobbiamo naturalmente rappresentarla come derivante da un potenziale, il quale risulta evidentemente

$$(12) \quad V = -\frac{2}{3}\frac{e}{c^3} r \times \dddot{p} = \frac{16\pi^3 i}{3}\frac{e^2}{c^3}\sum_{ks}(r \times r_{ks})(\nu_k - \nu_s)^3 \exp 2\pi i(\nu_k - \nu_s)t.$$

Per tener conto della reazione di radiazione dovremo dunque nella (4) aggiungere V al potenziale V_0. Questa aggiunta ha per effetto che, pur potendosi sempre scrivere ψ sotto la forma (7), le λ cessano di essere delle costanti e vengono a variare lentamente col tempo. Per determinare come avviene una tale variazione [1], sostituiamo nella (4) al posto di ψ l'espressione (7), e al posto di V_0, $V_0 + V$. Ricordando le (6) troviamo

$$(13) \qquad \sum \dot{\lambda}_k u_k \exp 2\pi i\nu_k t = \frac{2\pi i}{h} V \sum_s \lambda_s u_s \exp 2\pi i\nu_s t.$$

Moltiplicando i due membri di questa equazione per $u_k\, d\tau$ ed integrando a tutto lo spazio, si trova, tenendo presente che le u_k sono un sistema di funzioni ortogonali

$$(14) \qquad \dot{\lambda}_k = \frac{2\pi i}{h}\sum_s \lambda_s \exp[2\pi i(\nu_s - \nu_k)t]\int V u_k u_s\, d\tau.$$

Ponendo al posto di V la sua espressione (12) ricaviamo

$$(15) \quad \dot{\lambda}_k = -\frac{32\pi^4}{3}\frac{e^2}{c^3 h}\sum_{\alpha\beta s}\lambda_\alpha \bar{\lambda}_\beta \lambda_s (\nu_\alpha - \nu_\beta)^3 r_{\alpha\beta} \times r_{sk} \exp 2\pi i(\nu_\alpha - \nu_\beta + \nu_s - \nu_k)t.$$

Una perturbazione secolare dei valori delle λ è evidentemente data soltanto dai termini del secondo membro, per i quali $\alpha \neq \beta$ e per i quali il fattore esponenziale si riduce a una costante, cioè ai termini per cui $\nu_\alpha - \nu_\beta + \nu_s - \nu_k = 0$. Se, come vogliamo ammettere, non esistono relazioni razionali tra le ν_i, questa ultima equazione equivale a porre $\alpha = k$,

(1) Certamente questo procedimento per l'applicazione alla meccanica quantistica della nozione classica di reazione di radiazione è alquanto arbitrario; esso resta tuttavia in buona parte giustificato dai risultati a cui conduce.

Digitized by Google

$\beta = s$, e la (15) si scrive dunque, tenendo conto delle sole variazioni secolari

$$\dot{\lambda}_k = -\frac{32\pi^4}{3}\frac{e^2}{c^3 h}\sum_s \lambda_k \lambda_s \bar{\lambda}_s (\nu_k - \nu_s)^3 r_{ks}^2 . \tag{16}$$

Il caso per noi più interessante è quello che corrisponde all'emissione di una sola riga spettrale, cioè quello in cui tutte le λ, ad eccezione di due sole, p. e. λ_1 e λ_2, si annullano. In questo caso, indicando con A la costante reale

$$A = \frac{32\pi^4}{3}\frac{e^2}{c^3 h}(\nu_2 - \nu_1)^3 r_{12}^2 \tag{17}$$

le (17) e le equazioni che si deducono da esse cambiando i in $-i$ ci danno

$$\dot{\lambda}_1 = A\lambda_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_2 \quad ; \quad \dot{\lambda}_2 = -A\lambda_2 \lambda_1 \bar{\lambda}_1 \tag{19}$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = A\bar{\lambda}_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_2 \quad ; \quad \dot{\bar{\lambda}}_2 = -A\bar{\lambda}_2 \lambda_1 \bar{\lambda}_1 . \tag{19}$$

Da esse si deduce subito l'integrale primo $\lambda_1 \bar{\lambda}_1 + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = \text{cost.}$; in virtù della seconda delle (7) la costante deve prendere il valore 1, in modo che si ha

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_1 + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = 1. \tag{20}$$

Dalle (18) (19) si deduce poi facilmente che gli argomenti dei complessi λ_1, λ_2 non variano col tempo e che, per i loro moduli, vale l'equazione

$$\frac{d}{dt}|\lambda_1|^2 = 2A|\lambda_1|^2(1 - |\lambda_2|^2)$$

da cui si deduce

$$2At = \int \frac{d|\lambda_1|^2}{|\lambda_1|^2(1 - |\lambda_1|^2)} = \log \frac{|\lambda_1|^2}{1 - |\lambda_1|^2} + \text{cost.} \tag{21}$$

Scegliendo l'origine dei tempi in modo che la costante di integrazione risulti zero, e ricordando la (21) si trova allora

$$|\lambda_1|^2 = \frac{e^{2At}}{e^{2At} + 1} \quad ; \quad |\lambda_2|^2 = \frac{1}{e^{2At} + 1} \tag{22}$$

da cui si deduce subito

$$|\lambda_1 \lambda_2| = 1/2 \cosh At . \tag{23}$$

Se nelle (22) si pone $t = -\infty$, si trova $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$; ponendo invece $t = +\infty$ si ha $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 1$. Si vede cioè che, come

Digitized by Google

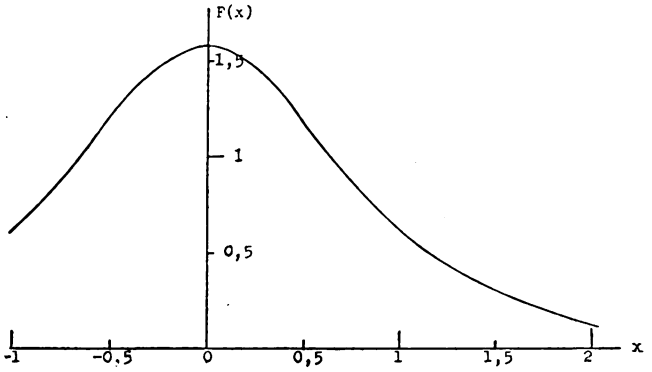
avevamo annunziato, l'effetto della reazione di radiazione è tale da far passare l'atomo dallo stato quantico 2 allo stato 1; queste considerazioni precisano dunque il meccanismo del salto quantico.

Per maggiore semplicità vogliamo ora ammettere che, all'istante iniziale, le λ siano reali; allora, per quanto si è detto, esse resteranno reali durante tutto il processo; l'espressione (8) per la componente del momento elettrico corrispondente alla emissione diventerà allora

$$p_{12} = e r_{12} \frac{\cos 2\pi(\nu_2 - \nu_1)\, t}{\cosh A t}. \tag{24}$$

Siamo ora in grado di calcolare la larghezza e la forma delle righe di emissione. Per far questo basta infatti che sviluppiamo l'espressione precedente del momento elettrico, per mezzo di un integrale di Fourier, nelle sue componenti armoniche. Si trova subito

$$\begin{cases} p_{12} = 2 e r_{12} \displaystyle\int_0^\infty d\nu \cos 2\pi\nu t \int_0^\infty \frac{\cos 2\pi(\nu_2 - \nu_1 - \nu)\, t + \cos 2\pi(\nu_2 - \nu_1 + \nu)\, t}{\cosh A t} \\ \quad = \dfrac{2 e r_{12}}{A} \displaystyle\int_0^\infty d\nu \cos 2\pi\nu t \left\{ F\left[\frac{2\pi(\nu_2 - \nu_1 - \nu)}{A}\right] + F\left[\frac{2\pi(\nu_2 - \nu_1 + \nu)}{A}\right] \right\} \end{cases} \tag{25}$$



dove, con $F(\omega)$ si è indicata la funzione

$$F(\omega) = \int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{\cosh x}\, dx. \tag{26}$$

La $F(\omega)$ è rappresentata nel grafico annesso; abbiamo poi calcolato numericamente i seguenti valori: $F(0) = 1.57 = \pi/2$; $F(0.2) = 1.50$; $F(0.5) = 1.18$; $F(1) = 0.62$; $F(2) = 0.12$; $F(3) = 0.02$; $F(0.56) = \pi/2\sqrt{2}$.

Digitized by Google

Notiamo in particolare che la $F(\omega)$ prende valori assai piccoli per valori assoluti dell'argomento un po' grandi. In conseguenza di ciò la (25) può scriversi con grande approssimazione

$$(27) \qquad p_{12} = \frac{2\,e r_{12}}{A} \int_0^\infty F\left(\frac{2\pi\Delta\nu}{A}\right) \cos 2\pi\nu t\, d\nu$$

dove con $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 - \nu$ si è indicata la distanza tra la frequenza che si considera ed il centro della riga di emissione. La intensità della riga di emissione a distanza $\Delta\nu$ dal suo centro risulta dunque proporzionale

$$F^2\left(\frac{2\pi\Delta\nu}{A}\right).$$

Questo risultato ci definisce la forma della riga. Se definiamo la larghezza della riga come il doppio di quella distanza dal suo centro per cui la intensità si riduce a metà si trova che tale larghezza è espressa da

$$(28) \qquad \delta\nu = \frac{0.56}{\pi} A = 0.18\, A.$$

Naturalmente nelle effettive righe spettrali, oltre al loro allargamento naturale dovuto alla causa considerata in questo lavoro, deve tenersi conto dell'allargamento dovuto all'effetto Doppler e alla pressione. Tali effetti producono anzi in generale allargamenti delle righe assai maggiori della loro larghezza naturale, così che una misura diretta di questa per le righe di emissione si presenta praticamente impossibile, ed il suo valore può soltanto dedursi indirettamente da una misura della costante A.

Dalla teoria della dispersione di Schroedinger si può dedurre

$$r_{12}^2 = \frac{h}{8\pi^2 m} \frac{D}{\nu_2 - \nu_1}$$

dove D è il numero degli elettroni di dispersione per ogni atomo, il quale può, come è noto, dedursi da una misura di dispersione anomala [1] e risulta in genere dell'ordine di grandezza dell'unità. Sostituendo questo valore in (17) si trova il valore di A che, sostituito a sua volta in (28) ci dà per la larghezza della riga il valore

$$\delta\nu = 0.18 \cdot \frac{4\pi^2}{3} \frac{e}{c^3 m} D\,(\nu_2 - \nu_1)^2 \quad ; \quad \delta\lambda = 6.7 \cdot 10^{-5}\, D \text{ Å ng.}$$

Per esempio per la riga D_2 del Na si ha $D = 2/3$; si trova dunque $\delta\lambda = 4.5 \cdot 10^{-5}$ Å.

(1) Il valore di D può anche dedursi, per le righe D del sodio, dal lavoro di MINKOWSKI, «Zs. f. Phys.», *36*, 839, 1926, sulla larghezza delle righe di assorbimento.

Digitized by Google

Chimica. — *Il sistema* $Fe(NO_3)_3 - Al(NO_3)_3 - H_2O$ *a 25°* [1]. Nota di G. MALQUORI, presentata [2] dal Socio N. PARRAVANO.

Come fu accennato in una Nota precedente [3], la possibilità economica dei due processi descritti da G. A. Blanc, si basa fra l'altro su l'elevata purezza dei prodotti che si ottengono: nitrato di alluminio e nitrato di potassio, cloruro di alluminio e cloruro di potassio.

In particolare le allumine che si originano dalla scomposizione termica del cloruro e del nitrato, sono praticamente esenti da ferro, ciò che costituisce un pregevole attributo nei riguardi della loro utilizzazione per la preparazione dell'alluminio.

In questa Nota riferisco sullo studio dell'isoterma a 25° del sistema: $Fe(NO_3)_3 - Al(NO_3)_3 - H_2O$. Analoghe ricerche sono in corso per il sistema: $AlCl_3 - FeCl_3 - H_2O$ alla stessa temperatura; per ambedue i sistemi farò pure noti in seguito i risultati conseguiti ad altre temperature.

Le misure di solubilità sono state eseguite con il metodo usuale. Le composizioni delle soluzioni sature e dei resti sono indicate nella tabella e nel diagramma triangolare.

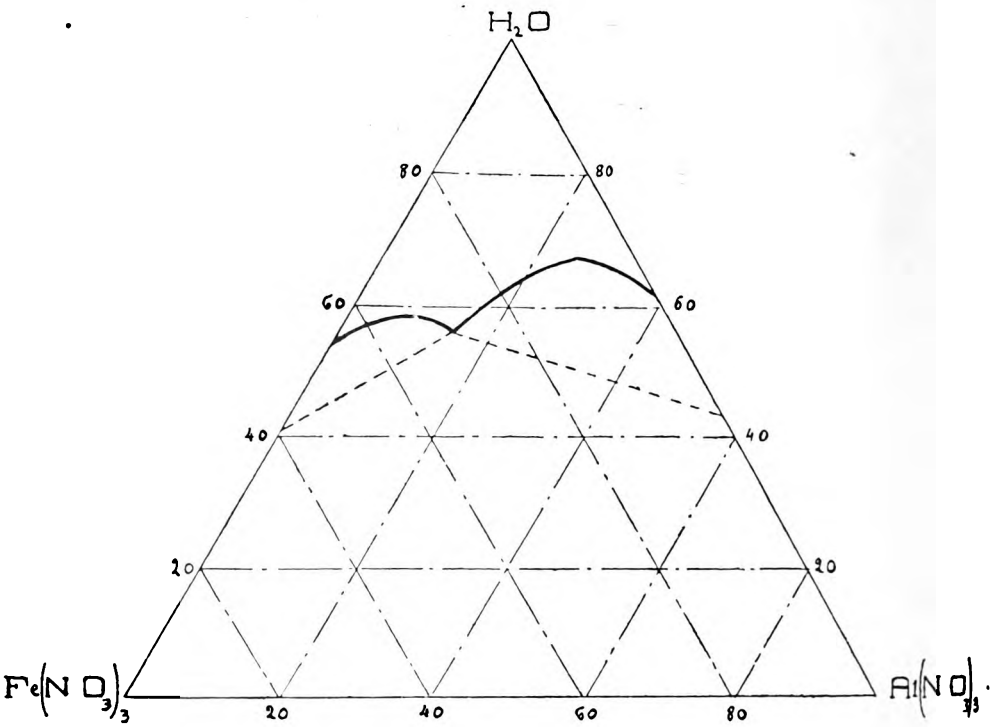
Numero	Composizione della soluzione			Composizione del resto			Fasi solide
	$Al(NO_3)_3$ %	$Fe(NO_3)_3$ %	H_2O %	$Al(NO_3)_3$ %	$Fe(NO_3)_3$ %	H_2O %	
1	39.25	—	60.75	—	—	—	$Al(NO_3)_3\,9H_2O$
2	24.28	8.77	66.95	47.91	2.83	49 26	»
3	22.85	10.03	67.12	—	—	—	»
4	19.95	17.39	62.66	—	—	—	»
5	16.09	23.87	60.04	40.01	9.88	50.11	»
6	15.21	29.98	54.81	—	—	—	$Al(NO_3)_3\,9H_2O$ + + $Fe(NO_3)_3\,9H_2O$
7	12.15	30.09	57.76	49.05	3.87	47.08	$Fe(NO_3)_3\,9H_2O$
8	7.12	36.01	56.87	—	—	—	»
9	2.97	42.13	54.90	49.91	1.05	49.04	»
10	1.15	44.09	54.76	—	—	—	»
11	—	46.57	53.43	—	—	—	»

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 1° maggio 1927.
(3) Questi « Rendiconti », 1927, serie VI, fasc. 6, p. 451.

Digitized by Google

Dai risultati sopra esposti si vede che a 25° non si formano nè prodotti di addizione, nè cristalli misti fra nitrato ferrico e nitrato di alluminio. Le fasi solide in equilibrio con le soluzioni sature sono $Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$ e $Fe(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$ rispettivamente per ciascun ramo dell'isoterma di solubilità.

Questo comportamento trova riscontro nell'azione che l'acido nitrico esercita sulla solubilità dei due nitrati.



Lo studio dei sistemi: $Fe_2O_3 - N_2O_5 - H_2O$ a 25° e $Al(NO_3)_3 - HNO_3 - H_2O$ a 25° eseguito rispettivamente da Cameron e Robinson [1] e da Jnamura [2] mette in evidenza: per il primo di questi sistemi, che anche la soluzione contenente il 55.2 % di N_2O_5 è in equilibrio con l'idrato $Fe(NO_3)_3 9H_2O$, per il secondo, che $Al(NO_3)_3$ è stabile in presenza della soluzione contenente il 72.01 % di acido nitrico. Solo per concentrazioni superiori dell'acido si ottengono in equilibrio con le soluzioni sature, successivamente l'ottoidrato e l'esaidrato.

(1) « J. Phys. Chem. », *13*, 251 (1909).
(2) « Mem. Coll. Sc. Kyoto », *4*, 105 (1919).

Digitized by Google

Chimica. — *Struttura cristallina ed atomica dell'idrato ferroso.* Nota di G. NATTA e E. CASAZZA presentata [1] dal Socio G. BRUNI [2].

La struttura cristallina dell'idrato ferroso non era sino ad ora conosciuta. Dalle soluzioni dei sali ferrosi l'idrato precipita per azione degli alcali per lo più in una forma colloidale, formando dei geli tanto più rapidamente ossidabili quanto più è spinta la loro disidratazione. De Schulten [3] era però riuscito ad ottenere l'idrato cristallino, partendo dalle sue soluzioni in soda caustica concentratissime, sotto forma di corti prismi di aspetto esagonale, dei quali non aveva potuto determinare nessuna costante cristallografica.

Avendo già uno di noi applicato con successo i metodi röntgenografici nell'esame di altri idrati di metalli bivalenti [4] siamo stati indotti ad esaminare con gli stessi metodi l'idrato ferroso, allo scopo di identificarne la struttura cristallina ed atomica e di dimostrarne l'isomorfismo con gli idrati di magnesio, di nichelio, di manganese e di cobalto bivalenti.

Abbiamo esaminato col metodo delle polveri l'idrato precipitato, malgrado il suo apparente aspetto colloidale, confidando che, analogamente a molti altri colloidi inorganici, le dimensioni dei granuli risultassero sufficentemente grandi da permettere l'osservazione dei fenomeni di diffrazione dei raggi X come per le polveri cristalline.

Data la sua estrema ossidabilità, specialmente allo stato secco, abbiamo dovuto precipitare l'idrato a caldo sotto una atmosfera di idrogeno, l'abbiamo filtrato, lavato con acqua, alcool ed etere e seccato a 100° in corrente di idrogeno, usando un dispositivo appositamente costruito, tale da permettere che le varie operazioni ed i travasamenti potessero aver luogo senza che il precipitato, od il liquido sovrastante ad esso, venissero neppur momentaneamente a contatto con l'aria. L'idrato ferroso secco così ottenuto è piroforico ed anche allo stato compatto si arroventa spontaneamente appena viene a contatto con l'aria.

Si presentava perciò come un problema di non facile attuazione pratica riempirne un esile tubicino di un millimetro di diametro e lungo più

(1) Nella seduta del 15 maggio 1927.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(3) « Compt. Rend. » *109*, 266, (1889).

(4) G. NATTA. *Struttura cristallina degli idrati di cadmio e di nichelio*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. II, fasc. 6°, 2° sem. 495 (1925). G. NATTA e A. REINA, *Sugli ossidi e idrati del cobalto*, « Rend. Acc. Lincei », vol. IV, fasc. 6°, 2° sem., 48 (1926).

Digitized by Google

di un centimetro e mantenerlo inalterato per quasi due ore nelle nostre ordinarie camere di Debye a contatto con l'atmosfera. Per rivestirlo di una esile superficie protettiva lo abbiamo bagnato con una soluzione diluitissima di paraffina in benzolo ed abbiamo usato un tubicino di carta sottile previamente impermeabilizzato per immersione in una soluzione di bakelite e cottura a 180°.

Abbiamo usato come sorgente di raggi X un tubo ad elettroni, evacuato con i nostri mezzi, ad anticatodo di ferro, conformemente alla constatazione che quasi tutte le sostanze producono effetti di diffrazione più nitidi se vengono colpite da radiazioni della stessa lunghezza d'onda che emetterebbero se fossero impiegate come anticatodi.

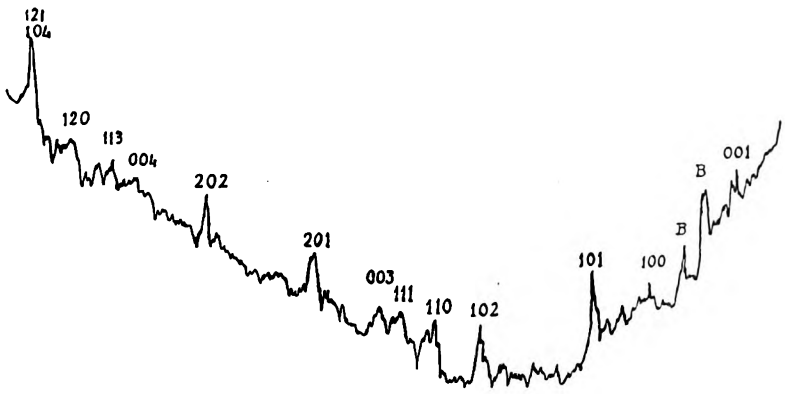


Fig. 1.

Il fotogramma ottenuto potè essere facilmente ordinato nei diagrammi di Hull per il sistema romboedrico, sebbene si presentasse affievolito per l'assorbimento dello strato protettivo di bachelite e reso meno semplice dalla sovrapposizione degli spettri di diffrazione della paraffina e della stessa bachelite. Nella microfotometria di tale fotogramma (fig. 1), ottenuta con il microfotometro di Kipp e Zonen, sono indicate con B le linee dovute a tali sostanze estranee.

Tutte le altre linee del fotogramma si ordinano per un rapporto assiale $c/a = 1.38$.

Nella seguente tabella sono indicati, oltre ai seni degli angoli di riflessione, gli indici delle faccie secondo le notazioni Bravais-Miller, e i valori del lato a della cella elementare che si calcolano dai valori della distanza reticolare d delle singole faccie.

Digitized by Google

hilk	λ	senθ/2	d	a	Ioss.	I calcolata				
						u = 0.22	u = 0.25	u = 0.27	u = 0.28	u = 0.33
0001	α	0.2208	4.375	3.16	md	2399	2136	1702	1979	726
$10\bar{1}0$	α	0.3535	2.733	3.15	d	855	855	855	855	855
$10\bar{1}1$	α	0.414	2.333	3.18	f	4623	5141	5457	5685	6256
0002	—	—	—	—	—	20	12	24	27	143
$10\bar{1}2$	α	0.5519	1.753	3.24	f	3419	3432	3465	3399	3165
$11\bar{2}0$	α	0.6018	1.606	3.17	f	2319	2019	2319	2319	2319
$11\bar{2}1$	α	0.6383	1.514	3.22	md	1953	1605	1293	735	546
0003	α	0.6604	1.463	3.18	md	63	184	316	500	616
$20\bar{2}0$	—	—	—	—	—	165	165	165	165	165
$20\bar{2}1$ / $10\bar{1}3$	α	0.725	1.332	3.22	m	2535	2408	2470	1772	1375
$20\bar{2}2$	α	0.810	1.194	3.23	f	2095	2073	2111	2070	1918
0004	α	0.863	1.12	3.24	d	565	671	600	483	72
$11\bar{2}3$	α	0.878	1.101	3.25	d	462	1370	2337	3741	4607
$12\bar{3}0$	α	0.907	1.066	3.25	d	990	990	990	990	990
$12\bar{3}1$ / $10\bar{1}4$	α	0.932	1.037	3.24	ff	5878	5924	7342	7400	10184

Il volume della cella elementare, assumendo $a = 3.24$ risulta $40{,}64 \times 10^{-24}$ cc. La densità calcolata, supponendo come per altri idrati, che la cella contenga una molecola, risulta 3.398.

Ho assunto come cella elementare la terza parte del prisma esagono di lato a contenente tre molecole $Fe(OH)_2$. Supposto che l'idrato ferroso appartenga alla classe oloedrica del sistema romboedrico, riferendoci alla teoria gruppi di ricoprimento nello spazio, l'unica struttura possibile appare la seguente, definita dalle notazioni 3Di—3 :

Fe: (O O O) O: (1/2 2/3 u) ; (2/3 1/3 —u)

Nella tabella sono indicati i valori delle intensità calcolate per tale struttura, ma per diversi valori del parametro u. L'accordo migliore con le intensità sperimentali (altezza dei massimi nella curva microfotometrica) appare per un valore di $u = 0.27$. Tale accordo inoltre conferma pienamente la struttura supposta.

Digitized by Google

Il parametro degli atomi di ossigeno sembrerebbe quindi alquanto maggiore di quello calcolato da Aminoff[1] per la brucite (u = 0.22), ma accorderebbe con quello calcolato da uno di noi per gli idrati di cadmio, di nichelio e di cobalto.

Nel diagramma della fig. 2 le curve tratteggiate e punteggiate rappresentano le intensità, calcolate per diversi valori di u, mentre la linea a tratto pieno indica l'intensità fotometrata.

Nel calcolo delle intensità si è supposto il potere diffusivo degli atomi

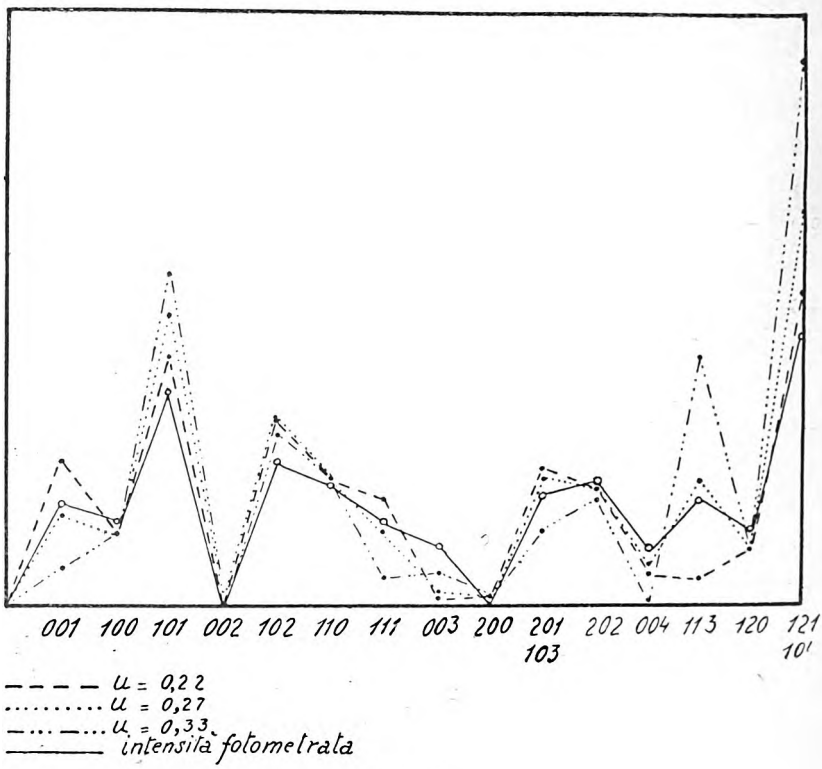


Fig. 2.

proporzionale non al loro numero atomico ma al numero degli elettroni dell'ione. Per il ferro bivalente tale numero è 24, per l'ossigeno è 10, mentre l'ione idrogeno perdendo l'unico elettrone esterno avrebbe un potere diffusivo nullo. Si è inoltre tenuto conto per il calcolo delle intensità dei vari fattori di correzione, dovuti al diametro del preparato e al fattore di polarizzazione, e del diverso fattore di struttura che nel sistema romboedrico presentano certe faccie a eguale distanza reticolare e quindi a riflessioni coincidenti, che differiscono per avere i primi due indici invertiti.

(1) G. Aminoff, « Zeitschr. f. Kristallog. », 56, 506 (1921).

Digitized by Google

Dato l'elevato peso del metallo rispetto a quello dell'ossigeno, l'accordo, che come appare dal diagramma è più che soddisfacente per calcoli di questo genere, non sarebbe forse sufficente a dimostrare la struttura ionica dell'idrato ferroso. Abbiamo perciò osservato come si dispongono gli atomi nel reticolo cristallino in base al loro diametro apparente dedotto da altre strutture note con certezza ed in base ai lavori di Wasastjerna [2].

Supposto il diametro dell'ione $O^{--} = 2.64$ Å e supposta la tangenza degli atomi, risulta per il diametro apparente del $Fe^{++} = 1.88$ Å, valore che si avvicina a quello calcolato da Goldschmidt (1.64) per altri composti ferrosi [3]. I due centri delle sfere occupati dagli atomi di ossigeno distano di 2.81 Å, ossia di ben poco più di quello che è il diametro dell'ione O^{--}. Rimane per l'ione H^{+} lo spazio compreso entro una sfera di circa 0.9 Å di raggio. Per una struttura non ionica, ammettendo rispettivamente che siano 2.52 e 1.20 Å i diametri del ferro e dell'ossigeno, l'utilizzazione dello spazio reticolare appare molto peggiore.

Conclusioni. — Dall'esame con il metodo delle polveri e dallo studio delle intensità fotometrate l'idrato ferroso risulta appartenere cristallograficamente alla classe oloedrica del sistema romboedrico (3Di—3) con una struttura analoga a quella della brucite. La cella elementare contenente una molecola ha le dimensioni $a = 3.24$, $c = 4.47$, $c/a = 1.38$.

La densità calcolata risulta 3.40.

Dal calcolo delle intensità delle singole linee di diffrazione la posizione degli atomi nella cella risulta definita dalle coordinate:

Fe^{++} (O O O) O^{--} : (1/3 2/3 0.27) ; (2/3 1/3 0.73)

La struttura appare ionica.

(2) J. A. Wasastjerna, « Soc. Scient. Fenn., Comm. Phys. Math. » 1°, 38, 22 (1923).

(3) V. M. Goldschmidt, « Geoch. Verteilungsgesetze d. Elem. », 7°, 52, (1926).

Digitized by Google

Biologia. — *Azione del* pH *sugli scambi gassosi di poltiglie muscolari a costante presenza del fosfatione.* Nota del dott. M. COMEL, presentata [1] dal Corrisp. A. HERLITZKA.

In un lavoro che fu oggetto di una precedente comunicazione [2], avevamo studiato il ricambio respiratorio di poltiglie muscolari e di fegato di rane primaverili, immerse in liquidi conservatori equilibrati, a diversa concentrazione degli idrogenioni, alla temperatura di 20°.

Era risultato dai numerosi esperimenti eseguiti, che condizione necessaria per un elevato scambio gassoso dei tessuti, è la concentrazione degli idrogenioni del liquido conservatore decisamente inferiore a quella corrispondente al punto isoelettrico delle proteine muscolari. Il consumo di ossigeno, che era elevato al massimo a un pH corrispondente alla neutralità, o leggermente spostato verso l'alcalinità, si manteneva elevato ancora, per valori di pH spostati verso l'acidità; e ciò fino a un pH = 6.2. Passando da questo pH a un pH = 5.3, si aveva una notevole diminuzione del consumo dell'ossigeno da parte delle poltiglie di muscoli e di fegato. La produzione di anidride carbonica si elevava da pH superiori alla neutralità, fino al pH = 7.15, per rimanere poi all'incirca invariata fino al pH = 6.2. Anch'essa diminuiva passando al valore di pH = 5.3. La diminuzione del consumo di ossigeno e della produzione di anidride carbonica si accentuava in modo notevole assai se il pH veniva abbassato al valore di pH = 4.8; e venendo influenzata la produzione di anidride carbonica, proporzionalmente, in grado minore che il consumo di ossigeno, il quoziente saliva a valori altissimi, specie procedendo a valori ancor più bassi di pH. Al valore più basso studiato, però (pH = 2.97 [3]), si osservava un'ulteriore diminuzione anche dell'anidride carbonica prodotta, con abbassamento del valore del quoziente, che però restava molto alto. Evidentemente, a quel pH, cessati i fenomeni respiratori, l'anidride carbonica proveniva da scissione di carbonati, e da processi di scissione non ossidativi.

Nella discussione dei risultati sperimentali ottenuti, si era di fronte a due possibilità. E cioè, dato che fino a pH = 5.3 si erano usati come liquido conservatore i fosfati, e da pH = 4.8 il citrato e l'acido cloridrico, si poteva pensare che il notevole abbassamento dell'attività respiratoria, osservata a questo pH, si dovesse al venir meno dell'azione specifica del

(1) Nella seduta del 24 aprile 1927.

(2) M. COMEL, *Sull'azione della concentrazione degli idrogenioni sul ricambio respiratorio dei tessuti*, « Rend. R. Acc. d. Lincei », ser. VI, vol. V, p. 307, 1927.

(3) Nella Nota precedente, essendo incorsa una svista, si indicò, invece della cifra 2.97 quale valore di pH, la cifra 1.17; al posto di questa va quindi letta quella.

Digitized by Google

fosfatione, azione cioè di esaltamento del ricambio respiratorio, enunciata da varî AA. In ogni caso, l'inizio della diminuzione degli scambi gassosi si osservava già a pH = 5.3, in presenza dei fosfati. Perciò sembrava più probabile una spiegazione che tenesse conto delle proprietà di ionizzazione delle sostanze proteiche. Appariva chiaro allora che il ricambio respiratorio era possibile solamente quando le proteine fossero allo stato di anioni.

Per dirimere il quesito affacciato da questo dilemma, occorreva ricorrere a liquidi equilibratori a diverso pH, ma a presenza costante del fosfatione. Ciò abbiamo fatto, usando le soluzioni proposte da Jarisch e quelle proposte da Mc Ilvaine, che ne ha determinato elettrometricamente il pH. Le due soluzioni di Mc Ilvaine sono: *a*) una soluzione di $^1/_5$ M di fosfato disodico; *b*) una soluzione di $^1/_{10}$ M di acido citrico, mescolate in varie proporzioni, in modo da avere 20 cc. della miscela. I valori di pH studiati furono i seguenti:

Fosfato	Acido citrico	pH
19.45	0.55	8.0
17.39	2.61	7.0
13.85	6.15	6.4
12.63	7.37	6.0
10.30	9.70	5.0
7.71	12.29	4.0
4.11	15.89	3.0

Le soluzioni preparate da Jarisch consistono in: *a*) una soluzione m/30 di acido fosforico; *b*) una soluzione m/30 di fosfato monosodico; *c*) una soluzione m/30 di fosfato disodico; *d*) una soluzione m/30 di fosfato trisodico.

I valori di pH studiati con queste soluzioni furono i seguenti:

Acido fosforico	Fosfato primario	Fosfato secondario	Fosfato terziario	pH
—	—	9.7	0.3	9.1
—	0.6	9.4	—	8.0
—	3.4	6.6	—	7.1
—	7.0	3.0	—	6.5
—	9.0	1.0	—	5.9
—	9.7	0.3	—	5.3
—	10.0	—	—	4.5
0.1	9.9	—	—	4.1
0.4	9.6	—	—	3.7
1.5	8.5	—	—	3.2

Digitized by Google

Si sperimentò, col metodo già seguìto (microrespirometro di Rabbeno) sui muscoli di varî lotti di rane invernali, del periodo di passaggio e primaverili, alla temperatura di 20°, con durata del periodo respiratorio di 30 minuti.

Riportiamo qui senz'altro, in tre tabelle, i risultati ottenuti con due lotti di rane: il primo, di rane di fine marzo, con le soluzioni di Jarisch (Tabella I); il secondo, di rane di aprile, con le soluzioni di Jarisch (Tabella II) e quelle di Mc Ilvaine (Tabella III). Queste tabelle indicano le medie delle varie serie di esperimenti eseguiti con i varî pH; il consumo di ossigeno e la produzione di anidride carbonica sono sempre indicati in mmc per mg di poltiglia muscolare, e per 30 minuti di periodo respiratorio.

TABELLA I.

Muscoli	Rane del periodo di passaggio			Fosfati Jarisch
Num. di esperim.	pH	O_2	CO_2	CO_2/O_2
8	9.1	0.302	0.254	0.84
8	8.0	0.336	0.287	0.86
12	7.1	0.357	0.319	0.89
8	6.5	0.330	0.285	0.87
8	5.9	0.275	0.278	1.01
8	5.3	0.232	0.217	0.94
4	4.5	0.249	0.239	0.96
8	4.1	0.219	0.203	0.94
8	3.7	0.221	0.224	1.02
8	3.2	0.198	0.193	0.97

TABELLA II.

Rane primaverili		Muscoli	Fosfati Jarisch	
Num. di esperim.	pH	O_2	CO_2	CO_2/O_2
8	9.1	0.371	0.304	0.82
8	8.0	0.353	0.290	0.82
8	7.1	0.396	0.349	0.88
8	6.5	0.332	0.303	0.91
8	5.9	0.276	0.271	0.99
8	5.3	0.257	0.245	0.94
4	4.5	0.249	0.239	0.96
8	4.1	0.241	0.244	1.03
8	3.2	0.225	0.218	0.97

Digitized by Google

TABELLA III.

Rane primaverili		Muscoli	Fosf.-acido citrico	Mc Ilvaine
Num. di esperim.	pH	O_2	CO_2	CO_2/O_2
4	8.0	0.358	0.269	0.75
8	7.0	0 373	0.284	0.76
4	6.4	0.372	0.328	0.88
4	6.0	0.322	0.278	0.86
4	5.0	0.220	0.254	1.14
4	4.0	0.146	0.165	1.13
4	3.0	0.146	0.157	1.08

In questa triplice serie di esperimenti si conferma anzitutto il fatto già notato precedentemente, e cioè la rapida discesa del ricambio respiratorio delle poltiglie coll'abbassarsi del pH del liquido conservatore al di sotto di una cifra prossima al punto isoelettrico delle proteine muscolari, e cioè per valori di pH intorno a 5.

I valori del ricambio aumentano dapprima andando da pH di 9.1 fino a 7.1 per poi diminuire più gradatamente per le soluzioni di soli fosfati, più ripidamente per quelle di fosfati e acido citrico. In ogni modo, i valori al di sotto di un pH = 5.3 rimangono praticamente costanti per le soluzioni di soli fosfati, mentre diminuiscono ancora per quella di fosfati e acido citrico; ma anche in questo caso tra 5 e 4 si ha una brusca caduta. Costruendo le curve dei valori del ricambio in funzione del pH per le soluzioni di soli fosfati, si vede che in esse si hanno due punti di flessione della curva, l'uno corrispondente al massimo (7.1), mentre l'altro segue il passaggio della curva dal ramo discendente a quello praticamente orizzontale, corrispondente al ricambio respiratorio minimo. Tale punto di flessione si ha in corrispondenza del pH = 5.5 circa.

Due ulteriori serie di esperimenti, eseguiti con rane invernali alla temperatura di 30°, confermarono, accentuandolo, questo fatto: le tabelle relative non si riportano qui per amore di brevità.

Esiste dunque una brusca caduta del ricambio respiratorio globale per valori di pH ai quali le proteine verrebbero a trovarsi allo stato di cationi; mentre l'*optimum* si ha intorno alla neutralità, e un ricambio elevato si osserva pure sia spostando il pH verso l'alcalinità (pH = 8 e 9.1) sia verso l'acidità (pH = 6.5 e 6.4); ma in ogni caso a valori di pH decisamente superiori al punto isoelettrico delle proteine muscolari. E poichè questa brusca diminuzione del ricambio gassoso si ottenne con le soluzioni di Ja-

Digitized by Google

risch, contenenti solamente il fosfatione, si conferma quanto supponemmo nel lavoro precedente, che cioè il fattore essenziale del fenomeno osservato era l'aumento della concentrazione degli idrogenioni fino od oltre il punto isoelettrico delle proteine muscolari.

Che però anche al fatto che passando da pH = 5.3 a pH = 4.8 si sostituivano gli ioni del citrato e dell'acido cloridrico al fosfatione, competa una discreta importanza, lo dimostra il fatto che usando le soluzioni di Jarisch non si arriva, nemmeno con i più bassi valori di pH studiati (3.2), a cifre di ricambio sì ridotte quali si ottenevano usando il citrato–acido cloridrico (a pH = 2.97). Lo dimostra pure il fatto che con le soluzioni di Mc Ilvaine (fosfato e acido citrico) si discende a valori di ricambio gassoso più bassi che coi fosfati soli, quantunque più elevati che usando il citrato–acido cloridrico. Il quoziente CO_2/O_2 si mantiene coi fosfati Jarisch intorno all'unità, solo abbassandosi quando il pH sale a valori notevoli di alcalinità, fatto già notato nella Nota precedente e constatato pure con le soluzioni di Mc Ilvaine; esso è dovuto probabilmente a un arresto del ricambio a prodotti intermedi di scissione degli idrati di carbonio, forse imputabile al fatto che la soluzione alcalina fissa in forma di sali questi prodotti intermedi (acido lattico, acido piruvico, ecc.), sottraendoli così alle ulteriori trasformazioni e ossidazioni. Con le soluzioni di Mc Ilvaine poi, si ottiene un notevole innalzamento del quoziente per valori bassi, decisamente acidi di pH (pH = 5.0), fatto pure constatato col sistema citrato — HCl, ma che non si osserva coi fosfati soli, ed è da attribuirsi perciò a scissioni non ossidative dovute alla presenza dei costituenti la miscela regolatrice adoperata e più precisamente all'acido citrico.

Il fatto però che pure a valori notevolmente acidi di pH (pH = 3.2 e 3.0) ottenemmo, in queste ricerche, un ricambio gassoso, è vero assai ridotto, in rapporto a quello constatato con valori di pH intorno alla neutralità, ma pure ancora discreto, fa sorgere il quesito quale sia il pH reale della miscela, quando si sia aggiunta la poltiglia muscolare che per sè stessa rappresenta certo un sistema regolatore della reazione. Per risolvere questo quesito occorre intraprendere determinazioni elettrometriche della concentrazione degli idrogenioni delle miscele liquido equilibratore più poltiglia muscolare, saggiando cioè il pH risultante dall'azione del pH del liquido conservatore su una poltiglia fornita di un proprio pH, nella quale, per il prolungato sminuzzamento, le membrane cellulari sono evidentemente in gran parte distrutte.

N. P.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomi XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). — Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV, V, VI, VII, VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV. (1892-1924).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII, Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. (1892-1924).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI. (1904-1924).

Serie 6ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I.-VI. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-II. (1925-1927).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-III. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I. (1925-1927).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-III. (1925-1927).

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti Adunanze Solenni. Vol. I-III. (1892-1927.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. 12 Volumi.
» » » » » 3 Bollettini.
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.
Annuario 1882-1927.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXXI.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-IV.
Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia. (1908).
Indice degli Atti Accademici (alfabetico per nomi autori) dall'inizio al 1910.

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1927
SERIE 6ª

Rendiconti Scienze fisiche, ecc. Vol. V (1° semestre 1927) in fascicoli bimensili . . . L. 54 —
» » » » Vol. VI (2° » 1927) » » . . . » 54 —
Memorie » » » Vol. II (continuazione) in fascicoli progressivi . . . . prezzi vari
Rendiconti Scienze morali, ecc. Vol. II, in fascicoli trimestrali . . . . . L. 54 —
Memorie » » » Vol. I (continuazione) in fascicoli progressivi . . . . prezzi vari
Notizie degli Scavi, Vol. III (52° dall'inizio) in fascicoli trimestrali . . . . . L. 120 —

Rendiconto adunanza solenne, Vol. III, fascicolo 13 . . . . . L. 8 —
Annuario . . . . . » 4 —
Monumenti antichi, Vol. XXX, ecc. . . . . prezzi vari

N. B. - Le pubblicazioni dell'Accademia sono in vendita presso la Libreria Ulrico Hoepli, Galleria De Cristoforis, Milano (104) e presso le principali Librerie. I prezzi sono franco Roma. È concesso uno sconto ai Librai.

Nelle richieste indicare sempre: la pubblicazione, la serie, il volume e il fascicolo. Le richieste precise e scritte in italiano o in francese potranno essere esaurite più sollecitamente delle altre.

Digitized by Google

RENDICONTI - Maggio 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Fascicolo del 15 maggio 1927 (Anno V)

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

ABETTI G. – Sulle relazioni fra le eruzioni solari e le tempeste magnetiche terrestri Pag. 721
MAJORANA Q. - Su di un nuovo metodo di telefonia ottica con luce ordinaria o con luce ultravioletta 726
ANGELI A. - Sopra le azidi 732
CAMBI L. e SZEGÖ L. - Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro. La reazione fra nitroprussiato e alcali 737

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

BORTOLOTTI E. – Reti di Cebiceff e sistemi coniugati nelle V*n* riemanniane (presentata dal Socio *L. Bianchi*) 741
BOSSOLASCO M. – Sui sistemi di funzioni di Tchebycheff che sono ortogonali (presentata dal Socio *C. Somigliana*) 748
PACELLA G. B. – Sulla ricerca della forma delle onde luminose dall'esame delle frangie d'ombra (pres. dal Socio *A. Garbasso*) 752
COLOMBO B. - Sulle trasformazioni (m, n) che mutano $m + n + 2$ integrali di una equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti in integrali di un'equazione analoga (pres. dal Corrisp. *G. Fubini*) 759
BERWALD L. – Sui differenziali secondi covarianti. (Estratto di una lettera al prof. T. Levi-Civita) (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 763
MOUSKHELICHVILI N. – Sur les orbites périodiques et les lignes géodésiques fermées (pres. dal Socio *L. Tonelli*) 769
WEIL A. – Sul calcolo funzionale lineare (pres. dal Socio *V. Volterra*) 773
KRALL G. - Sulle funzioni di Green a campi pluriconnessi (pre. dal Socio *T. Levi-Civita*) 778
THOMSEN G. – Sopra la meccanica relativistica dei sistemi olonomi (pres. *Id.*) . . »
ID. - Sulla cinematica dei corpi rigidi nella relatività generale (pres. *Id.*) . . . 783
CRUDELI U. – Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali (pres. *Id.*) . . . . . »
DE FINETTI B. - Conservazione e diffusione dei caratteri mendelliani. – I. Caso pamnittico. – II. Caso generale (pres. dal Corrisp. *C. Foà*) 789
BARBIERI U. - Collegamento geodetico del vertice di Andrate alla rete di 1° ordine dello Stato (pres. dal Socio *G. Loria*) 790
FERMI E. - Sul meccanismo dell'emissione nella meccanica ondulatoria (pres. dal Socio *O. M. Corbino*) 795
MALQUORI G. - Il sistema $Fe(NO_3)_3 - Al(NO_3)_3 - H_2O$ a 25° (pres. dal Socio *N. Parravano*) 801
NATTA G. e CASAZZA E. – Struttura cristallina ed atomica dell'idrato ferroso (presentata dal Socio *G. Bruni*) 803
COMEL M. – Azione del *p*H sugli scambi gassosi di poltiglie muscolari a costante presenza del fosfatione (pres. dal Corrisp. *A. Herlitzka*) 808

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° giugno 1927 (Anno V)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Bilancia termoionica.* Nota [1] del Socio Corrispondente A. Lo SURDO.

Le due valvole termioniche rettificatrici L_1 ed L_2 (fig. 1) siano disposte in serie in un circuito nel quale agisce una f. e. m. costante, ed in modo da consentire il passaggio della corrente: la placca della valvola L_2

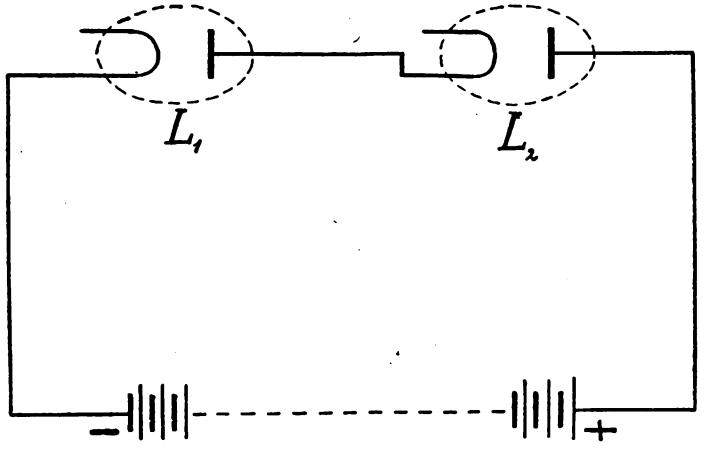


Fig. 1.

è quindi collegata al polo positivo di una pila, ed il filamento con la placca della valvola L_1, il cui filamento è collegato al polo negativo. I due circuiti di accensione, non segnati nella figura, sono separati e comprendono ciascuno una resistenza variabile in modo continuo.

(1) Presentata nella seduta del 6 marzo 1927.

Digitized by Google

Supponiamo che le due valvole siano eguali ed egualmente accese, e che quindi l'intensità della corrente di saturazione abbia per entrambe lo stesso valore, e ammettiamo che la corrente di saturazione sia indipendente dalla differenza di potenziale quando questa superi il minimo V_s necessario per ottenere la saturazione.

Se la differenza di potenziale applicata agli estremi della serie di valvole supera la somma delle differenze di potenziale necessarie per la saturazione delle lampade, cioè, poichè le lampade sono eguali ed egualmente accese, se $V > 2\,V_s$, il tratto del circuito che costituisce il collegamento delle due lampade può assumere indifferentemente qualunque valore del po-

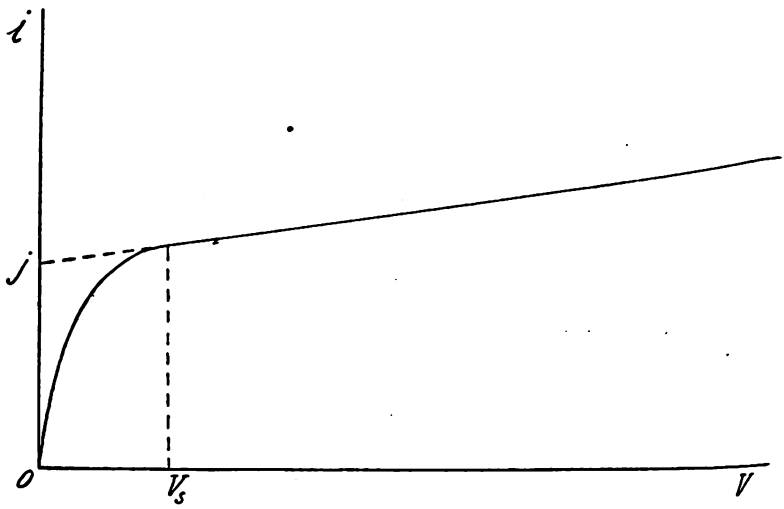


Fig. 2.

tenziale compreso fra V_s e $V - V_s$, se O e V sono i potenziali degli estremi della serie.

Una differenza anche minima nella emissione elettronica dei due filamenti porterebbe però tutto l'eccesso della differenza di potenziale sulla lampada che ha la corrente di saturazione più piccola, e quindi la differenza di potenziale sarebbe sempre approssimativamente V_s su una lampada e $V - V_s$ sull'altra.

Queste condizioni non si verificano in pratica poichè effettivamente l'intensità della corrente nella fase di saturazione, cresce lievemente col crescere della differenza di potenziale applicata fra placca e filamento.

I risultati di molte misure da me fatte su lampade di diverso tipo [1] mi hanno portato a concludere che entro ampi limiti nelle condizioni di

(1) « Rendiconti R. Acc. Lincei », vol. V, serie 6ª, 1° sem., 1927, p. 327.

Digitized by Google

saturazione l'intensità della corrente di una valvola termoionica cresce proporzionalmente alla differenza di potenziale. La curva caratteristica (fig. 2) risulta composta come al solito di tre parti: la prima che corrisponde alla distribuzione delle velocità, la seconda dovuta essenzialmente all'effetto della carica spaziale, e la terza, quella della saturazione, che è rettilinea, ma più o meno inclinata sull'asse V.

Il tratto rettilineo della fase di saturazione può essere rappresentato dall'equazione:

$$i = j + kV \tag{1}$$

dove i indica l'intensità della corrente di saturazione corrispondente alla differenza di potenziale V fra placca e filamento, j e $k = \frac{\delta i}{\delta V}$ sono due co-

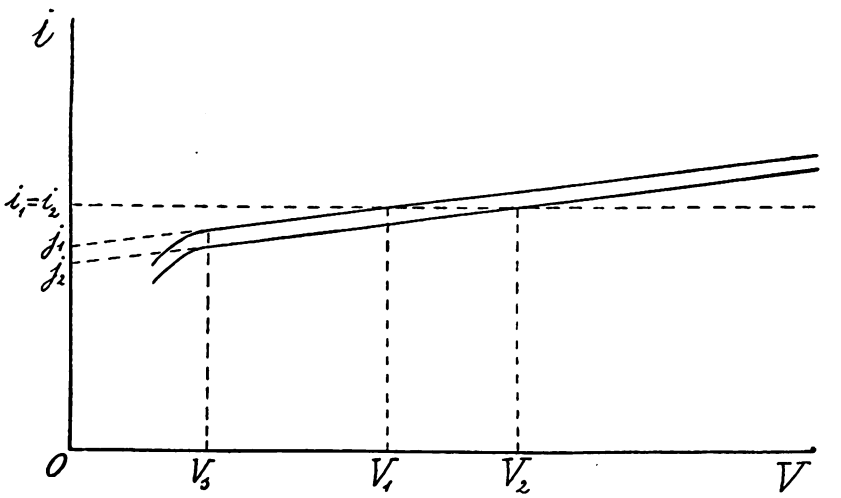


Fig. 3.

stanti. Questa relazione vale per $V > V_s$, cioè se la differenza di potenziale V supera il minimo V_s col quale si inizia la saturazione.

Nel caso delle nostre due valvole, che continuiamo a supporre eguali, si può ammettere che per una piccola differenza di accensione i due tratti rettilinei che rappresentano la saturazione siano paralleli (fig. 3); perciò le equazioni che rappresentano la saturazione nelle due valvole si possono scrivere:

$$\begin{cases} i_1 = j_1 + kV_1 \\ i_2 = j_2 + kV_2 \end{cases} \tag{2}$$

dove i_1 V_1 e i_2 V_2 rappresentano le intensità di corrente e le differenze di potenziale rispettivamente nelle due valvole.

Digitized by Google

Per le due valvole in serie deve essere $i_1 = i_2$, si ottiene quindi

$$j_1 - j_2 = k(V_2 - V_1). \tag{3}$$

Prendendo come zero il potenziale del filamento della valvola L_1, se la differenza di potenziale applicata sulla serie di valvole, che supponiamo costante, si indica con V, il potenziale della placca della valvola L_2 sarà costantemente V.

Il tratto di circuito che collega la placca della prima lampada col filamento della seconda assumerà il potenziale V_m eguale alla differenza di potenziale V_1 fra gli elettrodi della prima valvola.

Dalla (3) si ha, tenendo presente che $V_1 + V_2 = V$:

$$V_m = V_1 = \frac{V}{2} + \frac{j_2 - j_1}{2k}.$$

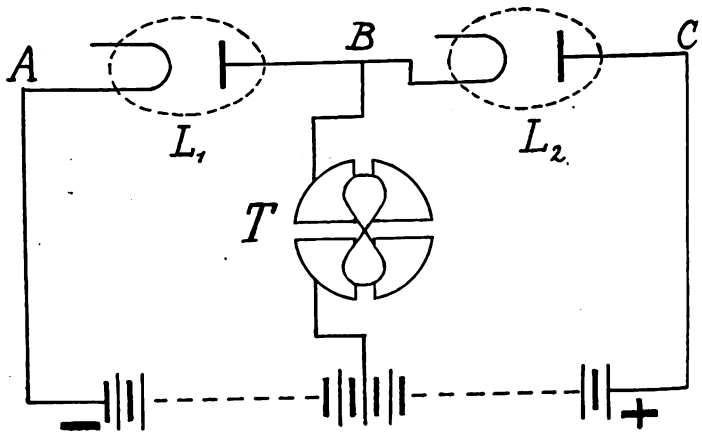


Fig. 4.

Se le due valvole sono accese egualmente:

$$V_m = \frac{V}{2}.$$

Si vede quindi che ad un incremento $\delta i = \delta j = j_2 - j_1$ della corrente di saturazione corrisponde una variazione del potenziale del tratto di collegamento fra le due valvole

$$\delta V_m = \frac{\delta j}{2k}.$$

In questo caso δj è uguale alla differenza costante tra i valori della intensità della corrente di saturazione nelle due valvole sotto la stessa differenza di potenziale.

Digitized by Google

Il coefficiente k ha un valore che è in generale piccolissimo [1]: la variazione del potenziale del tratto di collegamento fra le due valvole

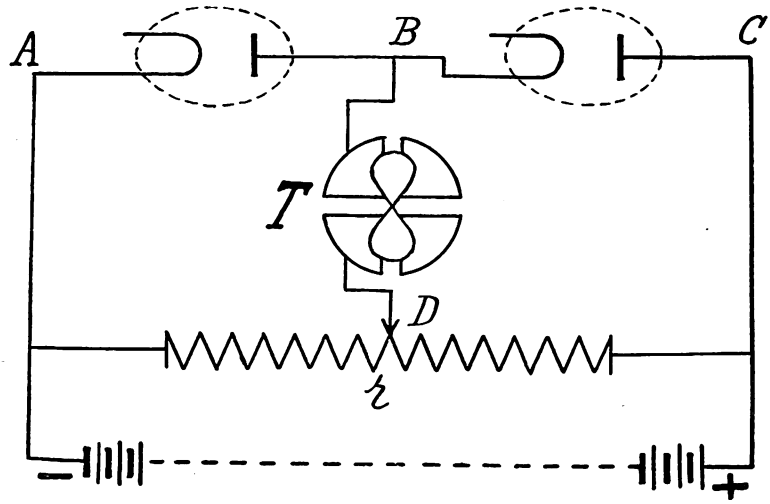


Fig. 5.

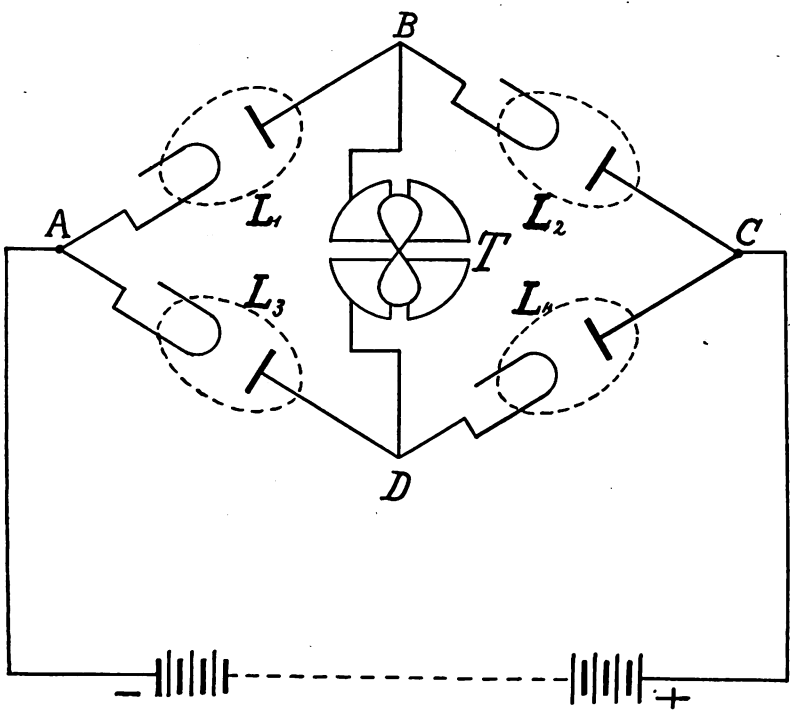


Fig. 6.

(1) Con alcune lampade Marconi, tipo MR4 ho trovato, ad es., che k ha il valore di 10^{-8} (ampère: volta), quando l'accensione limita la corrente di saturazione a circa 1 milliampère.

Digitized by Google

termoioniche può quindi accusare piccolissime variazioni della emissione termionica di una delle due lampade.

Alcune disposizioni fondate su questo principio sono rappresentate nelle figure 4, 5 e 6. Nella prima il punto di mezzo della batteria che alimenta il circuito delle lampade in serie è collegato con una coppia di quadranti dell'elettrometro; l'altra coppia di quadranti è collegata col conduttore che unisce le due lampade. Quando le due lampade sono egualmente accese l'ago dell'elettrometro rimane allo zero; si sposta invece, se varia, anche lievemente, l'emissione elettronica di una delle due lampade.

Nella seconda e nella terza disposizione le due lampade formano i due lati di un quadrilatero che è chiuso da due resistenze o da due altre lampade, rispettivamente.

Chimica-fisica. — *Sul potenziale di ionizzazione del terbio.* Nota [1] del Corrisp. L. Rolla e di G. Piccardi [2].

Disponendo di una certa quantità, per quanto piccola, di perossido di terbio, gentilmente fornitaci dal prof. Hevesy, abbiamo potuto determinare il valore del potenziale di ionizzazione di questo elemento, usando il nostro metodo della fiamma.

Noi abbiamo operato nelle stesse condizioni di esperienza nelle quali determinammo i potenziali di ionizzazione di altri elementi del gruppo delle terre rare e cioè

La , Ce , Pr , Nd , Sa , Gd , Yb [3].

Noi adottammo allora, come elementi di confronto il sodio (che ha una tensione di ionizzazione di 5.13 volta) ed il calcio (che ha una tensione di ionizzazione di 6.09 volta) e trovammo sperimentalmente i seguenti valori di log. K : pel sodio log. K = 13.403, pel calcio log. K = 11.498.

I risultati relativi al terbio sono i seguenti:

Ossido	Perdita in peso per secondo	Deviazione del galvanometro (4)	Atomi per secondo	Elettroni per secondo	K	log. K
Tb_4O_7	$2{,}666.10-6$	2,40	$8{,}53.10^{15}$	$3{,}75.10^{12}$	$1{,}63.10^{10}$	10,212

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale ed inorganica della R. Università di Firenze.

(2) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) Questi «Rendiconti». vol. III, serie 6ª, 1° sem., 410 (1926).

(4) $1° = 2{,}475.10-7$ amp.

Digitized by Google

Confrontando il valore di log. K relativo al terbio con i valori di log. K relativi al sodio ed al calcio, risulta che il terbio presenta un potenziale di ionizzazione di 6.74 volta.

Riportando questo valore sulla curva dei potenziali di ionizzazione da noi costruita [1], si osserva come questo valore si trovi perfettamente a posto su tale curva, nel tratto caratteristico delle terre rare, e come risulti confermato, ancora una volta, che il potenziale di ionizzazione, nell'interno del gruppo stesso, cresca al crescere del numero atomico.

Chimica. — *Sopra i due p-nitroazossibenzoli* [2]. Nota [3] del Socio A. ANGELI e D. BIGIAVI.

Di tutte le coppie di derivati dell'azossibenzolo che finora sono state preparate, nel caso particolare dei p-nitroazossibenzoli [4]:

(*a*) $C_6H_5 \cdot N = \underset{\underset{O}{|}}{N} \cdot C_6H_4 \cdot NO_2$ (*b*) $C_6H_5 \cdot \underset{\underset{O}{||}}{N} = N \cdot C_6H_4NO_2$

uno degli isomeri presenta caratteri differenziali così poco netti da quelli dell'altro da rendere perplessi sulla loro reale diversità. Entrambi fondono a temperature molto vicine, vale a dire (*a*) a 148° e (*b*) a 152°, possiedono quasi il medesimo aspetto, le loro solubilità nei vari solventi sono le stesse; ognuno dei due provoca la cristallizzazione delle soluzioni sovrasature dell'altro, e non sappiamo ancora se per somiglianza delle rispettive forme cristalline ovvero perchè uno contiene come impurezza piccole quantità dell'altro isomero; per di più la forma (*a*) per azione degli ossidanti, e pare anche degli alogeni o degli acidi alogenati, si trasforma nella (*b*); per azione dell'acido solforico concentrato le due forme forniscono l'identico isomero, il p-nitro-p-ossiazobenzolo. Una differenza abbastanza marcata si rende manifesta solamente per azione della luce solare molto intensa: la (*a*) arrossa mentre la (*b*) conserva il suo colore giallognolo.

Rispetto al bromo, operando rapidamente, una delle forme reagisce in modo più pronto dell'altra, ma sempre in modo incompleto, tanto che in ogni caso si arriva a miscugli di prodotti bromurati assieme a sostanza di partenza inalterata, ovvero trasformata. Per questa ragione, ed anche per togliere tutti i dubbi rimasti, abbiamo giudicato opportuno ripetere, operando in altre condizioni, qualcuna delle esperienze già eseguite sul com-

(1) L. ROLLA e G. PICCARDI, «Gazzetta chimica italiana», *56*, 512 (1926).

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Università di Firenze.

(3) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

(4) ANGELI e ALESSANDRI, «Rend. Lincei», *20* (1911), 2° sem., p. 170.

Digitized by Google

portamento dei due isomeri rispetto all'azione dei reattivi che di solito vengono impiegati a questo scopo.

L'acido nitrico, che è stato usato con successo in altri casi, l'abbiamo subito scartato; esso agisce anche da forte ossidante e perciò non è escluso il pericolo di arrivare a prodotti, alcuni dei quali possono essere identici fra di loro anche partendo dalle due forme. Ci siamo quindi limitati allo studio dell'azione del bromo, operando però a temperatura ordinaria.

Conformemente a tutti i dati sperimentali finora raccolti, era da prevedersi che dalla forma (*a*) avessero potuto formarsi derivati bromurati nell'anello:

$$C_6H_5 —$$

mentre nella (*b*) l'alogeno poteva entrare solamente nel residuo

$$— C_6H_4 \cdot NO_2 .$$

Questo è realmente quanto abbiamo potuto constatare.

Grammi 1 del composto (*a*) si pongono in una bevuta a tappo smerigliato insieme a bromo in eccesso e ad una piccolissima quantità di limatura di ferro. La massa dopo 48 ore diviene semifluida e si svolgono vapori di acido bromidrico. Dopo 20 giorni, lasciando a temperatura ambiente di 11-14°, si elimina l'eccesso di bromo con soluzione di bisolfito e si raccoglie su filtro la massa ottenuta, colorata in giallo–marrone. Questo prodotto si fa bollire a ricadere con alcool e si filtra a freddo: si ha così una sostanza colorata in giallo carico che fonde non nettamente intorno a 180° (gr. 1.10); questa viene sospesa in alcool (20 c. c.) e si fa bollire a ricadere, decantando poi la soluzione ancora calda e colorata in giallo aranciato; il residuo si fa nuovamente bollire con 20 c. c. di alcool ed il liquido raffreddato si filtra alla pompa: si hanno così grammi 0.70 di una sostanza cristallina, colorata in giallo-carico, che fonde a 204°. Ricristallizzata da benzolo (15 c. c.) si hanno per raffreddamento aghetti brillanti, intensamente colorati in giallo che fondono a 206-208°, in un liquido giallo-bruno, dal quale si svolgono bollicine di gas se si eleva la temperatura fino a 220°. Il punto di fusione misto con il monobromo-nitroazossibenzolo (p. f. 203°) è fra 170° e 180°.

Gr. 0.2170 dànno c. c. 16.1 di azoto a 14° e 766.

	N trovato	8.76
per $C_{12}H_6O_3N_3Br_3$	N calcolato	8.89 .

Si tratta quindi di un *tribromoderivato* e lo stesso prodotto si ottiene bromurando a freddo il monobromo-nitroazossibenzolo (p. fus. 203°):

$$Br \cdot C_6H_4 \cdot N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} \cdot C_6H_4 \cdot NO_2 .$$

Digitized by Google

Delle acque madri alcooliche, decantate a caldo, per raffreddamento si ha separazione di una sostanza fioccosa, di colore nocciola, che fonde fra 100° e 130°. Cristallizzando da poco benzolo si separano lentamente minuti fiocchetti, costituiti da piccoli aghi, fondenti a 142°; con una seconda purificazione dallo stesso solvente si hanno aghetti giallo-verdastri, che fondono verso 150° in un liquido aranciato.

Gr. 0.0479 dànno c. c 7 a 16° e 749.

	N trovato 17.01
per $C_{12}H_9O_3N_3$	N calcolato 17.28 .

Si tratta senza dubbio del prodotto (*b*) formato probabilmente dal prodotto (*a*), da cui si è partiti, in seguito a trasposizione dell'atomo di ossigeno.

Allo scopo di stabilire la costituzione del tribromo-nitroazossibenzolo ottenuto, gr. 0.3 della sostanza vennero sospesi cm. 8 c. c. di acido cloridrico concentrato e 10 c. c. di acido acetico e bolliti a ricadere con 2 gr. di stagno. Il composto passa in soluzione ed il liquido assume una fugace tinta rosso–arancio per divenire poi incolore. Dopo mezz'ora si concentra in capsula fino a piccolo volume e per aggiunta di acqua si ha separazione di un prodotto bromurato, costituito da aghetti incolori che filtrati e ricristallizzati da ligroina leggera fondono a 80°-84°. Si tratta probabilmente di una miscela di 2 — 4 — 6 tribromoanilina e 2 — 4 di bromoanilina. Il filtrato acquoso acido, dopo eliminazione dello stagno, si concentra, e reso alcalino con carbonato sodico e sovrasaturato con solfato ammonico, si estrae ripetutamente con etere. Evaporato il solvente si ottengono pagliuzze bianche, splendenti che ricristallizzate da benzolo fondono a 137°. Si tratta di *p–fenilendiammina* perchè: 1° il punto di fusione misto con questa base non si abbassa; 2° la soluzione acida, con idrogeno solforato e cloruro ferrico, dà colorazione violacea (violetto di Lauth); 3° la soluzione acida, con cloruro ferrico e anilina, si colora in azzurro. Ciò dimostra che il tribromoderivato ottenuto da (*a*) ha la costituzione:

$$C_6H_2Br_3 \cdot N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} \cdot C_6H_4 \cdot NO_2$$

vale a dire che i tre atomi di bromo sono entrati in uno stesso anello aromatico, conformemente a quanto si era preveduto.

In maniera completamente diversa procede la bromurazione del p-nitroazossibenzolo (*b*).

Grammi 10.8 del prodotto si pongono in vaso con tappo a smeriglio con c. c. 6 di bromo ed una piccola quantità di limatura di ferro. Anche dopo vari giorni non si nota sensibile sviluppo di vapori di acido bromi-

Digitized by Google

drico. Trascorsi 20 giorni, la massa viene trattata con acqua e bisolfito sodico, allo scopo di eliminare l'eccesso di bromo e si ha così un prodotto colorato in giallo-bruno che si fa bollire con 50 c. c. di alcool. Si filtra a freddo e la porzione separatasi (gr. 10.7) viene sciolta in c. c. 40 di benzolo. Dal liquido rosso-scuro si separano aghi sottilissimi, disposti a piccoli fiocchi colorati in giallo e che fondono a 115°-121°. Ricristallizzati altre due volte dallo stesso solvente fondono a 128°-132° e finalmente dopo una nuova ricristallizzazione da molto benzolo si hanno aghetti gialli che fondono a 135°-137° in un liquido giallo-aranciato [1].

Gr. 0.1432 dànno c. c. 16 a 13° e 746:

	N trovato	13.09
per $C_{12}H_8O_3N_3Br$	N calcolato	13.05 .

Nelle acque madri, assieme a parte della sostanza di partenza inalterata, sono contenuti altri prodotti che non abbiamo ulteriormente esaminato.

(1) Cercando di condensare l'aldeide p. toluica con fenilidrossilammina, allo scopo di ottenere il nitrone:

$$\cdot CH_3 \cdot C_6H_4 \cdot CH = N \cdot C_6H_5$$
$$\|$$
$$O$$

lo scorso anno (questi «Rendiconti» *3*, (1926), 1° sem., p. 455), non ci fu possibile pervenire al prodotto voluto. Siccome era inverosimile che un metile in para potesse ostacolare una reazione di indole molto generale, abbiamo indagato a quale causa fosse da incolparsi il risultato negativo e, con nostra sorpresa abbiamo constatato che l'aldeide da noi impiegata, sebbene provenisse da una fabbrica estera famosa, era costituita da un miscuglio che di aldeide ne conteneva forse traccie soltanto. Ripetuta l'esperienza sopra un campione d'aldeide proveniente dalla casa Th. Schuchardt di Görlitz, si pervenne subito al risultato voluto. Gr. 1.09 di fenilidrossilammina si aggiungono a gr. 1.20 di p-toluilaldeide (p. eb. 203°). Il liquido si colora in giallognolo e contemporaneamente diventa torbido. La reazione è accompagnata da sviluppo di calore e dopo poco tempo si ha un magma di cristallini bianco-giallognoli che vengono purificati da alcool, in cui sono molto solubili, e successivamente da ligroina. Si ottengono così piumette biancastre, aderenti alla bevuta, e che fondono a 89°-90° in un liquido giallo-chiaro, che a 215° si decompone con lieve sviluppo di gas.

Gr. 0.1057 dànno c. c. 5.85 a 11° e 764.

	N trovato	6.68
per $C_{14}H_{13}ON$	N calcolato	6.63 .

Il nitrone fuso ricristallizza ma con velocità assai minore dell'isomero:

$$CH_3 \cdot C_6H_4 \cdot N = CH \cdot C_6H_5 \ .$$
$$\|$$
$$O$$

Bollito con acido solforico diluito fornisce aldeide p-toluica.

Digitized by Google

Resta a vedere se questo monobromoderivato, del quale si sta ora studiando la struttura, è identico col prodotto descritto da Valori [1] e che fonde a 127°.

In questo modo rimane stabilita la diversità di comportamento dei due prodotti (*a*) e (*b*) di partenza rispetto all'azione del bromo e quindi confermata anche la loro differente struttura.

Porgiamo i nostri ringraziamenti al sig. capitano dott. Angiolo Polverini che ci fu di valido aiuto nella esecuzione di queste ricerche.

Chimica. — *Nuovi derivati del caucciù.* Nota [2] del Socio G. Bruni e del Dr. E. Geiger [3].

Nonostante i numerosi lavori sulla chimica del caucciù che negli ultimi anni per merito di C. Harries, di H. Staudinger, di R. Pummerer e dei loro allievi hanno arricchito le nostre conoscenze in questo campo così interessante, il numero dei derivati del caucciù finora preparati è assai scarso ed il numero di gruppi atomici o funzioni che si è potuto attaccare alla catena polisoprenica è più scarso ancora. Ciò è dovuto al fatto che il caucciù stesso, come i suoi alogenuri e idroalogenuri in causa della loro natura colloidale e della scarsa solubilità posseggono una assai limitata capacità di reazione.

Il più interessante di tali derivati finora noto è quello ottenuto molti anni or sono da C. O. Weber [4] per azione del fenolo sul bibromuro di caucciù e da lui interpretato come un etere fenolico mentre recentemente H L. Fisher, H. Gray e E. M. Mc Colm [5] hanno dimostrato che esso è un prodotto di condensazione dell'idrocaucciù avente i gruppi fenolici liberi:

$$[-CH_2-\underset{\displaystyle C_6H_4OH}{\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-\cdots\cdots-CH-CH_2-]_x \quad C_6H_4OH$$

Esso è infatti solubile in alcali e reagisce con solfato dimetilico dando un etere dimetilico.

È sopratutto da notare che non si è finora riusciti a produrre derivati di questo idrocarburo contenenti funzioni specifiche nella catena stessa del residuo isoprenico. La sola modificazione di questa catena che sia finora riuscita è la trasformazione in idrocaucciù $(C_5H_{10})_x$ per idrogenazione effet-

(1) Questi « Rendiconti », *21*, (1912), 1° sem., p. 794.
(2) Presentata nella seduta del 1° maggio 1927.
(3) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.
(4) « Berichte d. chem. Ges. », *33*, 779 (1900).
(5) « Jour. Amer. Chem. Soc. », *48*, 1309 (1926).

Digitized by Google

tuata separatamente dai due chimici ultimi nominati, se si prescinde dalle reazioni di isomerizzazione e di ciclizzazione realizzate da varî autori. È ovvio che il preparare derivati del caucciù contenenti il maggior numero possibile di gruppi atomici presenta un notevole interesse e che sopratutto la introduzione di funzioni chetoniche, alcooliche, amminiche, ecc., nella catena stessa del caucciù avrebbe una grandissima importanza.

Noi abbiamo intrapreso una serie di ricerche che può condurre a questi risultati e crediamo utile di esporre i risultati finora ottenuti.

Nel corso delle sue classiche ricerche sui composti azotati, A. Angeli ha in collaborazione con suoi allievi scoperto e chiarito il comportamento del nitrosobenzolo verso i composti non saturi. Così nel 1910 Angeli, Alessandri e Pegna [1] agendo con questo reattivo sul safrolo ottennero un composto $C_{16}H_{13}NO_3$ mentre come prodotto secondario si ottengono considerevoli quantità di azossibenzolo. Essi dimostrarono che la reazione procede nel seguente modo:

$$(CH_2O_2) : C_6H_3 \cdot CH_2 \cdot CH = CH_2 + 2C_6H_5 \cdot NO \rightarrow$$

$$\rightarrow (CH_2O_2) : C_6H_3 - CH = CH - \underset{\displaystyle N(C_6H_5) = O}{CH} \quad + \quad C_6H_5 \cdot NHOH .$$

La fenilidrossilammina formata reagisce con una terza molecola di nitrosobenzolo dando origine ad azossibenzolo. Per azione successiva dell'idrossilammina sul composto giallo ottennero un miscuglio di ossime isomere da cui con nitrito d'amile passarono alla corrispondente aldeide biossimetilencinnamica:

$$(CH_2O_2) : C_6H_3 - CH = CH \cdot CH = NOH \rightarrow (CH_2O_2)_2 : C_6H_3 - CH = CH \cdot CHO,$$

dalla quale ultima con fenilidrossilammina si riottiene il composto primitivo.

Già in quella Nota essi osservano che i vapori di nitrosobenzolo agiscono sulla gomma elastica. Cinque anni più tardi L. Alessandri [2] riprese l'esame di questa reazione ottenendo un prodotto amorfo che si rammollisce fra 135° e 140° avente una composizione approssimativamente corrispondente alla formola $C_{58}H_{61}N_5O_9$; ma non riuscì ad ottenere prodotti di composizione più semplice ed unici e non proseguì poi lo studio di questi prodotti.

L'importanza di questi lavori di Angeli e della sua scuola per la chimica del caucciù sembra essere sfuggita agli autori successivi, quantunque uno di noi (Bruni) abbia richiamata su di essi l'attenzione fin da parecchi anni fa [3]. Egli ha quindi creduto utile riprendere lo studio della reazione del ni-

(1) Questi « Rendiconti » [5], 19, 1° sem., 650 (1910).
(2) Questi « Rendiconti », 5, *24*, 1° sem., 62 (1915).
(3) Questi « Rendiconti », 5, *30*, 1° sem., p. (1921).

Digitized by Google

trosobenzolo col caucciù ed estenderlo anche ad altri numerosi nitrosoderivati, e, ciò sia per chiarire questo argomento interessante in sè, sia collo scopo di trovare una via che conduca all'obbiettivo suaccennato.

La reazione fra nitrosobenzolo e caucciù riesce facilmente quando si mescolino soluzioni benzoliche dei due corpi nella proporzione di 3 mol. C_6H_5NO per 1 radicale C_5H_8, e si riscaldino per 15′ a bagno-maria. La soluzione passa dal verde attraverso ad un giallastro al bruno rosso. Versandola dopo raffreddamento in etere di petrolio si ottiene una sostanza fioccosa che analizzata ha dato i numeri corrispondenti alla formola $C_{11}H_{11}ON$ e che scaldata si scompone a 135°-140°.

Per evaporazione dell'etere di petrolio si ottiene una forte quantità di azossibenzolo p. f. 35°. Il prodotto giallo si ottiene con rendimenti dal 94 al 98 % del teorico.

La sua formazione può quindi costituire un metodo per la determinazione quantitativa del caucciù greggio, preferibile agli altri finora proposti.

Questo prodotto contiene ancora un doppio legame. Infatti esso somma facilmente due atomi di bromo dando un derivato della composizione $C_{11}O_{11}ONBr_2$, corrispondente alla formola:

$$[= C_6H_5Br_2 : NO \cdot C_6H_5]_x .$$

Questo fatto e la formazione di azossibenzolo, indice sicuro della eliminazione di fenilidrossilammina, dimostrano che la reazione procede esattamente secondo lo schema di Angeli:

$$[-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}=CH-CH_2-] \quad + \quad 2C_6H_5\cdot NO \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad [-CH=\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}-\underset{\displaystyle N=O}{\overset{|}{C}}-CH_2-] \quad + \quad C_6H_5\cdot NHOH \; ;$$

$$\underset{\displaystyle C_6H_5}{|}$$

$$C_6H_5\cdot NHOH \quad + \quad C_6H_5\cdot NO \quad \rightarrow \quad C_6H_5\cdot N=\underset{\displaystyle O}{\overset{\|}{N}}-C_6H_5 \quad + \quad H_2O \; .$$

Il prodotto ottenuto contiene quindi la catena dell'isocaucciù ed è un *nitrone dell'isocaucciù*. Come formola alternativa si potrebbe prendere anche l'altra:

$$[-CH_2-\underset{\displaystyle CH_2}{\overset{\|}{C}}-\underset{\displaystyle N=O}{\overset{|}{C}}-CH_2] \; .$$

$$\underset{\displaystyle C_6H_5}{|}$$

Digitized by Google

La stessa reazione si ottiene *operando*, invece che su una soluzione benzolica di caucciù, *sul lattice di Hevea brasiliensis* diluito con piridina con soluzione di nitrosobenzolo in piridina. Il prodotto ha la stessa composizione chimica e differisce solo leggermente nelle solubilità. Per quanto ci risulta *è il primo caso in cui un derivato del caucciù sia stato ottenuto direttamente dal lattice.*

Il prodotto così preparato è colloidato; esaminato coi raggi X non ha dato fotogrammi che indichino struttura cristallina nemmeno molto minuta.

Abbiamo poi esteso la reazione agli omologhi del nitrosobenzolo. Essa procede allo stesso modo; abbiamo quindi ottenuto dagli o-, m-, e p. nitroso-toluolo i corrispondenti derivati: $[= C_5H_6 : NO \cdot C_6H_4 \cdot CH_3]_x$.

Come era da attendersi i nitrosofenoli non reagiscono nel modo suddescritto, poichè essi non sono veri nitrosoderivati, ma si comportano come chinonossime $O : C_6H_4 : NOH$. Viceversa l'etere metilico dell'o. nitrosofenolo, l'o. nitrosoanisolo $CH_3O \cdot C_6H_4 \cdot NO$, in cui la forma tautomera chinonossimica non è possibile, reagisce come il nitrosobenzolo e dà il composto: $[= C_5H_6 : NO \cdot C_6H_4 \cdot OCH_3]_x$.

Più interessante ancora è il prodotto che si ottiene facendo reagire sul caucciù l'etere etilico dell'acido o. nitrosobenzoico, ottenuto col classico metodo di Ciamician e Silber e cioè esponendo alla luce o. nitrobenzaldeide in soluzione alcoolica. Anche in questo caso la reazione procede come nei precedenti e cioè il nitrosoderivato deve essere impiegato in ragione di 3 mol. per 1 residuo isoprenico e si ha formazione di azossibenzolo corrispondente a 2 mol. Dal prodotto di condensazione così ottenuto per successivo trattamento con etilato sodico e acidificazione con ac. cloridrico si precipita l'acido corrispondente:

$$[= C_5H_6 : NO \cdot C_6H_4 \cdot COOC_2H_5]_x \rightarrow [= C_5H_6 : NO \cdot C_6H_4 \cdot COOH]_x .$$

Questo acido, insolubile in acqua, presenta, come tutti i derivati precedenti il carattere colloidale. Esso è però facilmente solubile negli alcali acquosi e le soluzioni così ottenute hanno carattere di vere soluzioni saline. Abbiamo così un caso tipico di elettrolita colloidale avente un anione colloide e i cationi molecolarmente dispersi:

$$[= C_5H_6 : NO \cdot C_6H_4 \cdot COOK]_x \rightleftarrows [= C_5H_6 : NO \cdot C_6H_4 \cdot CO\bar{O}]_x + x\,K^+ .$$

Abbiamo dopociò proceduto ad esaminare il modo di agire di altri nitrosoderivati e precisamente delle nitrobasi aromatiche: p. nitrosodimetilanilina, p. nitrosomonometilanilina, p. nitrosodifenilammina, p. nitroso, o. toluidina, per le quali è concordemente ammessa oggi la struttura di veri nitrosoderivati, mentre in passato si ammetteva la possibilità di una strut-

Digitized by Google

tura chinonica. La natura di vero nitrosoderivato è stata dimostrata per la p. nitrosodietilanilina ventitrè anni or sono indipendentemente da uno di noi in base all'isomorfismo colla p. nitrodietilanilina [1] e da Angeli e Velardi in base al comportamento chimico [2].

Queste nitrosobasi reagiscono pure facilmente col caucciù. Sul loro comportamento riferiremo in una prossima Nota.

Abbiamo esteso queste reazioni anche alla guttapercha; esse procedono come col caucciù. Abbiamo così preparato il prodotto di condensazione col nitrosobenzolo o nitrone dell'isoguttapercha ed il suo dibromuro.

L'azione della idrossilammina non ci è riuscita sui nitrosocorpi ottenuti e non siamo quindi riusciti a preparare le ossime corrispondenti come aveva fatto Angeli dal derivato del safrolo.

Ci è invece riuscita la preparazione dei corrispondenti fenilidrazoni per azione della fenilidrazina libera, sul prodotto di condensazione del caucciù con nitrosobenzolo. La reazione procede con eliminazione di fenilidrossilammina:

$$[-CH=C(CH_3)-C(=N(C_6H_5)\rightarrow O)-CH_2-] + C_6H_5\cdot NH\cdot NH_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow [-CH=C(CH_3)-C(=NNH\cdot C_6H_5)-CH_2-] + C_6H_5\cdot NHOH .$$

Non vi è bisogno di segnalare l'importanza del prodotto così ottenuto: esso è il *fenilidrazone di un chetone contenente il carbonile nella catena del caucciù* (isocaucciù), che proponiamo di chiamare *caucciione.*

Questo fenilidrazone apre la via alla preparazione del corrispondente chetone libero ed attraverso esso ad altri derivati contenenti funzioni caratteristiche nella catena isoprenica, oppure per riduzione si potrà tentare da essi la preparazione dell'amminocaucciù finora mai ottenuto. Queste ricerche saranno continuate in questo senso.

Resta da esaminare se e quale relazione esista fra i fatti esposti e la influenza accelerante che i nitrosoderivati esercitano sulla vulcanizzazione, argomento che sarà fra poco trattato da uno di noi (Bruni).

Si riassumono nel quadro seguente i vari derivati preparati finora ottenuti:

(1) G. Bruni, questi «Rendiconti», 5, *13*, 1° sem., 572 (1904).
(2) C. Velardi, «Gazz. chim. ital.», *34*, 2° sem., 66 (1904).

Digitized by Google

I. — *Nitroni dell'isocaucciù*: $(= C_5H_6 : NO \cdot C_6H_4 \cdot R)_x$:

Caucciù-nitrosobenzolo . . . . . p. scomp. 140°
- $\xrightarrow{Br_2}$ Bibromuro
- $\xrightarrow{C_6H_5NH \cdot NH_2}$ Fenilidrazone p. scomp. 140°

Caucciù-o. nitrosotoluolo

» -m. »

» -p. »

» -o. nitrosoanisolo.

» -o. nitrosobenzoato etilico $\xrightarrow{NaOC_2H_5}$ caucciù - acido o. nitroso-benzoico p. scomp. ca. 100°

II. — *Nitroni dell'isoguttapercha*:

Guttapercha-nitrosobenzolo.

Chimica. — *I solfati doppî dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. – VIII. Solfati doppi di cerio (ceroso) e di sodio* [1]. Nota [2] del Socio F. ZAMBONINI e della Dott.ssa S. RESTAINO.

Continuando le nostre precedenti ricerche [3], esporremo, nella presente Nota, i risultati ottenuti dallo studio, per l'isoterma di 25°, della parte del sistema ternario $Ce_2(SO_4)_3 — Na_2SO_4 — H_2O$, che interessa le nostre ricerche.

Almeno per quanto è a nostra conoscenza, finora è stato descritto un solo solfato doppio di cerio ceroso e sodio, al quale è stata assegnata la formula $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Na_2SO_4 \cdot 2H_2O$ ossia 1 — 1 — 2. Beringer [4], Czudnowicz [5] e Jolin [6] ne hanno dato le analisi seguenti:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 24 aprile 1927.

(3) Cfr. le Note di ZAMBONINI e CAROBBI, ZAMBONINI e CAGLIOTI, ZAMBONINI e RESTAINO, ZAMBONINI e STOLFI, pubblicate nei «Rendiconti» di questa Accademia a partire dal 2° semestre 1924.

(4) «Ann. Pharm.», XLII, 134.

(5) «J. prakt. Chem.», 1860, LXXX, 16.

(6) «Bull. Soc. Chim.», 1874 [2] XXI, 533.

Digitized by Google

	Beringer	Czudnowicz	Jolin	Teoria per 1 — 1 — 2
Na_2O		8.17		8.30
Ce_2O_3	41.25	42.85	44.17	43.99
SO_3	45.84	42.88	42.63	42.89
H_2O		5.59	5.40	4.82

Come si vede, l'analisi di Beringer si allontana molto dai valori richiesti dalla formula $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Na_2SO_4 \cdot 2H_2O$, tanto che P. T. Cleve [1] ha fatto notaee che i numeri trovati dal Beringer si accordano meglio con la formula $2Ce_2(SO_4)_3 \cdot 3Na_2SO_4$. La supposizione del Cleve non è, però, controllabile rigorosamente, perchè il Beringer non determinò il sodio, e non si può, perciò, sapere se il sale doppio anilizzato dal Beringer era anidro, come ammette il Cleve, ovvero idrato. Non è improbabile che si sia trattato di un qualche miscuglio, per esempio dei due composti 1 — 1 — 2 e 4 — 5 — 8, ambedue ottenuti da noi, ma, in ogni caso, il valore dato per SO_3 è troppo alto.

In tempi più recenti, il Barre [2] ha studiato la solubilità del solfato ceroso nelle soluzioni di solfato di sodio, alla temperatura di 19°, ed è arrivato alla conclusione che si forma un solo composto, e, precisamente, 1 — 1 — 2.

Le nostre indagini sono state eseguite nel solito modo, ed i risultati ottenuti si trovano riuniti nella seguente

TABELLA I.

Numero dell'esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti il corpo di fondo
	Na_2SO_4	$Ce_2(SO_4)_3$	H_2O	$\frac{Na_2SO_4}{H_2O}$	Ce	SO_4	H_2O	Na	$\frac{Ce_2(SO_4)_3}{Na_2SO_4}$	
1	15.44	—	84.56	0.18	29.43	52 14	5.84	12.59	1.84	4 — 5 — 8 + Na_2SO_4
2	15.25	—	84.75	0.18	33.65	52.11	4.18	10.06	2.63	
3	13.75	—	86.25	0.16	35.63	52.30	4.68	7.39	3.11	
4	12.41	—	87.59	0.14	35.52	52.01	4.41	8.06	3.14	
5	10.95	—	89.05	0.12	35.77	52.03	4.65	7.55	3 21	
6	10.79	—	89.21	0 12	35.76	52.04	4.72	7.48	3.20	4 — 5 — 8
7	9.99	—	90.01	0.11	35.82	51.93	4.56	7 69	3.24	
8	9.10	—	90.90	0.10	35.89	51.99	4.98	7.14	3.25	
9	7.51	—	92.49	0.08	35.87	51.95	4.70	7.48	3.25	
10	5.50	—	94.50	0 06	37.27	51.53	4.62	6.65	3.83	
11	1.92	—	98.08	0.02	37.28	51.58	4.98	6.16	3.85	1 — 1 — 2
12	0.14	0.35	99.51	0.001	37.26	51.53	4.76	6.45	3.86	
13	0.14	3.59	96.27	0.001	37.42	51.51	4.87	6.20	3.89	1 — 1 — 2 + $Ce_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$
14	1.13	4.04	95.83	0.001	37.59	51.48	4.98	5.95	4.00	

(1) Nello *Handbuch der anorganischen Chemie* di GMELIN-KRAUT 6ª Aufl. 1886, II, 1ª Abt. 526. Il Kraut nella prefazione dice esplicitamente che i capitoli dedicati ai metalli delle terre rare sono stati compilati dal Cleve.

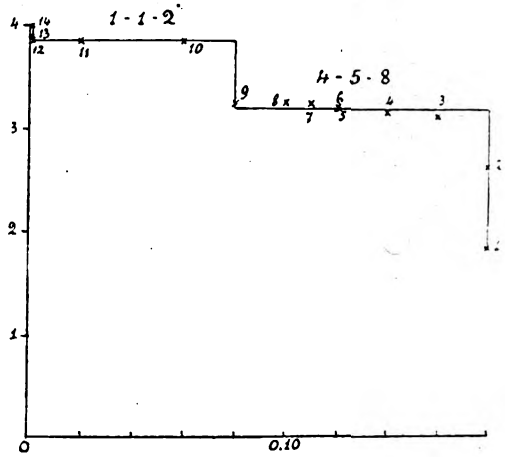
(2) «Compt. rend.», 1910, CLI, 871.

Digitized by Google

Composizione teorica dei composti ottenuti.

	Ce	Na	SO_3	H_2O
$Ce_2(SO_4)_3 \cdot Na_2SO_4 \cdot 2H_2O$	37.56	6.16	51.46	4.82
$4Ce_2(SO_4)_3 \cdot 5Na_2SO_4 \cdot 8H_2O$	35.86	7.35	52.19	4.65

Dalla Tabella I e dalla fig. 1 emerge chiaramente che due soli composti si formano, a 25°, fra il solfato di cerio e il solfato di sodio, nelle nostre condizioni sperimentali. I due solfati doppi ottenuti sono $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Na_2 \cdot SO_4 \cdot 2H_2O$ o 1 — 1 — 2 e $4Ce_2(SO_4)_3 \cdot 5Na_2SO_4 \cdot 8H_2O$ o 4 — 5 — 8. Di questi, come abbiamo già veduto, il primo è noto da lungo tempo, mentre il secondo, 4 — 5 — 8, non era stato ancora descritto. Va ricordato che lo stesso com-



posto 4 — 5 — 8 è stato già osservato, da Zambonini e Carobbi [1] nel sistema $Nd_2(SO_4)_3$ — Na_2SO_4 — H_2O, mentre, invece, fra solfato di lantanio e solfato sodico [2] non si è constatata che la formazione di un unico sale sodico: 1 — 1 — 2. Si rinnova anche qui, in modo evidente, l'influenza della natura del metallo raro sulla formazione dei solfati doppi con i solfati dei metalli alcalini.

I due composti $Ce_2(SO_4)_3 \cdot Na_2SO_4 \cdot 2H_2O$ e $4Ce_2(SO_4)_3 \cdot 5Na_2SO_4 \cdot 8H_2O$ hanno una composizione molto vicina, e legittimo appariva il dubbio che il secondo solfato doppio non fosse altro che quello a formula semplice 1 — 1 — 2, inquinato da un po' di solfato sodico. Un esame accurato dei risultati sperimentali dimostra, però, che il sale doppio 4 — 5 — 8 esiste davvero. Se così non fosse, rimarrebbe inesplicabile la costanza di compo-

(1) Zambonini e Carobbi, «Rend. R. Acc. Lincei», (6°) 1925, II, 2° sem., 374.
(2) Zambonini e Carobbi, «Rend. R. Acc. Lincei», (6°) 1925, II, 2° sem., p. 300.

Digitized by Google

sizione del corpo di fondo, rimasto in contatto per diversi giorni con soluzioni contenenti quantità notevolmente diverse di solfato sodico (da 7.5 a 13.7 in 100 grammi di soluzione). Se l'eccesso di solfato sodico rispetto alla formula 1 — 1 — 2 rappresentasse un semplice inquinamento meccanico, la sua quantità non potrebbe, evidentemente, restare costante, al variare della composizione della fase liquida. Ad ogni modo, si è fatta un'altra esperienza. Poichè il solfato sodico ha una solubilità molto più considerevole del solfato doppio 1 — 1 — 2, uno dei corpi di fondo che era stato già asciugato con ogni cura, in modo da privarlo per quanto era possibile dalle acque madri, fu diviso in due parti: una, fu analizzata senza ulteriori trattamenti, l'altra, invece, fu ripetutamente compressa fra carta bibula bagnata, la quale avrebbe dovuto sciogliere, per lo meno in parte, il solfato sodico eventualmente commisto: Orbene, la composizione di questa seconda porzione è risultata identica a quella della prima, il che fa pensare che solfato sodico commisto non fosse presente.

Ambedue i prodotti ottenuti sono delle polveri bianche, microcristalline, le quali al microscopio risultano costituite da minutissimi cristalletti indeterminabili. Il solfato doppio 1 — 1 — 2 è stabile, puro, a 25°, in contatto con soluzioni che contengono da 0.14 % Na_2SO_4 e 0.35 % $Ce_2(SO_4)_3$ a 7 % circa di Na_2SO_4. L'altro composto 4 — 5 — 8, invece, è stabile, da solo, sempre a 25°, in contatto con soluzioni prive praticamente di cerio, ma che contengono, però, forti quantità di solfato sodico: da 7.5 circa a 15 % circa.

Secondo Barre (loc. cit.), anche quando la soluzione contiene 7.71 Na_2SO_4 per 100 parti di acqua, vi è ancora del solfato ceroso disciolto, per quanto in piccola quantità, e, precisamente, 0.0037 (sempre per 100 parti di acqua). Noi, invece, abbiamo trovato che soluzioni con 1.92 Na_2SO_4 in 100 grammi di soluzione sono *praticamente* prive di cerio. È certo, che le nostre soluzioni indicate come libere di solfato ceroso, non potevano contenere che tutt'al più tracce minime di questo composto. Circa il disaccordo fra i nostri risultati e quelli di Barre non possiamo dire altro che noi ci siamo perfettamente assicurati di avere ogni volta raggiunto l'equilibrio. D'altra parte, i dati di solubilità riportati nel lavoro del Barre, causa la ristrettezza di spazio imposta dai « Comptes-rendus », sono molto sommari, e mancano anche di indicazioni necessarie, come quelle, per esempio, della natura dei corpi di fondo ai quali si riferiscono le determinazioni.

Ambedue i composti da noi preparati perdono l'acqua solo a temperatura abbastanza elevata. Già gli antichi osservatori ricordati avevano notato che l'acqua non viene eliminata, nel sale 1 — 1 — 2, nè sull'acido solforico, nè a 100°. Noi possiamo pienamente confermare questi risultati. Tutti e due i composti da noi ottenuti a 110° non perdono che pochissimo di peso (0.68 % il sale 4 — 5 — 8 e 0.76 % il composto 1 — 1 — 2). A 250° la perdita di peso, anche prolungando per diverse ore il riscaldamento, non

Digitized by Google

sale che a 2.78 % (4 — 5 — 8) e a 3.14 % (1 — 1 — 2). Soltanto a 400° la disidratazione è completa.

Come abbiamo già verificato in altri sistemi analoghi, anche nel nostro il solfato sodico, almeno nelle esperienze 1 — 2, si è separato allo stato anidro e non di decaidrato.

Ci è grato ringraziare la Dott.ssa Triventi per l'aiuto datoci nella esecuzione delle analisi.

Chimica. — *I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini.* - X. *Solfati di neodimio e ammonio* [1]. Nota [2] del Socio F. ZAMBONINI e della dott.ssa A. STOLFI.

Continuando le nostre precedenti ricerche [3], daremo conto, nel presente scritto, dei risultati ottenuti dallo studio della parte, per noi interessante, del sistema ternario $Nd_2(SO_4)_3$ — $(NH_4)_2SO_4$ — H_2O, come al solito, sempre per l'isoterma di 25°.

Solfati doppî di neodimio ed ammonio non sembra sieno stati particolarmente descritti: noto da lungo tempo, invece, è un solfato doppio ottoidrato di didimio ed ammonio, $Di_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$, preparato la prima volta da Marignac, e, più tardi, da Cleve, che ne studiò anche la disidratazione, stabilendo che delle otto molecole di acqua di cristallizzazione del composto sei, come aveva, del resto, già trovato Marignac, vengono eliminate a 100°, e le altre due, invece, a 120°. Marignac constatò l'isomorfismo del sale doppio in questione con quello corrispondente di lantanio. Morton ne determinò accuratamente le forme cristalline e le proprietà ottiche.

Abbiamo cominciato col cercare di stabilire quali composti si formavano, eventualmente in cristallini abbastanza grandi da poter essere determinati, per evaporazione alla temperatura ambiente di soluzioni contenenti solfato di neodimio e solfato di ammonio nei rapporti molecolari 1 : 1, 1 : 3, 1 : 5. Da tutte e tre le soluzioni si ottennero dei depositi cristallini, di un bel colore violaceo, che all'analisi chimica risultarono essere tutti costituiti dal sale doppio $Nd_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$ o 1 — 1 — 8, come dimostrano i seguenti valori:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) Cfr. le Note di ZAMBONINI e CAROBBI, ZAMBONINI e CAGLIOTI, ZAMBONINI e RESTAINO, ZAMBONINI e STOLFI pubblicate nei « Rendiconti » di questa Accademia a partire dal 2° semestre 1924.

Digitized by Google

	Cristalli ottenuti per evaporazione della soluzione			Valori teorici per il composto
	1 : 1	1 : 3	1 : 5	1 — 1 — 8
Nd	33.70	33.90	33.92	33.83
NH_4	4.28	4.30	4.38	4.23
SO_4	45.20	45.14	45.38	45.04
H_2O (diff.)	16.82	16.66	16.70	16.89

Il peso specifico, determinato col metodo della sospensione, ha dato 2.592 per i cristalli ottenuti dalla soluzione 1 : 1; 2.588 per quelli separatisi dalla soluzione 1 : 3, e, finalmente, 2.590 per quelli depositati dalla soluzione 1 : 5. Come media, risulta 2.590. Essendo il peso molecolare eguale a 853.09, ne segue, per il volume molecolare, il valore di 329.4.

L'esame cristallografico e microscopico ha confermato che in tutti i casi si è sempre formato lo stesso composto monoclino, perfettamente corrispondente al tipo 1 — 1 — 8, già noto per il lantanio-ammonio, per il cerio-ammonio, per il didimio–ammonio, per il neodimio-tallio (talloso).

I cristalli raggiungono talvolta anche due millimetri nella loro maggiore dimensione, generalmente sono molto più piccoli.

Come al solito, non esistono che le due zone [001] e [100], e le faccie che in esse giacciono sono, per lo più, striate più o meno profondamente nella direzione dell'asse della zona alla quale appartengono. Soltanto { 010 } ha, di solito, faccie piane, senza accenni a striature. Come già abbiamo avuto occasione di notare in precedenti lavori, anche i cristalli del solfato doppio di neodimio–ammonio 1 — 1 — 8 sono caratterizzati dal fatto che le faccie del pinacoide { 100 } e dei prismi { h k 0 } sono spesso sostituiti da faccie vicinali. Così, per es., in un cristallo, nella zona { 001 } non vi erano che le due faccie del pinacoide { 010 }, e quattro faccette, sostituenti le due del pinacoide { 100 }, assolutamente assente.

Si sono misurati i seguenti angoli:

$$(010) : (hko) = 88^\circ\ 22'$$
$$(010) : (h_1\bar{k}_1 0) = 91\ \ 28$$
$$(010) : (\bar{h}_2\bar{k}_2 0) = 92\ \ 44$$
$$(010) : (\bar{h}_3 k_3 0) = 86\ \ 41$$
$$(hko) : (h_1\bar{k}_1 0) = 3\ \ 6$$
$$(\bar{h}_2\bar{k}_2 0) : (\bar{h}_3 k_3 0) = 6\ \ 3$$

Come si vede, le due faccie (hko) e $(h_1\bar{k}_1 0)$ sono, praticamente, ugualmente inclinate su (100), e possono, quindi, considerarsi appartenenti ad

Digitized by Google

uno stesso prisma (hko), ma non può dirsi altrettanto per le faccie (h_1k_1o) e $(\bar{h}_2\bar{k}_2o)$, che formano con (010), e, rispettivamente, con $(0\bar{1}0)$, angoli notevolmente diversi.

In un altro cristallo, sempre nella zona [001], si sono osservate varie faccette, delle quali una ha la posizione di (100), mentre le altre appartengono a varî (hko):

$$\begin{aligned}(010) &: (hko) = 72^\circ\,33' \text{ (prossima a (110))}\\ (010) &: (h_1k_1o) = 87\ 33\\ (010) &: (100) = 90\ 10\\ (010) &: (h_2\bar{k}_2o) = 84\ 5\end{aligned}$$

In un terzo cristallo, nella zona [001] si sono misurati gli angoli seguenti:

$$\begin{aligned}(010) &: (hko) = 80^\circ\,52'\\ &\quad (h_1k_1o) = 82\ 18\\ &\quad (h_2k_2o) = 84\ 15\\ (0\bar{1}0) &: (h_2\bar{k}_2o) = 84\ 2\\ &\quad (h_1\bar{k}_1o) = 82\ 27\\ &\quad (h_3\bar{k}_3o) = 75\ 33\end{aligned}$$

Altri cristalli hanno dato risultati analoghi, che è inutile riferire. Certamente, data la variabilità di posizione delle faccette osservate nella zona [001], non è possibile cercare di utilizzare i valori angolari misurati per il calcolo delle costanti. Si può soltanto dire che le faccette (h_2k_2o) del secondo e del terzo cristallo si possono prendere come (310).

Anche la zona [100] è notevolmente disturbata, ed in essa, oltre le faccie del pinacoide {010} non abbiamo osservato che quelle del prisma {011}. Alcune di esse sono piane e liscie, altre alquanto striate parallelamente all'asse *a*. Frequenti, però, sono delle vicinali abbastanza nitide, che formano angoli di circa 2° con la faccia tipica più vicina. Per l'angolo $(011) : (0\bar{1}1)$ delle buone misure hanno dato 85° 1′, 85° 40′, 85° 45′, 85° 51′.

I cristalli macroscopici sono, di solito, piuttosto tozzi.

Altri cristalli, molto belli e che raggiungono anche 4 mm. nella loro maggiore dimensione, sono stati ottenuti sciogliendo in acqua varî depositi, costituiti dal sale doppio 1 — 1 — 8, e concentrando a bagno maria, fino ad incipiente cristallizzazione, la soluzione, che fu, poi, abbandonata a se stessa, alla temperatura dell'ambiente, che raggiunse in alcune ore.

(1) *Solfati di cerio (ceroso) e ammonio.* « Rend. R. Accad. Nazionale dei Lincei », [6ª], III, 1° sem., p. 178 (1926).

Digitized by Google

I cristalli formatisi erano in parte del tipo di quelli di cerio-ammonio 1 — 1 — 8 rappresentati nella fig. 3 del lavoro di uno di noi con la dottoressa S. Restaino [1]; altri, invece, più frequenti, si avvicinavano alla fig. 2 dello stesso lavoro, erano, cioè allungati secondo uno degli spigoli di combinazione del pinacoide { 100 } col prisma { 011 }. Alcuni di essi erano più o meno schiacciati parallelamente ad una coppia di faccie parallele del prisma { 011 }. Finalmente, un terzo tipo più raro era rappresentato da cristalli prismatici secondo l'asse *a*: nella zona 100 vi era il pinacoide { 010 }, subordinato, ed i due prismi { 011 } e { 012 }, non osservato, quest'ultimo, nei cristalli prima descritti, ma sempre subordinate! Anche nei nuovi cristalli, però, la zona [001] presenta la solita sostituzione di faccie vicinali a quelle tipiche. Così, in un bellissimo cristallo, prismatico nella direzione dell'asse *a*, la faccia (100) era sostituita da due faccie bellissime, perfettamente piane, senza accenno di striatura, per le quali si misurò:

$$(010) : (hko) = 88^\circ\ 10'$$
$$(0\bar{1}0) : (h_1\bar{k}_1 0) = 88\ \ 36$$

L'altra faccia del pinacoide { 100 } era rimpiazzata, invece, da due faccette nettamente striate nella direzione dell'asse verticale: ambedue davano, perciò, diverse immagini, fra le quali spiccava, isolata e nitida, una centrale. Rispetto a quest'ultima si ebbe:

$$(010) : (h_2k_2 0) = 84^\circ\ 26'$$
$$(\bar{1}00) : (h_3\bar{k}_3 0) = 84\ \ 23$$

Approssimativamente, si può dare un unico simbolo a (hko) e $(h_1\bar{k}_1 0)$: ad un'altra forma, invece appartengono $(h_2k_2 0)$ e $(h_3\bar{k}_3 0)$,, sicchè il cristallo misurato appare disugualmente conformato ai due estremi dell'asse *a*, come se vi fosse soltanto il piano di simmetria (010) e mancasse la digira.

Le proprietà ottiche sono le solite dei composti 1 — 1 — 8. I piani degli assi ottici sono normali a (010); su questa faccia una direzione di massima estinzione forma un angolo di 10° con [001] nell'angolo piano acuto [001] : [100]. L'indice γ è risultato approssimativamente uguale a 1.551 per la luce del sodio. $b = \gamma$: da (100) emerge, inclinato rispetto alla normale alla faccia, l'asse α dell'indicatrice ottica.

I risultati delle nostre esperienze su una parte del sistema $Nd_2(SO_4)_3$ — — $(NH_4)_2SO_4$ — H_2O sono riuniti nella seguente

Digitized by Google

TABELLA I.

Numero dell'esper.	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti il corpo di fondo
	$Nd_2(SO_4)_3$	$(NH_4)_2SO_4$	H_2O	$\frac{(NH_4)_2SO_4}{H_2O}$	Nd	NH_4	SO_4	H_2O	$\frac{Nd_2(SO_4)_3}{(NH_4)_2SO_4}$	
1	4.50	0.77	94.73	0.006	35.65	3.36	44.56	16.52	5.78	$Nd_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$ +
2	3.17	0.77	96.06	0.008	34.62	3.98	45.19	16.21	4 86	+ 1—1—8
3	2.58	1.00	94.41	0 010	34.04	4.25	45.15	16.56	4.36	
4	1.27	2.62	96.11	0.027	34.05	4.25	45.09	16.61	4.37	
5	1.16	2.78	96.06	0.028	34.07	4.26	45.13	16.55	4.36	
6	1.16	2.77	96.07	0.028	34.09	4.24	45.16	16.51	4.37	
7	0.58	12.86	86.56	0.148	33.92	4 23	45.24	16.61	4.37	
8	0.58	16.14	83.28	0.193	33.99	4.26	45.32	16.43	4.35	
9	0.58	16.21	83.21	0.194	33.92	4.23	45.21	16.64	4.36	
10	0.58	21.50	77.92	0.276	33.83	4.22	45.16	16.80	4.36	
11	0.58	24.33	75.19	0.323	33.96	4.24	45.46	16.34	4.36	
12	0.58	24.25	75.17	0.322	33.92	4.22	44.92	16.94	4.37	1—1—8
13	0.58	24.11	75.31	0.320	34.03	4.25	45.12	16.60	4.36	
14	0.58	25 80	73.62	0.350	33.85	4.21	45.32	16.62	4.39	
15	0.58	26.98	72.44	0.372	33.80	4.30	45.20	16.70	4.29	
16	0.58	29.18	70.24	0.415	33.74	4.28	45.09	16.89	4.30	
17	0.58	34.78	64.64	0.538	33.80	4.35	45.33	16.62	4.24	
18	0.58	35.18	64.24	0.547	33.70	4.26	44.99	17.05	4.32	
19	0.58	37.55	61.87	0.607	33.78	4.31	45.21	16.50	4.28	
20	0.58	40.88	58.54	0.698	33.65	4.35	45.18	16.82	4.22	
21	0.58	43.84	55.58	0.778	33.72	4.36	45.28	16.74	4.22	
22	0.58	44.00	55.42	0.794	15.08	17.80	62.48	4.64	0.46	1—1—8 + $+(NH_4)_2SO_4$

Composizione teorica dei composti ottenuti.

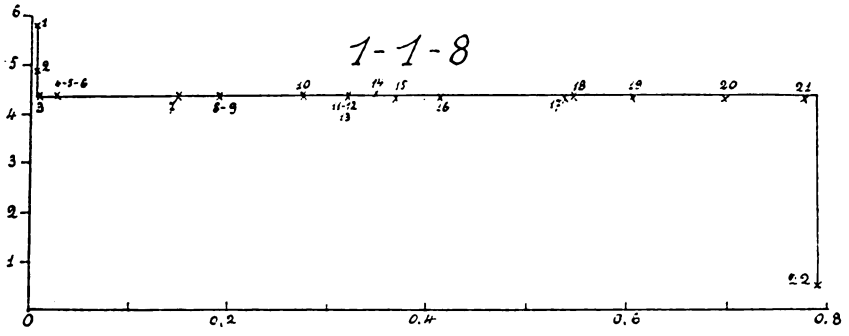
	Nd	NH_4	SO_4	H_2O
$Nd_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$	33.83	4.23	45.04	16.89

Dalla tabella e dalla fig. 1 emerge chiaramente che, nelle nostre condizioni sperimentali, è stabile un solo composto: $Nd_2(SO_4)_3 \cdot (NH_4)_2SO_4 \cdot 8H_2O$ o 1 — 1 — 8. Esso è stabile, puro, a 25°, in contatto con soluzioni che

Digitized by Google

hanno una composizione diversissima, e cioè, da 2.5 % $Nd_2(SO_4)_3$ e 1 % $(NH_4)_2SO_4$ a 0.58 % $Nd_2(SO_4)_3$ e 44 % $(NH_4)_2SO_4$.

In tutte le esperienze si sono ottenute delle polveri cristalline, che al microscopio sono risultate sempre costituite da cristallini identici a quelli



macroscopici già descritti, con la sola differenza che, mentre questi ultimi erano generalmente poco estesi nella direzione dell'asse c, gli altri microscopici, invece, si presentavano sempre notevolmente allungati secondo c e, di solito, tabulari per il forte predominio di $\{100\}$ o di vicinali a questo pinacoide.

Chimica. — *Su i diazoidrati.* Nota [1] del Corrispondente L. Cambi.

Riprendendo alcune indagini sui composti ossigenati dell'azoto, da me intraprese molti anni or sono, mi occupo dello studio fisico-chimico dei sali delle arilnitrosoidrossilammine, dell'acido diazobenzolico e dei diazoidrati. Nel corso di questi studi sono pervenuto alle considerazioni che seguono sulla costituzione dei diazoidrati e che comunico per l'interesse generale che offrono questi composti.

1. I fatti chimici scoperti ed illustrati da Angeli [2] inducono ad una revisione completa delle formole di struttura date da Hantzsch ai diazoidrati e finora generalmente accettate. Dobbiamo attualmente considerare quattro forme tautomere, prescindendo dalle possibili stereoisomerie:

1) $C_6H_5 - N = NH$ (O) ; 2) $C_6H_5 - N = NH$ (O)

3) $C_6H_5 - N = NOH$; 4) $C_6H_5 - N(H) - NO$.

(1) Presentata nella seduta del 1° maggio 1927.

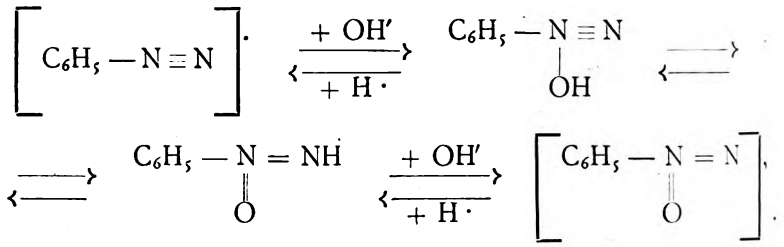
(2) A. Angeli, «Berichte», *59* (1926), 1400.

Digitized by Google

La forma 1) è quella che con la maggiore probabilità corrisponde ai diazoidrati normali; cioè all'aggruppamento che si genera per l'azione immediata di un eccesso di alcali sui sali di diazonio e che si può trasformare successivamente in quello degli iso-diazoidrati. A questi ultimi sali, che in generale non si copulano o lo fanno con difficoltà, corrisponde la forma 3) che è in stretta relazione con quelle 2) e 4).

La struttura 1) è dimostrata, come è noto, dalla formazione del diazoidrato normale per semplice idrolisi della benzol-azossicarbonamide di Angeli; si basa inoltre sulla maggiore sensibilità ai riducenti dei diazoidrati normali che li distingue dagli isodiazoidrati [1]. Tale comportamento attesta la struttura nitrica, la presenza di ossigeno congiunto all'azoto pentavalente.

2. La formazione dei diazoidrati normali può essere rappresentata dallo schema:



Il passaggio dalla base diazonica a diazoidrato normale con ossigeno congiunto all'atomo centrale d'azoto è stato già discusso da antica data. Esso corrisponde come ad una proprietà anfotera dell'idrato di diazonio.

Hantzsch ha escluso l'intervento di una tale manifestazione, perchè da un lato i sali di diazonio corrispondono ad una base energica, e dall'altro i diazoidrati alcalini ad un acido pronunciato, e non si può quindi invocare le analogie con gli idrati metallici anfoteri a funzione acida e basica debole [2].

Il carattere anfotero è dato però, nel caso discusso, dall'azoto: nei sali di diazonio l'atomo centrale d'azoto funziona come quello di un ammonio quaternario e l'atomo esterno come quello dell'acido nitroso; nei diazoidrati normali, con la struttura di Angeli, l'atomo centrale è analogo a quello di un nitroderivato e l'esterno a quello dell'ammoniaca. Cioè nel passaggio da un gruppo all'altro di queste sostanze diazoiche assistiamo ad un processo di riduzione ed ossidazione reciproca dei due atomi d'azoto che trasforma il catione diazonico nell'anione del diazoidrato. Trasformazione che è in armonia col comportamento generale dei composti ossigenati dell'azoto.

3. Hantzsch recentemente [3] ha obbiettato, a proposito della struttura nitrica dei diazoidrati normali, che non è ammissibile la formola imminica

(1) Hantzsch e Vock, « Berichte », *36* (1903) 2065.
(2) Hantzsch e Reddelien, *Die Diazoverbindungen*, 1921, p. 31.
(3) Hantzsch, « Berichte », *60* (1927), 668.

Digitized by Google

per il sale potassico, ed alcalino in genere: sarebbe quindi inammissibile la presenza dell'azoto pentavalente. Invero Angeli non ha mai indicato la formola dei sali potassici dei diazoidrati, ma soltanto quelle degli idrati non salificati. È vano però discutere di forme imminiche ed ossimiche di sali alcalini certamente ionizzati.

La valenza dell'anione di detti sali risulta da quelle degli atomi o radicali che lo compongono, ma nulla ci permette di attribuirla all'uno od all'altro atomo o gruppo. Infatti la nuova struttura dell'anione dei diazoidrati alcalini è analoga a quella di diversi altri aggruppamenti acidi contenenti azoto nitrico:

$$\left[\begin{matrix} O \\ \| \\ O{=}N{-}O \end{matrix}\right]' ; \left[\begin{matrix} R'O & R_2 \\ \diagdown & \diagup \\ O{=}N{-}O \end{matrix}\right]' ; \left[\begin{matrix} R{-}CH \\ \| \\ O{=}N{-}O \end{matrix}\right]' ; \left[\begin{matrix} R{-}N \\ \| \\ O{=}N{-}O \end{matrix}\right]' ;$$

$$\left[N \equiv N = N\right]' ; \left[\begin{matrix} R \\ | \\ O = N = N \end{matrix}\right]' \quad \text{oppure} \quad \left[\begin{matrix} R \\ | \\ N = N - O \end{matrix}\right]' .$$

Nei sali corrispondenti agli anioni su indicati troviamo la manifestazione generale dell'atomo d'azoto pentavalente collegato ad un insieme di atomi o radicali, esavalente rispetto all'idrogeno, con la ionizzazione di una valenza negativa. Nulla contraddice che dal ione predetto dei diazoidrati normali possa generarsi l'idrato libero avente idrogeno imminico, sia pure come forma labile, nelle reazioni cui partecipa.

Inoltre la formola imminica permette, come Angeli ha mostrato, una più chiara interpretazione della spiccata tendenza a copularsi dei diazoidrati normali. Infatti la struttura $\begin{matrix} C_6H_5 \\ | \\ O = N = NH \end{matrix}$, *con i doppi legami gemelli*, richiama i cheteni e gli isocianati e la loro reattività analoga [1].

4. Passando alle forme tautomere 3) e 2), che ho indicato all'inizio, è facile osservare che corrispondono alle due strutture possibili dell'acido nitroso: $\begin{matrix} H \\ | \\ O = N = O \end{matrix}$; $O = N - OH$. Quindi, come nei nitriti alcalini, così per i sali alcalini degli isodiazoidrati non ha significato parlare di una forma o dell'altra. Alle due forme corrisponde il ione:

$$[C_6H_5 - N = N = O]' \qquad \text{oppure} \qquad [C_6H_5 - N = N - O]'$$

od anche $$[C_6H_5 - N - N = O]' .$$

(1) ANGELI, loc. cit., p. 1402.

Digitized by Google

Soltanto per l'acido libero o per i suoi derivati non ionizzati potremo prendere in considerazione le forme tautomere indicate. È noto che il ione predetto può reagire anche come residuo di nitrosoammina: l'iso-p-nitrobenzoldiazotato sodicto reagisce con ioduro di metile dando luogo alla metilnitroso-p-nitrofenilammina, mentre il sale d'argento genera il diazoetere.

In definitiva la trasformazione dei diazoidrati normali ad isodiazoidrati in forma di sali alcalini può essere riassunta dallo schema che segue:

$$\left[C_6H_5 - N = N \overset{\|}{O}\right], \longrightarrow \left[C_6H_5 - N = N \overset{\|}{O}\right].$$

È il processo che meglio corrisponde al comportamento chimico così profondamente diverso delle due serie di sali.

A questo proposito ricorderò che si è asserito possedere i diazoidrati normali un maggior contenuto d'energia che non gli isodiazoidrati 1), volendosi con ciò confortare l'ipotesi della forma *sin-* dei primi con la *anti-* dei secondi. Ciò è però in contraddizione con le recenti misure di Swietoslawoski che ha trovato che i diazoidrati normali si trasformano negli isoderivati con assorbimento di calore [1].

5. Conchiudendo, la struttura dei sali alcalini dei diazoidrati normali, considerata con i criteri moderni, non contraddice in nulla quella data da Angeli agli idrati stessi non salificati. La struttura dell'idrato e dei suoi sali riposa su fatti chimici che la stereoisomeria ammessa da Hantzsch non prevede e non spiega.

Chimica. — *La questione del peso atomico dell'idrogeno 1 e di quello dell'ossigeno 16 dal punto di vista della costituzione elettronica dell'atomo e della spettrografia di massa.* Nota del Socio R. Nasini.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) « Centr. Blatt », 1926, II, 2882.

Digitized by Google

Idrologia. — *L'origine delle acque termali di Montegrotto (Euganei).* Nota [1] del Socio L. De Marchi.

Lo stabilimento termale di Montegrotto è alimentato da un gruppo di sorgenti termo-minerali cintato da un'ampia vasca (del diametro di 27 m. e dell'area di 572,55 mq.) dalla quale viene derivata acqua attraverso cinque bocchette sommerse e da uno sfioratore. Due delle bocchette sono sempre aperte, una è aperta continuamente soltanto nei mesi invernali per il riscaldamento del teatro, e due, dalle quali è per condotti sotterranei derivata l'acqua calda verso i robinetti di due stabilimenti, sono aperte intermittentemente solo nei mesi estivi di funzionamento dei bagni. Quando queste ultime sono chiuse si stabilisce nella vasca un livello d'equilibrio fra l'afflusso delle sorgenti e l'efflusso dalle bocche aperte e dallo sfioratore. All'apertura dei robinetti d'acqua calda durante la stagione dei bagni il livello naturalmente si abbassa, ma, in tutto il periodo ormai secolare precedente a questi ultimi anni, esso si ristabiliva in giornata durante le ore di chiusura dei robinetti stessi. Questo antico livello di equilibrio sarebbe segnato dall'orlo superiore di una zona di erosione prodotta dall'acqua minerale sulla parete interna (in trachite) della vasca.

Da alcuni anni si notava un abbassamento di livello, per effetto del quale la zona d'erosione rimaneva in parte emersa, e la lama d'acqua dello stramazzo andava assottigliandosi: ma tale depauperamento delle sorgenti parve accentuarsi notevolmente dopo l'infissione di due pozzi (nell'ottobre 1925) distanti l'uno circa 350 m., l'altro circa 250 m. dalle Terme e a nord di esse. Per la controversia sorta io fui chiamato dal Tribunale a giudicare se effettivamente vi poteva essere corrispondenza di causa ed effetto tra l'apertura dei pozzi e il più recente abbassamento di livello nella vasca.

Data l'incertezza tuttora dominante sull'origine delle acque termali e l'ignoranza sulla estensione, profondità, e conformazione superficiale delle rocce vulcaniche sotto il mantello alluvionale che circonda la base dei Colli Euganei, e dal quale emergono attorno ad essi dossi trachitici isolati, io non avevo alcun elemento, nè teorico nè di fatto, per costruire, a semplice induzione di probabilità, la distribuzione e l'andamento delle acque profonde. Imposi perciò l'esperimento della chiusura temporanea dei pozzi, e sistemai la vasca delle sorgenti in modo da escludere possibilmente ogni perdita nascosta, otturando tutte le bocchette d'uscita, e sistemando lo sfioratore a stramazzo ad orlo sottile. Le eventuali variazioni di portata delle sorgenti mi erano così rivelate da variazioni nella lama dello stramazzo, e

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

Digitized by Google

da misure idrometriche su un'asta graduata a due metri di distanza dalla parete interna della vasca, collo zero al livello d'equilibrio raggiunto dopo la sistemazione di questa. Tale livello si mantenne assolutamente invariato per oltre otto giorni prima dell'esperienza, come si mantenne invariata (a 2,4 cm.) l'altezza della lama di stramazzo (che per 25 cm. di larghezza rappresentava una portata di circa 130 litri al minuto primo), e invariata anche la temperatura a 45° C. Dopo la chiusura dei pozzi, alle ore 10 $^1/_2$ del 13 aprile, furono rilevate alla vasca le seguenti misure:

Giorno	Ora	Idrometro	Altezza di stramazzo	Temperatura
13	11	0	2.4 cm.	45°
»	18	piccolo aumento	2.6	
14	9.30′	1 cm.	2.6	
»	14.20′	accenna discesa	2.6	
»	16.30′	segue discesa	2.4	
15	15	0	2.4	
16	15	0	2.4	46°.1
18	9.15′	tra 1 e 3 cm. (per moto ondoso)	tra 2.6 e 3.2 (moto ondoso)	
19	9.15′	3 cm.	3.1	47°.1
20	14.30′	4 cm.	4.6	47°.1

Dopo una piccola elevazione di livello, nello stesso giorno e nelle prime ore del giorno successivo alla chiusura dei pozzi, dovuta all'aumento di pressione nelle acque del sottosuolo, prodotto dalla chiusura stessa e trasmesso elasticamente attraverso l'alluvione, la vasca riprese il livello iniziale d'equilibrio, e vi si mantenne per oltre tre giorni. Il giorno 16 rilevai però l'aumento di 1°, 1 C, nella temperatura, che mi mise sull'avviso di un prossimo mutamento; questo, infatti si manifestò e si accentuò nei giorni successivi, con elevazione progressiva di livello, segnato tanto all'idrometro che allo stramazzo, corrispondente a una portata più di 2,5 volte la portata iniziale. Notevole poi un ulteriore aumento di 1° C nella temperatura. Questo riscaldamento di oltre 2° C, in una massa d'acqua di oltre un migliaio di metri cubi, quale è quella della vasca, rappresentava un rilevante afflusso di acqua e vapore e gas ad alta temperatura, che era rivelato anche da un più intenso gorgoglio sulla superficie e dal mantello di alghe ricoprente il fondo, che in molti punti era stato sollevato e squarciato. Per l'insistenza degli interessati sospesi l'esperienza, mentre forse non era ancora raggiunto il massimo dell'effetto; riaperti i pozzi, dopo qualche giorno l'acqua della vasca riprese il livello e la temperatura iniziali.

Era quindi provato, in modo non dubbio, che l'apertura dei pozzi sottraeva una notevole quantità d'acqua alle sorgenti delle Terme.

Digitized by Google

Questa constatazione parmi di qualche importanza scientifica, nel problema dell'origine delle acque termali. Essa ci dice anzitutto che le acque e i vapori e gas delle sorgenti di Montegrotto provengono, almeno in parte notevole, per filtrazione attraverso le alluvioni, da nord; non sono cioè di origine autoctona. È a notarsi che tutta l'alluvione circostante è imbevuta d'acqua termale, che deve avere la stessa provenienza; ciò è vero in particolare del piano attorno delle Terme, chiuso ad anfiteatro a sud e ad ovest dai colli propaggini di M. Alto e M. Ceva, a nord dalla serie dei dossi isolati di M. Castello, Colle della Prebenda (S. Pietro Montagnon) e M. Bortolon, che costituiscono le vette emergenti di un promontorio roccioso sommerso sotto le alluvioni.

Attorno a questi dossi, dove la roccia è a piccola profondità, l'acqua termale pullula in superficie in molte sorgive, che mancano invece a qualche distanza da essi e in un tratto fra Colle della Prebenda e M. Bortolone, dove l'alluvione, prevalentemente argillosa, assume maggiore spessore per la ripidità dei versanti rocciosi che si sommergono sotto di essa. Tale ripidità fu rivelata dai due pozzi, uno dei quali a circa 50 m. dalla radice di M. Bortolone trovò a 34 m. la roccia, mentre l'altro solo 100 m. più a sud, fu approfondito fino a 82 m. senza incontrarla. Sul lato sud del piano, dove pure l'alluvione si assottiglia al piede dei colli, non vi è alcuna sorgente, il che dimostra che da quel lato non può derivare acqua alle Terme.

Constatato così che le sorgive delle Terme sono alimentate, almeno in gran parte, da acqua di filtrazione proveniente da nord, viene spontanea l'idea che questa sia l'acqua d'imbibizione del profondo mantello alluvionale della pianura veneta; acqua *vadosa* o di *falda*, proveniente dall'assorbimento nelle conoidi prealpine, e discendente verso il mare. Questa corrente sotterranea, venendo a battere contro il promontorio sommerso, affiora attorno ai dossi di M. Castello, Colle della Prebenda e M. Bortolone, spiegando così le numerose sorgive, e si divide attorno ad essi in vene distinte, una delle quali, fra Colle della Prebenda e M. Bortolone, sarebbe precisamente diretta verso le Terme. I due pozzi furono infissi in margine a questa vena, e ciò spiega l'influenza che essi esercitarono sulle sorgive, sottraendo una quantità d'acqua che fu valutata complessivamente a circa 400 litri per minuto primo, e aprendo uno sfogo ai gas e vapori, pel quale fu diminuita la pressione e la temperatura delle acque a valle, lungo la vena.

Dall'altro lato il M. Bortolone devia la corrente sotterranea verso SE, allontanandola, almeno inizialmente, dalle Terme: su questa vena orientale fu infisso, fin dal 1912, presso la stazione ferroviaria di Montegrotto un pozzo, che dette una portata maggiore di quella complessiva dei due pozzi in questione (600 litri al minuto primo) e qualche anno dopo ne fu infisso in vicinanza un altro che getta più di un ettolitro al primo. I proprietari delle Terme affermano che l'apertura di questi due pozzi non ebbe alcuna

Digitized by Google

ripercussione sulle loro sorgenti; se l'ebbero, fu certamente poco sensibile, e ciò si spiega coll'indipendenza delle due vene.

La nostra rappresentazione dà quindi ragione soddisfacente dei fatti osservati, e dimostra che le sorgenti termali sono in gran parte alimentate da acqua di falda. Questa viene però completamente e uniformemente mineralizzata e riscaldata a temperature che ad Abano raggiungono gli 83° C, e nei pozzi di Montegrotto i 78° C. Tale processo di mineralizzazione e di forte riscaldamento si inizia quando il flusso si accosta al lato orientale degli Euganei, e si manifestava in passato nelle sorgenti naturali, più settentrionali, di M. Ortone e di Abano e al presente si manifesta anche nelle parecchie decine di pozzi recentemente infissi ad Abano, per il moltiplicarsi degli stabilimenti termali, lungo una linea arcuata di oltre tre chilometri di lunghezza, che attraversa la direzione di deflusso delle acque profonde.

Io credo di non errare attribuendo a questo fatto il progressivo depauperamento delle sorgenti delle Terme di Montegrotto anteriore all'infissione dei due pozzi, i quali lo accentuarono in modo così sensibile. I numerosi pozzi impiantati lungo una trasversale alle correnti sotterranee di deflusso, precisamente a nord del valico fra Colle della Prebenda e M. Bortolone, pel quale scende la vena alimentatrice delle Terme, rappresentano una vera recisione di vena, il cui effetto doveva ripercotersi su tutto il deflusso a sud, e quindi anche sulle Terme, nonostante la distanza di oltre tre chilometri in linea d'aria.

Il processo di mineralizzazione e di alto riscaldamento dev'essere dovuto ad emissione di gas, vapori, ed acqua ad altissima temperatura da fessure della roccia eruttiva sottostante all'alluvione, lungo la base orientale dei colli Euganei. Esso deve iniziarsi a nord di Abano, dove l'acqua arriva già completamente mineralizzata e alle temperature più alte (83° C. a Montirone), ma può ripetersi anche a sud per altre fessure di emanazione. Il fatto, che tutta la massa d'acqua vadosa, che discende da nord a impregnare l'alluvione, la quale in molti punti raggiunge lo spessore di oltre 100 m. (come sotto il secondo dei pozzi in questione), e ha un'estensione di chilometri quadrati, venga così portata ad alta temperatura, non si può spiegare come effetto di sole emanazioni gasose ad altissima temperatura. Si richiederebbe perciò un volume di gas straordinariamente enorme, mentre le manifestazioni gasose nelle sorgenti e nei pozzi sono assai modeste. È necessario ammettere che dalle fessure esca una quantità notevole di acqua e vapor acqueo (che condensandosi sviluppa le calorie di vaporizzazione) a temperatura molto alta, e sotto pressione sufficiente da permeare tutto il mantello d'alluvione anche dove questa è minutissima, come lo è in generale, almeno negli strati superficiali. Tutto lo strato che fu attraversato dal secondo pozzo, fino a circa 80 m. di profondità, diede sempre acqua calda, per quanto molto scarsa, durante tutta la perforazione.

Digitized by Google

Dobbiamo quindi ammettere l'esistenza, sotto il mantello alluvionale, di vere sorgenti di acqua ad alta temperatura che si mescola all'acqua vadosa dell'alluvione riscaldandola e mineralizzandola, e assumendo con essa il movimento naturale di deriva verso sud. È questa la spiegazione del fenomeno termale accennata dal Wolff [1] in base alla discussione di fatti numerosi, ma forse non così intimamente documentati, come nell'esempio ora da me addotto, e ch'io credo perciò di qualche interesse. Quale sia l'origine di queste sorgenti sepolte, se di acqua meteorica penetrata a grande profondità e risospinta in superficie dalla tensione di vapori e di gas, o di acqua *giovanile* secondo la teoria di Suess, rimane tuttavia incerto. La composizione dell'acqua, analoga a quella dell'acqua marina, fa pensare a un'origine superficiale, mentre quella dei gas (H_2S, CO_2, O_2, CH_4, N_2) [2], che sono i gas emessi da rocce cristalline portate al calor rosso nel vuoto [3], indicherebbe un'origine molto profonda.

Geofisica. — *Risultati di una esplorazione magnetica nei territori del Giuba e dell' Uebi-Scebeli.* Nota del Corrisp. L. Palazzo.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geochimica. — *Il « numero elettronico » e i costituenti terrestri.* Nota del Corrisp. P. Vinassa.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Ecologia. — *Ecologia agraria e genetica.* Nota del Socio P. R. Pirotta.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) v. Wolff F., *Vulkanismus.* Stuttgart Enke, 1914. p. 628.

(2) Nasini R. e Anderlini F., *Relazione intorno all'analisi chimica dell'acqua della sorgente del Montirone in Abano eseguita nell'anno 1894.* 2ª ediz. Padova, 1900. Le analisi di altre sorgenti della regione hanno dimostrato una grande uniformità di composizione dell'acqua.

(3) Wolff, op. cit., pp. 72-79.

Digitized by Google

Biologia. — *Influenza dell'inanizione sul trapianto omoplastico.* Nota [1] preventiva dal Socio B. MORPURGO.

Il digiuno è una condizione sfavorevole all'attecchimento degli innesti autoplastici. Esso ritarda e diminuisce i processi dai quali dipendono la formazione del nesso organico fra i tessuti trapiantati e quelli dell'ospite e la rigenerazione degli elementi degli uni e degli altri, che, in conseguenza dell'operazione e del temporaneo disagio di nutrizione, andarono perduti. Questo fatto è non solo presunto, ma dimostrato da esperienze anche sull' uomo.

Nulla è finora stato verificato riguardo all' influenza del digiuno sul trapianto omoplastico.

Di questo problema mi sono occupato con la collaborazione del mio allievo dott. S. Milone.

Il processo che si svolge in seguito al trapiantamento dei tessuti di un individuo di una specie in un altro individuo della stessa specie di animali mammiferi è oltremodo complicato e tuttora oscuro.

Per ciò che riguarda il trapianto libero omoplastico di pelle nei ratti, secondo le esperienze di varî autori, da noi ripetute moltissime volte, si può affermare che il lembo trapiantato resta vivo alcuni giorni, che la circolazione del sangue vi si avvia prestissimo e che fra il 7° ed il 10° giorno, il più delle volte in modo critico, avviene un disturbo circolatorio, che culmina nella stasi, disturbo al quale segue la necrosi, la mummificazione e poi, lentamente, l'eliminazione del tessuto trasformato in una crosta dura.

Con vari mezzi si è tentato di ritardare la morte del tessuto trapiantato e noi stessi, nei ratti albini, ripetendo esperienze fatte da Lehmann e e Tammann nei topolini, abbiamo in alcuni casi ottenuto un notevole ritardo mediante l' iniezione di bleu Trypan nell'animale fornitore dell' innesto ed in quello ricevitore. Un ritardo è stato raggiunto da noi anche con la iniezione di soluzioni di Cloruro di Calcio.

L' insieme di queste esperienze ci ha indotto a supporre che la morte dei tessuti eterogenei trapiantati dipenda non da un processo d' intossicazione proveniente dall'ospite, nè dalla mancanza di nutrimento e di gas, ma da un'azione difensiva che si matura in un periodo d' incubazione ed ha il carattere di una reazione immunitaria.

Seguendo questo concetto ci è sembrato di particolare interesse lo studio dell' influsso dell' inanizione sulla sorte dei trapianti omoplastici, in quanto che antiche esperienze (Canalis e Morpurgo, 1891) avevano dimostrato che il digiuno può annullare l' immunità contro germi d' infezione.

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

Digitized by Google

Ci siamo proposti di operare innesti omoplastici di pelle in ratti albini, tenuti in inanizione prolungata. L'esecuzione di questo programma ha presentato grandi difficoltà, perchè i ratti resistono relativamente poco ad una forte diminuzione della razione alimentare. Perciò abbiamo dovuto eseguire molti esperimenti per poter raccogliere un numero assai limitato di risultati probativi.

Il metodo adottato è stato il seguente:

Topi albini, sani, dell'età intorno a 6 mesi, vennero tenuti a digiuno assoluto per tre giorni, periodo di tempo sufficiente per cagionare una perdita di peso che si aggira fra il 30-40 % del peso iniziale. In ciascuno di questi topi fu eseguito sul dorso l'innesto di circa 6 cm^2 di pelle del dorso di uno dei compagni.

Ciascuno degli animali operati, chiuso in una piccola gabbia tonda di lastra di metallo, con rete ad ampie maglie al fondo, tenuto al buio, in perfetta quiete, a temperatura di ambiente relativamente alta, riceveva due volte al giorno una piccola porzione di pane ed acqua a volontà. Il peso del corpo di questi animali, giornalmente verificato, diminuì fino a raggiungere la metà o poco meno della metà del peso iniziale. I più dei topi in inanizione perirono dopo periodi di tempo relativamente brevi, in collasso, con fortissima ipotermia, assai prima che fosse raggiunto il grado estremo della diminuzione del peso. L'ipotermia si presentava quasi d'improvviso e cresceva rapidamente; però se ci accorgevamo in tempo del suo inizio e riscaldavamo gli animali, riuscivamo a far loro superare il collasso. Alcune volte ci è stato possibile di prolungare di parecchi giorni la vita dell'animale a dieta insufficiente, soccorrendolo col riscaldamento tutte le volte che la temperatura del corpo tendeva ad abbassarsi rapidamente. Ad onta delle accennate difficoltà, siamo riusciti a tenere in vita alcuni animali per un tempo bastevole a giudicare con sicurezza l'influenza dell'inanizione sulle sorti del trapianto omoplastico.

Nel modo descritto abbiamo trattato 24 topi, divisi in 4 gruppi di 6, e per ciascun gruppo siamo riusciti a mantenere in vita per 23-34 giorni, un animale. Un tale periodo di tempo è, secondo le nostre assai numerose esperienze d'innesti omoplastici, di gran lunga maggiore di quello massimo di sopravvivenza degli innesti omoplastici di pelle nei ratti normali, che è contenuto tra l'8° ed il 14° giorno.

Il risultato dei nostri esperimenti, sebbene fondato su un numero di osservazioni relativamente piccolo, fu molto significativo, in quanto che esso riuscì eguale in tutti quanti i topi sopravvissuti al di là del 14° giorno e non venne contraddetto dalla massima parte delle osservazioni fatte sugli animali morti prima di questo termine, perchè anche in quelli morti fra il 10° e il 14° giorno per lo più il lembo era morbido e di colore normale. Nei primi giorni dopo l'innesto il lembo di pelle si presentava pallido, ma molle e pieghevole, senza notevole esfogliazione nè caduta di peli.

Digitized by Google

In seguito, verso la fine della prima settimana, al limite con la pelle dell'ospite gli orli del lembo si disseccavano e si inarcavano alquanto fra i punti di sutura. Questa condizione durava pressochè invariata almeno fino oltre il 10° giorno, nè in questo periodo si osservava quel turgore che caratterizza l'inizio della crisi circolatoria che prepara l'eliminazione del tessuto estraneo. Verso il 15° giorno o poco più in là in alcuni dei lembi innestati una parte della superficie si opacava ed induriva ed acquistava un colore grigiastro, come suole quando l'epidermide incomincia a desquamarsi. Questi fenomeni non interessavano mai la parte centrale del lembo e qualche volta erano assai limitati anche alla periferia. In seguito, intorno al 20° giorno e nei casi di più lunga sopravvivenza dell'animale anche più tardi, questo aspetto non mutava essenzialmente e solo si estendeva alquanto e compariva anche in qualche piccolo territorio lontano dagli orli del lembo. Per lo più in quest'epoca terminava l'esperimento per la morte dell'animale.

Se con cautela si purgava la pelle dalle squame che la coprivano e si mozzavano le creste mummificate degli orli dell'innesto, si trovava che la pelle innestata era accostata esattamente a quella dell'ospite, come suole avvenire nell'innesto omoplastico ed anche nella cicatrizzazione di una semplice ferita con lieve mummificazione dei bordi cuciti.

Abbiamo esaminato al microscopio la pelle di un topo morto al 21° giorno dopo l'innesto e quella di uno morto al 34°. I reperti in questi due casi non furono, ad onta delle diversità del periodo trascorso dopo l'innesto, essenzialmente diversi. Tanto nel primo quanto nel secondo abbiamo verificato che una parte degli elementi epidermici era conservata, sia nel rivestimento che nei follicoli dei peli. L'epidermide era assottigliata, ma presentava tutti i suoi strati normalmente ordinati; le cellule contenevano nuclei piuttosto piccoli ma ben colorati. I peli o mancavano od erano in via di essere eliminati. Agli orli del lembo l'epidermide con lo strato papillare era accartocciata verso l'esterno e tendeva a separarsi dal sottostante strato reticolare del derma. Il limite di separazione era segnato da un'abbondante adunata di leucociti a nucleo polimorfo, frammentato, in parte in via di carioressi, e da un pulviscolo di cromatina nucleare, sparso fra le cellule. Verso la linea di demarcazione procedeva, gradualmente assottigliandosi, una lingua di epidermide dell'ospite, come suole avvenire nel processo di cicatrizzazione sotto la crosta. Una simile demarcazione al limite tra lo strato papillare e quello reticolare del derma si avvertiva anche in quei punti lontani dai margini, nei quali lo strato superficiale della pelle era necrotico o disseccato. In questi punti naturalmente mancava la lamina di epidermide dell'ospite e non si vedeva che sotto il derma necrotico penetrasse l'epitelio finitimo dell'innesto. Il resto del derma di tutto quanto l'innesto era ben conservato: i fasci collageni mostravano netta la loro costituzione fibrillare e framezzo ad essi si scorgevano in discreto numero le cellule fisse col nucleo ben colorato. Qua e là si trovava qualche leucocito, ma mancava l'ad-

Digitized by Google

densamento di questi elementi negli interstizi del derma. In prossimità del letto dell' innesto erano più numerosi i fibroblasti, specialmente in vicinanza dei vasi sanguiferi, che erano numerosi e relativamente ampii. Lo strato più profondo del lembo innestato, caratterizzato dalla presenza delle sezioni delle fibre del pellicciaio in degenerazione jalina, era connesso col letto dell' impianto mediante un sottile cellulare, assai rado, con maglie stirate in senso tangenziale. Il letto stesso era molto ricco di fibroblasti e di vasi sanguigni, ma non mostrava alcun segno d' infiammazione essudativa nè di edema all' infuori che in alcuni punti soprastanti alle zone necrotiche dell' innesto e specialmente a quelle marginali. Il derma dell'ospite era continuo con quello dell' innesto: il primo si congiungeva con la parte più profonda del secondo sotto la linea di demarcazione.

In uno dei topi con lembo quasi totalmente attecchito abbiamo iniziato al 23° giorno dall'operazione la rialimentazione, per vedere se con questa si avviassero dei fatti nuovi ed eventualmente contrari a quelli osservati durante il digiuno. L'animale rinutrito, che aveva perduto durante il digiuno 50 % del peso trovato ventiquattro ore dopo l' inizio del digiuno, andò riacquistando lentamente di peso e in dieci giorni raggiunse i $^2/_3$ del peso constatato la prima volta. Il lembo innestato si mantenne finora (60 giorni) delicato, pallido, glabro e lucente, con leggera desquamazione forforacea, ma senza tendenza ad una progressiva atrofia. Le parti disseccate, vicine agli orli, sono cadute e lasciano scorgere un sottile epitelio che s'avanza sul piano granuleggiante; però le piccole perdite di sostanza stentano molto a cicatrizzarsi.

L' innesto omoplastico attecchito non partecipa alle funzioni principali della pelle; non riproduce i peli nè le ghiandole, ed è riluttante ad associarsi ai tessuti finitimi dell'ospite nella riparazione delle perdite di sostanza superficiali.

Le esperienze descritte dimostrano che l' inanizione, ben lungi dall'ostacolare, facilita l'attecchimento di innesti omoplastici di pelle e quindi agisce sull'andamento di questo processo in modo opposto a quello che si verifica nell' innesto autoplastico. Il digiuno esercita sui processi di difesa dell'organismo contro l' intrusione di tessuti estranei nella propria compagine un' influenza analoga a quella che esso suole esercitare sulle difese naturali contro le infezioni. Questo fatto aggiunge un forte argomento in favore dell' ipotesi che nei processi dai quali dipende l'eliminazione degli innesti omoplastici nei vertebrati superiori sia principalmente in causa una reazione immunitaria.

È notevole inoltre l'osservazione che, dopo avvenuto l'attecchimento, la cessazione del digiuno non cagiona l'eliminazione dell' innesto omoplastico. Questo fatto induce a credere che i tessuti estranei, attecchiti durante la inanizione, non destino, dopo cessata questa, la reazione dalla quale dipende la loro rovina, sia che essi si siano assuefatti all'ambiente dell'ospite, sia che, col tempo, siano intervenute delle modificazioni nell' innesto o nell'ospite o in tutti e due che contrastino alle reazioni difensive.

Digitized by Google

Fisiologia. — *Il meccanismo neurochimico della inibizione vagale nel cuore del mammifero.* Due Note del Corrisp. C. Foà.

Saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica, e sulle varietà di Iacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano.* Nota di C. Rosati, presentata [1] dal Socio E. Bertini.

È noto che le trasformazioni birazionali in sè della varietà di Iacobi V_p relativa ad una curva C del genere p, o di una qualsiasi varietà abeliana di dimensione p, si distribuiscono in schiere continue ∞^p non aventi due a due alcuna trasformazione comune, e che il prodotto in un ordine assegnato di due trasformazioni variabili in due schiere (o nella medesima schiera) varia pure in una schiera. La totalità delle schiere può dunque concepirsi come un gruppo G, il quale o è finito o è infinito discontinuo. Se la curva C non possiede che corrispondenze a valenza, G è il gruppo ciclico del 2° ordine costituito dalle due schiere di trasformazioni ordinarie di 1ª e di 2ª specie; si hanno in G schiere di trasformazioni singolari soltanto quando C possiede corrispondenze singolari. In una Memoria del 1921 [2] ho dimostrato che data sopra una curva C una corrispondenza singolare T ad equazione minima irriducibile, all'*ordine* $o(T)$, cioè all'insieme delle corrispondenze che sono funzioni razionali intere di T, risponde su V_p un gruppo abeliano G', sottogruppo di G, il quale ammette una *base finita*, cioè un numero finito di schiere tali che i prodotti delle loro potenze generano una ad una tutte le schiere di G'. Se quindi si suppone che V_p sia *pura*, col variare dell'ordine $o(T)$ si ottiene la distribuzione delle schiere di G in sottogruppi G', e le proprietà che ho stabilito per gli ordini di corrispondenze verranno a riflettersi in proprietà dei sottogruppi G', riguardanti il numero delle loro schiere generatrici, il modo del loro intersecarsi, ecc.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(2) C. Rosati, *Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* « Annali di Matematica », serie III, t. XXXI (1921), p. 37.

Digitized by Google

Ciò ho ottenuto in base al teorema di Dirichlet sulle unità dei corpi algebrici, e credo che anteriormente non vi sia stato altro esempio di applicazione della teoria dei numeri algebrici allo studio delle funzioni abeliane [1].

Nel caso particolare in cui le corrispondenze della curva C sono due a due permutabili, avviene il fatto notevolissimo che *le schiere di trasformazioni birazionali in sè di* V_p *costituiscono un unico gruppo abeliano* G, *del quale può assegnarsi una base finita.* Sebbene questo risultato possa dedursi applicando all'insieme delle corrispondenze della curva C il noto teorema della teoria delle algebre secondo cui un'algebra razionale, se è primitiva e commutativa, è potenziale [2], pure credo utile darne una dimostrazione diretta. E ciò faccio in questa Nota, partendo anzi dall'ipotesi, *a priori* più larga, della permutabilità del gruppo di omografie immagini delle corrispondenze (*gruppo di moltiplicabilità di* V_p) [3]. In tal modo, oltre al vantaggio di ottenere il risultato nella sua forma più precisa, si ha l'altro di enunciare delle proprietà che hanno importanza già di per sè; così l'introduzione dell'indice di permutabilità di due omografie, la nozione di corrispondenze direttamente e inversamente permutabili, le proprietà delle corrispondenze permutabili con le loro inverse, la determinazione del numero delle corrispondenze permutabili con una involuzione irrazionale.

Riporto qui i soli enunciati dei teoremi, rimandando ad un lavoro più ampio i particolari della ricerca.

Omografie e matrici permutabili.

1. Indichiamo con $A, B, \cdots$ matrici dello stesso ordine n e con $(A)(B)\cdots$ le corrispondenti omografie di S_{n-1}. Supposto che le omografie (A) e (B) siano permutabili, si avrà

$$BA = \varepsilon AB. \tag{1}$$

Se l'omografia prodotto delle date non è nulla, è chiaro che il fattore ε ha un valore determinato che non varia comunque si varino le matrici as-

(1) Nella Memoria di S. Lefschetz, *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties*, («Transactions of the American Mathematical Society», vol. 22, n. 4, 1921, p. 439), comparsa contemporaneamente alla mia, trovasi dimostrata la proprietà analoga per le varietà abeliane. Lo stesso teorema per le varietà abeliane enuncia N. Spampinato nella Nota, *Il problema della moltiplicazione complessa per un qualsiasi corpo puro di funzioni abeliane*, (Questi «Rendiconti», vol. V, serie 6ª, gennaio 1927). Allo Spampinato erano sfuggiti questi lavori, come egli gentilmente dichiarerà in una sua prossima pubblicazione.

(2) Vedasi l'opera del prof. Scorza, *Corpi numerici e algebre.* (Messina, Principato, 1921), parte II, p. 404.

(3) Nella Memoria citata di Lefschez, quando si parla di omografie di Riemann permutabili, è sottinteso che sono permutabili le rispettive matrici.

Digitized by Google

sociate alle omografie medesime, e se di più non è pseudonulla [1], si dimostra che ε è una radice dell'unità. L'esponente r a cui appartiene ε dicesi *indice di permutabilità* delle omografie (A) e (B). Il suo significato geometrico, nel caso in cui (A) e (B) sono omografie non degeneri, è espresso dal teorema:

Se due omografie non degeneri permutabili hanno l'indice r di permutabilità, gli spazi fondamentali di una qualunque di esse si possono distribuire in gruppi di r ciascuno, in guisa che gli spazi di ogni gruppo hanno le stesse caratteristiche e sono permutati circolarmente dall'altra.

Nel caso particolare $r = 1$ si ottiene:

Se le matrici A *e* B *a determinante non nullo sono permutabili, una qualunque delle omografie* (A) *e* (B) *muta ciascuno in sè gli spazi fondamentali dell'altra.*

Di qui, con semplici considerazioni geometriche si deduce la seguente proprietà, che ha importanza fondamentale per il seguito:

Se due matrici A *e* B *sono regolari e permutabili, esse sono funzioni razionali di una stessa matrice (regolare)* C *appartenente al loro fascio; quando* A *e* B *sono reali o razionali, può farsi in modo che* C *sia pure reale o razionale.*

Osservazione. - Ritornando al caso generale di due omografie permutabili, si osservi che se (A) e (B) sono reali o razionali, nella (1) il fattore ε dovrà essere reale o razionale; se di più l'omografia prodotto non è pseudonulla, sarà $\varepsilon = \pm 1$.

Corrispondenze permutabili.

2. Coi simboli $T, U \cdots$ indichiamo delle corrispondenze sopra una curva C del genere p ed anche le matrici di ordine $2p$ formate dai loro interi caratteristici; inoltre diremo che una corrispondenza è nulla, pseudonulla, regolare, ecc., se tale è la sua matrice caratteristica. Supposto che le omografie (T) e (U) siano permutabili, dovrà essere

$$TU = \varepsilon UT \qquad (\varepsilon \text{ razionale}) \tag{2}$$

cioè i prodotti TU e UT sono corrispondenze dipendenti; e le corrispondenze T ed U si diranno *direttamente o inversamente permutabili*, se nella (2) si ha $\varepsilon = +1$, ovvero $\varepsilon = -1$. Tralasciando di enunciare le ulteriori ipotesi sulle corrispondenze T ed U che permettono di precisare il valore di ε, fermiamoci al caso particolare interessante in cui è $U = T^{-1}$. Si hanno a questo proposito i teoremi:

(1) Per la nozione di matrice nulla, pseudonulla, regolare, vedasi l'opera citata dello Scorza, parte II, cap. 1°, p. 133. Una omografia dicesi nulla, pseudonulla, regolare, se tale è una (qualsiasi) delle matrici ad essa associate.

Digitized by Google

a) *Se i prodotti* TT^{-1} *e* $T^{-1}T$ *di una corrispondenza per la sua inversa sono dipendenti, le corrispondenze* T *e* T^{-1} *sono regolari e direttamente permutabili; di più una qualunque di esse è funzione razionale dell'altra.*

b) *Se l'equazione minima* $\psi(z) = 0$ *di una corrispondenza* T *permutabile con la sua inversa ammette r radici reali ed s coppie di radici complesse coniugate, l'ordine* $o(T)$ *possiede una rete di specie* $\nu_1 = r + s$ *di corrispondenze simmetriche ed una rete di specie* $\nu_2 = s$ *di corrispondenze emisimmetriche. Quando* $\psi(z) = 0$ *è irriducibile, deve essere* $s = 0$, *ovvero* $r = 0$; *cioè l'ordine* $o(T)$ *o è tutto di corrispondenze simmetriche o in esso il numero delle corrispondenze simmetriche indipendenti uguaglia quello delle emisimmetriche.*

Osservazione. - Dal teorema a) facilmente si deduce che le curve C su cui avviene che ogni corrispondenza T e la sua inversa T^{-1} hanno le valenze (immaginarie coniugate) associate agli stessi integrali di 1ª specie, sono quelle su cui ogni corrispondenza simmetrica è permutabile con ogni emisimmetrica. Tali curve o non posseggono sistemi riducibili, o ne posseggono in numero finito. Verificandosi il 1° caso, anche le corrispondenze simmetriche sono due a due permutabili.

3. Si verifica facilmente che una corrispondenza permutabile con una involuzione irrazionale T non può esserlo che direttamente. Inoltre si dimostra che:

Le corrispondenze indipendenti permutabili (direttamente) con una involuzione irrazionale T *sono in numero di* $\mu - 2\lambda$, *essendo* μ *il numero base delle corrispondenze della curva* C *e* λ *il coefficiente d'immersione dei sistemi riducibili associati all'involuzione.*

Segue il corollario:

Condizione necessaria e sufficiente perchè gli assi di una involuzione irrazionale T *siano isolati, è che* T *sia permutabile con ogni corrispondenza appartenente alla curva.*

Le varietà di Iacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano.

4. L'insieme Ω delle omografie immagini delle corrispondenze della curva C, inclusavi l'omografia nulla immagine delle corrispondenze a valenza zero, può riguardarsi come un gruppo discontinuo, che dicesi *gruppo di moltiplicabilità* della curva C o della sua varietà di Iacobi V_p. Supposto che Ω sia permutabile, dalle proprietà enunciate nei numeri precedenti si deduce il seguente notevole teorema:

Sopra una curva C *a gruppo abeliano le corrispondenze sono tutte regolari, due a due direttamente permutabili e costituiscono un ordine* $o(T)$. *Secondochè l'equazione minima della corrispondenza* T, *generatrice dell'ordine, è irriducibile o riducibile, la curva o non possiede sistemi riducibili o ne possiede in numero finito. Se r ed s sono i numeri delle radici reali e delle coppie di*

Digitized by Google

radici complesse coniugate di detta equazione, i numeri base delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche di C *sono* $\mu_1 = r + s$, $\mu_2 = s$; *e nell'ipotesi che* C *sia pura, deve essere* $s = 0$ *ovvero* $r = 0$, *e nei due casi i numeri* r *ed* s *sono divisori del genere* p.

Osservazione. - Un esempio in cui il teorema precedente è senz'altro verificato è dato dalle curve prive di corrispondenze emisimmetriche.

5. Supponiamo che V_p sia pura. Dal teorema precedente e da quello dimostrato nella mia Memoria citata, si deduce allora il risultato:

Le schiere di trasformazioni birazionali in sè di una varietà di Iacobi V_p *pura e a gruppo di moltiplicabilità abeliano formano un gruppo discontinuo abeliano e sono date ciascuna una sola volta dalla formula*

$$G = G_0^r G_1^{n_1} G_2^{n_2} \cdots G_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$$

nella quale G_0 *indica una schiera generante un sottogruppo ciclico di ordine pari* $2k$, $G_1 G_2 \cdots G_{\nu-1}$ *un sistema fondamentale di schiere aperiodiche, il numero* r *percorrendo i valori interi da* 1 *a* $2k$ *e gli esponenti* $n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1}$ *i valori interi da* $-\infty$ *a* $+\infty$. *Il numero* ν *è un divisore di* p, *ed è uguale al numero base per le corrispondenze della curva* C, *o è la metà di questo numero.*

Osservazione 1ª. - La presenza del sottogruppo ciclico (G_0) del gruppo (G) dà luogo a una proprietà importante per la curva C. Si prova infatti che C possiede una corrispondenza biunivoca T di periodo $2k$ o k secondochè C è o non è iperellittica; e non esistono sulla curva altre corrispondenze biunivoche all'infuori di T e delle sue potenze.

Osservazione 2ª. - Anche limitando l'ipotesi della permutabilità alle sole corrispondenze di C che sono unimodulari, si dimostra che tali corrispondenze sono tutte regolari e contenute in un ordine. Aggiungendo la condizione che V_p sia pura, si deduce la proprietà: *Se le schiere di trasformazioni birazionali in sè di una varietà di Iacobi pura è abeliano, tale gruppo ammette una base finita.*

Osservazione 3ª. - Nel caso $\nu = 1$, in cui la base del gruppo (G) si riduce alla sola schiera ciclica G_0, può provarsi che il gruppo ciclico generato da G_0 non può essere che del 2°, del 4° o del 6° ordine. Questo risultato può considerarsi come una generalizzazione di quello classico per le curve ellittiche (le quali coincidono con le loro varietà di Iacobi).

Digitized by Google

Matematica. — *Un metodo generale per sostituire una equazione ad una diseguaglianza o ad una limitazione, e suo impiego nella geometria analitica.* Nota dell'ing. L. Laboccetta, presentata [1] dal Corrisp. G. Crocco.

Nel ricercare le relazioni intercedenti fra un certo numero di grandezze $x, y, z, \cdots$ si giunge a delle espressioni di uno dei tre tipi seguenti

$$(1) \qquad f(xyz\cdots) = F(xyz\cdots)$$

$$(2) \quad a) \ f(xyz\cdots) < F(xyz\cdots) \qquad b) \ f(xyz\cdots) > F(xyz\cdots)$$

$$(3) \qquad f(xyz\cdots) < G(xyz\cdots) < F(xyz\cdots)$$

si giunge cioè ad una equazione o ad una diseguaglianza, uno dei due termini delle quali può essere una costante, oppure ad una limitazione equivalente quest'ultima a due diseguaglianze di senso contrario rispetto ad un termine identico in entrambe, i due termini non identici potendo essere delle costanti diverse fra di loro.

Il presente scritto ha per scopo di mostrare come tanto le espressioni del tipo (2) quanto quelle del tipo (3) possono essere ricondotte a prendere la forma (1) e ciò con metodi generali uniformemente applicabili in tutti i casi particolari.

I.

1. Tenendo presente che una diseguaglianza, per es. $f < F$, oppure $f > F$, può essere anche scritta $f - F < 0$ oppure $f - F > 0$, si scorge che le due diseguaglianze (2) equivalgono alle due equazioni

$$(4) \quad a) \ \operatorname{sgn}(f - F) + 1 = 0 \qquad b) \ \operatorname{sgn}(f - F) - 1 = 0.$$

E poichè la limitazione (3) implica la condizione che sieno di segno diverso le due differenze $G - f$ e $G - F$, e quindi negativo il loro prodotto, così ne segue che ad essa equivale, ad es., l'equazione

$$(5) \qquad \operatorname{sgn}\{(G - f)(G - F)\} + 1 = 0.$$

Le equazioni (4) e quella (5) possono perciò sostituire le diseguaglianze (2) e la limitazione (3).

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

Digitized by Google

2. Un'altra via per giungere ad una sostituzione analoga è suggerita dalle considerazioni seguenti:

Se sussiste la relazione $f < F$, $(f > F)$, cosicchè la differenza $f - F$ sia negativa (positiva), allora aggiungendo alla somma $f \operatorname{sgn} f + F \operatorname{sgn} F$ dei valori assoluti dei due termini la differenza $f - F$ fra il primo ed il secondo, si ottiene un valore minore (maggiore) di quello che si ha aggiungendo alla stessa somma la differenza $F - f$ fra il secondo e il primo. Ne segue che debbono esser verificate le due equazioni [1].

$$(6)\quad I\frac{f\operatorname{sgn} f + F\operatorname{sgn} F + f - F}{f\operatorname{sgn} f + F\operatorname{sgn} F + F - f} = o \qquad I\frac{f\operatorname{sgn} f + F\operatorname{sgn} F + F - f}{f\operatorname{sgn} f + F\operatorname{sgn} F + f - F} = o$$

ovvero

$$(7\,a)\quad f\operatorname{sgn} f + F\operatorname{sgn} F + f - F = \{f\operatorname{sgn} f + F\operatorname{sgn} F + F - f\}\,I^{-1}\,o$$

$$(7\,b)\quad f\operatorname{sgn} f + F\operatorname{sgn} F + F - f = \{f\operatorname{sgn} f + F\operatorname{sgn} F + f - F\}\,I^{-1}\,o$$

valevoli qualunque sia il segno tanto di f che di F.

Queste equazioni si semplificano se si suppone ad es. che F assuma solo valori positivi, perchè allora diventano

$$(8\,a)\qquad f(\operatorname{sgn} f + 1) = \{f(\operatorname{sgn} f - 1) + 2F\}\,I^{-1}\,o$$

$$(8\,b)\qquad f(\operatorname{sgn} f - 1) + 2F = f(\operatorname{sgn} f + 1)\,I^{-1}\,o.$$

La semplificazione è anche maggiore quando anche f prende solo valori positivi, perchè in tal caso si ha

$$(9)\qquad a)\quad f = F\,I^{-1}\,o \qquad b)\quad F = f\,I^{-1}\,o$$

e queste equazioni sono in molti casi sufficienti.

La limitazione (3) infine, significando che la funzione G può assumere tutti i valori compresi nell'intervallo da f a $f + (F - f)$ ne segue immediatamente che essa equivale alla equazione

$$(10)\qquad G = f + (F - f)\,I^{-1}\,o.$$

II.

3. Le sostituzioni innanzi indicate di diseguaglianze e limitazioni con ordinarie equazioni sono particolarmente importanti nella geometria analitica: ciò apparirà meglio da quanto brevemente verrà esposto qui appresso.

(1) In queste equazioni ho, al solito, indicato col simbolo Ix la funzione « intiero di x » e con $I^{-1}(N)$ la corrispondente funzione inversa « numero la cui parte intiera è N » (così definita nella precedente mia Nota « R. C. », sed. 22 aprile 1923). In conformità a tale definizione il simbolo $I^{-1}\,o$ indica l'insieme di tutti i numeri reali appartenenti all'intervallo $o\,|\,+1$.

Digitized by Google

4. Posto dapprima nelle (2) z invece di $f(xyz\cdots)$ e $F(xy)$ invece di $F(xyz\cdots)$, se $F(xy)$ è una funzione che assume valori reali e positivi in tutti i punti del piano allora, (4 *b*) e (8 *a*), le due equazioni

$$\text{(11 } a\text{)} \qquad \operatorname{sgn}\{z - F(xy)\} - 1 = 0$$

$$\text{(11 } b\text{)} \qquad z(\operatorname{sgn} z + 1) = \{z(\operatorname{sgn} z - 1) + 2F(xy)\}\, I^{-1}\, 0$$

rappresentano rispettivamente la regione dello spazio al disopra e quella al disotto della superficie $z = F(xy)$.

Analogamente, nel piano, le due equazioni

$$\text{(12 } a\text{)} \qquad \operatorname{sgn}\{y - Fx\} + 1 = 0$$

$$\text{(12 } b\text{)} \qquad Fx = y I^{-1}\, 0$$

rappresentano rispettivamente tutta la regione del piano al disotto di una linea $y = Fx$ che giace tutta nel semipiano delle y positive e tutta la regione del piano al disopra della stessa linea.

Infine, posto x invece di $f(xyz\cdots)$ e $+K$ invece di $F(xyz\cdots)$ le due equazioni

$$\text{(13 } a\text{)} \qquad \operatorname{sgn}(x - K) + 1 = 0$$

$$\text{13 } b\text{)} \qquad 2K = x\{1 + \operatorname{sgn} x\}\, I^{-1}\, 0$$

corrispondenti rispettivamente alla (4 *a*) ed alla (8 *b*) rappresentano, sulla retta, la prima il segmento indefinito $-\infty$, $+K$ a sinistra di K e la seconda il segmento indefinito $+K$, $+\infty$ a destra di K.

5. Data una superficie chiusa $\varphi(xyz) = 0$, se la funzione $w = \varphi(xyz)$ è tale che prende segni diversi all'interno ed all'esterno della superficie, essendo per es. positiva e limitata all'interno con un valore massimo $+K$, e negativa all'esterno, allora le due equazioni

$$\text{(14 } a\text{)} \qquad \varphi(xyz) = K I^{-1}\, 0$$

$$\text{(14 } b\text{)} \qquad \operatorname{sgn}\varphi(xyz) + 1 = 0$$

rappresentano rispettivamente la regione dello spazio racchiusa dalla superficie e quella esterna ad essa.

Analogamente nel piano le due equazioni

$$\text{(15 } a\text{)} \qquad \varphi(xy) = 1 - (I^{-1}\, 0)^{-1}$$

$$\text{(15 } b\text{)} \qquad \operatorname{sgn}\varphi(xy) - 1 = 0$$

(1) Si suppone qui cioè che la superficie $w = \varphi(xy)$ non sia tangente al piano XOY lungo la linea $(xy) = 0$, le considerazioni dei casi singolari e quelle dei valori al contorno essendo omesse in questo scritto per ragioni di spazio.

Digitized by Google

rappresentano rispettivamente la regione del piano esterna e quella interna alla linea $\varphi(xy) = 0$ tale che la funzione $w = \varphi(xy)$ è positiva all'interno della linea ed è negativa all'esterno di essa prendendo tutti i valori da 0 a $-\infty$ [1].

Infine posto $x \operatorname{sgn} x = K$, le due equazioni

$$(16) \qquad a) \quad x \operatorname{sgn} x = K I^{-1} 0 \qquad b) \quad K = x \operatorname{sgn} x I^{-1} 0$$

rappresentano, sulla retta, la prima il segmento finito $-K$, $+K$ e la seconda l'insieme dei due segmenti indefiniti $-\infty$, $-K$ e $+K$, $+\infty$ esterni al primo.

6. Se si ha una superficie data in coordinate polari $\rho = F(\varphi\theta)$ le equazioni (14) del paragrafo precedente diventano

$$(17\,a) \qquad \rho = F(\varphi\theta) I^{-1} 0$$

$$(17\,b) \qquad \operatorname{sgn}\{F(\varphi\theta) - \rho\} + 1 = 0$$

e sono notevoli i casi delle due equazioni semplicissime

$$(18) \qquad a) \quad \rho = R I^{-1} 0 \qquad b) \quad R = \rho I^{-1} 0$$

che rappresentano rispettivamente la sfera solida di raggio R e lo spazio esterno ad essa.

7. Infine, venendo alle limitazioni del tipo (3), se $f(xy)$ e $F(xy)$ sono due funzioni che hanno entrambe valori reali in tutti i punti del piano, allora l'equazione

$$(19) \qquad z = f(xy) + \{F(xy) - f(xy)\} I^{-1} 0$$

rappresenta lo strato dello spazio compreso fra le due superfici $z = f(xy)$ e $z = F(xy)$.

Analogamente nel piano l'equazione

$$\rho = f(\varphi) + \{F(\varphi) - f(\varphi)\} I^{-1} 0$$

rappresenta la corona annulare compresa fra le due linee $\rho = f(\varphi)$ e $\rho = F(\varphi)$ se entrambe sono linee chiuse e l'equazione

$$(20) \qquad \operatorname{sgn}\{(x - a)(x - b)\} - 1 = 0$$

rappresenta, sulla retta, il segmento che ha per estremi i punti di ascisse $+a$, $+b$.

Digitized by Google

8. Osservazione I. – Si noti che, data l'equazione di una linea piana $y = f(x)$, ponendo in questa in luogo di x le espressioni corrispondenti alla (13 b) ed alla (10), si hanno due equazioni

$$(21) \qquad y = f\{ KI^{-1} o \}$$

$$(22) \qquad y = f\{ a + (b - a) I^{-1} o \}$$

che rappresentano la porzione della linea $y = f(x)$ a destra del punto di ascissa + K ed il segmento finito della stessa linea compreso fra i punti di essa di ascissa + a, + b.

9. Osservazione II. - Cercando l'intersezione di una retta, per es. $\rho \cos \varphi = r$ con il circolo $\rho = RI^{-1} o$ si ottiene come risultato la corda $r/\cos \varphi = RI^{-1} o$.

Analogamente come intersezione della sfera solida $x^2 + y^2 + z^2 = RI^{-1} o$ con un piano, per es. $z = a$, si ottiene il circolo $x^2 + y^2 = R^2 I^{-1} o - a^2$.

Cercando l'intersezione di due aree del piano si ottiene come risultato la regione comune ad entrambe. Così dati i due circoli $(x + a)^2 + y^2 = r^2 I^{-1} o$, $(x - b)^2 + y^2 = R^2 I^{-1} o$, dove si suppone $r^2 - a^2 = R^2 - b^2 = c^2$, la loro intersezione è data dalla equazione

$$(23) \quad \{(x + a)^2 + y^2 - r^2 I^{-1} o\}^2 + \{(x - b)^2 + y^2 - R^2 I^{-1} o\}^2 = o$$

che rappresenta la sezione meridiana della lente biconvessa con raggi di curvatura r, R.

L'intersezione di due solidi è un solido, cioè la parte di spazio comune ai due corpi. Così, come intersezione dei due diedri $x \operatorname{sgn} x + y = a$, $z \operatorname{sgn} z + y = -b$, si ha il tetraedro

$$(24) \qquad \{x \operatorname{sgn} x + y - a\}^2 + \{z \operatorname{sgn} z + y + b\}^2 = o.$$

10. Osservazione. III. - Nel mentre le ordinarie equazioni della geometria analitica non rappresentano che delle linee nel piano e delle superfici nello spazio, l'uso fatto nei paragrafi precedenti della funzione inversa di Ix la quale ad un punto dell'ascissa, o del piano, fa corrispondere un intiero segmento di retta nel piano, o nello spazio, ha permesso di rappresentare con equazioni delle aree nel piano e dei corpi solidi nello spazio.

Lo stesso risultato si può ottenere con qualsiasi altra funzione la quale ad un valore unico della variabile fa corrispondere un insieme di valori avente la potenza del continuo.

Digitized by Google

Tale è, ad esempio, la funzione inversa di sgn x, esistente per tre soli valori della variabile e cioè $\text{sgn}^{-1}(+1)$, $\text{sgn}^{-1}(1)$, $\text{sgn}^{-1}(0)$ ai quali corrispondono rispettivamente tutto l'insieme dei numeri reali positivi, quello dei numeri reali negativi e lo zero.

Introdotto questo simbolo se si risolve per es. la (12 a) rispetto ad y si trova $y = \text{sgn}^{-1}(-1) + Fx$, relazione esprimente che al punto dell'asse ox di ascissa x corrisponde il segmento della parallela all'asse delle y passante per esso, che si stende da $+ Fx$ $- \infty$.

Matematica. — *Ancora sulla ricerca della funzione primitiva per le funzioni di più variabili.* Nota di E. PINI, presentata [1] dal Corrisp. L. TONELLI.

In una Nota precedente [2] abbiamo poste alcune definizioni e dimostrato un lemma di cui ora ci serviremo per giungere al seguente risultato:

Dalla conoscenza della $s(x,y)$, *finita sul rettangolo* R *ad eccezione d'un insieme di punti proiettantesi sopra uno degli assi* x *e* y *secondo un insieme numerabile, si perviene alla funzione primitiva* $f(x,y)$ *a meno di una funzione* $g(x) + h(y)$ *mediante un'infinità numerabile al più di operazioni.*

1. - Conservando le notazioni della Nota già citata, osserviamo che se la $f(x,y)$ è della forma $g(x) + h(y)$ sopra un rettangolo r, si ha sempre $\Delta(f,r) = 0$; perciò $\Delta(f,r)$ non cambia di valore se si sostituisce la $f(x,y)$ con la $f(x,y) + g(x) + h(y)$.

In particolare, si può sempre sostituire la $f(x,y)$ con la $f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)$, cioè si può sempre supporre che la $f(x,y)$ si annulli sopra gli assi x e y quando si vuole considerare soltanto il valore di $\Delta(f,r)$. Con questa ipotesi, che non è restrittiva, si dimostra che se la $s(x,y)$ è data nel rettangolo R, finita su R ad eccezione d'un insieme di punti che si proiettano sull'asse x secondo un insieme numerabile A, la funzione $f(x,y)$ ammette, per tutti gli x non appartenenti ad A, la derivata parziale $f'_x(x,y)$ rapporto ad x finita, continua e derivabile rispetto ad y e tale che $f''_{x,y}(x,y) = s(x,y)$ [3]

2. - Se si suppone che la $s(x,y)$ sia integrabile secondo Lebesgue sopra un rettangolo r, si dimostra l'uguaglianza $\Delta(f,r) = \iint_r s(x,y)\,dx\,dy$.

(1) Nella seduta del 1° maggio 1927.

(2) Questi « Rendiconti », vol. V (1927), p. 563.

(3) H. LOOMAN, *Sur la totalisation des derivées des fonctions continues de plusieurs variables indipendentes*, « Fundamenta Mathematicae », t. IV, 1922.

Digitized by Google

Quindi per tutti i rettangoli r_1, a vertici razionali sui quali la $s(x,y)$ è integrabile, potremo calcolare $\Delta(f,r_1)$ mediante la formula

$$\Delta(f,r_1) = \iint_{r_1} s(x,y)\,dx\,dy .$$

L'integrazione la diremo *prima operazione.*

Se $\bar{r}$ è un rettangolo a vertici razionali, ed r_n è un rettangolo variabile interno ad $\bar{r}$, tendente ad $\bar{r}$ e tale che su di esso si conosca $\Delta(f,r_n)$, si potrà calcolare $\Delta(f,\bar{r})$ mediante l'eguaglianza $\Delta(f,\bar{r}) = \lim \Delta(f,r_n)$. Il calcolo di Δ mediante questa operazione lo diremo *seconda operazione.*

Supponiamo che i due rettangoli r_2 ed r_2' abbiano un lato in comune e siano situati da parti opposte a questo lato; supponiamo inoltre che su r_2 ed r_2' si conosca $\Delta(f,r_2)$ e $\Delta(f,r_2')$. Indichiamo con r_3 la riunione di r_2 ed r_2'. Per definizione di Δ si ha $\Delta(f,r_3) = \Delta(f,r_2) + \Delta(f,r_2')$. Il calcolo di Δ ottenuto in questa maniera lo diremo *terza operazione.*

3. - Sia E l'insieme dei punti di R in vicinanza dei quali la $s(x,y)$ non è integrabile (intendiamo sempre nel senso di Lebesgue); si può facilmente verificare che E è *chiuso e non denso su tutto* R.

Se E non è *di prima specie in sè stesso*, contiene necessariamente dei punti M, centri di rettangoli r, tali che l'uno almeno dei due insiemi $E_x(r), E_y(r)$, proiezioni sopra gli assi x ed y della $E(r)$, è numerabile; inoltre E può contenere dei punti M_1 tali che, se r_1 è un rettangolo qualunque contenente M_1 nel suo interno, gli insiemi $E_x(r_1), E_y(r_1)$ sono l'uno e l'altro non numerabili; questi punti costituiscono un insieme E_1 che risulta *chiuso.* Indichiamo con E_2 l'insieme dei punti di E_1 che non sono centri di rettangoli r_2 tali che uno almeno dei due insiemi $E_{1,x}(r_2), E_{1,y}(r_2)$ sia numerabile; l'insieme E_2 è *chiuso.* Così proseguendo transfinitamente definiamo in modo analogo gli insiemi $E_3, E_4, \cdots, E_\omega, E_{\omega+1}, \cdots, E_{2\omega}, \cdots$ ognuno dei quali è chiuso e contenuto nel precedente o, se il precedente non esiste, appartiene alla parte comune a tutti i precedenti.

Se nessuno di questi E è nullo, in virtù del teorema di Cantor esiste un numero β a partire dal quale gli insiemi cousiderati sono tutti identici $E_\beta = E_{\beta+1} = \cdots = P$ con $E_{\beta-1} \neq P$. L'insieme P così determinato è costituito di punti di E, è chiuso e di prima specie in sè stesso, se non è nullo. Si dimostra che *se r_0 è un rettangolo qualunque non contenente dei punti di* P *nel suo interno, $\Delta(f,r_0)$ può essere calcolato applicando un numero finito od un'infinità numerabile di volte la prima, seconda e terza operazione.*

4. - Consideriamo l'insieme P or ora definito. Se P fosse nullo, la nostra proposizione sarebbe dimostrata; supponiamolo dunque non nullo. Esso è contenuto in R, è chiuso, di prima specie in se stesso, e quindi perfetto. Indichiamo ora con I l'insieme dei punti di P in vicinanza dei quali $\Delta(f,r)$ non è *calcolabile* relativamente a P. Evidentemente I è *chiuso;*

Digitized by Google

vogliamo dimostrare che I è anche non denso su tutto P. Basterà dimostrare che ogni porzione di P contiene un punto nella vicinanza del quale $\Delta(f, r)$ è *calcolabile.*

Infatti per il lemma del n. 4 della Nota già citata si può sempre determinare una porzione $P(r')$ ed un numero A positivo in modo che per ogni punto della $P(r')$ e per tutti gli u e v tali che $(x+u, y+v)$ appartenga ad R, valga la disuguaglianza:

$$(1) \quad \left|\frac{\Delta(f,r)}{uv}\right| = \left|\frac{f(x+u,y+v) - f(x+u,y) - f(x,y+v) + f(x,y)}{uv}\right| < A.$$

Sulla $P(r')$ la $s(x,y)$ è perciò limitata e quindi su questa porzione essa è integrabile. Sia $r_1 \{ a_1 \leq x \leq b_1, c_1 \leq y \leq d_1 \}$ un rettangolo appartenente ad r' e sia $P(r_1)$ una porzione effettiva di P. Consideriamo la funzione di x continua $\varphi(x) = \varphi(x, c_1, d_1) = f(x, d_1) - f(x, c_1)$. Se indichiamo con x_0 i punti dell'asse x che non sono proiezioni dei punti nei quali la $s(x,y)$ assume il valore $\pm \infty$, la $s(x,y)$ è finita per ogni punto dell'insieme di rette $x = x_0$. Possiamo supporre che la $f(x,y)$ si annulli sopra gli assi; per questo e per il teorema enunciato al n. 1 possiamo affermare che la $f(x,y)$ ammette derivata finita rapporto ad x per ogni punto (x_0, y) ed in particolare per $(x_0, c_1), x_0, d_1)$. Siccome i punti dove $s(x,y)$ è $\pm \infty$ si proiettano sull'asse x secondo un insieme numerabile, possiamo dire che la $\varphi(x)$ ammette derivata $\varphi'(x) = f'_x(x, d_1) - f'_x(x, c_1)$ per ogni x dell'intervallo (a_1, b_1) ad eccezione d'un insieme numerabile di punti. Se indichiamo con (α_m, β_m) gli intervalli contigui della $P_x(r_1)$ si verifica, in virtù della (1) la disuguaglianza:

$$\left|\frac{\varphi(\beta_m) - \varphi(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| < 2A(d_1 - c_1) < N.$$

Ne segue che sulla porzione $P(r_1)$ la serie $\sum \{ \varphi(\beta_m) - \varphi(\alpha_m) \}$ è assolutamente convergente. Ma sulla $P(r_1)$, sempre in virtù della (1), si ha pure: $\left|\frac{\varphi(x+u) - \varphi(x)}{u}\right| < 2A(d_1 - c_1)$; quindi passando al limite per u tendente allo zero: $|\varphi'(x)| \leq 2A(d_1 - c_1) < M$.

Risulta allora che nell'intervallo (a_1, b_1), $\varphi'(x)$ è integrabile secondo Denjoy; perciò potremo scrivere:

$$(2) \quad \Delta(f, r_1) = \varphi(b_1) - \varphi(c_1) = \int_{P_x(r_2)} \{ f'_x(x, d_1) - f'_x(x, c_1) \}\, dx + \sum \{ \varphi(\beta_m) - \varphi(\alpha_m) \}.$$

Indichiamo con $\omega_1, \omega_2 \cdots, \omega_n, \cdots$ una successione di numeri positivi decrescenti e tendenti allo zero e con $D_1, D_2, \cdots D_n \cdots$ i corrispondenti campi relativi al rettangolo r_1, definiti come si è detto nel n. 2 della

Digitized by Google

Nota già citata. Un generico campo D resta suddiviso in rettangoli ρ, e se n è sufficientemente grande, vi saranno fra i rettangoli ρ dei rettangoli ρ_h con i lati orizzontali su $y = c_1$, $y = d_1$, ed altri rettangoli ρ_k non soddisfacenti a questa proprietà. Si avrà:

$$V(f,D) = \sum \Delta(f,\rho) = \sum \Delta(f,\rho_h) + \sum \Delta(f,\rho_k).$$

Se indichiamo con (α,β) gli intervalli proiezione sull'asse x dei ρ_h, essi appartengono agli intervalli contigui (α_m,β_m) di $P_x(r_1)$. Quindi

$$\sum \Delta(f,\rho_h) = \sum \{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)\}.$$

Si dimostra facilmente che per n tendente all'infinito la $\sum \{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)\}$ tende alla serie assolutamente convergente $\sum \{\varphi(\beta_m) - \varphi(\alpha_m)\}$, cioè che è

$$\lim \sum \Delta(f,\rho_h) = \lim_{n=\infty} \sum \{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)\} = \sum \{\varphi(\beta_m) - \varphi(\alpha_m)\}.$$

Resta da considerare la $\sum \Delta(f,\rho_k)$. Indichiamo con $i_x(\gamma_m,\delta_m)$ gli intervalli contigui dell'insieme comune a $i_x(c_1,d_2)$ e $P(r_1)$. L'insieme comune ad una retta $x = x_0$ ed al campo D è un numero finito d'intervalli interni agli intervalli contigui dell'intersezione di $P(r_1)$ con la $x = x_0$, tendenti verso il sistema d'intervalli contigui se ω_n tende allo zero. Riprendiamo la (2) ed osserviamo che:

$$f'_x(x,d_1) - f'_x(x,c_1) = (D)\int_{c_1}^{d_1} s(x,y)\,dx\,dy = \int_{P(r_1),x_i} s(x,y)\,dy + \sum \{f'_x(x,\delta_m) - f'_x(x,\gamma_m)\}$$

dove con $P(r_1),x_i$ indichiamo l'insieme dei punti di $P(r_1)$ appartenenti alle parallele all'asse y per ogni punto $x = x_i$. Abbiamo

$$\int_{P_x(r_1)} \{f'_x(x,d_1) - f'_x(x,c_1)\}\,dx = \int_{P_x(r_1)} \left\{ \int_{P(r_1),x_i} s(x,y)\,dy \right\} dx +$$

$$+ \int_{P_x(r_1)} \sum \{f'_x(x,\delta_m) - f'_x(x,\gamma_m)\}\,dx = \iint_{P(r_1)} s(x,y)\,dx\,dy +$$

$$+ \int_{P_x(r_1)} \sum \{f'_x(x,\delta_m) - f'_x(x,\gamma_m)\}\,dx.$$

Sostituendo questi valori nella (2) si ha

$$\Delta(f,r_1) = \iint_{P(r_1)} s(x,y)\,dx\,dy + \int_{P_x(r_1)} \sum \{f'_x(x,\delta_m) - f'_x(x,\gamma_m)\}\,dx +$$

$$+ \sum \{\varphi(\beta_m) - \varphi(\alpha_m)\}.$$

Digitized by Google

Si dimostra facilmente che l'espressione

$$\int_{P_x(r_1)} \sum \{ f'_x(x, \delta_m) - f'_x(x, \gamma_m) \} \, dx$$

è il limite di $\sum \Delta(f, \rho_k)$ per ω_n tendente allo zero. Si ha quindi che l'espressione (2) per ω_n tendente allo zero diventa:

$$\Delta(f, r_1) = \iint_{r_1} \sigma(x, y) \, dx \, dy + \lim \sum \Delta(f, \rho_h) + \lim \sum \Delta(f, \rho_k)$$

che possiamo scrivere

$$\Delta(f, r_1) = \iint_{r_1} \sigma(x, y) \, dx \, dy + \lim_{\omega_n = 0} V(f, D).$$

In questa maniera si è dimostrato che l'insieme I dei punti in vicinanza dei quali $\Delta(f, r)$ non è calcolabile è *non denso* su P.

5. - Sia ora r_0 un rettangolo a vertici razionali appartenente ad R e non contenente nessun punto di I nè internamente, nè sul contorno; ogni punto M di r_0 è centro d'un massimo quadrato γ di semilato $u(M)$ tale che Δ è calcolabile sopra ogni rettangolo r' interno a γ. Il limite inferiore di u è un numero μ positivo. Dividiamo r_0 in un numero finito di rettangoli r'_0 di lati minori di μ e calcoliamo i numeri $\Delta(f, r'_0)$. Si può così determinare $\Delta(f, r_0)$ essendo $\Delta(f, r_0) = \sum \Delta(f, r'_0)$. Sia ora r_1 un rettangolo a vertici razionali contenente dei punti di I sul contorno ma non contenente dei punti di I nell'interno; indichiamo con r_n un rettangolo variabile interno ad r_1 e tendente ad r_1; $\Delta(f, r_n)$ è allora conosciuto; si può calcolare $\Delta(f, r_1)$ mediante l'operazione $\Delta(f, r_1) = \lim \Delta(f, r_n)$. Operiamo sull'insieme I nello stesso modo in cui abbiamo operato sull'insieme E al n. 3; indichiamo con P_1 l'insieme contenuto in I che si viene a costruire e che, se non è nullo, è di prima specie in sè stesso. Si può dimostrare che $\Delta(f, r)$ è conosciuto per ogni rettangolo r non contenente nessun punto di P_1 come punto interno. L'insieme P_1 risulta *chiuso e non denso su* P. Supponendo P non nullo, indichiamo con I_1 l'insieme dei punti di P_1 in vicinanza dei quali $\Delta(f, r)$ non è calcolabile relativamente a P_1 e partendo da I_1 determiniamo, come si è fatto per I, l'insieme P_2 nullo o di prima specie in sè stesso contenuto in I_1; con lo stesso procedimento si ottiene il valore di $\Delta(f, r)$ per ogni rettangolo non contenente nessun punto di P_2 come punto interno. Proseguendo transfinitamente si viene a costruire la successione d'insiemi perfetti $P_1, P_2, \cdots, P_\omega, P_{\omega+1}, \cdots P_{2\omega}, P_{2\omega+1}, \cdots$ ciascuno dei quali è chiuso, contenuto nel precedente, e non denso sopra di esso oppure appartiene alla parte comune a tutti i precedenti quando non

Digitized by Google

esiste un ultimo precedente. Se la successione non si arrestasse ad un ultimo insieme, esisterebbe un numero transfinito β per il quale

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \cdots$$

Ma $P_{\beta+1}$ dovendo essere ovunque non denso su P_β non può, necessariamente, coincidere con P_β e resta così dimostrata l'esistenza di un ultimo insieme P_β. Applicando a questo P_β il procedimento già visto per gl'insiemi P precedenti si può determinare $\Delta(f, r)$ per ogni rettangolo a vertici razionali dopo aver eseguito soltanto un'infinità numerabile di operazioni, e così si può determinare $\Delta(f, R)$ con un'infinità numerabile di operazioni.

Matematica. — *Equazione di luoghi geometrici comprendenti un parametro al variare del quale la linea o la superficie rappresentata passa in modo continuo dalla forma poligonale o poliedrica alla forma circolare o sferica.* Nota di L. Laboccetta, presentata dal Socio Corrisp. E. Crocco.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Variazione infinitesima delle funzioni di Green relative a campi piani pluriconnessi.* Nota di G. Krall, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Meccanica. — *Sulla cinematica dei corpi rigidi nella relatività generale.* Nota di G. THOMSEN, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Questa Nota fa seguito ad un'altra apparsa recentemente in questi « Rendiconti » [2]. Qui noi vogliamo introdurre la nozione di rigidità per il moto di un sistema materiale dal punto di vista relativistico. A questo proposito va notato anzi tutto che, mentre nella impostazione classica - [e in certo senso anche nella relatività ristretta [3]] - si possono considerare corpi rigidi comunque estesi, nella relatività generale bisogna necessariamente limitarsi ad un sistema di punti, le cui linee orarie nel cronotopo siano sufficientemente prossime.

2. Nella cinematica classica del corpo rigido si suole decomporre il suo moto in una traslazione definita da un suo punto P, fissato ad arbitrio, - [per lo più si sceglie il baricentro] - e in una rotazione intorno a questo punto P:

Se si indicano genericamente con $\bar{x}^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) le coordinate cartesiane di un punto qualsiasi rispetto ad un sistema fisso nello spazio e in particolare con x^α quelle di P, allora il moto di P è determinato dalle funzioni $x^\alpha(t)$, dove t designa il tempo. Immaginiamo un secondo triedro mobile coll'origine in P e gli assi sempre paralleli agli assi fissi. Dette η^α le coordinate, rispetto a questo sistema, del punto che ha per coordinate $\bar{x}^\alpha$, rispetto agli assi fissi, sussistono manifestamente le relazioni

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha(t) + \eta^\alpha \qquad [\alpha = 1, 2, 3]. \tag{1}$$

D'altra parte il moto del solido si descrive nel sistema η^α come una rotazione intorno al punto fisso P. Introducendo anche un terzo sistema di assi solidali $P\zeta^1$, $P\zeta^2$, $P\zeta^3$, le coordinate ζ^α d'un punto arbitrario sono legate alle η^α da formole del tipo

$$\eta^\alpha = \sum_{\gamma=1}^{3} \xi_\gamma^\alpha(t) \cdot \zeta^\gamma \qquad [\alpha = 1, 2, 3], \tag{2}$$

dove le $\xi_\gamma^\alpha = \cos(\widehat{\eta^\alpha \zeta^\gamma})$ sono i coefficienti d'una sostituzione ortogonale,

(1) Nella seduta del 15 maggio 1927.

(2) Cfr. p. 778 di questo volume di « Rendiconti ».

(3) *Sul concetto di corpo rigido nella relatività ristretta* vedi: M. BORN, « Phys. Zeitschrift », B. 11, 1910, pp. 233-234; e « Göttinger Nachrichten », 1910, pp. 161-179.

Digitized by Google

variabili col tempo subordinatamente al moto rotatorio del solido. Le ξ_γ^α verificano - [in ogni istante t] le seguenti equazioni:

$$\delta_{\alpha\beta}\,\xi_\gamma^\alpha\,\xi_\varepsilon^\beta = \delta_{\alpha\beta} \tag{3}$$

con

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 \text{ per } \alpha = \beta \\ 0 \text{ per } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{4}$$

il segno $\sum$ è qui sottointeso. Anche in seguito ometteremo spesso il simbolo di sommatoria, quando un indice interviene doppiamente in un prodotto.

3. Introduciamo le convenzioni seguenti:
Gli indici greci

$$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, \sigma \cdots \text{ assumono i valori } 1, 2, 3,$$

gli indici latini

$$i, k, l, s, p, q \text{ più generalmente i valori } 0, 1, 2, 3.$$

Il particolare indice greco ν va da 1 fino a N, dove N rappresenta il numero dei punti materiali del nostro sistema rigido. Noi possiamo per esempio esprimere il sistema dei coseni direttori ξ_β^α mediante i tre angoli euleriani. Comunque le nove quantità ξ_β^α dipendono soltanto da tre parametri indipendenti $\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3$. Da (1) e (2) segue per il passaggio dalle ξ^α alle $\bar{x}^\alpha$:

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha(t) + \xi_\beta^\alpha(t) \cdot \xi^\gamma. \tag{5}$$

Ora, se noi abbiamo N punti materiali del nostro corpo rigido di coordinate $\bar{x}_\nu^\alpha$ $(\nu = 1, 2, \cdots, N)$, valgono per ognuno relazioni del tipo (5):

$$\bar{x}_\nu^\alpha = x^\alpha(t) + \xi_\gamma^\alpha(t)\,\xi_\nu^\gamma, \tag{6}$$

le ξ_ν designando coordinate riferite agli assi solidali. La rigidità del sistema si traduce nella circostanza, che durante il moto le ξ_ν^γ sono costanti. Dunque per la descrizione del moto del nostro sistema di punti non occorre occuparsi delle 3 N funzioni $\bar{x}_\nu^\alpha(t)$, ma basta in definitiva assegnare sei funzioni indipendenti: Le tre $x^\alpha(t)$ e le tre $\vartheta^\alpha(t)$ contenute nelle $\xi_\gamma^\alpha(t)$. Ben si intende, che le ξ_ν^α si risguardano quali costanti conosciute, che individuano i singoli punti del solido.

Digitized by Google

Se si suppone, che il moto avvenga entro un campo di forze derivanti da un potenziale U, noi possiamo determinare le equazioni del moto del corpo rigido, sia ricorrendo alle equazioni cardinali, sia a quelle di Lagrange, sia più compendiosamente a qualcuno dei principî generali della meccanica classica. Sarà bene fissare l'attenzione sul principio di Hamilton nella forma richiamata al § 2 della mia Nota precedente (1). Le sei grandezze indipendenti, contenute nelle x^α e nelle ξ^α_γ figurano come parametri lagrangiani. Formando l'espressione (2) della Nota precedente, le ζ^α_ν appariscono solamente nelle combinazioni

$$\sum_\nu m_\nu \zeta^\alpha_\nu = C^\alpha \quad ; \quad \sum_\nu m_\nu \zeta^\alpha_\nu \zeta^\beta_\nu = A^{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Notoriamente si ha $C^\alpha \equiv 0$, scegliendo come punto $P(x^\alpha)$ il baricentro. Facendo inoltre coincidere gli assi delle ζ cogli assi principali di inerzia, si ha altresì:

$$A^{\alpha\beta} = \begin{cases} A^\alpha & \text{per} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{per} \quad \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{8}$$

dove

$$\begin{cases} A^2 + A^3 = B_1, \\ A^3 + A^1 = B_2, \\ A^1 + A^2 = B_3 \end{cases} \tag{9}$$

sono i momenti principali d'inerzia B_α del solido.

4. Passiamo oramai allo schema relativistico immaginando riferito il cronotopo a coordinate arbitrarie $\bar{x}^i$ di spazio e di tempo, nelle quali l'elemento lineare abbia la forma seguente:

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ik}\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^k \ (2). \tag{10}$$

Qui ancora giova prendere in considerazione un ben determinato punto P del sistema. Le sue coordinate siano x^i e la sua linea oraria C nel cronotopo sia definita dalle funzioni

$$x^i = x^i(\tau) \tag{11}$$

(1) Cfr. alla p. 778 di questo volume di «Rendiconti», la formola (2).

(2) Riterremo al solito che x^0 sia coordinata di tempo e quindi che

$$\bar{g}_{00} > 0. \tag{10-a}$$

Le altre $\bar{x}$ designando coordinate curvilinee di spazio, sarà

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\, d\bar{x}^\alpha\, d\bar{x}^\beta \leq 0 \tag{10-b}$$

comunque si scelgano le $d\bar{x}^\alpha$.

Digitized by Google

dove τ è un parametro pel momento arbitrario che noi più tardi identificheremo spesso col tempo proprio σ della linea C, dato da

$$d\sigma^2 = (g_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k)\cdot d\tau^2 \tag{12}$$

con

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\tau}.$$

Da questo punto in poi designeremo con lettere segnate $\bar{x}^i$, $\bar{g}^{ik}$ grandezze, che si riferiscono a punti generici, esterni alla linea oraria C; al contrario con lettere non segnate le analoghe grandezze, prese per i punti di C. Così le g_{ik} vanno riguardate quali funzioni delle coordinate x^i dei punti di C. Se noi, tornando per un momento alla cinematica classica, immaginiamo i moti dei punti del nostro sistema rigido rappresentati in uno schema quadridimensionale, risultante dalle coordinate cartesiane $\bar{x}^\alpha$ e da t, la condizione della rigidità può essere espressa dicendo che in ogni « sezione spaziale » $t = \text{cost.}$ condotta per un punto della curva $x^\alpha(t)$, valgono i legami (6). Per giungere alla definizione di moto rigido nella meccanica relativistica prenderemo le mosse da una prima osservazione geometrica. Le ipersuperficie, formate da tutte le geodetiche uscenti da uno stesso punto di C e ortogonali alla curva [1], hanno, almeno nella vicinanza immediata di C, un significato del tutto analogo a quello delle sezioni spaziali $t = \text{cost.}$ La rigidità del moto dovrà trovare la sua espressione in condizioni molto simili alle (6) riferentisi alle dette ipersuperficie, che noi chiameremo a buon diritto sezioni geodetiche spaziali. L'ufficio del tempo assoluto t sarà qui assuuto dal tempo proprio σ di C.

5. Per maggior chiarezza gioverà incominciare dalla definizione di ciò, che corrisponde al movimento euclideo, puramente traslatorio d'una terna di assi ortogonali, uscenti da P. Se noi scegliamo in un punto della linea oraria C una generica terna di direzioni, ortogonali alla curva (e tra loro), e se noi le trasportiamo lungo la curva mediante il parallelismo ordinario del Levi-Civita, queste direzioni in generale - [se C non è precisamente una geodetica] - non rimarranno ortogonali a C. Ciò però accade, se noi ricorriamo anzichè al parallelismo del Levi-Civita, ad una legge modificata, usata per la prima volta da E. Fermi. Una schiera di vettori di componenti contravarianti $u^i(\sigma)$ uno dei quali esce da ciascun punto di C, si dirà proveniente da trasporto del Fermi, se vale lungo la curva C il sistema differenziale

$$du^i + \Gamma^i_{kl}\,u^k\,dx^l = -\left[g_{rl}\,u^r\left(\frac{d^2x^l}{d\sigma^2} + \Gamma^l_{pq}\frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right]dx^i \tag{13}$$

(1) « Ortogonale » si intende rispetto alla nostra metrica indefinita (12) del cronotopo.

Digitized by Google

dove le Γ^i_{kl} sono i simboli del Christoffel di seconda specie, presi per i punti di C. Geometricamente si caratterizza il vettore $u^i + \Delta u^i$, definito dalle (13) a partire da un vettore u^i, che è dato nel punto P di C, e che viene trasportato al punto consecutivo P + dP, mediante le tre proprietà seguenti, facilmente desumibili dalle (13):

A) $u^i + \Delta u^i$ forma con C in P + dP lo stesso angolo che u^i formava in P;

B) $u^i + \Delta u^i$ ha la stessa « lunghezza » di u^i;

C) $u^i + \Delta u^i$ appartiene alla giacitura determinata in P + dP dalla tangente a C e dal vettore $u^i + Du^i$, parallelo ad u^i nel senso di Levi-Civita.

Ciò posto, noi diremo, che una terna di vettori unitarî u^i_α [$\alpha = 1, 2, 3$] ortogonali alla curva oraria C e ortogonali fra di loro si muove di moto puramente traslatorio, se essa viene trasportata lungo C secondo la legge del Fermi:

$$(14) \qquad du^i_\alpha + \Gamma^i_{kl}\, u^k_\alpha\, dx^l = -\left[g_{rt}\, u^r_\alpha \left(\frac{d^2 x^t}{d\sigma^2} + \Gamma^t_{pq}\frac{dx^p}{d\sigma}\frac{dx^q}{d\sigma}\right)\right]\cdot dx^i.$$

Per le u^i_α devono valere a causa delle (10-*a*) e (10-*b*) le condizioni d'ortogonalità:

$$(15) \qquad g_{ik}\, u^i_\alpha\, u^k_\beta = -\delta_{\alpha\beta} \quad ; \quad g_{ik}\, dx^i\, u^k_\alpha = 0.$$

Basta supporre, che queste equazioni sussistano in un particolare istante, o, se si vuole, punto di C, per poter ritenere, in base alle (14) che esse rimangono soddisfatte lungo tutta la curva [1].

6. Introduciamo ora per le nostre ipersuperficie geodetiche un sistema di coordinate η^α, atto a sostituire il sistema cartesiano, considerato al n. 2 sotto la stessa designazione, con referenza alla meccanica classica. Si definisce perciò una trasformazione fra le originarie coordinate generali $\bar{x}^i$ e quattro nuove coordinate η^α e τ (parametro della linea oraria C), mediante le formole:

$$(16) \qquad \bar{x}^i = x^i + u^i_\alpha\,\eta^\alpha - \frac{1}{2}\,\Gamma^i_{kl}\, u^k_\alpha\, u^l_\beta\,\eta^\alpha\,\eta^\beta + \cdots$$

Qui le x^i, Γ^i_{kl} e le u^i_α sono funzioni definitive lungo la curva C, dunque funzioni del parametro τ della curva. Le u^i_α sono funzioni ausiliari,

(1) Un appoggio fisico abbastanza significante in favore della nostra ipotesi sul moto rigido puramente traslatorio nella meccanica relativistica è offerto da una Nota di E. Fermi, pubblicata pochi anni or sono, in questi « Rendiconti » [1922, ser. 5, vol. XXXI, *Correzione di una grave discrepanza*..., pp. 184-306]. Il Fermi, dal quale proviene la nostra definizione di moto traslatorio, è riuscito, applicandola al moto di cariche elettriche, a eliminare una grave discrepanza nella espressione della massa elettromagnetica secondo Abraham e Lorentz e secondo la teoria della relatività.

Digitized by Google

anch'esse di τ, soddisfacienti alle equazioni (14), (15). Esse risultano determinate a meno di una trasformazione ortogonale ternaria (a coefficienti costanti), che può riportarsi ad un punto particolare (del resto qualunque) di C. Questa stessa indeterminazione si riverbererà sulle coordinate η^α. Si vede facilmente, che il determinante funzionale delle $\bar{x}^i$ rapporto alle η^α e τ è diverso da zero in vicinanza della curva C. Le (16) definiscono quindi in tale intorno una effettiva trasformazione regolare fra le $\bar{x}^i$ e le η^α τ.

Il segno $+ \cdots$ del secondo membro di (16) vuol accennare alla circostanza, che noi possiamo aggiungere ancora termini arbitrarî, che siano nelle η^α d'un ordine superiore al secondo. Del resto c'importerà di prendere in considerazione solamente un intorno della curva C tanto piccolo da poter trascurare termini del terzo ordine e degli ordini superiori nelle η^α. Comunque dalle (16) segue:

1° Nelle nostre nuove coordinate la curva C ha per equazioni $\eta^\alpha = 0$.

2° I vettori u^i_α sono tangenti alle linee coordinate η^α uscenti dai vari punti P della C.

3° Le ipersuperficie $\tau =$ cost. si identificano nel già menzionato intorno di secondo ordine della curva oraria C, colle nostre ipersuperficie spaziali, ortogonali a C.

4° Come si può vedere dalla formola (16) le coordinate η^α sono geodetiche nelle ipersuperficie $\tau =$ cost. intorno alla loro intersezione con C, nel senso del Riemann.

7. Dalle coordinate η^α testè introdotte si passa ovviamente a coordinate ζ^α da potersi risguardare rigidamente collegate all'ipotetico solido, che scorre nel cronotopo in prossimità della C.

Ed ecco in qual modo.

Applicando l'ordinaria intuizione spaziale alle sezioni $\tau =$ cost., si avrà, come nel caso classico, una trasformazione ortogonale (ternaria)

$$\eta^\alpha = \xi^\alpha_\gamma \zeta^\gamma, \tag{17}$$

dove i coefficienti ξ^α_γ vanno trattati quali funzioni di τ, dipendenti dalla rotazione del solido, e sono sempre interpretabili come coseni degli angoli formati istante per istante dalle direzioni η colle direzioni ζ. Ben si intende che, – [in quanto si riferiscano a punti del sistema rigido mobile] – le (costanti) ζ^α devono ritenersi, come già le (funzioni) η^α, così piccole, che risultino per noi sistematicamente trascurabili i termini d'ordine superiore al secondo. Da (16) e (17) segue con tale approssimazione

$$\bar{x}^i = x^i + u^i_\alpha \xi^\alpha_\gamma \zeta^\gamma - \frac{1}{2} \Gamma^i_{kl} u^i_\alpha u^k_\beta \xi^\alpha_\gamma \xi^\beta_\varepsilon \zeta^\gamma \zeta^\varepsilon. \tag{18}$$

Digitized by Google

In quanto si abbia un sistema di N punti materiali $\overline{x}^i_\nu$ rigidamente collegati, valgono per ognuno di essi le formole di trasformazione

$$\text{II. (19)} \qquad \overline{x}^i_\nu = x^i + u^i_\alpha \, \xi^\alpha_\gamma \, z^\gamma_\nu - \frac{1}{2} \Gamma^i_{kl} \, u^i_\alpha \, u^k_\beta \, \xi^\alpha_\gamma \, \xi^\beta_\varepsilon \, z^\gamma_\nu \, z^\varepsilon_\nu ,$$

dove ciò che non dipende dall'indice ν è lo stesso per i vari punti del sistema. Si badi bene, che nell'ultimo termine non c'è da sommare rispetto all'indice ν, sebbene questo si trovi ripetuto. Se il moto del sistema dei punti $\overline{x}^i_\nu$ è rigido, le z^γ_ν sono costanti e per la descrizione del moto rigido, tutto si riduce a procurarsi le funzioni $x^i(\tau)$, e i nove coseni $\xi^\alpha_\beta(\tau)$, o, per essi, i tre parametri euleriani ϑ^α [dovendosi ritenere le $u^i_\alpha(\tau)$ legate alle formole (14), (15)]. A causa delle (3) e dell'arbitrarietà del parametro τ della curva oraria rimangono essenzialmente sei funzioni incognite; ossia, come è ben naturale lo stesso numero di gradi di libertà che si ha nel caso classico.

In una prossima comunicazione studieremo la dinamica di un sistema, vincolato dalle equazioni II di quest'ultimo paragrafo, applicando ad esso il principio generale (I), stabilito nel § 3 della nostra Nota precedente.

Idrodinamica. — *Azione dinamica che un liquido perfetto esercita su un solido cilindrico, di sezione qualunque, mobile in esso.* Nota di A. MASOTTI, presentata[1] dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. La determinazione dell'azione dinamica subita da un solido cilindrico mobile in un liquido perfetto mi ha già occupato in due casi particolarmente notevoli: *a*) il movimento del solido è una rotazione uniforme; *b*) il solido è un cilindro rotondo[2]. Tratto ora lo stesso problema senza alcuna limitazione riguardo al tipo di movimento o alla sezione del solido.

Considero perciò un solido cilindrico indefinito qualunque che si muove in un liquido perfetto indefinito o, eventualmente, limitato da pareti rigide cilindriche, alle quali il solido si mantiene parallelo. Il moto del solido è piano; il moto del liquido è supposto piano e irrotazionale.

Sia $O(x, y)$ un sistema cartesiano solidale con la sezione retta S del solido; u e v sieno le componenti, ad esso relative, della velocità assoluta;

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

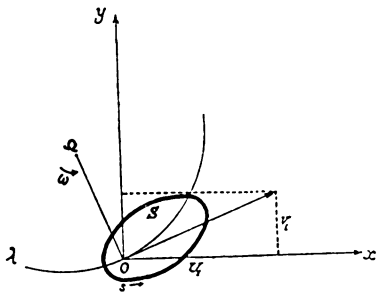
(2) V. le Note: a) *Una estensione delle formule del Blasius* (in questi « Rendiconti », vol. III, ser. 6ª, 1° sem., 1926, pp. 472-476), b) *Azione dinamica esercitata da un liquido su un cilindro rotondo mobile in esso* (« Rend. del R. Ist. Lombardo », vol. LX, fasc. I-V, 1927).

Digitized by Google

φ sia il potenziale cinetico, ψ la funzione di corrente; tutte queste grandezze sono, in generale, funzioni di x, y e del tempo t, tali che $w = u - iv$ e $f = \varphi + i\psi$ sono funzioni analitiche di $\zeta = x + iy$ (oltre che di t) e sono collegate dalla relazione

$$(1) \qquad w(\zeta, t) = \frac{\partial f(\zeta, t)}{\partial \zeta}.$$

Sieno, invece, U e V le componenti della velocità di un punto di S; giova esprimere anche questa velocità sotto forma complessa, scrivendo $W = U - iV$; W è funzione di x e y su S (contorno incluso), e di t.



Sia λ la traiettoria di O; sulla normale a λ corrispondente alla posizione che su λ assume, all'istante t, il punto O, v'è il polo Ω (proprio o improprio) del movimento di S in quell'istante; l'atto di movimento di S è una rotazione intorno ad Ω con velocità angolare ω; ciò premesso, la distribuzione dei valori di W è espressa, in ogni istante, dalla relazione

$$(2) \qquad W = W_1 - i\omega\bar{\zeta},$$

nella quale $W_1 = U_1 - iV_1$ si riferisce all'origine, e $\bar{\zeta}$ indica il coniugato di ζ [1].

Mediante questi elementi cinetici si può valutare la pressione dinamica p_d (ammesso che le forze di massa agenti sul liquido sieno conservative); detta μ la densità del liquido, sta la relazione seguente [2]:

$$(3) \qquad \frac{p_d}{\mu} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2 + v^2}{2} + \omega(xv - yu) + uU_1 + vV_1.$$

Le componenti R_x e R_y della risultante delle azioni dinamiche sopportate dall'unità di lunghezza del solido, e il momento risultante (sinistrorso) rispetto ad O, sono poi dati dalle relazioni

$$(4) \quad R_x = -\int_s p_d\, dy \quad , \quad R_y = \int_s p_d\, dx \quad , \quad M = \int_s p_d\,(x dx + y dy),$$

(1) V. Cisotti, *Lezioni di Meccanica Razionale* (Milano, Tamburini, 1926), p. 113.
(2) V. Lamb, *Hydrodynamics* (V ed., Cambridge, 1924), p. 18.

Digitized by Google

che si compendiano, sotto forma complessa, nelle due seguenti:

$$(5) \qquad R_y + iR_x = \int_s p_d \, d\bar{\zeta} \quad , \quad M = R \int_s \zeta p_d \, d\bar{\zeta},$$

nella seconda delle quali R indica «parte reale»; il contorno s di S si intende percorso in senso antiorario.

La riduzione delle (5) ad una forma analoga a quella delle formule del Blasius (forma adatta, quindi, al calcolo effettivo quando la risoluzione del problema idrocinetico abbia fornito la funzione w) conduce alle relazioni:

$$(6) \quad R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int_s w^2 \, d\zeta - i\mu\omega \overline{\int_s w\zeta \, d\zeta} - \mu \overline{\int_s \frac{\partial f}{\partial t} \, d\zeta}$$

$$+ i\mu S \frac{dW_0}{dt} + \mu\omega S W_0 + \mu W_1 C,$$

$$(7) \qquad M = \mu R \left[-\frac{1}{2} \int_s w^2 \zeta \, d\zeta + W_1 \int_s w\zeta \, d\zeta - iS\overline{W}_0 W_1 - \frac{1}{2} \int_s \frac{\partial f}{\partial t} \, d(\zeta\bar{\zeta}) \right];$$

in esse W_0 rappresenta la velocità complessa del baricentro geometrico di S, e C la circolazione lungo s:

$$(8) \qquad C = \int_s d\varphi = \int_s (u\,dx + v\,dy) \ (1).$$

(1) Se il moto di S è rotatorio giova assumere l'origine coincidente col centro di rotazione, sicchè $W_1 = 0$; si ha in tal caso:

$$(6') \quad R_y + iR_x = -\frac{\mu}{2} \int_s w^2 \, d\zeta - i\mu\omega \overline{\int_s w\zeta \, d\zeta} - \mu \overline{\int_s \frac{\partial f}{\partial t} \, d\zeta} + i\mu S \frac{dW_0}{dt} + \mu\omega S W_0,$$

$$(7') \qquad M = -\frac{\mu}{2} R \left[\int_s w^2 \zeta \, d\zeta + \int_s \frac{\partial f}{\partial t} \, d(\zeta\bar{\zeta}) \right].$$

Se, di più, la rotazione è uniforme, le precedenti divengono le (2) e (3) della mia Nota prima citata.

Nella (7) interviene un termine pel calcolo effettivo del quale non può servire il teorema di Cauchy:

$$\int_s \frac{\partial f}{\partial t} \, d(\zeta\bar{\zeta});$$

esso si annulla quando il moto del liquido è permanente rispetto al solido (ciò che si verifica quando il moto del solido è rotatorio uniforme) oppure quando la sezione S è circolare e l'origine è assunta nel suo centro; anzi in questo caso è $M = 0$; quest'ultima

Digitized by Google

2. Per la deduzione delle (6) e (7) dalle (5) si osservi che, le componenti della velocità relativa essendo $u - U_1 + \omega y$ e $v - V_1 - \omega x$, sarà soddisfatta sopra s, ch'è linea di flusso nel moto relativo, la relazione

$$(9) \qquad (u - U_1 + \omega y)\,dy - (v - V_1 - \omega x)\,dx = 0;$$

il primo membro di questa eguaglianza è il differenziale, valutato lungo s all'istante t, della funzione di corrente, ψ', del moto relativo, sicchè gli integrali che intervengono nei secondi membri delle (5) non vengono alterati dall'aggiunta di

$$-i\mu \int_s w\,d\psi' \qquad \text{e} \qquad -i\mu \int_s w\zeta\,d\psi'$$

rispettivamente; si ottiene

$$(10) \qquad R_y + iR_x = -\mu \int_s \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,d\bar{\zeta} + \frac{1}{2}\,w^2\,d\zeta - (W_1 - i\omega\bar{\zeta})\,d\varphi \right\},$$

$$(11) \qquad M = -\mu R \int_s \zeta \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,d\bar{\zeta} + \frac{1}{2}\,w^2\,d\zeta - (W_1 - i\omega\bar{\zeta})\,d\varphi \right\}.$$

Ora dalla (9) si deduce che, sopra s,

$$d\psi = u\,dy - v\,dx = U_1\,dy - V_1\,dx - \omega\,(x\,dx + y\,dy),$$

da cui

$$(12) \qquad \psi = U_1 y - V_1 x - \frac{\omega}{2}\,(x^2 + y^2) + \text{funz. di } t, \qquad \text{sopra } s.$$

circostanza, evidente *a priori*, giustificata immediatamente dalla seconda delle (5), merita di essere controllata sulla formula definitiva (7), che in questo caso diviene

$$M = \mu R \left[-\frac{1}{2} \int_s w^2 \zeta\,d\zeta + W_1 \int_s w\zeta\,d\zeta \right] = -\frac{\mu}{2}\,R \int_s (w^2 - 2\,wW_1)\,\zeta\,d\zeta.$$

Ora, sopra s, è $\zeta = re^{i\sigma}$ (indicando r il raggio del cilindro, e σ l'anomalia di un punto di s), sicchè $\zeta d\zeta = ir^2 e^{2i\sigma}\,d\sigma$; di più la condizione (9), che diviene $(u - U_1)\,dy - (v - V_1)\,dx = 0$, esprime che la funzione $(w - W_1)\,e^{i\sigma}$ è imaginaria su s, e il suo quadrato è quindi reale; ciò si può esprimere scrivendo che

$$R\,[i\,(w - W_1)^2\,e^{2i\sigma}] = R\,[i\,(w^2 - 2\,wW_1 + W_1^2)\,e^{2i\sigma}] = 0, \qquad \text{sopra } s.$$

Ne segue che

$$M = -\frac{\mu r^2}{2}\,R \int_0^{2\pi} i\,(w^2 - 2\,wW_1)\,e^{2i\sigma}\,d\sigma = \frac{\mu r^2}{2}\,R \left[iW_1^2 \int_0^{2\pi} e^{2i\sigma}\,d\sigma \right] = 0, \qquad \text{c. v. d.}$$

Digitized by Google

Moltiplicando per $d\bar{\zeta}$ ed integrando lungo s si ottiene, con facili applicazioni del teorema di Green,

$$\int_s \psi d\bar{\zeta} = -W_0 S, \tag{13}$$

essendo W_0 la velocità complessa (a norma della (2)) del baricentro geometrico di S. Posto ora nelle (10) e (11) $\varphi = \bar{f} + i\psi$, ed osservato che, in virtù della (13), è

$$\int_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\bar{\zeta} = \overline{\int_s \frac{\partial f}{\partial t} d\zeta} - iS \frac{dW_0}{dt},$$

$$\int_s \bar{\zeta} d\varphi = \overline{\int_s w\zeta d\zeta} + iS W_0,$$

è facile il passaggio dalle (10) e (11) alle (6) e (7).

Idromeccanica. — *Moti piani di un fluido incomprimibile nei quali le linee di corrente sono isotachie.* Nota di F. Sbrana, presentata [1] dal Corrisp. U. Cisotti.

1. È stato dimostrato dal prof. A. Masotti [2], che se in un moto piano permanente di un fluido incomprimibile la funzione di corrente $\psi(x, y)$ soddisfa alla condizione

$$\Delta_2 \psi = \text{funzione di } \psi,$$

(e per conseguenza le forze agenti sugli elementi fluidi sono conservative [3]), ed inoltre le linee di corrente sono *isotachie* [4], queste sono necessariamente cerchi concentrici, o rette parallele.

Scopo di questa breve Nota è di completare la ricerca del prof. Masotti, mostrando come, dalla *sola* ipotesi che le linee di corrente siano isotachie, risultino le seguenti caratteristiche del moto: 1° le linee di corrente sono rette parallele, o cerchi concentrici; 2° il vortice è costante lungo ogni linea di corrente; 3° il campo di forze agenti sugli elementi fluidi è *necessariamente* conservativo.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(2) Vedi A. Masotti, *Sopra una notevole classe di moti piani permanenti di un liquido perfetto*, « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei », anno LXXIX, Sessione II del 16 gennaio 1927.

(3) Cfr. Umberto Cisotti, *Idromeccanica piana*, Milano (1921), pp. 57-59.

(4) In altri termini, la velocità è supposta costante lungo ogni linea di corrente.

Digitized by Google

2. Riferiremo gli elementi di uno dei piani del moto ad un sistema di coordinate curvilinee ortogonali, assumendo come linee x_1 (x_2 = costante), le linee di corrente, e come linee x_2 (x_1 = costante), le loro traiettorie ortogonali. Per il quadrato dell'elemento lineare nel piano, poniamo

$$ds^2 = H_1^2\,dx_1^2 + H_2^2\,dx_2^2; \tag{1}$$

annullando la curvatura del secondo membro, troviamo intanto la condizione

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right) = 0. \tag{2}$$

Per la velocità $\mathbf{V}$ di ogni elemento fluido si ha poi

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0,$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2 V) = 0\ ^{(1)}. \tag{3}$$

Per la grandezza del vortice ω, si trova

$$\omega = -\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial}{\partial x_2}(H_1 V)\ ^{(2)}. \tag{4}$$

Quando le linee di corrente sono isotachie, V è indipendente da x_1; e dalla (3) segue che la stessa circostanza deve verificarsi per H_2. Si può allora scegliere la variabile x_2 per modo che risulti

$$H_2 = 1.$$

(1) Ricordiamo che se i punti dello spazio sono riferiti a coordinate curvilinee ortogonali x_1, x_2, x_3, e per il quadrato dell'elemento lineare si ha

$$ds^2 = H_1^2\,dx_1^2 + H_2^2\,dx_2^2 + H_3^2\,dx_3^2,$$

risulta

$$H_1 H_2 H_3 \operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x_1}(H_2 H_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(H_3 H_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(H_1 H_2 v_3),$$

dove v_1, v_2, v_3 sono le componenti di $\mathbf{V}$ secondo le linee x_1, x_2, x_3. Nel caso nostro si dovrà porre

$$H_3 = 1 \quad ; \quad v_2 = v_3 = 0 \quad , \quad v_1 = V.$$

(2) Con le notazioni usate nella postilla precedente, si ha, in generale,

$$H_2 H_3 \omega_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}(H_3 v_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(H_2 v_2),$$

$$H_3 H_1 \omega_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}(H_1 v_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(H_3 v_3),$$

$$H_1 H_2 \omega_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}(H_2 v_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(H_1 v_1).$$

Dovremo poi supporre $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \omega$.

Digitized by Google

Dalla (2) discende poi subito

$$H_1 = ax_2 + b,$$

con a, b costanti.

Per $a = 0$, sostituendo x_1 a bx_1, si trova

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2.$$

Le linee di corrente sono rette parallele. E poichè $H_1 = H_2 = 1$, è

$$\omega = -\frac{dV}{dx_2}.$$

Il vortice è costante lungo ogni linea di corrente. Il moto è irrotazionale solo per V costante entro tutta la massa fluida (cioè in un moto di traslazione).

Per $a \neq 0$, sostituendo x_1 e x_2 rispettivamente ad ax_1 e $x_2 + \frac{b}{a}$, si trova

$$ds^2 = x_2^2 dx_1^2 + dx_2^2.$$

Evidentemente, x_2 e x_1 si identificano con le coordinate polari ρ (raggio vettore) e θ (anomalia) relative a un determinato polo. Le linee di corrente, $x_2 =$ costante, sono i cerchi col centro nel polo; e posto

$$V = f(x_2) = f(\rho),$$

dalla (4) risulta

$$\omega = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[\rho f(\rho)].$$

Il vortice è ancora costante lungo ogni linea di corrente. Il moto sarà irrotazionale soltanto quando sia

$$V = \frac{c}{\rho},$$

con c costante.

3. Se nel piano del moto si fissa un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, e si indica con ψ la funzione di corrente, si ha, notoriamente,

$$\omega = -\Delta_2 \psi = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right).$$

Quando le linee di corrente sono isotachie, ω (per quanto abbiamo osservato) è funzione di ψ; e quindi il fluido è soggetto necessariamente a forze conservative (1).

(1) Cfr. U. Cisotti, loc. cit., p. 59.

Digitized by Google

Naturalmente anche V è funzione di ψ. D'altra parte

$$V^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2;$$

per conseguenza l'equazione funzionale

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \text{funzione di } \psi,$$

è caratteristica per il problema proposto. Da quanto precede segue che questa equazione è soddisfatta soltanto per ψ funzione di r, con

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

ed a, b costanti.

Meccanica. — *Sulla dinamica dei corpi rigidi nella relatività generale.* Nota di G. Thomsen presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Astronomia. — *Una nuova stella variabile.* Nota di G. B. Lacchini, presentata [1] dal Corrisp. A. Bemporad.

L'esame delle lastre fotografiche eseguite per la compilazione del Catalogo Internazionale, avendo per scopo principale le misure di posizione, raramente porta alla non meno importante determinazione delle differenze di splendore presentate dalle stelle a varie epoche: uno dei rari casi è accaduto recentemente al prof. A. Bemporad (che alla parte fotometrica rivolge singolare attenzione).

Dall'esame di tre lastre della zona di Catania:

N. 218 del 1897 - I - 12
» 1850 » 1902 - XII - 18
» 1946 » 1903 - II - 7

potè rilevare la notevole variazione di splendore della stella in posizione

$$\alpha\ (1900.0)\ 6^h\ 20^m\ 5^s.01 \qquad \delta + 47°\ 5'\ 22''.6$$

confrontandola con le altre due stelle

	α 1900	δ 1900	Gr.
a	$6^h\ 19^m\ 7^s.52$	$47°\ 2'\ 36''.9$	10.8
b	$6^h\ 20^m\ 24^s.83$	$47°\ 4'\ 45''.7$	11.0

Avendomi egli comunicata la sua scoperta alla fine del gennaio u. s. e pregato di verificare visualmente il fenomeno, presi subito ad osservare la stella sin dal 1° febbraio.

Nella *Bonner Durchmusterung* di Argelander non risultava presente la stella in parola; invece all'osservazione diretta questa si trovò maggiore della + 47° 1298 che è riportata come di grandezza 9.0; il colore fu subito notato giallo.

Più o meno regolarmente, a seconda dell'impedimento frappostomi dalla nebulosità del cielo e più ancora dalle mie occupazioni personali, al 15 maggio si erano raccolte n. 24 osservazioni sufficienti alla deduzione di una rappresentazione grafica della variazione luminosa, che qui si allega.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

Digitized by Google

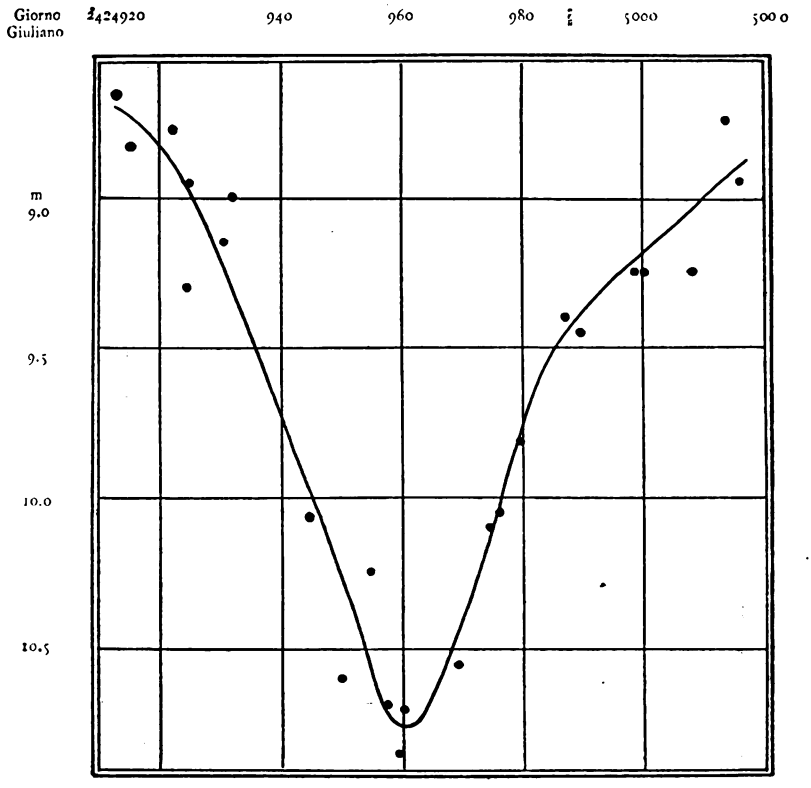


Fig. 1. – Curva di luce della Variabile dal 1° febbraio al 15 maggio 1927

Le osservazioni furono eseguite col metodo delle stime di Argelander il grado con grande approssimazione, nel mio caso, può essere assunto come equivalente ad un decimo di grandezza stellare, esse sono esposte nella seguente tabella.

Data 1927	Ora T. U.	Grand.	Data 1927	Ora T. U.	Grand.	Data 1927.	Ora T. U.	Grand.
Febbr. 1	18h 10m	8.66	Marzo 10	18h 45m	10.60	Aprile 8	19h 7m	9.81
» 4	7 36	8.83	» 13	19 12	10.25	» 13	19 30	9.40
» 10	18 42	8.77	» 17	20 44	19.68	» 18	20 2	9.45
» 13	2 35	9.30	» 18	19 35	10.85	» 27	21 38	9.25
» 13	18 18	8.95	» 20	19 34	10.70	» 29	21 49	9.25
» 19	20 40	9.15	» 29	19 25	10.55	Magg. 6	20 2	9.25
» 20	18 3	9 —	Aprile 3	20 50	10.10	» 12	20 30	8.75
Marzo 4	20 23	10 06	» 5	20 14	10.05	» 15	20 10	8.95

Digitized by Google

Per il primo periodo si può stabilire una grandezza massima di $8^m 7$ e minima di $10^m 8$ in base alle grandezze delle stelle di confronto seguenti:

	M	M
B = 8.8	$d = 10.3$	$e = 10.5$
$b = 9.\overline{7}$	$c = 10.3$	$f = 10.85$

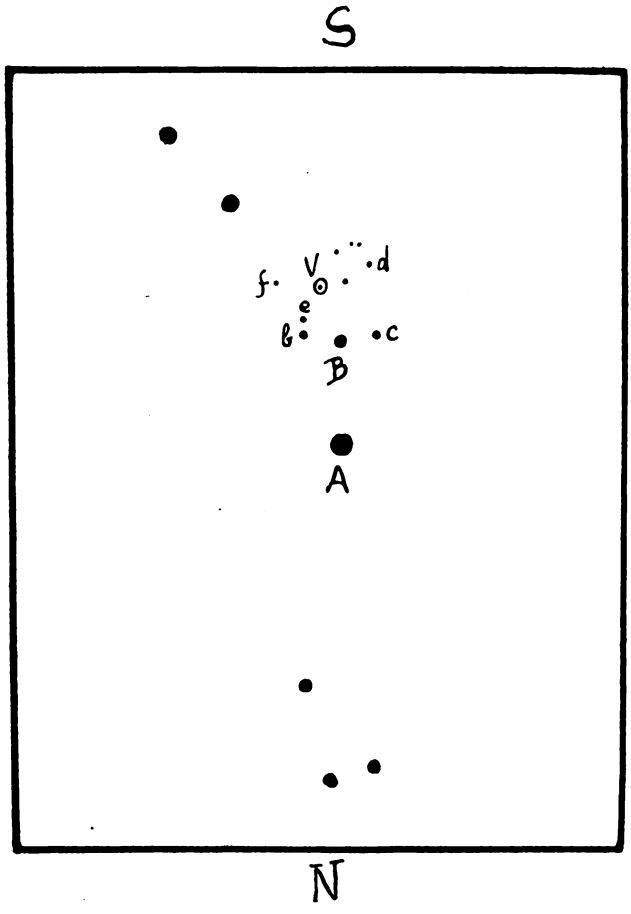


Fig. 2. - Schizzo dei dintorni della Variabile

		Grand.	
V = Variabile			
A = BD + 47°	1299	6.92 (PD)	
B = BD + 47°	1298	8.8	
b = BD + 47°	1301	9.7	Grandezze derivate dalle stime successive con la V e prendendo come base la grandezza della stella B.
d		10.3	
c		10.5	
e		10.5	
f		10.85	

Digitized by Google

Il colore, giallo in corrispondenza al massimo, diviene arancio con l'indebolirsi della luce.

Dalla rappresentazione grafica della variazione luminosa si può vedere come le singole osservazioni poco si discostano da una curva tracciata senza inflessioni secondarie (sono comuni nelle stelle colorate scarti notevoli); il minimo è a punta e il momento della luce *minima* è assai bene determinato alla data 1927 marzo 21 ore 7 (T. U.); il *massimo* è forse più piatto. Si può dedurre un periodo di circa 110 giorni con un aumento un po' più lento della diminuzione.

La variabile appartiene pertanto alla numerosa classe di quelle a lungo periodo, ma presenta un interesse speciale, perchè la durata di 110 giorni è eccezionale. Infatti la grande maggioranza varia di luce in un ciclo di circa 300 giorni, mentre pochissime hanno un periodo di circa 100 giorni.

Periodi più brevi sono offerti dalla notevolissima classe di variabili delle *Cefeidi*, per cui questa nuova variabile costituirà, assieme alle sue poche compagne, oggetto di specialissimo studio per la differenziazione delle caratteristiche che separano o collegano queste stelle così importanti nella conoscenza della costituzione fisica dei corpi celesti.

L'Osservatorio di Harvard comunica che verrà preparata una Memoria speciale, esaminando le centinaia di lastre colà ottenute, contenenti la stella in questione.

Fisica. — *Alcune proprietà ed applicazioni delle lampade a neo.* Nota di F. Neri, presentata [1] dal Socio Corrisp. L. Lombardi.

Nel corso di una serie sistematica di ricerche sul comportamento elettrico delle lampade a luminescenza catodica, condotte principalmente allo scopo di mettere in luce eventuali analogie di indole qualitativa con fenomeni che interessano il campo della tecnica dei grandi trasporti di energia, ho potuto notare alcune particolarità di funzionamento e sperimentare su alcune applicazioni che può essere interessante riferire in questa sede.

Premetto che le prove sono state condotte su lampade « Glimm » Osram a elettrodi spiraliformi, direttamente acquistate dal commercio, e private tutte della resistenza zavorra, della quale è noto lo scopo protettivo, e che ha un valore di circa 1500 Ω, la induttanza raggiungendo 1,2 ÷ 1,3 mH.

Già Oschwald e Tarrant [2] hanno, qualche anno fa, messo in evidenza un fenomeno fotoelettrico di tipo particolare, in quanto la tensione critica

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(2) « Proc. Phys. Soc. », London. vol. 36, p. 241.

Digitized by Google

Digitized by Google

fig. 1 sono riprodotti due diagrammi relativi ad una delle lampade sulle quali si è avuto occasione di sperimentare; in ascisse sono riportate le tensioni continue applicate, in ordinate le correnti assorbite in μA. La curva *a* si riferisce alla lampada mantenuta nella oscurità, la *b* al caso in cui gli elettrodi erano illuminati dall'esterno con una lampada intensiva da circa 250 candele, posta a 15 centimetri di distanza.

Nel funzionamento delle lampade alimentate con tensione alternativa, si è notato che:

1° la tensione efficace di accensione non è completamente indipendente dalla frequenza, ma cresce al crescere di questa; nei limiti delle frequenze industriali peraltro, le variazioni sono relativamente modeste; variando la frequenza di alimentazione da 22 a 56 ∼, la tensione di accensione varia mediamente di circa 1 °/₀ o di 2 °/₀ a seconda che la lampada sia fortemente illuminata dall'esterno, ovvero sia mantenuta nell'oscurità;

2° si può definire, anche in corrente alternata, una tensione (efficace) di accensione ed una tensione (efficace) di spegnimento, in quanto la tensione alternativa alla quale la lampada si accende, è superiore a quella alla quale si spegne. La differenza tra le due tensioni cresce al crescere della frequenza e al diminuire della illuminazione degli elettrodi; alle frequenze industriali è relativamente piccola; ma alle frequenze acustiche diviene percentualmente molto grande;

3° le tensioni critiche superiore ed inferiore non si mantengono costanti, allorquando la lampada è accesa, e si varii la tensione di alimentazione; l'osservazione diviene sufficientemente netta, valendosi dell'oscillografo a raggi catodici, ove si facciano agire come cause deflettrici del raggio, la corrente assorbita e la tensione applicata, in senso normale tra di loro. Si vede allora che le tensioni critiche (ma specialmente quella superiore) diminuiscono al crescere della accensione; e tale diminuzione è tanto più grande quanto maggiore è la frequenza.

Il complesso dei fenomeni di cui sopra è cenno, si possono spiegare ammettendo da una parte il fatto che il fenomeno di accensione richieda un certo tempo per avvenire, e che, d'altra parte, l'accensione di un elettrodo sia eminentemente influenzata dallo stato di ionizzazione in cui l'ambiente à stato lasciato da quella dell'altro.

L'insieme dei fenomeni precitati farebbe peraltro presumere che, nel suo funzionamento globale, in quanto lo si ritenga definito dalla potenza e dalla corrente assorbite sotto diverse tensioni, la lampada si comporti in modo diverso alle diverse frequenze; senonchè la forma della curva di corrente, com'è del resto facile intuire ammettendo richiedersi pel fenomeno di accensione un tempo finito e non trascurabile in confronto della durata del periodo, non si mantiene simile a se stessa, pur risultando pressochè invariato il suo valor massimo, operando a tensione costante, ma a varie frequenze. I fenomeni avvengono in senso tale che si compensano sostanzialmente,

Digitized by Google

onde l'esperienza rivela che corrente e potenza assorbite dalla lampada, sono, a pari tensione, sensibilmente indipendenti dalla frequenza.

È importante notare come la legge di variazione della corrente e della potenza in funzione della tensione applicata, variino notevolmente al variare delle condizioni sperimentali; così per esempio, mentre illuminando fortemente dall'esterno la lampada a neon si ottengono per l'una e per altra delle leggi di variazione in funzione della tensione applicata nettamente curvilinee, operando nella oscurità le leggi divengono, per un buon tratto sensibilmente rettilinee, la coincidenza tra queste e le precedenti avendosi solo in corrispondenza delle tensioni più elevate.

Non è improbabile che a fenomeni di tal genere si debbano in parte attribuire le divergenze notevoli che sperimentatori diversi hanno riscontrato eseguendo misure su linee ad alta tensione nelle quali venga superato il potenziale critico per la formazione della corona; per quel che riguarda la legge di variazione della potenza assorbita in funzione della differenza tra la tensione applicata e quella critica, si va invero in questo campo, dalla nota legge quadratica del Peek, a leggi lineari trovate verificate da più di uno sperimentatore.

Altre analogie, delle quali non sembra qui il caso di far cenno, si sono riscontrate tra i fenomeni che avvengono nelle lampade a luminescenza e quelli recentemente messi in luce da Peek, che riguardano l'aumento apparente della capacità e la formazione di terze armoniche di corrente o di tensione nelle linee nelle quali il potenziale critico per la formazione della corona venga superato.

Di due applicazioni particolari delle lampade a luminescenza, che possono riuscire interessanti in casi speciali, si crede opportuno di dare qui un breve cenno: la prima riguarda una speciale e spiccata proprietà rettificatrice che in particolari condizioni la lampada a neon viene ad assumere, e la seconda l'uso delle lampade stesse in circuiti atti a conseguire una moltiplicazione di frequenza.

a) *Proprietà rettificatrici.*

Se, in serie con la lampada alimentata con una tensione alternativa si pone una batteria la quale valga a conferire ad uno degli elettrodi supposti eguali, un potenziale positivo o negativo rispetto all'altro, per ovvie ragioni, il valor medio della corrente assorbita, rivelabile con un comune milliamperometro per corrente continua, non solo non è più nullo, ma dipende in doppio modo e dalla tensione continua e da quella alternativa. In fig. 2 viene riportata una serie di curve, ciascuna delle quali si riferisce al valore di tensione continua scritta a fianco, e che mostrano come varii la corrente media assorbita dalla lampada (in ordinate), in funzione della tensione alternativa applicata (in ascisse). L'osservazione può essere sfruttata per eseguire, una volta tarato il complesso, delle misure di tensioni alternative entro una gamma assai vasta, facendo uso di un milliamperometro per cor-

Digitized by Google

rente continua. Nel caso della figura, per esempio, variando opportunamente la tensione continua, è possibile misurare delle d. d. p. alternative tra 10 e 70 Volt.

Una caratteristica è propria del metodo e scaturisce senz'altro dall'ispezione dei diagrammi: e cioè la notevole sensibilità alle variazioni anche piccole di tensione. Con riferimento alla curva relativa a 20 Volt continui, si vede per esempio che una variazione di tensione alternativa da 60 a 70 Vot

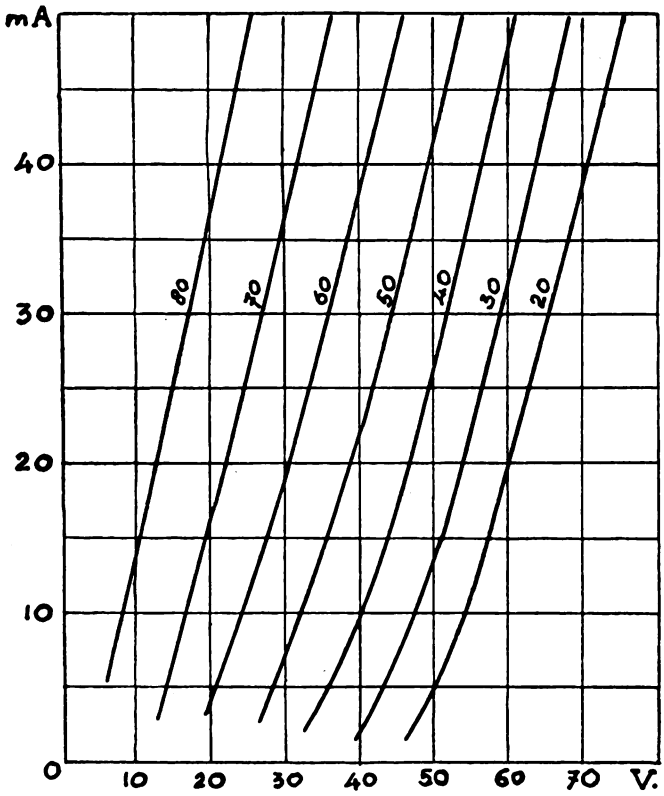


Fig. 2.

e cioè del 16,7 %, produce una variazione nella corrente assorbita da 20 a 39 mA, e cioè del 95 %.

b) Moltiplicazione di frequenza.

Se si immagina di alimentare m lampade a neon connesse a stella con un sistema m fase di tensioni, se m non supera un certo valore e sempre chè esso sia dispari, è facile vedere che nel neutro del sistema si stabilisce una corrente che, come somma delle correnti assorbite dalle lampade, ove l'accensione di queste ultime sia convenientemente regolata, ha una frequenza m volte più grande di quella delle tensioni di alimentazione.

Digitized by Google

La limitazione di m deriva ovviamente dal fatto che, almeno con le caratteristiche che posseggono le lampade del commercio, la frazione di periodo, durante la quale ciascuna lampada rimane accesa, non può scendere al disotto di un certo limite, il quale, in presenza di tensioni sinusoidali viene semplicemente definito in funzione del rapporto tra le tensioni critiche inferiore e superiore della lampada.

In fig. 3 è riprodotto, a titolo di esempio, un oscillogramma che si riferisce ad una triplicazione di frequenza: *a* è la fondamentale (tensione della rete di Roma), *b* è la corrente nel neutro di un sistema trifase di lampade a neon connesse a stella.

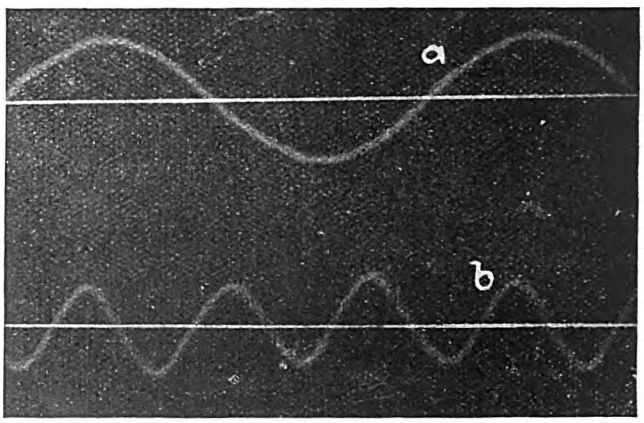


Fig. 3.

Per questa via si è ottenuto agevolmente una frequenza nonupla di quella di alimentazione, convertendo, a mezzo di un trasformatorino ausiliario, il sistema trifase delle tensioni a disposizione, in un sistema a 9 fasi; con tensioni sinusoidali e con le lampade di oggi, è probabilmente difficile spingere la moltiplicazione al di là di tale limite; ma trovando il modo di rendere minore lo scarto fra le tensioni critiche superiore ed inferiore delle lampade da una parte, e deformando le tensioni di alimentazione (p. es. con trasformatori opportunamente studiati), in guisa da renderle molto appuntite in corrispondenza del valor massimo, dall'altra, tale limite si potrà notevolmente superare, con vantaggio anche nei riguardi della potenza messa in giuoco.

Digitized by Google

Chimica. — *Composti organici del bismuto pentavalente* [1]. Nota di G. CHARRIER, presentata [2] dal Corrisp. G. ERRERA.

È noto che gli alogenuri di bismuto della formola generale $BiAl_3$ (in cui Al rappresenta un atomo di alogeno) possono addizionarsi con una molecola di alogenuro alcalino MeAl per dar luogo a sali della formola generale $MeBiAl_4$, corrispondenti ad un acido $HBiAl_4$ [3]. Sono pure noti di questo acido sali di ammonio NH_4BiAl_4 e di ammoni sostituiti, come ad es., di fenilammonio, di dietilfenilbenzilammonio, di piridinio, di chinolinio, ecc. [4].

Ho trovato che facendo agire il cloruro di bismuto $BiCl_3$ in soluzione cloridrica sui cloruri di arildiazonio (cloruri di azoarilammonio $Ar-N\equiv N\,|\,Cl$) si formano corpi ben cristallizzati e relativamente molto stabili, contenenti un atomo di bismuto pentavalente, secondo lo schema seguente

$$BiCl_3 + ArN_2Cl \rightarrowtail ArN_2BiCl_4 .$$

Tali composti, che debbono venir considerati come clorobismutati di arildiazonio, sono analoghi ai cloromercurati, cloroaurati, clorostannati, cloroplatinati, ecc. di arildiazonio già noti e possono essere collocati molto vicino ai composti che May ottenne per azione del tricloruro di antimonio sui cloruri di arildiazonio, cioè ai cloroantimoniati di arildiazonio ArN_2SbCl_4 [5], coi quali si riesce molto facilmente ad introdurre l'antimonio nel nucleo aromatico, reagendo essi con facilità secondo l'equazione seguente:

$$ArN_2SbCl_4 + 3H_2O \rightarrowtail 4HCl + N_2 + ArSb\begin{matrix}=O\\-OH\\-OH\end{matrix}$$

Data l'analogia coi corrispondenti sali metallici del bismuto che possono esistere nei tipi

$$MeBiCl_4 \qquad Me_2BiCl_5 \qquad Me_3BiCl_6$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università di Siena.

(2) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) DITTE, «Compt. rend.», *91*, 986 (1880); ENGEL, «Compt. rend.», *106*, 1797 (1888); JACQUELAIN, «Ann. Chim.», *66*, 113 (1862); PLINY BRIGHAM, «Am.», *14*, 164, (1892); ATKINSON, «Chem. News», *47*, 175 (1883); MUIR, «Chem. News», *32*, 277 (1875).

(4) «Ber.», *33*, 2271 (1900); «Gazz. Chim. Ital.», *42*, I, 138 (1912); «Ber.», *50*, 21 (1917); «Chem. Central Blatt», 1921, I, 27.

(5) «J. Chem. Soc.», *101*, 1037 (1912).

Digitized by Google

è possibile prevedere l'esistenza di clorobismutati di arildiazonio corrispondenti agli schemi

$$ArN_2BiCl_4 \qquad (ArN_2)_2BiCl_5 \qquad (ArN_2)_3BiCl_6$$

Sono noti d'altronde anche alcuni clorobismutati di radicali organici e di ammoni sostituiti corrispondenti alle formole soprascritte.

Sinora però è stato possibile ottenere soltanto i clorobismutati del primo tipo, quelli cioè provenienti dall'addizione di una molecola di cloruro di bismuto ad una molecola di cloruro di arildiazonio e perciò corrispondenti alla formola ArN_2BiCl_4, che sono analoghi a quelli derivanti dai metalli trivalenti

$$ArN_2AuCl_4 \quad \text{e} \quad ArN_2SbCl_4$$

mentre coi metalli tetravalenti abbiamo più stabili i sali di arildiazonio del tipo seguente

$$(ArN_2)_2SnCl_6 \quad \text{e} \quad (ArN_2)_2PtCl_6$$

e coi metalli bivalenti i sali di arildiazonio del tipo

$$(ArN_2)_2HgCl_4 \qquad (ArN_2)_2SnCl_4 \quad \text{e} \quad (ArN_2)_2PtCl_4$$

senza poter escludere l'esistenza dei vari complessi prevedibili secondo la teoria werneriana, che potranno anche in seguito venir isolati.

Non soltanto coi metalli o coi non metalli a comportamento metallico si possono ottenere questi complessi coi sali di arildiazonio, ma anche con non metalli tipici, come ad esempio col boro, i cui corrispondenti fluoborati sono stati da poco tempo descritti [1]

$$(ArN_2)BF_4 .$$

I sali complessi di arildiazonio ai quali abbiamo accennato, presentano grande importanza, perchè si può sperare di effettuare con essi (e con i cloroantimoniati di arildiazonio di May venne già effettuata) l'introduzione dell'atomo metallico nel nucleo aromatico secondo la trasposizione generale seguente

$$ArN_2MeAl_4 \rightarrowtail N_2 + ArMeAl_4$$

ottenendo così un metodo generale di sintesi dei derivati metalloarilici di grande interesse.

Dai risultati di saggi preliminari che sto compiendo posso sperare di essere sulla buona via per realizzare attraverso ai miei clorobismutati di arildiazonio la sintesi di importanti derivati bismutoarilici.

(1) Ernst Wilke-Dörfurt e Günther Balz, «Ber.», *60*, 115 (1927).

Digitized by Google

I clorobismutati di arildiazonio che descrivo in questa Nota sono sostanze dotate di notevole stabilità, ben cristallizzate, poco solubili nell'acqua contenente sufficiente quantità di acido cloridrico per impedirne l'idrolisi, che seccate in essiccatore su cloruro di calcio a pressione ordinaria corrispondono alla formola generale ArN_2BiCl_4.

Da prove preliminari eseguite risulta che in esse il cloro è sostituibile coi residui dell'acido solforico e nitrico secondo le equazioni:

$$ArN_2BiCl_4 + 2H_2SO_4 \rightarrowtail ArN_2Bi(SO_4)_2 + 4HCl$$
$$ArN_2BiCl_4 + 4HNO_3 \rightarrowtail ArN_2Bi(NO_3)_4 + 4HCl.$$

I clorobismutati di arildiazonio trattati colle soluzioni diluite degli alcali caustici sviluppano azoto e danno sali basici di bismuto e diazotato alcalino, o i prodotti di decomposizione di esso. Con gli acidi diluiti a caldo si scindono sviluppando azoto e fornendo il corrispondente sale di bismuto e il fenolo del radicale arile che contengono. Sciolti in acido cloridrico a metà e trattati con polvere di rame danno la reazione di Sandmeyer con sviluppo di azoto e sostituzione del diazogruppo con cloro. Con H_2SO_4 conc. si sciolgono sviluppando acido cloridrico e formando probabilmente il corrispondente solfato $ArN_2Bi(SO_4)_2$, il quale si dimostra molto stabile e può essere scaldato in soluzione nell'acido solforico concentrato per un certo tempo a 100° senza notevole decomposizione. Insistendo nel riscaldamento si sviluppa azoto e si formano solfato di bismuto e acidi fenolsolfonici. Si svilupperà verosimilmente anche ossigeno nel passaggio del bismuto da pentavalente a trivalente.

Clorobismutato di fenildiazonio — $C_6H_5N_2BiCl_4$. — La soluzione di cloruro di fenildiazonio ottenuta da gr. 9,3 di anilina sciolta in 60 cc. di acido cloridrico a metà (30 cc. HCl d = 1.19 + 30 cc. di acqua) e 7.5 gr. di nitrito sodico e fortemente raffreddata (da — 5° a — 10°) si tratta con una soluzione di gr. 40 di $BiCl_3$ in 60 cc. di acido cloridrico. Si separa tosto un precipitato cristallino in fogliette lucenti incolore che raccolto a pompa e lavato con poco acido cloridrico diluito a metà si fonde con decomposizione e vivo sviluppo gassoso a 85°-87°.

Per l'analisi si secca a peso costante in essiccatore a cloruro di calcio a pressione ordinaria.

	Trov. %:	Bi 45.28	N 6.27	Cl 30.92
per $C_6H_5N_2BiCl_4$	calc.:	45.83	6.14	31.14

Il clorobismutato di fenildiazonio è una sostanza abbastanza stabile, che lasciata a sè si altera lentamente, diventando dapprima rosea e poi imbrunendo sviluppa azoto e acquista a poco a poco odore fenolico spiccato. Sospeso in acido cloridrico per aggiunta di polvere di rame il clorobismutato di fenildiazonio sviluppa azoto e dà clorobenzolo. Scaldato con acido

Digitized by Google

cloridrico diluito fornisce fenolo. Con H_2SO_4 concentrato si scioglie sviluppando acido cloridrico; la soluzione anche dopo breve riscaldamento in bagno-maria bollente contiene ancora un sale di diazonio perchè trattata con ghiaccio e quindi aggiunta ad una soluzione alcalina di β-naftolo dà un precipitato rosso di fenilazo-β-naftolo.

Analogamente al clorobismutato di fenildiazonio vennero ottenuti i seguenti clorobismutati:

Clorobismutato di o-tolidiazonio $CH_3(2)C_6H_4(1)N_2BiCl_4$, pagliette bianche lucenti, fusibili con decomposizione a 115°-120°.

Clorobismutato di m-tolildiazonio $CH_3(3)C_6H_4(1)N_2BiCl_4$, sottili tavolette, lucenti, leggermente giallognole, che si fondono con decomposizione e vivace sviluppo gassoso verso 120°.

Clorobismutato di p-tolildiazonio $CH_3(4)C_6H_4(1)N_2BiCl_4$, tavolette minutissime, lucenti, bianche, fusibili con decomposizione verso 120°.

Clorobismutato di p-anisildiazonio $CH_3O-(4)C_6H_4(1)N_2BiCl_4$, fogliette lucenti leggermente paglierine, fusibili con decomposizione verso 145°-147°.

Clorobismutato di p-clorofenildiazonio $Cl-(4)C_6H_4(1)N_2BiCl_4$, aghi setacei bianchi, brillanti, fusibili con decomposizione a 105°-107°.

Clorobismutato di p-bromofenildiazonio $Br-(4)C_6H_4(1)N_2BiCl_4$, aghi lunghi bianchi, lucenti, fusibili con decomposizione tra 135° e 140°.

Tutti questi composti presentano comportamento analogo a quello che ho indicato per il clorobismutato di fenildiazonio.

Chimica. — *Sugli idrati del nitrato di alluminio.* Nota di G. MALQUORI [1], presentata [2] dal Socio N. PARRAVANO.

Nel corso delle ricerche che vanno svolgendosi in questo laboratorio, sul chimismo dei due processi Blanc [3] ci siamo trovati di fronte a lacune dovute alla mancanza nella letteratura di dati sufficienti per un'esatta interpretazione dei fenomeni studiati. Così avviene per ciò che riguarda il sistema $Al(NO_3)_3 - H_2O$, la cui conoscenza è indispensabile per la costruzione dei diagrammi politermici del processo al nitrato sui quali torneremo in seguito.

Il più conosciuto degli idrati del nitrato di alluminio, è certamente il noveidrato. Su gli altri idrati, le attuali cognizioni sono più incerte.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
(2) Nella seduta del 1° giugno 1927.
(3) Questi « Rendiconti », vol. V, fasc. 6, 7, 8.

Digitized by Google

Seligman e Williams [1] affermano l'esistenza di tre idrati definiti: il noveidrato, l'esaidrato, e un idrato intermedio che presenta un contenuto d'acqua variabile dalle 7 $^1/_2$ alle 8 molecole e al quale non possono quindi assegnare una formula definitiva.

Jnamura [2] studiando il sistema $Al(NO_3)_3 — HNO_3 — H_2O$ a 25° ha trovato che a questa temperatura esistono in equilibrio con soluzioni nitriche di differente concentrazione, tre idrati distinti: il noveidrato in equilibrio con la soluzione contenente fino al 73 % di HNO_3, l'ottoidrato fra il 73 e l'81 %, l'esaidrato a concentrazioni acide superiori.

Il campo di esistenza dell'ottoidrato, è, come si vede, limitatissimo, questo dimostra quanto sia difficile la sua separazione allo stato puro, e giustifica l'incertezza degli sperimentatori precedenti.

Oltre agli idrati ricordati, se ne conosce un altro più povero di acqua: il tetraidrato, preparato da Parravano e Malquori [3] per azione dell'anidride nitrica sull'esaidrato.

In questa Nota riferisco sullo studio del sistema $Al(NO_3)_3 — H_2O$, limitandomi ad un intervallo di temperatura compreso fra il punto criodratico (— 27°) e la temperatura alla quale si ha decomposizione del sale con eliminazione di acido nitrico.

Da esperienze precedenti [4] era risultato che il noveidrato scaldato al disopra del punto di fusione perde acqua e si trasforma in esaidrato il quale a 140° si scompone, senza fondere, nel sale basico $4 \cdot Al_2O_3 \cdot 3N_2O_5 \cdot 14H_2O$. La temperatura di scomposizione di 140° è quella che si rileva dalle curve di riscaldamento; effettivamente a temperatura leggermente più bassa (intorno a 135°) si nota già una debole scomposizione, e perciò ho fissato 130° come limite superiore della mia ricerca.

La curva di ghiaccio, e le solubilità fino alla temperatura di fusione del noveidrato, sono state determinate con i metodi ordinari.

Al disopra di questa temperatura i dati di solubilità sono stati ricavati notando le temperature di comparsa dei primi cristalli in miscugli di composizione esattamente conosciuta di noveidrato ed esaidrato. Questi venivano preparati in tubetti che venivano chiusi alla lampada. Si scaldavano lentamente i tubetti fino a fusione della miscela mantenendoli in agitazione in un bagno di olio di paraffina, si raffreddava quindi il bagno sempre con grande lentezza, e si notava la temperatura alla quale comparivano i primi cristalli. Tornando a scaldare, sempre agitando, si notava la temperatura alla quale si scioglievano gli ultimi cristalli. Queste operazioni erano ripe-

(1) « J. Chem. Soc. », *109*, 612 (1916).
(2) « Mem. Coll. Sc. Kyoto », *4*, 105 (1919).
(3) « Atti del II Congr. di Chim. pura ed appl. ».
(4) Loc. cit.

Digitized by Google

tute successivamente diverse volte assumendo infine come valore la media fra le temperature di comparsa e di sparizione dei cristalli.

Trattandosi di liquidi molto viscosi, questo metodo non è di grande esattezza, e l'errore può oscillare fra i 2-3° come ha fatto rilevare lo stesso Roozeboom; ad ogni modo, data l'elevata tensione di vapore di questi idrati, è l'unico metodo che possa applicarsi al caso nostro.

I risultati sono riportati nelle seguenti tabelle e nella figura.

TABELLA I.

gr. di $21(NO_3)_3$ per 100 gr. di soluzione	Temperatura di inizio della cristallizzazione	Temperatura di arresto crioidratico
36.81	— 3	— 26.4
35.75	— 7.3	— 26
34.92	— 11.5	— 27
33.60	— 16	— 27
32.40	— 23	— 27
30.45	— 27	— 27
28.61	— 23	— 27
26.20	— 18.5	— 27
21.35	— 13	— 27
12.41	— 5.8	— 27
6.35	— 2.4	— 27

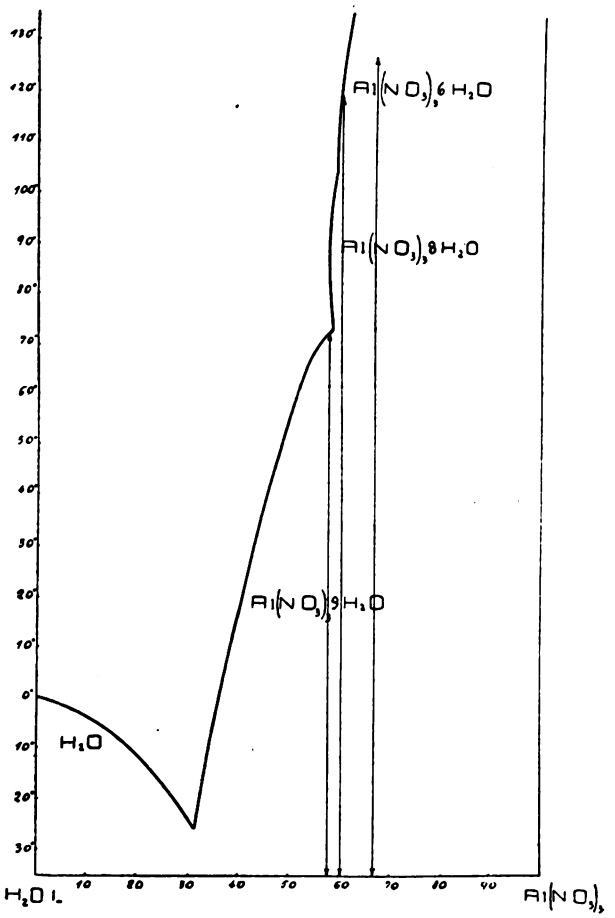
TABELLA II.

Temperatura	gr. di $Al(NO_3)_3$ per 100 gr. di soluzione %	gr. di $Al(NO_3)_3$ per 100 gr. di H_2O %	Fasi solide
0°	37.81	60.79	$Al(NO_3)_39H_2O$
10°	40.15	67.08	»
20°	42.99	75.41	»
30°	44.94	81.62	»
40°	46.25	86.05	»
50°	49.14	96.62	»
60°	50.95	103.87	»
70°	54.60	120.26	»

Digitized by Google

TABELLA III.

Temperatura	gr. di $Al(NO_3)_3$ per gr. 100 di soluzione	Fasi solide
90°	60.55	$Al(NO_3)_3 8H_2O$
95°.8	60.81	»
99°.5	61.12	»
100°	61.44	»
103°	61.64	»
111°.5	62.19	$Al(NO_3)_3 6H_2O$
116°	62.32	»
122°	63.01	»
129°	63.78	»



Digitized by Google

Dai risultati esposti si rileva che dal punto crioidratico — 27°, fino a 73°.5 temperatura di fusione del noveidrato, esiste in equilibrio con la soluzione satura solo l'idrato $Al(NO_3)_3 9H_2O$.

A temperature superiori, la curva di solubilità presenta una nettissima discontinuità, corrispondente all'esistenza di due idrati più poveri d'acqua: l'ottoidrato e l'esaidrato.

Il punto di incontro delle due curve ha per coordinata un'ascissa corrispondente ad un rapporto $\frac{Al(NO_3)_3}{H_2O}$ minore di quello che vorrebbe la formula dell'ottoidrato, il che significa che l'ottoidrato subisce una fusione parziale scomponendosi in esaidrato e soluzione.

Chimica. — *I solfati doppî del bismuto coi metalli alcalini. I. Solfati di bismuto e potassio* [1]. Nota [2] dei dottori V. Caglioti e A. Stolfi, presentata dal Socio F. Zambonini.

La letteratura registra un discreto numero di solfati doppî del bismuto con gli alcalini, ottenuti, in linea di massima, precipitando una soluzione acida di un sale di bismuto con solfati o bisolfati alcalini.

Siffatte ricerche iniziate dall'Heintz [3], continuate da Remsen e Brigham [4], da Lüddecke [5] e dal Behrens [6], hanno portato a stabilire i seguenti composti:

Solfati doppî del Bi [7]:

Con	K_2SO_4	$KBi(SO_4)_2 — K_3Bi(SO_4)_3$
	Na_2SO_4	$2Bi_2(SO_4)_3 \cdot 3Na_2SO_4$
	$(NH_4)_2SO_4$	$(NH_4)Bi(SO_4)_2 \cdot 4H_2O$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) « Pogg. » *63*, (1844), 82.

(4) « Am. Chem. J. », *14*, (1892), 170.

(5) « Ann. », *140*, (1866), 279 e 282.

(6) « Z. anal. Chemie », *30*, (1891), 135 e 163.

(7) Va poi ricordato, il solfato doppio di bismutile e potassio $(BiOH)SO_4 \cdot K_2SO_4$, ottenuto da Heintz aggiungendo a una soluzione diluita di nitrato di bismuto, il solfato potassico. La composizione di questo sale, veramente, non risponde bene alla formula citata; invece dei valori:

	Calcolati	Heintz trova:	
Bi_2O_3	46.94	48.13	49.54
K_2O	18.98	16.96	17.28
SO_3	32.26	32.05	31.79
H_2O	1.82	—	—

Digitized by Google

Occorre dire, però, che le nostre conoscenze intorno a questi composti sono molto frammentarie. Non si conoscono, anzitutto, solfati doppî del bismuto col litio, col rubidio e col cesio; e, poi, quasi tutti questi sali noti, sono stati preparati in condizioni speciali: così $KBi(SO_4)_2$ fu ottenuto da Remsen e Brigham evaporando il sale $BiCl_3 \cdot KCl \cdot H_2O$ con H_2SO_4 con centrato; $K_3Bi(SO_4)_3$ fu preparato da Heintz precipitando una soluzione concentrata di nitrato di bismuto con un eccesso di solfato o bisolfato potassico, e, in condizioni poco diverse, sono stati ottenuti gli altri sali con l'ammonio e col sodio.

Da quanto abbiamo esposto, risulta chiaramente opportuna una ricerca sistematica, che definisca con uniformità di indirizzo e di metodo la formazione dei vari tipi di solfati doppî.

E la ricerca ha, poi, particolare interesse per le relazioni di isomorfismo che intercedono fra il bismuto e le terre rare.

Il Bodman [1], come è noto, ha dimostrato tale proprietà per i nitrati penta ed esaidrati e per i solfati penta, otto ed enneaidrati delle terre; (Di, La, Y); poco dopo, Urbain e Lacombe [2] trovarono che il nitrato di bismuto forma coi nitrati dei metalli isomorfogeni della serie del magnesio dei composti $R_3Bi_2(NO_3)_{12} \cdot 24H_2O$, perfettamente isomorfi coi nitrati doppî già noti, da tempo, per i metalli delle terre rare.

È, perciò, assai interessante definire quali solfati doppî il bismuto forma con gli alcalini e stabilire se può esservi una qualche relazione con quelli delle terre rare studiati nel nostro Istituto [3].

Volendo operare, però, nelle stesse condizioni, sperimentali, si riscontrano non poche difficoltà.

Se si pensa, infatti, che il solfato di bismuto è idrolizzato fortemente dall'acqua, si comprende che non è possibile condurre la ricerca in modo del tutto analogo a quanto si è fatto pei solfati delle terre.

Nè, d'altra parte, si può agire in soluzione acida, dato l'andamento di tutte le ricerche già compiute per le terre, e neppure si può cercare di mantenere in soluzione il solfato di bismuto per aggiunta di qualche altro elettrolita, perchè tale aggiunta, quanto mai inopportuna, avrebbe costituito una qualche cosa di estraneo, per cui si sarebbero potuti stabilizzare tipi diversi e particolari di composti.

Per ovviare a tale inconveniente, si è pensato di partire da una soluzione satura di solfato alcalino, a cui si aggiungeva una quantità determinata di solfato di bismuto solido.

Abbiamo iniziato le ricerche con il solfato potassico e, innanzi tutto, abbiamo eseguito alcune esperienze preliminari, aggiungendo ad una solu-

(1) « Ber. », *31*, (1898), 1237; « Z. an. Che. », *27*, (1901), 254.

(2) « J. Ch. Phys. », *4*, 105; « C. B. », 1906, (11), (207).

(3) Zambonini e allievi, *Ricerche sui solfati doppi dei metalli delle terre rare coi metalli alcalini*, pubblicate dal II semestre 1924 in poi. « R. R. A. L. », serie 5ª e 6ª.

Digitized by Google

zione concentrata di nitrato di bismuto acida per acido nitrico, una soluzione di solfato potassico in quantità calcolata per ottenere i composti 1 : 3 ed 1 : 1 . Il liquido, ottenuto mescolando le due soluzioni, si intorbidò rapidamente e, col riposo, si separarono dei cristallini, che dopo un paio di giorni furono raccolti e posti ad asciugare, per qualche tempo su lastra porosa.

L'esame microscopico permise di stabilire che i due depositi cristallini, ad onta delle proporzioni molto diverse dei due sali, sono identici ed omogenei: costituiti, quindi, da un medesimo sale doppio; hanno le stesse proproprietà ottiche, e la stessa forma di lamine a contorno esagonale.

In luce convergente, dànno nettissima la figura di interferenza delle sostanze uniassiche, senza anomalie ottiche. La birifrangenza è negativa.

All'analisi, i depositi cristallini hanno dato i seguenti risultati:

	Trovato —	Calcolato per $Bi_2(SO_4)_3 - 3K_2SO_4$
Bi	33.92	34.01
SO_4	46.78	46.90
K	18.75	19.09

Lo studio sistematico di una parte del sistema $Bi_2(SO_4)_3 - K_2SO_4 - H_2O$ fu eseguito col metodo già sopra accennato, partendo cioè da una soluzione del solfato alcalino, alla quale si aggiungeva il solfato di bismuto, nelle proporzioni desiderate. Le bevute chiuse contenenti il miscuglio venivano tenute in continua rotazione in un grande termostato, fino ad equilibrio raggiunto.

Per una parte del sistema si adoperava anche il solfato del metallo alcalino solido, per ottenere, a reazione finita, una fase liquida abbastanza ricca in solfato alcalino.

Per i metodi analitici impiegati c'è poco da dire: SO_4 e K si dosarono con i soliti metodi; ilbismuto si dosò come solfuro, in crogiolo di Gooch.

I risultati ottenuti per l'isoterma di 25° sono riuniti nella seguente

Digitized by Google

TABELLA I.

l'esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti il corpo di fondo
	$Bi_2(SO_4)_3$	K_2SO_4	K_2O	$\frac{K_2SO_4}{H_2O}$	Bi	K	SO_4	H_2O	$\frac{Bi_2(SO_4)}{K_2SO_4}$	
1	—	2.69	97.31	0.0276	77.63	—	18.58	—	—	(1)
2	—	4.39	95.61	0.0459	74.24	—	18.05	—	—	
3	—	4.45	95.55	0.0466	70.02	—	22.4	—	—	
4	—	4.46	95.54	0.0467	49.90	5.60	39.44	—	—	
5	—	4.47	95.53	0.0468	47.04	8.40	41.30	—	—	
6	—	4.50	95.50	0.0471	34.08	18.90	46.70	—	1.370	$Bi_2(SO_4)_3 \cdot 3K_2SO_4$
7	—	5.32	94.68	0.0561	34.10	18.80	46.76	—	1.375	
8	—	6.34	93.66	0.0677	33.88	18.81	46.86	—	1.366	
9	—	7.62	92.38	0.0824	33.90	18.83	46.77	—	1.365	
10	—	9.29	90.71	0.103	33.98	19.01	46.80	—	1.355	
11	—	12.01	87.99	0.136	33.96	18.88	46.90	—	1.364	
12	—	12.8	87.20	0.147	33.91	18.83	46.81	—	1.366	$Bi_2(SO_4)_3 \cdot 3K_2SO_4 + K_2SO_4$
13	—	12.92	87.08	0.148	33.30	20.4(2)	46.30	—	1.237	

(1) Non si è calcolato il rapporto $\frac{Bi_2(SO_4)_3}{K_2SO_4}$ data l'incerta composizione del corpo di fondo.

(2) Il potassio in questa esperienza è stato ricavato per differenza.

Composizione del composto ottenuto:

	Bi	K	SO_4
$Bi_2(SO_4)_3 \cdot 3K_2SO_4$	34.01 %	19.09 %	46.90 %

Come metodo di rappresentazione grafica, si ricorse, anche per facilitare i confronti, a quello già usato per le ricerche sui solfati doppî dei metalli rari coi metalli alcalini, segnando sulle ascisse il rapporto $\frac{K_2SO_4}{H_2O}$ della fase liquida e sulle ordinate quello $\frac{Bi_2(SO_5)_3}{K_2SO_4}$, del corpo di fondo, in equilibrio con la fase liquida.

Nella figura 1 sono raccolti i risultati.

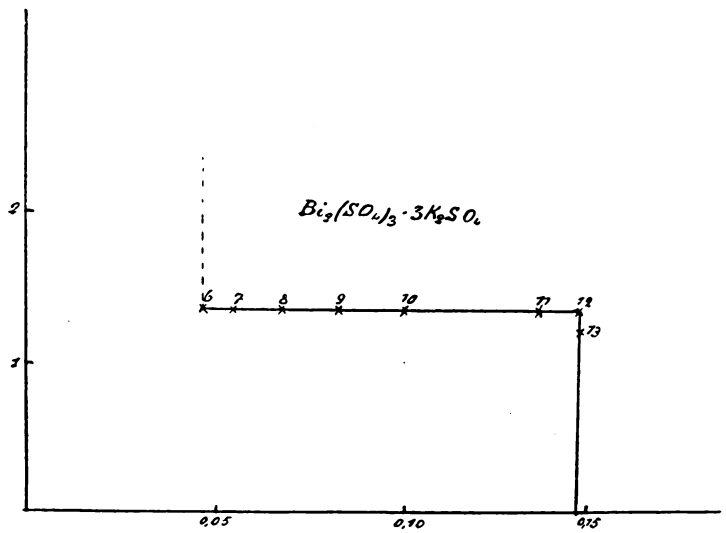
Come si vede, il composto ottenuto è uno solo, perfettamente anidro, e risponde alla formula $K_3Bi(SO_4)_3$. Ha un campo di esistenza abbastanza

Digitized by Google

esteso, essendo in equilibrio con soluzioni contenenti da 5.32 % a 12.8 % di K_2SO_4.

Anche in questo caso, i cristallini ottenuti appaiono al microscopio ben formati, benchè assai piccoli, e hanno contorno esagonale come quelli ottenuti alla temperatura ambiente per aggiunta di K_2SO_4 alla soluzione di $Bi(NO_3)_3$.

Nel sistema non abbiamo riscontrato la formazione del composto $KBi(SO_4)_2$, già ricordato nella letteratura; occorre, però, osservare che esso è stato ottenuto in condizioni molto diverse da quelle delle nostre esperienze. Una notevole complessità presenta poi il sistema nelle prime 5 esperienze, che corrispondono ad una concentrazione in K_2SO_4 che va fino al 4.47 % nella fase liquida.



Le percentuali del bismuto nella fase solida vanno sempre crescendo fino a un massimo di 77.63 %, mentre le percentuali di SO_4 decrescono fino a un limite di 18.05 %; d'altro canto, il corpo di fondo è costituito da cristallini talmente piccoli, da non permettere alcuna osservazione delle proprietà ottiche al microscopio, neppure coi più forti ingrandimenti. Tutto questo va messo in rapporto con la formazione di solfati basici del bismuto che finora, almeno, sono di composizione alquanto incerta e poco nota.

È importante stabilire la formula di questi sali, per avere una esatta misura dell'idrolisi che si verifica specialmente in presenza di piccole quantità di sali alcalini; e per conoscere quali siano effettivamente i solfati basici del bismuto e gli eventuali sali doppî che forniscono. Stiamo, infatti, proseguendo le indagini per dare quei chiarimenti, che per lo scopo di questa ricerca, per ora, non hanno interesse.

Digitized by Google

Un confronto fra i risultati ottenuti nello studio del sistema $Bi_2(SO_4)_3$ — — K_2SO_4 — H_2O con quelli ai quali si è pervenuti con i sistemi $La_2(SO_4)_3$ — — K_2SO_4 — H_2O ; $Nd_2(SO_4)_3$ – K_2SO_4 — H_2O ; $Ce_2(SO_4)_3$ — K_2SO_4 — — H_2O mostra il grande interesse delle ricerche sistematiche iniziate. Pei lantanidi il composto 1 : 3 , è anidro nel La , diidrato nel Nd , e non si forma affatto nel caso del Ce; inoltre il campo di esistenza di questi composti è alquanto ristretto per il lantanio e il neodimio, mentre per il bismuto ha una stabilità notevolmente maggiore.

Ed anche l'*habitus* cristallino del composto anidro, nel caso del lantanio e nel composto del bismuto, sembra diverso. Il primo, infatti, forma delle minuscole rosette, costituite da minutissimi cristallini tabulari, a birifrangenza abbastanza forte, ciascuno dei quali non misura se non 0.002 — 0.003 mm. E però, se non è stato possibile, date le piccole dimensioni dei cristalli, definire a quale sistema cristallino appartiene il composto $La_2(SO_4)_3 \cdot 3K_2SO_4$, Zambonini e Carobbi [1], hanno trovato che il corrispondente sale di lantanio e tallio talloso, è costituito da piccoli e nitidi cristalli, monoclini, con *habitus* molto caratteristico, somigliante a quello di certi cristalli di petalite, che presentano, come forme predominanti, un prisma che si può assumere come verticale ed un pinacoide parallelo all'asse *b*. Rel caso del composto $Bi_2(SO_4)_3 \cdot 3K_2SO_4$ si ha da fare, invece, con cristalli esagonali o trigonali.

Gli altri numerosi composti che si formano nei sistemi, studiati, dei lantanidi, non si riscontrano nel bismuto, almeno nelle condizioni in cui abbiamo operato.

Chimica. — *Fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio con acqua esposta alle radiazioni di una lampada a vapori di mercurio.* Nota di REMO DE FAZI [2], presentata [3] dal Socio N. PARRAVANO.

Nella mia Nota presentata alla Reale Accademia dei Lincei il 6 marzo 1927 [4], in seguito ai risultati ottenuti sulla fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio esposte prima alle radiazioni emesse da una lampada in quarzo a vapori di mercurio, feci anche l'ipotesi che fra le radiazioni emesse ve ne fossero alcune ancora a noi sconosciute.

Qualche giorno dopo, il 14 marzo 1927, all'Academie des Sciences di Parigi [5] E. Rousseau in alcune esperienze eseguite sulla decomposizione

(1) *Solfati di lantanio e tallio talloso*, « Rend. R. Acc. Lincei », vol. I (serie 6ª), 6, 1925.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Applicata della Regia Scuola d' Ingegneria di Roma.

(3) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(4) « R. Acc. dei Lincei » (1) 344, (1927).

(5) E. ROUSSEAU, « C. R. » *184*, 686, (1927).

Digitized by Google

dell'acqua di lauro-ceraso esposta alle radiazioni di un'eguale lampada, accennava anche egli alla possibile esistenza di radiazioni finora ignote: esperienze che ha confermato in altri studi recentemente pubblicati [1].

Ho continuato le mie ricerche, come annunciavo nella prima Nota, con l'osservare il comportamento di soluzioni di glucosio fatte con acqua distillata esposta alle radiazioni della stessa lampada in quarzo a vapori di mercurio. Ho potuto così constatare che la velocità di fermentazione è sensibilmente superiore nella soluzione di glucosio fatta con acqua irradiata in confronto a quella di controllo, quando l'acqua venga impiegata subito dopo l' irradiazione. Inoltre tale differenza è anche osservabile qualora per un certo tempo il lievito di birra venga tenuto in sospensione in acqua già irradiata. In ogni caso però la velocità di fermentazione nelle esperienze finora eseguite non raggiunse mai quella delle soluzioni di glucosio esposte prima a tali radiazioni.

Perciò da questi primi risultati ho potuto rilevare che anche l'acqua esposta perfino per una sola ora alle radiazioni di una lampada in quarzo a vapori di mercurio può esercitare un'azione favorevole sul comune lievito di birra. È necessario far notare che un lievito molto impuro o notevolmente indebolito riceve invece un'azione dannosa con l'aggiunta di acqua irradiata, tanto da provocare una notevole diminuzione della velocità di fermentazione. Fra le esperienze che mi hanno dimostrato questa particolare azione ve ne sono quelle che non lasciano dubbio alcuno. Infatti quando si fa avvenire la fermentazione alcoolica di due eguali soluzioni di glucosio con lievito impuro e di debole attività, si nota che non appena si aggiunge ad una di esse un po' di acqua distillata e all'altra un'eguale quantità di acqua irradiata, la soluzione che contiene quest'acqua ha immediatamente una sensibile diminuzione di velocità di fermentazione.

Pertanto è certo che anche la sola acqua distillata e sterilizzata, esposta a tali radiazioni in recipienti di quarzo ben chiusi ed in assenza di aria, viene ad acquistare proprietà differenti che permangono per un certo tempo non ancora determinato.

Altre esperienze in corso eseguite però in assenza di radiazioni ultraviolette potranno forse chiarire l'esistenza o meno di nuove radiazioni emesse dalla lampada in quarzo a vapori di mercurio.

Parte sperimentale.

I *Esperienza*. - Un pallone di quarzo della capacità di circa 200 cc. completamente riempito di acqua distillata e sterilizzata, e poi chiuso con un tappo di gomma, fu lasciato per dieci ore alla distanza di 5 cm. da una

(1) E. Rousseau, «C. R.» *184*, 1007, (1927).

Digitized by Google

lampada in quarzo a vapori di mercurio adoperata nelle precedenti esperienze [1]. Subito dopo le dieci ore di irradiazione furono prelevati 100 cc. di quell'acqua, e messi insieme a gr. 10 di glucosio e a gr. 4 di un buon lievito di birra. La velocità di fermentazione fu determinata con l'identico apparecchio impiegato nelle altre ricerche [2], misurando la quantità di anitride carbonica svolta. Si fece contemporaneamente la prova di confronto e di controllo con eguali quantità e qualità di lievito di birra, di glucosio di acqua non esposta a tali radiazioni. L'andamento della fermentazione è riportato nel quadro seguente:

Temperatura	Tempo in ore	Soluzione di glucosio con acqua irradiata		Soluzione di glucosio di controllo	
		CO_2 in cc.	CO_2 in cc. Totale	CO_2 in cc.	CO_2 in cc. Totale
23° 1	0	—	—	—	—
25° 4	2.30	165	165	136	136
25° 6	3.30	87	252	70	206
25° 8	4.30	98	350	71	277
25° 8	5.30	87	437	85	362
26° 4	6.30	80	517	82	444

Quindi per quanto la differenza della velocità di fermentazione sia inferiore a quella già osservata per le soluzioni di glucosio esposte per eguale tempo alle medesime radiazioni, pur tuttavia è ancora nettamente sensibile anche con la sola acqua irradiata. Anche in quest'esperienza è stato notato il migliore odore e la minore quantità di batteri nella soluzione contenente acqua irradiata, come pure la minore acidità (gr. 0,0864 °/₀ calcolata come acido acetico) in confronto del controllo (gr. 0,093 °/₀).

II *Esperienza*. – Questa esperienza è stata eseguita come la precedente, ma con acqua esposta per una sola ora alle radiazioni emesse dalla stessa lampada in quarzo a vapori di mercurio:

(1) « R. Acc. dei Lincei » (1), 344, (1927).
(2) « Annali di Chimica applicata », *4*, 301 (1915).

Digitized by Google

Temperatura	Tempo in ore	Soluzione di glucosio con acqua irradiata		Soluzione di glucosio di controllo	
		CO_2 in cc.	CO_2 in cc. Totale	CO_2 in cc.	CO_2 in cc. Totale
21° 8	0	—	—	—	—
22° 5	2	277	277	258	258
23° 5	4	263	540	256	514
23° 5	6	243	783	239	753

Il lievito di birra dopo la fermentazione alcoolica della soluzione di glucosio con acqua irradiata non denota differenza alcuna con quello della soluzione di controllo. L'acidità è quasi eguale in entrambe le soluzioni: gr. 0.1026 % e gr. 0,1058 % sempre calcolata come acido acetico.

III *Esperienza*. – In due palloncini furono messi gr. 10 di glucosio e cc. 75 di acqua distillata e sterilizzata e gr. 4 di lievito di birra impuro. La velocità di fermentazione nelle prime 4 ore fu eguale in entrambe le soluzioni. Dopo la quarta ora si aggiunsero ad una di esse cc. 50 di acqua distillata esposta per 10 ore alle radiazioni della stessa lampada in quarzo a vapori di mercurio (A), e all'altra di controllo (B) 50 cc. di acqua distillata e sterilizzata, e si verificò l'andamento della fermentazione:

Temperatura	Tempo in ore	Soluzione di glucosio A		Soluzione di glucosio B	
		CO_2 in cc.	CO_2 in cc. Totale	CO_2 in cc.	CO_2 in cc. Totale
19°	0	—	—	—	—
19°	2	130	130	132	132
19°	4	165	295	165	297
—	—	—	—	—	—
19°	5	80	375	94	391
19°	6	76	451	94	485
19°	7	78	529	94	579
19°	8	78	607	95	674

Digitized by Google

La velocità di fermentazione non appena aggiunta l'acqua irradiata incominciò a diminuire e la differenza rimase costantemente notevole fra la soluzione A e la B.

In questa esperienza si notò inoltre che dopo 48 ore dall' inizio della fermentazione il lievito della soluzione A conteneva un maggior numero di batteri dell'altra B, e che anche l'acidità era superiore in quella contenente acqua irradiata (gr. 0,1236 °/₀) in confronto di quella di controllo (gr. 0,1014 °/₀).

IV *Esperienza.* – Un pallone di quarzo della capacità di 200 cc. riempito completamente di acqua distillata e sterilizzata, e chiuso con un tappo di gomma, fu lasciato per 10 ore alla distanza di 5 cm. dalla lampada in quarzo a vapori di mercurio. Poi subito dopo le dieci ore di irradiazione, raffreddata l'acqua a 15°, ne furono prelevati 100 cc. e messi in una bevuta con gr. 4 di lievito di birra. Analogamente fu eseguito per la soluzione di controllo, adoperando però acqua distillata e sterilizzata.

Le due bevute furono lasciate al buio per 18 ore e poi si aggiunsero a ciascuna di esse, gr. 10 di glucosio e si controllò la velocità di fermentazione:

Temperatura	Tempo in ore	Soluzione di glucosio con acqua irradiata		Soluzione di glucosio di controllo	
		CO_2 in cc.	CO_2 in cc. Totale	CO_2 in cc.	CO_2 in cc. Totale
15°	0	—	—	—	—
15° 5	1	93	93	51	51
16° 2	2	101	194	79	130
16° 5	5	347	541	298	428
17°	6	129	670	111	539
17°	7	114	784	99	638
17°	8	114	898	98	736

Dopo 48 ore dall' inizio della fermentazione si notò un migliore odore e una minore quantità di batteri nella soluzione con acqua irradiata in confronto a quella di controllo e inoltre l'acidità, calcolata come acido acetico; nella prima fu di gr. 0,0800 °/₀ mentre nell'altra di gr. 0,0910 °/₀.

Digitized by Google

Chimica. — *Porpore d'oro.* Nota di R. Levi e C. Fontana, presentata dal Socio L. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il sistema* $Fe(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$ *a 25°.* Nota di G. Malquori presentata dal Socio N. Parravano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Struttura cristallina dell'idrato di calcio.* Nota di A. Reina, presentata dal Socio L. Bruni.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Farmacologia. — *Variazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica.* I. *Potassio e farmaci convulsivanti.* Nota di L. Scremin, presentata dal Socio L. Sabbatani.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *La reazione del terreno e il perfosfato.* Nota di C. Antoniani, presentata dal Socio A. Menozzi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Il comportamento dell'arsenico di fronte al potere assorbente del terreno.* Nota di C. Antoniani, presentata dal Socio A. Menozzi.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Digitized by Google

Chimica biologica. — *Sulla trasformazione stereo-isomera del glucoso per azione dell'insulina.* Nota di G. QUAGLIARELLO, presentata dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sulla disidratazione dell'apofillite* [1]. Nota di A. CAVINATO, presentata [2] dal Socio prof. L. BRUGNATELLI.

Il comportamento dell'apofillite nella disidratazione per riscaldamento, è stato studiato da varî autori: Rammelsberg [3], Hersch [4], Hennig [5], Manasse [6], Colomba [7], Zambonini [8], Di Franco [9]; con risultati fortemente discordanti.

A riprova basterà citare che, per la stessa apofillite di Bergenhill, Hennig dà a 235° una perdita del 3.75 %, a 240° Hersch 2.03 %, a 245° Zambonini 1.77 %; mentre Colomba per l'apofillite di Traversella trova 5.35 % a 240°, e Hennig per quella di Poonah 4.93 a 235°, Manasse invece già a 215° aveva trovato una perdita di 6.52 %. A più elevata temperatura si trova: Hennig (apof. Bergenhill) a 267° 6.32 %, Zambonini (apof. Bergenhill) a 273° 8.94 %, Hersch (apof. Bergenhill) a 275° 9.08 %; mentre per l'apofillite di Andreasberg Rammelsberg dà a 266° soltanto 8.83, e Di Franco per quella di Palagonia a 270° 9.70 %. E potrebbesi continuare a citare altri esempi: solo oltre i 300° si ha, per le determinazioni dei diversi autori, un meno forte divario. Per tale fatto, e avendo a mia disposizione dell'apofillite in cristalli purissimi di Andrealsberg e del New Jersey, e mezzi di esperienza ottimi (dei quali ho già parlato in altro mio lavoro) [10], ho creduto opportuno di eseguire alcune serie com-

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Mineralogia della R. Università di Padova diretto dal prof. A. Bianchi.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) C. F. RAMMELSBERG, « Z. Dtsch. Geol. Ges. », 20, 443 (1868).

(4) C. HERSCH, « Diss. », Zürich, 1887.

(5) A. HENNIG, « Zeitschr. Kryst. », 34, 691 (1901).

(6) E. MANASSE, « Processi verbali Soc. Toscana Scienze Nat. », 15 (1906).

(7) L. COLOMBA, « Rend. Acc. Lincei », Roma, 1° sem, (1907).

(8) F. ZAMBONINI, *Contributo allo studio dei silicati idrati*, Napoli, 1908.

(9) S. DI FRANCO, *Apofillite di Palagonia*, « Atti dell'Accademia di Scienze Naturali », Catania, XV, 1926.

(10) A. CAVINATO, *Nuove osservazioni sulle zeoliti del gruppo della natrolite*, « Memorie della R. Accad. Lincei », Roma, 1927.

Digitized by Google

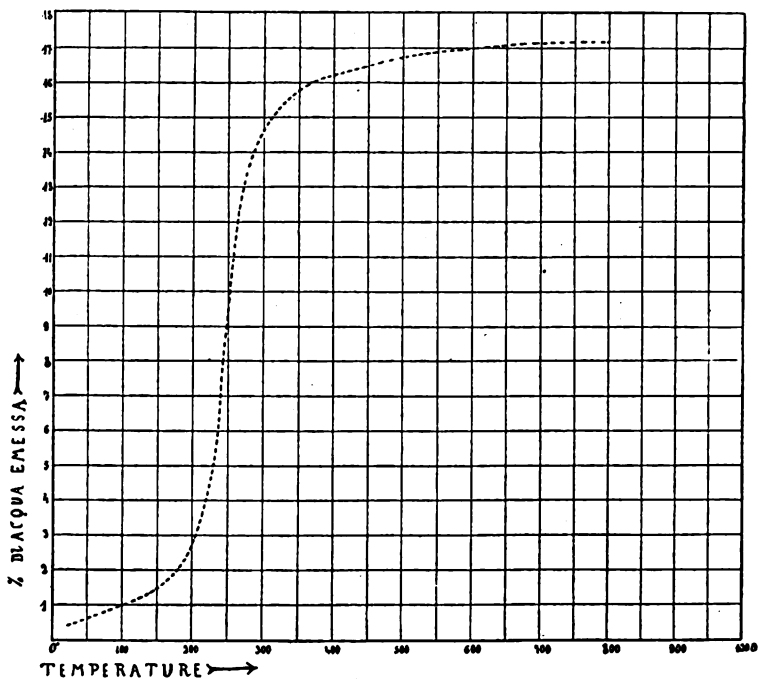
Fra le due apofilliti delle due diverse località non si è avuta alcuna differenza di comportamento.

I risultati ottenuti come medie di quattro determinazioni tra loro concordanti sino alla prima cifra decimale, sono i seguenti:

Temperature	Perdite °/₀	Temperature	Perdite °/₀
essiccatore	0.34°	300	14.63
—	—	325	15.24
110	1.04	350	15.85
180	2.00	400	16.20
200	2.70	500	16.75
225	6.10	—	—
250	9.50	600	17 —
275	13.28	700	17.20
—	—	900	17.20

plete di disidratazione su campioni dell'uno e dell'altra località, e non privo di interesse il pubblicare i risultati avuti.

La curva rappresentativa è mostrata dalla figura 1ª.



I valori miei, più alti di quelli avuti per ogni singola temperatura da ogni altro sperimentatore, furono ottenuti con riscaldamenti molto prolungati: generalmente di parecchi giorni, per certe temperature anche di qualche settimana.

Digitized by Google

Tali lunghissimi riscaldamenti sono necessari nell'apofillite per giungere a una *curva di equilibrio*. Il minerale infatti perde le ultime frazioni di acqua *lentissimamente*: così a 275° ho ottenuto in funzione del tempo:

Tempo (ore)	Perdita °/₀
24	11.61
48	12.02
72	12.21
96	12.33
120	12.45
144	12.97
192	12.98
264	13.12
366	13.28

Scaldata ancora per altre 48 ore a questa temperatura la polvere si è mantenuta a peso costante.

Un identico andamento ho ottenuto pure alla temperatura di 350°, raggiungendo una perdita massima di 15.85.

Dopo queste mie osservazioni ben poco valore può avere la tabella in cui Hennig (1) vuol mostrare il comportamento diverso nella disidratazione di cinque apofilliti di diverse località, poichè per nessuna temperatura si possono ritenere valori di equilibrio quelli da lui trovati. Per es., che valore può attribuirsi alle differenze trovate a 310° (8.70 °/₀ apof. Sulitelma, 9.04 °/₀ Utö, 9.20 °/₀ Bergenhill, 9.90 °/₀ Nordmarken, 9.93 °/₀ Poonah), quando alla stessa temperatura con un lungo riscaldamento io ho ottenuto per l'apofillite di due diverse località 14.83 °/₀?

La diversità di risultati degli altri sperimentatori, non è quindi attribuibile, secondo me, nè alla diversa provenienza dei campioni, nè alle condizioni della tensione di vapore ambiente nelle quali si eseguirono le determinazioni (poichè queste non hanno sensibile influenza sulla curva definitiva di equilibrio); *ma ritengo che sia sicuramente dovuta all'insufficiente durata dei riscaldamenti: dimodochè nessuno degli sperimentatori citati avrebbe raggiunta la curva di equilibrio.*

La curva da me data più sopra mostra che l'acqua della apofillite viene emessa quasi interamente e con continuità nell'intervallo di temperatura compreso tra i 200 e 300 gradi, e solo piccole frazioni vengono emesse all'infuori di tale intervallo.

In questo suo andamento l'apofillite ricorda le curve di alcune zeoliti come stilbite, philipsite, heulandite, ecc.: ma vi è di essenzialmente diverso il fatto della lentezza con cui l'acqua viene emessa dall'apofillite, e il fatto

(1) A. Hennig, loc. cit., e *Handbuch der Mineralchemie*, vol. II, 3°, p. 477.

Digitized by Google

che, a differenza di quanto avviene nelle altre zeoliti il riassorbimento per esposizione durante qualche ora all'aria ambiente in questo minerale è trascurabile, e vale costantemente alle diverse temperature, un'unità della prima cifra decimale. Solo in ambiente saturo di vapor d'acqua e in un periodo lunghissimo di tempo (qualche mese) si può osservare un notevole assorbimento [1]: *anzi un regolare lentissimo spostamento verso le primitive condizioni del minerale* [2]; in modo del tutto analogo a quanto ho osservato anch'io per la natrolite scaldata a temperature superiori ai 650 gradi.

Durante il riscaldamento le proprietà ottiche del minerale si conservano. Alla temperatura però di 280 gradi esso perde interamente la trasparenza e non la riacquista per immersione in olio.

Biologia. — *Sul processo di assunzione del vitello durante lo sviluppo embrionale del pollo* [3]. Nota di E. REMOTTI, presentata [4] dal Socio E. GIACOMINI.

Il problema dell'assunzione dei materiali di riserva accumulati nel sacco del tuorlo costituisce un interessante capitolo della vita embrionale che attende ancora oggi, nonostante le ricerche gia condotte in proposito, la sua soluzione.

Se, infatti, dopo le osservazioni sovratutto del Virchow, si ammette comunemente che la sede del processo sia da ricercarsi nelle cellule entodermiche che tappezzano la cavità del sacco vitellino, senza partecipazione dell'epitelio dell'intestino embrionale, nulla di deciso si può affermare sul processo con cui tale riassorbimento si verifica, i metodi puramente istologici (Dubuisson, Virchow, ecc.) e sperimentali (Schaper, ecc.), con cui è stato finora affrontato il problema, non potendo fornirci in proposito che induzioni di probabilità o semplici ipotesi.

La presenza, nelle varie fasi dello sviluppo embrionale, entro le cellule dell'epitelio, di inclusi che manifestano più o meno sicura somiglianza con gli elementi del tuorlo contemporaneamente presenti entro la cavità vitellina, è stata, per lo più, interpretata come espressione di un'attività fagocitaria e quindi di un'assunzione diretta di tuorlo inalterato per parte delle cellule epiteliali. Attività fagocitaria, a conferma della quale le esperienze di Schaper

(1) C. DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*, p. 477.

(2) Infatti dell'apofillite scaldata a 260 gradi e che aveva perduto il 9.59 % di acqua riassorbiva in 40 ore soltanto il 0.4 %, in 332 ore 1.15 %... ecc.... in 3586 ore tutta l'acqua perduta (cfr. « Neues Jahrb. für Min. ecc. », 1890, I, p. 121).

(3) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Anatomia Comparata della R. Università di Bologna diretto dal prof. E. Giacomini.

(4) Nella seduta del 1° giugno 1927.

Digitized by Google

porterebbero l'assunzione da parte delle cellule stesse delle particelle solide d'una sospensione di carminio iniettata nel sacco vitellino durante l'incubazione.

Ma, mentre quest'ultimo dato è però ben lungi dal dimostrarci, con la possibilità, anche la necessità che la fagocitosi rappresenti l'unico processo messo in giuoco dalle cellule ai fini di utilizzare le riserve vitelline - chè esso potrebbe anzi interpretarsi come una reazione a carattere forse difensivo di fronte a un materiale abnorme - non molto più decisiva in proposito è la semplice analogia esteriore tra il tuorlo extra– e quello endo–cellulare, unico contributo che la ricerca puramente istologica ha sinora offerto alla risoluzione del problema.

Accanto a un processo fagocitario, nulla viceversa ci autorizza a escludere una secrezione di fermenti che digeriscano gli elementi del vitello, apprestando i prodotti solubili all'assorbimento cellulare. In tal caso, non di una semplice dissoluzione fisica, ma di una vera e propria disgregazione enzimatica, sarebbe espressione la graduale fluidificazione del vitello, cui assistiamo nel corso dello sviluppo, parallelamente alla secrezione del liquido perivitellino, che dei fermenti verrebbe ad essere il veicolo, mentre le inclusioni epiteliali potrebbero allora ripetere, fors'anche, la loro origine da un processo paragonabile a quello che sembra verificarsi per i grassi, nell'intestino dell'adulto.

Nell'insufficienza dei dati finora messi in luce, mi è sembrato che la soluzione del problema non potesse cercarsi se non in un coordinamento sintetico dei due ordini di ricerche, istologiche e fisiologiche, sì che l'evolversi dell'organizzazione strutturale della parete e, in particolare, i vari aspetti che le inclusioni epiteliali presentano, traessero le ragioni del loro determinismo dalla correlativa conoscenza fisiologica della parete, stessa conoscenza sopratutto legata allo studio delle eventuali attività enzimatiche e, più precisamente, della loro localizzazione nell'epitelio stesso o nel tuorlo, donde è possibile una misura comparativa delle funzioni digestive endo– ed extra–cellulari. Solo in tal modo i dati istologici possono acquistare significato di testimonianza visibile di quelle attività cellulari, di cui i fermenti ci offrono la documentazione, per così dire, indiretta.

La possibilità, inoltre, di attuare sul medesimo individuo, per un dato stadio, l'osservazione istologica e la ricerca del fermento, ci permette ancora una maggiore sicurezza nel definire l'importanza relativa dei due processi di assunzione del vitello, eliminando parte almeno delle incertezze derivanti dalle oscillazioni individuali.

Le mie ricerche si sono svolte sopra un abbondante materiale di uova, (gentilmente forniteci dall'Istituto di Pollicoltura di Rovigo, diretto dal prof. A. Ghigi, al quale esprimo i miei ringraziamenti), le quali venivano sacrificate nei giorni successivi dell'incubazione onde prelevarne contemporaneamente porzioni della parete del sacco vitellino per l'osservazione isto-

Digitized by Google

logica, e porzione della parete stessa, nonchè del tuorlo, per lo studio biochimico, riguardo al quale mi sono, per il momento, più particolarmente fermato al gruppo dei fermenti proteolitici.

Senza entrare, nella presente nota, in merito al metodo seguito, sul quale mi soffermerò estesamente in altro lavoro più dettagliato, passo rapidamente alla esposizione dei risultati.

Per quanto si riferisce all'attività fermentativa, questa, appena sensibile nei primissimi giorni dello sviluppo, vien gradualmente accentuandosi di poi, prima nell'epitelio e in secondo tempo nel tuorlo: raggiunge un massimo verso il decimo giorno e rimane quindi all'incirca stazionaria, sino al termine dello sviluppo, con rapida regressione dopo la schiusa.

Parallelamente a queste variazioni enzimatiche il tuorlo prossimale subisce una fluidificazione, che ai primitivi elementi sferulari dei primissimi stadi, regolarmente ordinati in strati concentrici secondo le differenti dimensioni, sostituisce - nella prima metà dell'incubazione - una massa finemente granulosa di assai minore consistenza.

La parete del sacco vitellino viene, intanto, organizzandosi nella più intima e armonica correlazione delle sue varie parti, trasformando l'epitelio stratificato periferico, a limiti cellulari mal definiti, in un alto epitelio semplice, cilindrico, che viene a poggiare sopra una ricchissima rete vasale, e si organizza in un complicato sistema di pieghe, le quali, ad aggiungere estensione di superficie e possibilità di più intimo contatto col tuorlo, si trasformano in un complesso di reticolature e trafori, che ne fanno una perfetta espressione di adattamento assorbente.

E, mentre l'epitelio stratificato e, ancora, il vicino epitelio cilindrico presentano ricco contenuto di sferule di tuorlo perfettamente simile a quello della cavità, queste vengono via via riducendosi successivamente, sino talora a scomparire; o, comunque, troviamo scarse masserelle più tenui a confini mal definiti.

Confrontando i due ordini di dati, istologici ed enzimatici ne risulta allora che quando nell'epitelio noi troviamo le abbondanti inclusioni di tuorlo, è questo ancora il primo periodo in cui il fermento è solo scarsamente presente nella cavità, mentre vien più rapidamente attivandosi entro le cellule; successivamente poi quando esso si riversa nella cavità vitellina, anche le sferule incluse si riducono o scompaiono.

In altri termini, incompleta ancora l'organizzazione, scarsi i normali processi di secrezione del fermento, e limitata l'estensione dell'area vascolarizzata, l'assorbimento deve, in un primo tempo, compiersi per quel processo fagocitario che sembra costituire una sorta di attività, per così dire, primitiva da parte delle cellule stesse; mentre il raggiungimento della piena differenziazione dell'epitelio (e quindi delle sue potenzialità secretorie, nel loro processo fisico-chimico così a noi ancora mal noto) e le più ampie vie di canalizzazione, dallo sviluppo della rete vasale apprestate alle accre-

Digitized by Google

sciute esigenze dell'embrione, segna il definitivo affermarsi di un più rapido processo di digestione extracellulare per opera di quei fermenti, che ora si vengon riversando nel tuorlo, con elaborazione specifica e separata dei diversi materiali alimentari in quest'ultimo rappresentati.

Complessivamente quindi, il parallelismo tra l' organizzazione della parete nonchè la trasformazione degli inclusi epiteliali e lo svolgimento delle attività fermentative, illuminando di nuova luce i reperti istologici, ci permette di concluderne per un'evoluzione graduale del processo di assunzione delle riserve del tuorlo da una prima fagocitosi a un successivo assorbimento previa digestione extracellulare.

Biologia matematica. — *Conservazione e diffusione dei caratteri mendeliani.* Nota I. *Caso panmittico.* Nota di B. DE FINETTI, presentata [1] dal Corrisp. C. FOÀ.

Cosa avviene di un carattere ereditario, trasmissibile secondo le leggi di Mendel, col passare delle generazioni? Conoscendo ad un certo istante la ripartizione di un dato insieme di popolazione, ossia le percentuali dei due genotipi omozigoti opposti e quella degli eterozigoti, possiamo cioè prevedere come tale ripartizione varierà in avvenire? In particolare: esisterà una ripartizione di regime, cui si tenda indefinitamente ad avvicinarsi? E, se esiste, la si può determinare?

Chi abbia prestato un po' d'attenzione alla geniale e suggestiva teoria di Mendel sull'ereditarietà dei caratteri, chi, ad esempio, abbia letto l'interessantissimo libro di P. Enriques: *L'Eredità nell'Uomo* (Vallardi, 1924), si sarà certo prospettato questo problema, si sarà certo fatte, in forma precisa o vaga, queste domande, sia che, con mentalità scientifica, abbia volto lo sguardo al quadro generale della teoria, sia che, impressionato da qualche particolare carattere ereditario, abbia sentito il bisogno d'una risposta che assumeva in quel caso ai suoi occhi un interesse palpitante.

L'Enriques tratta acutamente nel Capitolo VI le « *questioni generali e sociali* » che si ricollegano all'ereditarietà, tra cui (§ II, p. 332) anche quella che abbiamo ora pospettata. La sua natura è tale, però, che coi soliti modi di ragionamento si può giungere a ben poche conclusioni, e molto imprecise, e molto incerte, e comunque riguardanti sempre casi straordinariamente semplici, e soggette a ipotesi grandemente restrittive. Per trovare qualche risultato meno vago e più generale occorre il sussidio dell'analisi matematica.

(1) Nella seduta del 15 maggio 1927.

Digitized by Google

Vogliamo qui riassumere in forma elementare alcuni risultati stabiliti per tale via, cercando anche — per non enunciarli senza alcuna giustificazione o spiegazione — di dare un'idea intuitiva del criterio su cui le ricerche furono basate. I calcoli si trovano svolti nel mio articolo *Considerazioni matematiche sull'ereditarietà mendeliana* pubblicato nella rivista «Metron» (vol. VI, n. 1, I-III-1926); alcune delle notizie che riporteremo sono però del tutto nuove, tolte da un secondo articolo in preparazione.

*
* *

Per poter tradurre nel linguaggio ordinario e porre sotto forma espressiva dei concetti che appartengono al calcolo differenziale, ci è necessario introdurre un metodo di rappresentazione grafica: potremo, grazie a tale artificio, interpretare il problema propostoci come problema di movimento di un punto, di cui le leggi di Mendel costituiscono le leggi cinematiche.

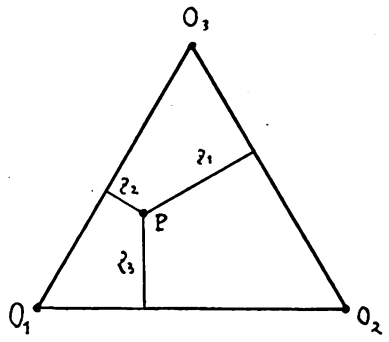


Fig. 1.

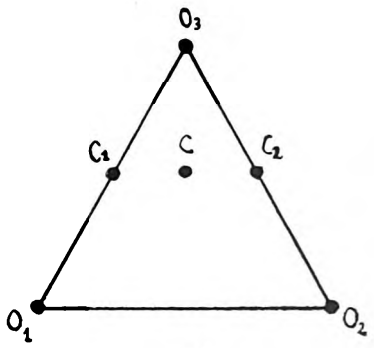


Fig. 2.

Possiamo infatti rappresentare mediante un punto, in modo semplice e conveniente, una ripartizione di popolazione, con lo stesso metodo usato correntemente in metallurgia per indicare graficamente la composizione delle leghe ternarie; è importante familiarizzarsi con questo metodo grafico di rappresentazione, e tenerne presenti le proprietà che ne esporremo, perchè il parallelismo fra il fenomeno statistico della diffusione di un carattere mendeliano in un insieme di popolazione, che è quello che ci interessa, e il fenomeno cinematico, cui ci è comodo riferirci, risulti al possibile immediato.

Disegnamo un triangolo equilatero $O_1\ O_2\ O_3$ colla base orizzontale (ffg. 1) e segnamo un punto P non esterno ad esso. Sia ζ_1 la sua distanza dal lato $O_2\ O_3$, ζ_2 da $O_1\ O_3$, ζ_3 da $O_1\ O_2$. È noto che la somma $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$ di tali distanze è uguale all'altezza del triangolo, che assumeremo come unità di misura. Se indichiamo ora con ζ_1 la percentuale (1) dei dominanti puri (2), con ζ_2 quella dei recessivi, con ζ_3 quella dei dominanti

(1) Si noti che la percentuale «68 %» la intendiamo uguale a 0.68, non 68. Non sarebbe opportuno seguire l'uso comune, cui si passa però immediatamente moltiplicando per 100, ossia spostando il punto decimale.

(2) Mi riferisco senz'altro al caso praticamente più interessante in cui uno dei caratteri sia dominante sull'altro, ma nulla sarebbe da mutare nel caso in cui l'aspetto degli eterozigoti fosse intermedio.

Digitized by Google

impuri, è chiaro che ogni punto non esterno al triangolo individua una ripartizione di popolazione ben determinata. I vertici rappresentano i casi in cui tutta la popolazione appartiene al medesimo genotipo: O_1 la totalità di dominanti puri, O_2 la totalità di recessivi (alla base: omozigoti), O_3 (il vertice superiore) indica la totalità di eterozigoti. I punti del contorno rappresentano le ripartizioni binarie, in assenza del genotipo corrispondente al vertice opposto; quelli interni, il caso generale di una ripartizione ternaria.

Dei punti particolari molto importanti sono quelli segnati nella fig. 2; punti rappresentativi della ripartizione della prole di ogni singolo tipo di accoppiamento secondo la legge di Mendel.

Indicando i genotipi coi simboli S_1 (dominanti puri), S_2 (recessivi), S_3 (eterozigoti) (1), avremo la seguente tabella:

tipo di accoppiamento	ripartizione della prole			punto rappresentativo
	S_1	S_2	S_3	
$S_1 \times S_1$	100 %	—	—	O_1
$S_1 \times S_2$	—	—	100 %	O_3
$S_2 \times S_2$	—	100 %	—	O_2
$S_1 \times S_3$	50 %	—	50 %	C_1
$S_2 \times S_3$	—	50 %	50 %	C_2
$S_3 \times S_3$	25 %	25 %	50 %	C

Questi punti permettono di rappresentarci in forma intuitiva l'influenza esercitata sul moto del punto rappresentativo dalla fecondità delle coppie del tipo corrispondente. Per stabilirla in modo semplice ci baseremo sulla notevole proprietà seguente: se diciamo punto rappresentativo d'un insieme di popolazione il punto rappresentativo della sua ripartizione al quale si attribuisca una massa uguale alla quantità globale di popolazione dell'insieme, il punto rappresentativo dell'insieme formato riunendone due (o più) altri (non aventi parti comuni) è la *somma* dei due (o più) punti rappresentativi di esse, dicendo « somma » di punti il loro baricentro con massa uguale alla somma delle masse (2).

Ciò mostra che se nascono degli individui la cui ripartizione è individuala da un certo punto Q, il punto rappresentativo P si deve spostare in linea retta verso Q, perchè, se la quantità dei nati in un dato intervello di tempo è c, alla fine di esso il punto rappresentativo sarà $P + cQ$, ed è ben noto che il baricentro di due punti è sempre compreso tra essi.

Dati Q e c, è determinata la velocità media del punto rappresentativo nell'intervallo t. È ovvio che il suo moto dovrà risultare nella realtà discontinuo e intermittente: farà un piccolo salto ad ogni nascita. Però, in una popolazione numerosa, la variazione delle percentuali avverrà senza scarti troppo bruschi, e potremo assimilare il suo moto – secondo il criterio fondamentale della statistica matematica – a un moto continuo. Allora, oltre che di velocità media, potremo parlare anche di *velocità istantanea*, che in grandezza è data da

natalità × distanza dei punti P e Q.

Possiamo dire, tanto per caratterizzare in modo espressivo la direzione e il verso, che essa è un'*attrazione* verso il punto Q. Per essa abbiamo una proprietà analoga alla precedente, e che ne è facile corollario: la velocità impressa al punto P delle nascite è la somma delle sei dovute alle nascite da coppie dei sei diversi tipi possibili.

(1) Si osservi che gli indici corrispondono a quelli usati per le ξ_1, ξ_2, ξ_3.

(2) Chi si occupa di matematica riconoscerà, negli enti che devo introdurre in modo così poco corretto, le note « formazioni geometriche di I^a specie » di Grassmann-Peano.

Digitized by Google

L'influenza delle morti - che si valuta analogamente – è nulla se la mortalità è la stessa per tutti e tre i genotipi, perchè allora essa non altera la ripartizione. A questo caso sempre ci riferiremo. Se si hanno anche fenomeni di migrazione, si dovrà supporre, più in generale, che sia nulla l'influenza combinata di questi e della mortalità.

Basterà allora, per l'impostazione matematica del problema, studiare le velocità impresse dalle nascite da coppie di un determinato tipo, che sappiamo essere dirette verso il corrispondente punto rappresentativo, e di grandezza uguale al prodotto della distanza da esso per la natalità: quella, beninteso, che si avrebbe prescindendo dalle nascite da coppie di altro tipo.

Supponendo che la riproduzione sia panmittica, che si abbia *panmixia*, che cioè gli accoppiamenti si formino indifferentemente rispetto al carattere in questione, senza una tendenza sistematica alla preferenza di alcuni tipi di associazione, e che la riproduttività dei diversi tipi sia pure uguale, il numero dei nati da coppie di un certo tipo sarà proporzionale al numero probabile di tali accoppiamenti, e questo sarà proporzionale alle percentuali dei due genotipi che in tale accoppiamento debbono unirsi. Osservando che gli accoppiamenti di individui della stessa specie verrebbero contati due volte si ha che le percentuali probabili dei diversi accoppiamenti sono

ξ_1^2	ξ_2^2	ξ_3^2	per	$S_1 \times S_1$	$S_2 \times S_2$	$S_3 \times S_3$
$2\xi_1\,\xi_2$	$2\xi_1\,\xi_3$	$2\xi_2\,\xi_3$	per	$S_1 \times S_2$	$S_1 \times S_3$	$S_2 \times S_3$.

È facile vedere che la loro somma è appunto $(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2 = 1^2 = 1$.
Le possiamo anche rappresentare graficamente (fig. 3) (1).

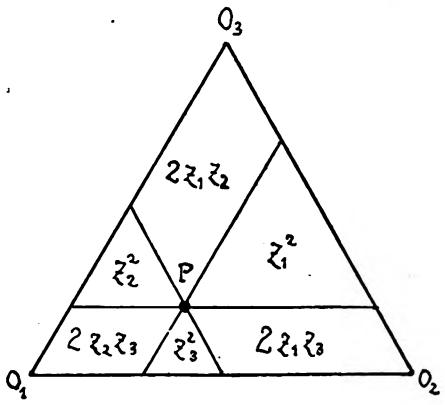


Fig. 3.

Moltiplicando per la natalità λ si hanno le natalità parziali che ci occorrevano: ad esempio la velocità impressa al punto P dalla fecondità degli accoppiamenti di eterozigoti e recessivi ($S_2 \times S_3$) è diretta verso C_2, ed è data in grandezza da $2\lambda\,\xi_2\,\xi_3\,s$, dove s è la distanza $\overline{PC_2}$ (2). Sommando le sei velocità ora completamente determinate, otteniamo per ogni istante la velocità. E, nota la posizione iniziale di P, e le velocità che successivamente assume, possiamo seguirlo in tutto il suo movimento: si tratta, dal punto di vista matematico, di integrare un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

(1) Le aree delle varie parti della figura sono le espressioni in esse scritte divise per $\sqrt{3}$.

(2) Con le comode notazioni vettoriali: il vettore velocità è $2\lambda\,\xi_2\,\xi_3\,(C_2 - P)$.

Digitized by Google

*
* *

Nel caso nostro, in cui la riproduzione è panmittica, i calcoli cui si è condotti non presentano difficoltà (V. articolo citato; ivi la riproduzione panmittica è detta, con termine più matematico che biologico, *omogenea*).

Ecco, in riassunto, i risultati.

Se la riproduzione è panmittica, esiste una ripartizione di regime che dipende dalle condizioni iniziali, e da esse soltanto (*legge del regime*). A tale ripartizione ci si avvicina asintoticamente: cioè sempre di più senza mai proprio raggiungerla. Dopo un certo tempo però, in fenomeni di questo andamento, la differenza fra le condizioni di regime e quelle effettive è praticamente trascurabile: così ad esempio nella teoria delle macchine si suole distinguere la fase d'avviamento e la fase di regime, benchè non esista in realtà un istante di demarcazione, e il regime compaia nelle equazioni del movimento come una condizione asintotica. Lo stesso converrà fare nel caso nostro: distingueremo le fasi di *assestamento* e di *regime*: la prima dura finchè l'errore che si commette considerando raggiunte le condizioni di regime non divenga tanto piccolo da ritenersi praticamente trascurabile. Se si considera errore trascurabile quello dell'1 % si calcola, per la popolazione umana, che questa durata può al massimo aggirarsi sui 100 anni.

Abbiansi inizialmente le percentuali $\zeta_1 = m_1$, $\zeta_2 = m_2$, $\zeta_3 = m_3$. Nella fase d'assestamento valgono le seguenti leggi:

La differenza fra le percentuali dei due omozigoti rimane costante:

$$\zeta_1 - \zeta_2 = m_1 - m_2 = \text{costante}$$

(*legge del dislivello costante*).

Dette *percentuali virtuali* corrispondenti al carattere dominante, rispettivamente al recessivo, le

$$\zeta_1' = \zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_3 \qquad \zeta_2' = \zeta_2 + \frac{1}{2}\zeta_3$$

che danno le percentuali dei cromosomi corrispondenti ai due caratteri, e indicando m_1' m_2' le percentuali virtuali iniziali, si ha ancora:

$$\zeta_1' = m_1' = \text{costante}$$

$$\zeta_2' = m_2' = \text{costante};$$

le percentuali virtuali, o, in breve, *la ripartizione virtuale, non varia* (*legge della costanza virtuale*).

L'assestamento è irreversibile (*legge d'irreversibilità*). Cioè nessuna percentuale può riprendere valori già assunti in passato: lo spostamento avviene

Digitized by Google

sempre nello stesso senso. Se la natalità è costante, allora la distanza dalle condizioni di regime decresce in ragione geometrica: si riduce di una data percentuale ogni anno.

Se la natalità è variabile, il grado di assestamento raggiunto dipende da una nuova variabile detta *rinnovamento*. Attribuiamo ad ogni intervallo di tempo che passa un « peso » proporzionale alla sua durata e alla natalità corrispondente; il rinnovamento rappresenta il « peso », così definito, del tempo passato dall'istante iniziale, da cui si comincia a studiare la riproduzione. Da questo « peso » dipende il grado d'assestamento raggiunto. Perciò, ad esempio, la ripartizione che si avrebbe al termine di un anno per una data natalità è quella stessa che si avrebbe dopo sei mesi se la natalità raddoppiasse, e qualunque avesse ad essere la mortalità. *L'assestamento dipende temporalmente dal rinnovamento (legge del rinnovamento).*

Questo assestamento conduce a una ripartizione di regime (legge del regime), e di questo è praticamente più importante preoccuparsi.

Diremo $n_1\, n_2\, n_3$ le percentuali di regime, $n'_1\, n'_2$ le percentuali virtuali di regime. Esse si calcolano mediante le formole:

$$n_1 = m'^2_1 \qquad n_2 = m'^2_2 \qquad n_3 = 2\, m'_1\, m'_2$$

dalle percentuali virtuali iniziali. *Le percentuali di regime degli omozigoti sono i quadrati delle rispettive percentuali virtuali; quella degli eterozigoti il doppio prodotto delle percentuali virtuali (legge dei quadrati virtuali).* Come corollario: *Il regime dipende solo dalla ripartizione virtuale iniziale.*

Appare da tali formole che *in condizione di regime panmittico la percentuale degli eterozigoti è doppia della media geometrica fra quelle degli omozigoti:*

$$n_1 : \frac{n_3}{2} = \frac{n_3}{2} : n_2$$

(*legge della media geometrica*).

Un carattere qualitativo delle ripartizioni di regime è che le percentuali degli omozigoti sono necessariamente una minore e una maggiore di un quarto, e che la percentuale complessiva dei puri, loro somma, è maggiore di mezzo. Ciò a meno che le percentuali dei puri siano entrambe 25 %, e 50 % quella degli eterozigoti: questo è l'unico caso di ripartizione *simmetrica* ($z_1 = z_2$) in condizione di regime.

Ammesso poi che una collettività si trovi in condizioni di regime panmittico, basterà conoscere la percentuale di uno dei genotipi per poterne calcolare le due altre, mediante formule che si ricavano elementarmente. Ci interessa avere quelle che danno n_1 e n_3 in funzione di n_2:

$$n_1 = \left(1 - \sqrt{n_2}\right)^2 \qquad , \qquad n_3 = 2\left(\sqrt{n_2} - n_2\right).$$

Digitized by Google

Sul nostro diagramma i punti in condizione di regime sono quelli della parabola disegnata nella fig. 4. La rappresentazione grafica della riproduzione panmittica più generale è di una semplicità insuperabile: data la ripartizione iniziale, si congiunge con un segmento rettilineo il punto che la caratterizza con quello della parabola di regime giacente sulla medesima verticale. Poichè i punti corrispondenti alla medesima ripartizione virtuale sono quelli giacenti sulla medesima verticale, la *traiettoria* della riproduzione panmittica - per la legge della costanza virtuale - è questo segmento: si verifica quindi intuitivamente che è completamente caratterizzata dalle condizioni iniziali.

Ciò significa che per i punti della parabola le attrazioni esercitate dai sei punti corrispondenti ai sei tipi di accoppiamento si fanno equilibrio, mentre per i punti al di sopra ($\xi_3^2 > 4\,\xi_1\,\xi_2$) si ha una velocità risultante verticale diretta verso il basso, e per quelli al di sotto ($\xi_3^2 < 4\,\xi_1\,\xi_2$) ancora una risultante verticale ma diretta verso l'alto.

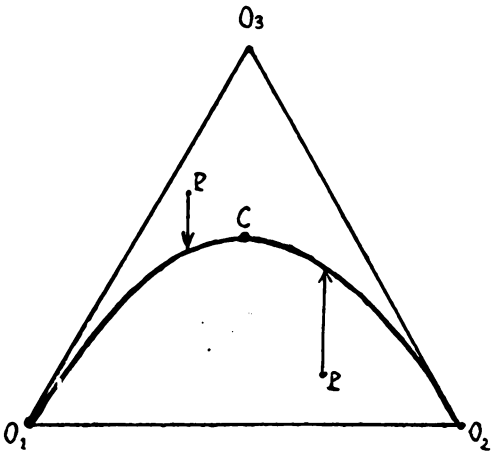


Fig. 4.

Vediamo qualche esempio semplice.

Inizialmente si abbiano metà dominanti puri e metà recessivi: dopo un secolo circa avremo approssimativamente una metà di eterozigoti e un quarto per ciascuno degli omozigoti: complessivamente tre dominanti contro un recessivo. Questa ripartizione è in condizione di regime, e si manterrà quindi finchè la riproduzione continui ad essere panmittica. Il caso semplicissimo ora considerato si trova anche nel volume citato dell'Enriques (p. 332): «se dapprima vi sono individui neri puri e biondi in egual numero, in F_1 «avremo tutti neri; ma in F_2 compariranno nuovamente i biondi nella proporzione di 1 «su 4. Dopo ciò nelle successive generazioni il rapporto si conserva costante». La conclusione coincide con la nostra. Invece non regge l'asserzione (p. 333) che: «se in una «popolazione panmittica vi è in un certo momento un certo rapporto tra gli individui col «carattere recessivo e quelli col carattere dominante, questo rapporto si conserva nelle «successive generazioni». Avviene invece uno spostamento a favore dei recessivi o dei dominanti a seconda che il numero degli eterozigoti è maggiore o minore del doppio della media geometrica fra quelli degli omozigoti. Essa è giusta però se al rapporto fra il numero degli *individui* col carattere dominante e recessivo si sostituisce quello fra il numero dei *cromosomi* portanti i due caratteri, chè allora tale enunciato si identifica con la legge della costanza virtuale.

Digitized by Google

Nell'esempio addotto dell'« assorbimento » del biondo che avverrebbe nel Nord-America possiamo precisare che se gli immigrati biondi del nord dell'Europa (recessivi, puri) e i bruni del sud (dominanti, in gran parte puri) si sono poi fusi panmitticamente, la percentuale odierna dei biondi dovrebbe essere (supponendo gli immigrati bruni tutti omozigoti) *il quadrato* di quella iniziale: se, ad esempio, (non ho a disposizione dei dati) si suppone che gli immigrati nordici, biondi, fossero il triplo dei bruni, meridionali, ossia che fossero immigrati il 75 % di biondi e il 25 % di bruni, dovremmo avere ora il $56\frac{1}{4}$ % di biondi e il $43\frac{3}{4}$ % di bruni, di cui il $6\frac{1}{4}$ % dovrebbero essere puri, e il rimanente $37\frac{1}{2}$ % eterozigoti.

Se inizialmente abbiamo dominanti puri, dominanti impuri, recessivi, nella proporzione

$$1 : 2 : 4$$

le percentuali virtuali stanno come 2 : 5

$$\left(1 + \frac{2}{2} = 2 \quad , \quad 4 + \frac{2}{2} = 5\right)$$

e in regime si tende alla proporzione

$$2^2 : 2\ (2 \times 5) : 5^2$$

ossia

$$4 : 20 : 25 .$$

Questo procedimento, generalizzato, dà forse la forma più accessibile per formulare le leggi del regime, perchè si può limitarsi a operare su numeri interi. Possiamo enunciare in generale la regola: se inizialmente abbiamo dominanti puri, dominanti impuri, recessivi, nella proporzione

$$A : B : C$$

si tende, in regime, alla proporzione

$$(2A + B)^2 : 2(2A + B)(2C + B) : (2C + B)^2 .$$

*
* *

Abbiamo rilevato che in fase di regime, data la percentuale dei recessivi, si possono determinare le altre. Tale fatto riveste importanza pratica quando esse non possano determinarsi direttamente facendo una statistica, come nel caso della dominanza: non è possibile rilevare quanti dei dominanti siano puri e quanti eterozigoti. Se però supponiamo la riproduzione panmittica, e raggiunta la fase di regime, detta u_2 la percentuale dei recessivi, quelle dei dominanti puri e degli eterozigoti sono

$$u_1 = (1 - \sqrt{u_2})^2 \quad , \quad u_3 = 2(\sqrt{u_2} - u_2)$$

il *coefficente di purezza* dei dominanti è, essendo il loro numero $u_1 + u_3 = 1 - u_2$:

$$p = \frac{u_1}{u_1 + u_3} = \frac{u_1}{1 - u_2} = \frac{(1 - \sqrt{u_2})^2}{(1 - \sqrt{u_2})(1 + \sqrt{u_2})} = \frac{1 - \sqrt{u_2}}{1 + \sqrt{u_2}} .$$

Digitized by Google

La tabella che segue dà la percentale dei puri (coefficente di purezza p) e degli impuri ($1-p$) fra i dominanti, in funzione della percentuale di recessivi n_2 :

$n_2 =$ 0 %	$p =$ 100 %	$1-p =$ 0 %	$n_2 =$ 16 %	$p =$ 43 %	$1-p =$ 57 %
$n_2 =$ 0.01 %	$p =$ 98 %	$1-p =$ 2 %	$n_2 =$ 25 %	$p =$ 33 %	$1-p =$ 67 %
$n_2 =$ 0.1 %	$p =$ 94 %	$1-p =$ 6 %	$n_2 =$ 36 %	$p =$ 25 %	$1-p =$ 75 %
$n_2 =$ 0.5 %	$p =$ 87 %	$1-p =$ 13 %	$n_2 =$ 50 %	$p =$ 17 %	$1-p =$ 83 %
$n_2 =$ 1 %	$p =$ 82 %	$1-p =$ 18 %	$n_2 =$ 64 %	$p =$ 11 %	$1-p =$ 89 %
$n_2 =$ 4 %	$p =$ 67 %	$1-p =$ 33 %	$n_2 =$ 80 %	$p =$ 5 %	$1-p =$ 95 %
$n_2 =$ 9 %	$p =$ 54 %	$1-p =$ 46 %	$n_2 =$ 90 %	$p =$ 2.6 %	$1-p =$ 97.4 %
$n_2 =$ 11.1 %	$p =$ 50 %	$1-p =$ 50 %	$n_2 =$ 100 %	$p =$ 0 %	$1-p =$ 100 %

Si noti in special modo l'impressionante rapidità dell'inquinamento dei dominanti per l'infiltrazione di percentuali anche minime di recessivi, quale appare osservando i primi valori della tabella.

Il coefficente di purezza p rappresenta anche la probabilità che un dominante sia puro, $1-p$ la probabilità che esso sia impuro.

In un accoppiamento di due dominanti, la probabilità che essi siano entrambi puri, entrambi impuri, o uno puro e l'altro impuro, sono quindi

$$p^2 \quad , \quad (1-p)^2 \quad , \quad 2p(1-p)$$

e poichè la probabilità che un figlio sia un dominante puro, o impuro, o un recessivo, sono nei tre casi, secondo le leggi di Mendel:

$$1 \ , \ 0 \ , \ 0 \quad ; \quad \frac{1}{4} \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{2} \ , \ 0$$

la probabilità che un figlio di due dominanti sia un dominante puro, o impuro, o un recessivo, risultano

$$\frac{1}{(1+\sqrt{n_2})^2} \qquad \frac{2\sqrt{n_2}}{(1+\sqrt{n_2})^2} \qquad \frac{n_2}{(1+\sqrt{n_2})^2} \ ,$$

stanno cioè tra loro come $1 : 2\sqrt{n_2} : n_2$.

La probabilità che esso sia dominante sta a quella che sia recessivo come

$$(1+2\sqrt{n_2}) : n_2 \ .$$

Se, a mo' d'esempio, i recessivi sono l'1 %, la probabilità che un figlio di due dominanti sia un dominante puro, o impuro, o un recessivo, stanno nella proporzione 100 : 20 : 1 ; quindi la probabilità che sia dominante sta nel rapporto 120 : 1 alla probabilità che sia recessivo.

Per $n_2 = \frac{1}{4}$ la proporzione fra le stesse probabilità è 4 : 4 : 1 , (8 : 1).

Per $n_2 < \frac{1}{4}$ le tre probabilità, come le abbiamo scritte, stanno in ordine decrescente

$$1 > 2\sqrt{n_2} > n_2 \ ,$$

se al contrario è $n_2 > \frac{1}{4}$, le due prime vanno invertite: la probabilità che nasca un recessivo è però sempre la minima.

Per $n_2 > \frac{1}{4}$:

$$2\sqrt{n_2} > 1 > n_2 \ .$$

Digitized by Google

Biologia. — *Su alcune modificazioni del decorso della fermentazione alcoolica per effetto del campo elettro-magnetico oscillante sul lievito.* Nota di E. BENEDETTI presentata dal Socio E. GIACOMINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Azione delle basse temperature sulla lente cristallina.* Nota di G. BERGAMI presentata dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Botanica. — *Sul succo astringente del frutto del « Diospyros kaki » acerbo e le sue applicazioni in Cina ed in Giappone come sostanza impregnante per la carta ed il legno.* Nota del dottore M. MUCCIOLI, presentata [1] dal Socio prof. P. R. PIROTTA [2].

Fra i rappresentanti di flore esotiche introdotti in Europa, uno dei più noti e diffusi, specie da noi perchè meglio qui attecchisce, è senza dubbio il *kaki* 柿 (*Diospyros kaki*, L.) [3]. Ma mentre la sua coltivazione viene da noi praticata a scopo specialmente commestibile, in Cina ed in Giappone il succo del suo frutto, o meglio quello di certe sue varietà, ha una importanza tecnica non trascurabile per le applicazioni di cui è suscettibile.

Nelle righe seguenti, trascurando ogni altro campo di applicazione, mi propongo di render note solamente alcune di quelle industrie che nell'estremo Oriente, fino da epoche remote, fanno largo uso di tale succo, e che, specie se adoperandolo più razionalmente, potrebbero anche qui da noi utilizzarlo con vantaggio.

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(2) Lavoro eseguito presso la Scuola Orientale della R. Università di Roma.

(3) *Kaki* è il nome giapponese, *Shih* quello cinese; ambedue si scrivono 柿. La pianta è originaria della Cina ove cresce spontanea su vasta superficie. Gli europei la conobbero dai giapponesi; ciò spiega perchè essi adottarono il nome giapponese anzichè quello cinese. La coltivazione del *kaki* è già descritta, fra l'altro, nel 齊民要術 *Ch'i Min Yao Shu* opera di agricoltura compilata in Cina nel IV sec. d. Cr. Per qualche studio moderno sul *kaki*, vedi, ad es., *On Kaki-no-shibu*, by I. ISHIKAWA, in « Transactions of the Asiatic Society of Japan », vol. 9 (1881), pp. 36-39. Ed ancora: *On Kaki-shibu a Fruit Juice in Technical Application in Japan*, by M. TSUKAMOTO, in « The Bulletin of the College of Agriculture », Tokyo Imperial University, vol. IV (1902). pp. 329-335.

Digitized by Google

I giapponesi adoperano il succo del frutto del *kaki* acerbo (1), per la conservazione delle reti da pesca e dei fili delle lenze, i quali immersi in esso e lasciati seccare al sole, acquistano la proprietà di essere quasi impermeabili all'acqua, e quindi duraturi. La carta trattata allo stesso modo, acquista una grandissima resistenza alla lacerazione ed allo sgualcimento, dovuta al fatto che le sue fibre vengono dal succo stesso rese aderenti fortemente le une alle altre. Tale carta si adopera, come mi comunica il prof. Giovanni Vacca, in Cina ed in Giappone per la fabbricazione degli stampini da decoratori. Si adopera anche come carta da imballaggio e specialmente per la confezione dei pacchetti di tè da esportazione (2); l'impermeabilità di questa carta rende difficile l'attecchimento delle muffe nel tè quando questo venga trasportato in climi caldi ed umidi. Anche i tini ed i mastelli di legno risultano, dopo analogo trattamento, più resistenti e duraturi.

Mescolando questo succo con inchiostro di Cina, si ottiene una vernice di un bel nero intenso colla quale i giapponesi usano verniciare le pareti esterne delle loro abitazioni che, essendo di legno, a causa dei terremoti colà frequentissimi, acquistano col trattamento un'assai minore sensibilità agli agenti atmosferici, restando così eliminato, o per lo meno ritardato assai, il pericolo di distorsione o putrefazione del legno.

La maniera di preparare il succo da adoperarsi a questi scopi è quanto mai semplice. Si noti però che non il succo di ogni frutto di *kaki* è utilizzabile. I cinesi ed i giapponesi dividono le varietà di frutti in due categorie: la prima comprende i frutti adatti a mangiarsi e questi, se maturi, sono dolcissimi; l'altra, dai cinesi detta *Pei-shih* [木卑] 柿 (giapponese *shibugaki*), ovvero *Ch'i-shih* 漆柿 (*kaki* da vernice) (3), comprende i *kaki* da industria, ricchissimi in tannino, i quali neanche allo stato di perfetta maturazione sono dolci (4), ed hanno inoltre dimensioni minori dei precedenti perchè di rado il loro diametro supera i 3-4 cm.

Per preparare il succo, a 1200 Kg. di frutti in pieno sviluppo e ridotti a poltiglia, si aggiungono 2 hl. di acqua; si hanno così 7 hl. di liquido

(1) Il succo del *kaki* acerbo viene detto dai giapponesi *Kaki-no-shibu*, *Kaki-shibu* 柿澁 o semplicemente, nell'industria, *shibu* (da 澁 *shibui* = astringente).

(2) Caratteristica delle carte così impregnate sembra quella di non avere odore sgradevole; inoltre non essendo il succo del *kaki* nocivo, potrebbero forse venir adoperato come involucro di sostanze alimentari.

(3) Nel 本草綱目 *Pen Ts'ao Kang-mu* la « Grande Materia Medica cinese » pubblicata nel 1578, nel libro 38 è descritta questa varietà di *kaki* e si accenna al suo uso per verniciare oggetti.

(4) Tali varietà divengono dolci solo se esposte al sole dopo averle private della corteccia che viene dai giapponesi utilizzata come condimento in luogo del pesce, in certi loro cibi. Altre volte i giapponesi usano ridurre il frutto a poltiglia ed aggiungervi orzo previamente abbrustolito e finemente polverizzato. La miscela dopo tre ore diviene dolcissima e s'usa in talune località come sostituto dello zucchero. (Cfr. ISHIKAWA, loc. cit., p. 39).

Digitized by Google

che si lascia a sè per 3-4 giorni, durante i quali ha luogo una fermentazione riconoscibile all'effervescenza che l'accompagna.

La preparazione ha luogo in Giappone nel mese di agosto e, a detta dei competenti, deve eseguirsi dentro un periodo di 10 giorni determinati, chè i succhi preparati prima o dopo tale periodo risultano di qualità inferiore (1). Di fresco preparato, il succo è biancastro e quasi inodoro; in breve tempo assume però colorazione rosso-bruna più o meno intensa ed emana forte odore di acido butirrico (2), onde aumenta notevolmente l'acidità che è debole nel succo fresco.

La causa di tante applicazioni del succo del frutto del *kaki* acerbo, sta nel fatto che esso contiene una verietà di tannino diversa dalle altre conosciute, insolubile in acqua od alcool, solubile negli acidi diluiti. Immergendo nel succo un tessuto o della carta e lasciando asciugare, l'acido che tiene il tannino in sospensione (acido butirrico), evapora; nei pori delle fibre si forma allora una pellicola di tannino insolubilizzatosi, la quale, mentre trattiene le fibre tenacemente aderenti, impedisce od ostacola il loro potere assorbente dei liquidi. L'esposizione all'aria sembra migliori notevolmente la qualità della pellicola. È poi da notare che la pellicola si forma anche lasciando a sè il succo contenuto in tini scoperti e ciò, nonostante l'acidità del liquido; qui pare entri in azione una ossidasi che agisce sul tannino (v. nota 1).

Per ultimo noteremo che il fusto del *kaki* fornisce un legno apprezzatissimo dagli ebanisti (3).

(1) (V. TSUKAMOTO, loc. cit.). Nel 和漢三才圖會 *Wa-kan San-zai Zu-e*, la « Grande Enciclopedia Sinico-giapponese », pubblicata nel 1713, la quale è una edizione aumentata, per la parte giapponese, di una enciclopedia cinese pubblicata nel 1609, alla voce *Shibugaki* [木卑] 柿 è detto: « Per fare il succo si prendono 18 litri (un *tō*) di frutta private dei gambi, si aggiungono 4.5 litri di acqua (2 *shō* e 5 *gō*), si pesta il tutto fortemente e si pone in mastelli lasciando a sè per una notte; si decanta quindi dalla posa, si aggiunge altra acqua e dopo due giorni di riposo si decanta di nuovo (unendo i due liquidi di decantazione).

« [Il liquido che così si ottiene] serve a molti usi: per impregnarne la carta, i vestiti, i rivestimenti di stoffa dei bauli ed i sacchi di stoffa in cui si conserva il *sake*. Mescolato con inchiostro [di Cina] serve a verniciare le tubature [di bambù] per l'acqua affinchè meno facilmente marciscano. Quando si dà la lacca, si suole distendere sotto questa prima uno strato di *shibu*. Lo *shibu* col calore dei mesi estivi è di difficile conservazione [onde s'usa] gettarvi dentro un pezzo di melanzana [茄子]. Se si fa galleggiare sull'acqua dei fiumi lo *shibu*, i pesci vengono alla superficie fortemente tramortiti ».

(2) L'acido butirrico presente nel succo alquanto stagionato, ma non nel frutto, si forma forse, durante la fermentazione, dall'acido malico contenuto nel frutto. Le analisi eseguite sulla polpa del *kaki*, hanno dato: zucchero invertito finoa l 15.8 %, saccarosio (dubbio) 0.4 %. Degli acidi organici solo l'acido malico (0.3 %) ed il tannico. In frutti di diversa maturità e varietà: zucchero invertito: 15.7-15.86 %, acido malico 0.25 %, acido tannico. Spesso è presente una ossidasi che agisce sull'acido tannico. (Cfr. WEHMER, *Die Pflanzenstoffe*, 1911, Gustav Fischer, Jena, p. 592, n. 1641).

(3) M'è veramente gradito inviare qui al chiarissimo prof. E. Carano, dell'Università di Roma, i miei più sentiti ringraziamenti per la premurosa sollecitudine con cui mi ha fornito la bibliografia moderna sull'argomento.

Digitized by Google

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. GARBASSO annuncia la morte dei Soci BAGNÈRA GIUSEPPE e VINCENZO CERULLI e ricorda brevemente i due estinti assicurando che essi verranno a tempo opportuno degnamente commemorati.

Annuncia anche la morte dei Soci Stranieri EDUARDO BRÜCKNER e GUSTAVO TSCHERMAK l'uno membro della nostra Accademia dal 15 agosto 1924 e l'altro dal 16 dicembre 1883.

Il Socio CASTELNUOVO dice che la perdita di Giuseppe Bagnèra riuscì particolarmente dolorosa ai colleghi di Roma, che poterono apprezzarne le alte doti della mente e la bontà dell'animo. Dalla conversazione più ancora che dagli scritti si poteva valutare l'acuto spirito critico, la larga cultura, la visione sempre elevata della ricerca scientifica. I lavori del Bagnèra sono scarsi di numero ma di grande valore. Egli non affrontava che argomenti difficili e non pubblicava una riga finchè non fosse arrivato a un risultato definitivo. Così i suoi primi lavori portano un notevole progresso alla teoria dei gruppi di un numero finito di operazioni (determinazione dei gruppi, il cui ordine è la quinta potenza di un numero primo, e dei gruppi finiti di collineazioni reali dello spazio). I lavori del secondo periodo, sulle superficie iperellittiche, compiuti in collaborazione col prof. De Franchis, furono giudicati degni, nel 1909, del premio Bordin dell'Accademia delle Scienze di Parigi. Unendosi alle parole del Presidente, il Socio CASTELNUOVO invia un mesto saluto alla memoria dell'amico così immaturamente rapito alla famiglia, alla scienza, alla scuola.

Il Corrisp. SOLER a nome della Commissione geodetica italiana che ebbe a suo Presidente VINCENZO CERULLI, esprime il più vivo cordoglio per la morte dell'insigne astronomo, avvenuta a Merate, dove egli si era recato all'inaugurazione della nuova specola.

Mette in rilievo i meriti dello scienziato ricordando che egli fu il fondatore dell'Osservatorio di Colleurania.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio LEVI G. presenta in omaggio all'Accademia il suo « Trattato di istologia ».

Il Socio NASINI R. presenta in omaggio all'Accademia, per incarico avutone dal collega prof. M. G. LEVI, il primo volume dei suoi: *Studi e ricerche sui combustibili* con le seguenti parole:

« La pubblicazione è stata fatta sotto gli auspici dell'Associazione italiana di Chimica generale e applicata, la quale esplica una lodevole azione di propaganda culturale scientifico-tecnica mettendo in valore le ricerche fatte nei laboratori chimici italiani. In questo volume sono riuniti gli studi fatti dal LEVI e dai suoi collaboratori nel quadriennio 1922-26. È una

Digitized by Google

raccolta assai importante: il grande problema dei combustibili solidi, liquidi e gassosi, che così interessa il nostro paese, è affrontato con entusiasmo, ma insieme con sana critica e con vera competenza e con larghezza di esperienze, in modo che sulle varie questioni e sui mezzi per risolverle ci possiamo fare, secondo questo volume, un'idea adeguata. A questo volume ne seguiranno certo altri, ora che per iniziativa di S. E. il Ministro dell'Economia Nazionale, on. Belluzzo, è stata istituita presso la scuola di Chimica industriale di Bologna una « Sezione di studi sui combustibili », dotata di mezzi assai larghi, tali da permettere, sotto la direzione del Levi, uno studio approfondito ed esauriente, procedendo di pari passo colle ricerche che si stanno facendo su quello che nasconde il nostro sottosuolo, per la risoluzione di questi grandi e vitali problemi ».

Il Corrisp. E. Soler presenta alcuni suoi opuscoli relativi a questioni di gravimetria esponendone il contenuto.

Il Socio F. Severi presenta il secondo volume dei suoi « Elementi di geometria » ad uso delle scuole secondarie e ne discorre.

Il Segretario Accademico G. Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono all'Accademia, segnalando una serie di opuscoli del Socio A. Castellani, P. Rondoni « Fisiopatologia generale del ricambio »; l' « Atlas des spectres des substances colorantes » composto a cura dell'Accademia delle Scienze dell'U. R. S. S., sotto la direzione di P. Lazarev; l' « Atlas des cartes des éléments magnétiques » composto pure sotto la direzione del Lazarev; « Stereogramma tectonico delle Alpi valdostane centrali e delle alte valli aostane meridionali » di F. Hermann.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Silvestri F. legge anche a nome del Socio Raffaele la relazione con la quale propone la stampa negli « Atti Accademici » della Memoria del dott. U. D'Ancona « Il problema dell'accrescimento dei pesci studiato sull'*Alosa finta* del Tevere ».

L'Assemblea approva.

COMUNICAZIONI

Il Socio Pincherle crede doveroso di fare noto all'Accademia che dal 3 al 10 settembre 1928 avrà luogo in Bologna il Congresso internazionale dei Matematici, indetto dall'Unione Matematica internazionale e posto sotto gli auspici dell'Università di Bologna. S. E. il Capo del Governo e le LL. EE. il Ministro della Pubblica Istruzione ed il Ministro della Economia Nazionale hanno promesso al Congresso il loro alto appoggio, e non vi è dubbio che il solenne Congresso riuscirà degnamente e che la scienza italiana avrà modo di esporre i recenti risultati da lei ottenuti nei varî campi della Matematica pura ed applicata.

Digitized by Google

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° giugno 1927

ALDRICH J. M. — American Two-Winged Flies of the Genus Microphthalma Macquart, with Noteson Related Forms. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1-8.

AMADORI L. — Contributo allo studio del genere Rhizopus Ehremberg. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze Naturali ». Processi verbali. Vol. XXXVI). Pisa, 1927. 8°, pp. 1-2.

BARTSCH P. — New West American Marine Mollusks. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927. 8°.

BATTAGLIA M. — Akute und chronische Speccheldrüsenentzündung bei experimentellen Trypanosomiasen (Sonderab. aus Centralbblatt für Bakteriologie, Parasitenkunde und Infektionskrankheiten. Band 102, pp. 382-385). s. l. 1927. 8°.

BÉGUINOT A. — Bibliografia I-IV; notiziario. (Estr. dall' « Archivio Botanico per la Sistematica » Vol. I-III). Forlì, 1926. 8°, pp. 1-90, 1-8.

BÉGUINOT A. — Carlo De Marchesetti (Estr. dal « Bullittino del R. Istituto Botanico di Modena ». Vol. II). Forlì, 1926. 8°, pp. 1-8.

BÉGUINOT A. — Clima e vegetazione nei paesi dell'Asia anteriore e nell'Egitto. (Estr. dal « Bullettino del R. Istituto Botanico di Modena ». Vol. I). Forlì, 1925. 8°, pp. 1-24.

BÉGUINOT A. — Giovanni Battista De Toni. (Estr. dal « Bullettino del R. Istituto Botanico di Modena ». Vol. I). Forlì, 1925. 8°, pp. 1-16.

BÉGUINOT A. — Osservazioni sull'indigenato del « Platanus orientalis ». L. nell'Italia del sud e nella Sicilia orientale. (Estr. dal « Bullettino del R. Istituto Botanico di Modena ». Vol. I). Forlì, 1926. 8°, pp. 1-20.

BRAMAN W. — The Ratio of Carbon Dioxide to Heat Production in Cattle. (Reprint. from the « Journal of Biological Chemistry ». Vol. LX, pp. 79-88). Baltimore, 1924. 8°.

CANU F. and BASSLER R. S. — Classification of the Cheilostomatous Bryozoa. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1927. 8°, pp. 1-42.

CASANOWICZ I. M. — The Collection of Ancient Oriental Seals in the United States National Museum. (From the « Proceedings of the United States Nacional Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp 1-23.

CASTELLANI A. — Action of Bacilli of Paratyphoid Dysentery and Metadysentery. (Reprint. from the « Proceedings of the Society for Experimental Biology and Medicine ». Vol. XXIV, pp. 509-511). s. l., 1927. 8°.

CASTELLANI A. — Chronic Bronchites with Hemorrhagie Sputum, of Non-Tubercular Origin. (Reprint from « New Orleans Medical and Surgical Journal ». Vol. 79 pp. 20-43). New Orleans, 1926. 8°.

CASTELLANI A. — Fallacies of the « Yeast Method » of Detecting Glucose in the Urine. (Reprint. from the « Journal of the American Medical Association ». Vol. 86, pp. 523-527). New Orleans, 1926. 8°.

CASTELLANI A. — Pruritus Ani and Pruritus Vulvae of Fungal Origin. (Reprint. from « New Orleans Medical and Surgical

Digitized by Google

Journal ». Vol. 79, pp. 625-633). New Orleans, 1927. 16°.

CASTELLANI A. — Symbiotic Fermentation Phenomenon; its Use in Differentiation of Microorganismus and Identification of Carbon Campounds. (Reprint from the « Proceedings of the Society for Experimeutal Biological and Medicine ». Vol. XXIV, pp. 511-516). Baltimore, 1927. 8°.

CASTELLANI A. — Tonsillomycoses. (Reprint. from « New Orleans Medical and Surgical Journal ». Vol. 78, pp. 651-661). New Orleans, 1926, 8°.

CAUDELL A. N. — On a Collection of Orthopteroid Insects from Java Made by Owen Bryant and William Palmer in 1909. (From the « Proceedings of the United States National Museum » Vol. 71). Washington, 1927. 8°, pp. 1-42.

CLARK A. H. — Notes on the Melitaeid Butterfly Euphydryas Phäeton (Drury) with Descriptions of a New Subspecies and a New Variety. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 71). Washington. 1927. 8°, pp. 1-17.

COCHRANE D. C. and FRIES J. A — The Maintenance Requirement of Dry Cows (Reprint. from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXXI, pp. 1055-1082). Washington, 1921. 8°.

CROZET-FOURNEYRON M. — Invention de la turbine. Paris, s. d. 8°, pp. 1-55.

DALL W. H. — Small Shells from Dredgings of the Southeast Coast of the United States by the United States Fisheries Steamer « Albatross » in 1885 and 1886. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927. 8°, pp. 1-131.

FANTOLI G. — Consegna delle lauree d'onore ai martiri fascisti Ugo Pepe, Emilio Tonole. Milano, s. d. 8°, pp. 1-20.

FANTOLI G. — Seminario matematico e fisico di Milano. Milano, 1927. 8°, pp. 1-14.

FERNALD H. T. — The Digger Waspes of North America of the Genus Podalonia (Bammophila). (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 71). Washington, 1927. 8°. pp. 1-39.

FORBES E. B. — The Present and the Future of the Food Supply. (Reprint. from « Industrial and Engineering Chemistry ». Vol. XVIII, n. XII). New York, 1926. 8°, pp. 1-13.

FORBES E. B. and BRAMAN W. W. — The Influence of the Environmental Temperature on the Heat Production on Cattle. (Reprint. from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXXIII, pp. 579-589). Washington, 1926 8°.

FORBES E. B. and FRIES J. A. — Net-Energy Valnes of Alfalfa hay and Alfalfa Meal. (Reprint. from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXXI, pp. 987-995). Washington, 1925. 8°.

FORBES E. B. and FRIES J. A. — The Maintenance Requirement of Cattle for Protein, as indicated by the Fasting Katabolism of Dry Cows. (Reprint. from « Journal of Dairy Science ». Vol. IX, pp. 15-27). Pennsylvania, 1926, 8°.

FORBES E. B. and FRIES J. A. — The Fasting Katabolism of Dry Cows. (Reprint. from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXXIII, pp. 591-595). Washington, 1926. 8°.

FORBES E. B. and FRIES J. A. — The Relative Utilization of Feed Energy for Maintenance, Body Increase and Milk Production of Cattle. (Reprint from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXXIII, pp. 483-492). Washington, 1925. 8°.

FORBES E. B. and KRISS M. — The Computed as Compared with the Directly Orserved Fasting Katabolism of Cattle as a Measure of the Maintenance Requirement of Enercy. (Reprint. from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXXIV, pp. 167-178). Washington, 1927.

FORBES E. B. and RAYMOND W. — The Iron Content of Meats. (Reprint. from the « Journal of Biological Chemistry ». Vol. LXVII, pp. 517-521). Baltimore, 1926. 8°.

FRIES J. A. and BRAMAN W. W. — On the

Digitized by Google

Protein Requirement of Milk Production. (Reprint. from « Journal of Dairy Science ». Vol. VII, pp. 11-23). Pennsylvania. 1924, 8°.

GAHAN A. B. - Miscellaneous Descriptions of New Parasitic Hymenoptera with Some Synonymical Notes. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 71). Washington, 1927. 8°, pp. 1-39.

GREENE C. T. — Descriptions of Larvae and Pupae of Two-Winged Flies Belonging to the Family Leptidae. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1926. 8°, pp. 1-20.

HERMANN F. — *A*) Stereogramma tectonico delle Alpi Valdostane centrali (1920-1926). *B*) Stereogramma tectonico delle alte Valli Aostane meridionali (1920-1926), tavole 2. Torino, 1927.

HOLMES BLAKE D. — A Revision of the Beetles of the Genus Oedionychir Occurring in America North of Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927. 8°, pp. 1-44.

HUENE (VON) F. R. — Notes on the Age of the Continental Triassig Beds in North America with Remarks on Some Fossil Vertebrates. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1-10.

JANET C. — Constitution orthobiontique des êtres vivants. Beauvais, 1925. 8°, pp. 1-84.

JELLINEK S. — Spurenkunde der Elektrizität Elettrophysiographie. Leipzig, 1927. 8°, pp. 1-101.

KELLOGG R. — Kentriodon Pernisc. a Miocene Porpoise from Maryland. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1927. 8°, pp. 1-55.

KRISS M. — A Comparison of Direct and Indirect Calorimetry in Investigations with Cattle. (Reprint. from « Journal of Agricultural Research ». Vol. XXX, pp. 393-406). Washington, 1925. 8°.

LASAREFF P. P. — Atlas des Spectres des Substances Colorantes, Partie II, Atlas. Leningrad, 1927. 4°, pp. I-VI, 1-140.

LEVI M. G. — Studi e ricerche sui combustibili. Vol. I. (1922-1926). Roma, 1927. 8°, pp. 1-307.

LEVI L. — Trattato di istologia. Torino, 1927. 8°, pp. I-XII, 1-900.

LECAT M. — Coup d'œil sur la Théorie des Déterminants supérieurs. Bruxelles, 1927. 8°, pp. 1-100.

LECAT M. — Noveaux azéotropes, listes I, III, IV. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Tomes XLV, XLVII, pp. 169-176, 283-294, 22-27). Louvain, 1926-27. 8°.

LECAT M. — Nouveaux azéotropes binaires. II liste. (Extr. de « Recueil des Travaux chimiques des Pays-Bas ». Tome 45, pp. 620-627). Haerlem, 1926. 8°.

LEONE S. — Tracoma e profilassi visiva in Provincia di Catania. II Relazione, 1926-1927. Siracusa, 1927. 4°, pp. 1-22.

LEONE S. — Tracoma e profilassi visiva in Provincia di Girgenti. IV Relazione, 1926-1927. Siracusa, 1927. 4°. pp. 1-20.

LEONE S. — Tracoma e profilassi visiva in Provincia di Messina. IV Relazione, 1926-1927. Siracusa, 1927. 4°, pp. 1-18.

LORIA G. — Nel 40° anno di insegnamento Universitario del Prof. Gino Loria. Genova, 1926. 8°, pp. 1-49.

LUYTEN W. J. — Island Universes. (Reprint. from « Natural History ». Vol. XXVI, pp. 386-391). New York, 1926, 8°.

MACCALLEEM G. A. — Nematode Eggs from the Gill Region of a Shark Carcharhinus Milberti (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1926. 8°. pp. 1-2.

MANDOR G. — Hydrobiologiai Tanulmányok (Hydrobiologische Studien). Budapest, 1924. 8°, pp. 1-8.

MARSHALL W. B. — A New Genus and Two New Species of South American Fresh-Water Mussels. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 71). Washington, 1927. 8°, pp. 1-4.

MORTON WHEELER W. — Ants collected by

Digitized by Google

Professor F. Silvestri in Indochina (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Portici ». Vol. XX, pp. 83–106). Portici, 1927. 8°.

MUESEBECK C. F. W. — Descriptions of New Reared Parasitic Hymenoptera and Some Notes on Synonymy (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1–18.

NANDOR G. — Die Theorie der Kolloidalen Filter. Budapest, 1924. 8°, pp. 1–20.

OTTOLENGHI B. — Gilberto Govi nel centenario della sua nascita. (Estr. dall'« Annuario del R. Istituto magistrale di Mantova " Isabella d'Este Gongaza " ». Anno 1925–1926). Mantova, 1926. 8°, pp. 1–23.

PEARL R. — Alcohol and Longevity. s. d. 8°, fvl.

PEARL R. — Alcool e longevità (Estr. dalla pubblicazione « Le Assicurazioni Sociali ». Anno II). Roma, 1926. 8°, pp. 1–28.

PEARL R. — A Time Recorder for Quantitative Work in Animal Behavior. (Reprint. from « Journal of the Washington Academy of Sciences ». Vol. XVI, n. XX, pp. 541–543). Washington, 1926, 8°.

PEARL R. — New Data on Differential Fertility in the United States (Reprint. from the « American Journal of Hygiene ». Vol. VI. pp. 610–616). s. l. 1926. 8°.

PEARL R. — Report of the Director of the Institute for Biological Research. (Reprint. from « Report of the President of the University », 1925–1926). Baltimore, 1926, 8°.

PEARL R. — The Cost of Biological Books in 1926. (Reprint. from the « Quarterly Review of Biology ». Vol. I, n. IV, pp. 606–608). s. l. 1926, 8°.

PEARL R. and PENNIMAN W. B. — Culture Media for Drosophila. I. Changes in Hydrogen Ion Concentration of the Medium. (Reprint. from the « American Naturalist ». Vol. 60, pp. 347–366). s. l. 1926, 8°.

RANZI S. — Nuovo turbellario policlade del Golfo di Napoli. (Cestoplana raffaelei n. sp.) (Estr. dal « Bollettino della Società dei Naturalisti in Napoli ». Vol. XXXIX). Napoli, 1927. 8°, pp. 1–11.

RANZI S. — Ricerche embriologiche e morfologiche sul *ductus endolymphaticus* (o *acquaeductus vestibuli* ovvero *recessus labyrinthi*) dei vertebrati. II. Lo sviluppo del *recessus labyrinthi* e la sua omologia con l'*aquaeductus vestibuli* dei Selaci. (Estr. dalle « Pubblicazioni della Stazione Zoologica di Napoli ». Vol. VIII, fasc. II, pp. 129–199). Napoli, 1927. 8°.

RAVA G. — Le cirrosi del fegato. Bologna, 1910. 8°, pp. 1–257.

REYCHLER L. — Complement de mon étude: De la possibilité de provoquer chez les plantes systématiquement: *A*) L'apparition de phénomènes vitaux nouveaux; *B*) La mutation. Bruxelles, 1927. 8°, pp. 1–13.

RICHMOND C. W. — Generic Names Applied to Birds during the Jears 1916 to 1922, inclusive. With Additions to Waterhouse's Index 'Generum Avium' (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927. 8°, pp. 1–44.

RILEY J. M. — A Collection of Birds from the Provinces of Yunnan and Szechwan, China, Made for the National Geographic Society by Dr. Joseph F. Rock. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1926. 8°, pp. 1–70.

RONDONI P. — Fisiopatologia generale del ricambio. Torino, 1927. 8°, pp. 1–152.

SCHWARTZ B. — A New Parasitic Nematode from an Unknown Species of Bat. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 71). Washington, 1927. 8°, pp. 1–4.

SEVERI F. — Elementi di geometria. Vol. II. Firenze, 1927. 8°, pp. I–VII, 1–275.

SHANNON R. C. — A Resiew of the South American Two-Winged Flies of the Family Syrphidae. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 70). Washington, 1927. 8°, pp. 133.

Digitized by Google

SOLER E. — La gravimetria alla seconda assemblea della Unione geodetica e geofisica Internazionale.(Extr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. III). Roma, 1925. 8°, pp. 1-7.

SOLER E. — Rapport sur les mesures relatives de l'intensité de la pesanteur exécuteés pendant les années 1912 à 1922. (Extr. des « Travaux de la Section de Géodexe de l'Unione géodesique et géophysique internationale »). Paris, 1925. 4°, pp. 1-85.

SOLER E. — Sugli apparati Mioni per la determinazione delle costanti di densità e di temperatura dei pendoli gravimetrici. (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ». Tomo LXXXV, pp. 578-583), Venezia, 1926, 8°.

SOLER E. — Sulla mensola bipendolare Mioni. (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ». Tomo LXXVIII, pp. 427-430). Venezia, 1924, 8°.

STESNEGER L. — Identity of Hallowell's Snake Genera Megalops and Aepidea. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1-3.

STROOBANT P. — Les travaux de photographie stellaire et planétaire de l'Observatoire royal de Belgique. (Extr. des « Bulletin de la classe des Sciences ». Tomo XIII, pp. 151-174). Bruxelles, 1927. 8°.

SWIFT R. W. — A Biometric Study of Length of Metabolism Experiments with Cattle. (Reprint. from « Journal of Dairy Science ». Vol. VIII, pp. 270-281). Pennsylvania, 1925. 8°.

TREADWELL A. L. — Polychaetous Annelids from Fyc, Samoa, China, and Japan. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 69). Washington, 1926. 8°, pp. 1-20.

WILLEY A. — Description of a New Species of Fresh-Water Copepod of the Genus Moraria from Canada. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 71). Washington, 1927, 8°, pp. 1-12.

N. P.

ERRATA CORRIGE

Chimica. — *Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro. La reazione fra nitroprussiato ed alcali.* Nota II del Corrisp. L. CAMBI e di L. SZEGÖ.

A p. 738, riga 18:

Anzichè « il valore $\log \frac{I_0}{I}$ alla trasformazione » si legga:

« il valore $\log \frac{I_0}{I} = 1.3$ alla trasformazione ».

A p. 738, nella formula:

Anzichè

$$\frac{K_c}{a^2_{OH'}} = (1.3 \pm 0.05) \frac{1}{\log \frac{I_0}{I} \pm 0.05} - (1)$$

si legga

$$\frac{K_c}{a^2_{OH'}} = (1.3 \pm 0.05) \frac{1}{\log \frac{I_0}{I} \pm 0.05} - 1.$$

Digitized by Google

Digitized by Google

MASOTTI A. - Azione dinamica che un liquido perfetto esercita su un solido cilindrico, di sezione qualunque, mobile in esso (pres. dal Corrisp. *U. Cisotti*) Pag. 872

SBRANA F. - Moti piani di un fluido incomprimibile nei quali le linee di corrente sono isotachie (pres. *Id.*) 876

THOMSEN G. - Sulla dinamica dei corpi rigidi nella relatività generale (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 879

LACCHINI G. B. - Una nuova stella variabile (pres. dal Corrisp. *A. Bemporad*) . . 880

NERI F. - Alcune proprietà ed applicazioni delle lampade a neo (pres. dal Corrispondente *L. Lombardi*). 883

CHARRIER G. - Composti organici del bismuto (pres. dal Corrisp. *G. Errera*) . . 889

MALQUORI G. - Sugli idrati del nitrato di alluminio (pres. dal Socio *N. Parravano*) 892

CAGLIOTI V. e STOLFI A. - I solfati doppi del bismuto coi metalli alcalini. - I. Solfati di bismuto e potassio (pres. dal Socio *F. Zambonini*) 896

DE FAZI REMO. - Fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio con acqua esposta alle radiazioni di una lampada a vapori di mercurio (pres. dal Socio *N. Parravano*) 901

LEVI R. e FONTANA C. - Porpore d'oro (pres. dal Socio *L. Bruni*) 906

MALQUORI G. - Il sistema $Fe(NO_3)_3$ — KNO_3 — H_2O a 25° (pres. dal Socio *N. Parravano* . . . . . »

REINA A. - Struttura cristallina dell'idrato di calcio (pres. dal Socio *L. Bruni*). . »

SCREMIN L. - Variazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica. - I. Potassio e farmaci convulsivanti (pres. dal Socio *L. Sabbatani*) . . . . »

ANTONIANI C. - La reazione del terreno e il perfosfato (pres. dal Socio *A. Menozzi*) »

ID. - Il comportamento dell'arsenico di fronte al potere assorbente del terreno (pres. *Id.*) . . . . . »

QUAGLIARELLO G. - Sulla trasformazione stereo-isomera del glucosio per azione dell'insulina (pres. dal Socio *F. Bottazzi*). 907

CAVINATO A. - Sulla disidratazione dell'apofillite (pres. dal Socio *L. Brugnatelli*) . »

REMOTTI E. - Sul processo di assunzione del vitello durante lo sviluppo embrionale del pollo (pres. dal Socio *E. Giacomini*) 910

DE FINETTI B. - Conservazione e diffusione dei caratteri mendelliani. - Caso panmittico (pres. dal Corrisp. *C. Foà*) 913

BENEDETTI E. - Su alcune modificazioni del decorso della fermentazione alcoolica per effetto del campo elettro-magnetico oscillante sul lievito (pres. dal Socio *E. Giacomini*) 922

BERGAMI G. - Azione delle basse temperature sulla lente cristallina (pres. dal Socio *F. Bottazzi*) . . . . . »

MUCCIOLI M. - Sul succo astringente del frutto del «Diospyros kaki» acerbo e le sue applicazioni in Cina ed in Giappone come sostanza impregnante per la carta ed il legno (pres. dal prof. *P. R. Pirotta*) . . . . . »

PERSONALE ACCADEMICO

GARBASSO (Vice-presidente). - Annuncia la morte del Socio Nazionale CERULLI V., del Corrisp. BAGNERA G. e dei Soci Stranieri BRÜCKNER E. e TSCHERMAK G. . 925

CASTELNUOVO (Segretario). - Ricorda le singolari doti ed i meriti del Socio CERULLI V. »

SOLER E. - A nome della Commissione geodetica italiana esprime il cordoglio per la morte di CERULLI V., già Presidente di detta Commissione . . . . . »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

LEVI M. G. - Presenta il suo *Trattato di istologia* e ne parla . . . . . »

NASINI R. - Per incarico del collega LEVI M. G., presenta il primo volume dei suoi *Studi e ricerche sui combustibili*, e ne parla. . . . . »

(Segue in seconda pagina).

Digitized by Google

RENDICONTI - Giugno 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° giugno 1927 (Anno V)

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Lo Surdo A. – Bilancia termoionica . . . . . Pag. 813

Rolla L. e Piccardi G. – Sul potenziale di ionizzazione del terbio. 818

Angeli A. e Bigiavi D. – Sopra i due p-nitroazossibenzoli. 819

Bruni G. e Geiger E. – Nuovi derivati del caucciù 823

Zambonini F. e Restaino S. – I solfati doppî dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. – VIII. Solfati doppî di cerio (ceroso) e di sodio 828

Zambonini F. e Stolfi A. – I solfati doppî dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. – X. Solfati di neodimio e ammonio 832

Cambi L. – Su i diazoidrati 837

Nasini R. – La questione del peso atomico dell'idrogeno 1 e di quello dell'ossigeno 16 dal punto di vista della costituzione elettronica dell'atomo e della spettrografia di massa 840

De Marchi L. – L'origine delle acque termali di Montegrotto (Euganei) 841

Palazzo L. – Risultati di una esplorazione magnetica nei territori del Giuba e dell'Uebi-Scebeli 845

Vinassa P. – Il «numero elettronico» e i costituenti terrestri. . . . . »

Pirotta P. R. – Ecologia agraria e genetica . . . . . »

Morpurgo B. – Influenza dell'inanizione sul trapianto omoplastico 846

Foà C. – Il meccanismo neurochimico della inibizione vagale nel cuore del mammifero. 850

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Rosati C. – Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica, e sulle varietà di Jacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano (pres. dal Socio *E. Bertini*) 850

Laboccetta L. – Un metodo generale per sostituire una equazione ad una diseguaglianza o ad una limitazione, e suo impiego nella geometria analitica (pres. dal Corrisp. *G. Crocco*) 855

Pini E. – Ancora sulla ricerca della funzione primitiva per le funzioni di più variabili (pres. dal Corrisp. *L. Tonelli*) 860

Laboccetta L. – Equazione di luoghi geometrici comprendenti un parametro al variare del quale la linea o la superficie rappresentata passa in modo continuo dalla forma poligonale o poliedrica alla forma circolare o sferica (pres. dal Corrisp. *E. Crocco*) 865

Krall G. – Variazione infinitesima delle funzioni di Green relative a campi piani pluriconnessi (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) . . . . . »

Thomsen G. – Sulla cinematica dei corpi rigidi nella relatività generale (pres. *Id.*). 866

(Segue in terza pagina).

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 giugno 1927 (anno V).

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geofisica. — *Risultati di una esplorazione magnetica nei territori del Giuba e dell'Uebi Scebeli.* Nota del Socio L. PALAZZO [1].

La presente Nota ha il carattere di comunicazione preliminare riassume i principali risultati dell'esplorazione magnetica da me compiuta lo scorso anno nelle nostre colonie dell'Africa centro-orientale, o – dirò più precisamente - in parte dell'Oltregiuba e poi nella Somalia meridionale, dal Giuba all'Uebi Scebeli.

1. Essendo io stato autorizzato dal Ministero dell'Economia Nazionale a partecipare come geofisico alla spedizione astronomica italiana che doveva recarsi nell'Oltregiuba per le osservazioni dell'eclisse totale di sole del 14 gennaio 1926, parve opportuna l'occasione del mio viaggio, al Ministero della Marina, per affidarmi altresì la missione di eseguire rilievi magnetici nell'Est-Africa, in modo da estendere maggiormente, anche con stazioni dell'interno, quella carta magnetica di cui io avevo dato fin dal 1912 un semplice abbozzo limitato alla regione costiera [2].

Pertanto, dopo di avere contribuito con indagini meteorologiche, attinometriche e magnetiche allo studio dell'eclisse, che la missione italiana aveva osservato a Punta Sherwood, quasi all'estremo sud dell'Oltregiuba,

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

(2) *La carta magnetica del Benadir* (« Monografie e Rapporti coloniali », n. 17, settembre 1912).

Digitized by Google

io mi separai dagli astronomi e rimasi più a lungo nelle colonie per espletare il programma di misure magnetiche concordato con la R. Marina. La prima stazione di determinazioni assolute già era stata fatta nel nostro accampamento di Punta Sherwood, ed appresso io effettuai le stazioni di Chisimaio, Giumbo ed Afmadù in rapida successione, grazie agli aiuti ed alle facilitazioni di trasporto procuratimi da S. E. Corrado Zoli, allora Alto Commissario per l'Oltregiuba. Dopo ciò, passai nella vicina colonia somala, tornando per mare a Mogadiscio; e qui S. E. il Governatore Cesare Maria De Vecchi di Val Cismon fu largo d'ogni desiderabile appoggio per la mia intrapresa: autoveicoli, piccola scorta militare, commendatizie presso le Autorità delle varie residenze, cosicchè con comodità ed in brevissimo tempo potei attuare il progettato rilevamento della vasta regione fra Giuba e Scebeli, spingendomi dalla costa sull'Oceano Indiano fin quasi al confine etiopico. In genere, col lavoro intenso di un giorno, dall'alba al tramonto, conducevo a termine le misure in una data stazione, ed impiegavo il giorno appresso per raggiungere coll'autocarro la stazione successiva prestabilita, e così via; qualche giorno andò perduto in conseguenza di avaria d'auto. Il 20 marzo 1926 chiudevo la serie delle misure a Uarsceik; volontieri avrei continuato ancora le osservazioni, portandomi nella Somalia settentrionale (territorio del Nogal e Migiurtinia), ma non era il momento propizio, essendo in corso le operazioni militari per l'effettiva occupazione di quelle regioni. Perciò, considerando esaurito il mio cómpito, il 10 aprile m'imbarcai da Mogadiscio pel rimpatrio.

2. Le stazioni magnetiche fatte sommano a 17, e nella tabella qui presso sono elencate secondo la successione cronologica. Come valori degli elementi magnetici pei singoli luoghi, riporto i risultati genuini delle osservazioni, cioè senza alcuna correzione in riguardo alle variazioni di tempo. Osservo tuttavia che, avendo io scelto – nel determinare gli elementi magnetici – quelle speciali ore in cui di regola si verifica il passaggio dell'elemento pel valore medio del giorno, i numeri della tabella si devono ritenere corrispondenti, molto da vicino, a valori medi diurni. Inoltre le osservazioni, se pur non cadono rigorosamente su di una stessa porzione decimale dell'anno, sono abbastanza ravvicinate fra loro in tempo, sì da permettere confronti immediati fra le medesime.

Digitized by Google

DETERMINAZIONI MAGNETICHE NELL'OLTREGIUBA E NELLA SOMALIA
da gennaio a marzo 1926

Stazioni	Latitudine φ	Longitudine E da Green. λ	Declinazione occident. D	Inclinazione australe I	Intensità orizzontale H	Giorni delle osservazioni
Punta Sherwood	— 1° 28',5	41° 41'	2° 13',0	25° 38',3	0.31232	I/16, 17, 18, 19, 20
Chisimaio*	— 0 21 ,8	42 33 ,0	1 48 ,5	23 01 ,9	.31847	I/29, 30; II/6
Giumbo*	— 0 15 ,0	42 37 ,3	1 45 ,6	22 43 ,7	.31938	II/2
Afmadù	+ 0 30 ,0	42 04	1 43 ,6	21 12 ,8	.32231	II/4
Villaggio Duca d. Abruzzi .	+ 2 46 ,3	45 30 ,4	0 56 ,4	15 10 ,7	.33460	II/12, 13
Bulo Burti	+ 3 51 ,3	45 34 ,3	0 36 ,0	12 39 ,8	.33797	II/15, 16
Belet Uen	+ 4 44 ,3	45 12 ,4	0 32 ,5	10 32 ,4	.33988	II/17, 18
Oddur	+ 4 07 ,3	43 53 ,5	0 51 ,6	12 22 ,9	.33822	II/20
Lugh	+ 3 47 .7	42 32 ,5	1 21 ,5	13 37 ,0	.33626	II/21, 22
Iscia Baidoa	+ 3 07 ,5	43 39 ,5	1 00 ,4	14 59 ,4	.33321	II/24
Bur Acàba	+ 2 49 ,1	44 05	1 05 ,2	15 30 ,2	.33398	II/28; III/1
Bardera	+ 2 20 ,5	42 17 ,7	1 21 ,3	16 59 ,3	.32943	III/4
Genale	+ 1 48 ,4	44 41 ,7	1 13 ,6	17 33 ,4	.33003	III/7, 8
Brava*	+ 1 06 ,4	44 02 ,1	1 19 ,3	19 15 ,3	.32554	III/9, 10
Gelib	+ 0 26 ,5	42 48 .8	1 34 ,1	20 56 ,4	.32269	III/11, 12
Mogadiscio*	+ 2 01 ,7	45 20 ,6	1 03 ,7	16 53 ,6	.33178	III/15, 16, 17
Uarsceik*	+ 2 17 ,7	45 48 ,2	0 59 ,6	16 13 ,2	.33304	III/19, 20

3. Nell'elenco figurano segnate con * quelle poche stazioni della costa somala che sono stazioni *ripetute*, cioè furono comprese nel nostro recente rilevamento, sebbene vi fossero già state fatte in precedenza le determinazioni magnetiche: Chisimaio, Brava e Mogadiscio durante la campagna idrografica 1907-08-09 della R. N. *Staffetta*, Giumbo e Brava da Palazzo sul finire del 1909, Mogadiscio di nuovo e Uarsceik dall'ufficiale Guido Po nel 1911. Queste misure del passato ci servono ora egregiamente per lo studio delle variazioni secolari nella Somalia. Procuratami una conoscenza, in prima approssimazione, delle variazioni secolari annuali, ho potuto, con lievi ritocchi ai dati raccolti nei tempi prossimi al 1910, ridurre tutti questi all'epoca comune 1910.0; analoghi ritocchi, pressochè insignificanti, ho apportato ai dati moderni calcolandoli per l'esatto inizio del 1926; in tal modo i confronti fra i due gruppi di misure, le antiche e le nuove, si afferrano meglio e sono presentati nel quadro seguente:

Digitized by Google

VARIAZIONI MAGNETICHE SECOLARI IN SOMALIA

Stazioni ripetute	Declinazione			Inclinazione			Intensità orizzontale		
	1910.0	1926.0	Variazione 1910–1926	1910.0	1926.0	Variazione 1910–1926	1910.0	1926.0	Variazione 1910–1926
Chisimaio	3° 46′	1° 49′	— 1° 57′	24° 11′	23° 02′	— 1° 09′	0.3262	0.3185	(— 0.0077)
Giumbo	3 40	1 46	— 1 54	24 03	22 44	— 1 19	0.3216	0.3194	— 0.0022
Brava	3 15	1 21	— 1 54	20 52	19 16	— 1 36	0.3279	0.3256	— 0.0023
Mogadiscio	2 32	1 05	— 1 27	18 47	16 55	— 1 52	0.3347	0.3318	— 0.0029
Uarsceik	2 17	1 01	— 1 16	17 43	16 14	— 1 29	0.3392	0.3331	— 0.0061
		Media . . .	— 1 42		Media	— 1 29		Media	— 0.0034

Le cinque stazioni, ordinate per latitudine nella 1ª colonna, risultano altresì disposte in ordine di longitudine da ovest ad est, donde appare che l'ampiezza della variazione di declinazione, tra 1910 e 1926, si riduca minore per le stazioni che sono più a nord-est. Invece, per l'inclinazione e l'intensità, non si ravvisa sistematica dipendenza delle variazioni secolari dalle coordinate geografiche delle stazioni.

Possiamo anche raggruppare in medie i risultati dei confronti, inscrivendo nella tabella i tre numeri dell'ultima orizzontale [1]. E nell'idea che i tre elementi magnetici D, I, H, fra gli anni 1910 e 1926, abbiano variato sempre nello stesso senso, ci è lecito assumere come variazioni secolari medie *per anno*, durante l'intervallo, i quozienti delle variazioni globali medie sopra riportate 1910–1926, per il numero 16 degli anni intercorsi, così ottenendo, per la Somalia:

$$\Delta D = -6',4 \quad ; \quad \Delta I = -5',6 \quad ; \quad \Delta H = -0^{\gamma}.00021.$$

Riguardo al segno di queste variazioni, il quale per tutti e tre gli elementi indica diminuzione col tempo, è da tenersi presente che noi consideriamo qui le diminuzioni nei valori *aritmetici* della declinazione che è occidentale, e dell'inclinazione che è australe.

4. Con queste ulteriori e più sicure determinazioni delle variazioni secolari, ho potuto ricondurre all'epoca comune 1926.0 i dati magnetici di tutte le stazioni, e non solo quelle mie dei primi mesi del 1926, ma ancora

(1) Avverto però che, nel fare la media delle variazioni dell'intensità, ho escluso il valore proveniente dal confronto per Chisimaio, e perciò l'ho chiuso fra parentesi; il difetto sta di certo nella vecchia misura di H a Chisimaio che, a ben considerare, esce fuor di regola dagli altri dati.

Digitized by Google

altre poche che, fatte in Somalia in epoche anteriori (tra 1908 e 1911), non furono più ripetute, cioè io ho escluso dall'ultima campagna. Ne riporto qui sotto i valori, ridotti al 1926.0:

ANTICHE STAZIONI SOMALE, COI VALORI RIDOTTI AL 1926.0

Antiche stazioni	Osservatore ed epoca	Latitudine nord	Longitudine E da Green.	Valori degli elementi magnetici ridotti al 1926.0		
				D	I	H
Margherita	Palazzo, 1910.0	0° 04′,1	42° 45′,3	1°51′ ovest	21° 56′ sud	0Γ.3195
Merca	R. N. *Staffetta*, 1908.4	1 42 ,7	44 46 ,6	1 10 »	17 59 »	.3281
Itala	R. N. *Staffetta*, 1908.9	2 45 .4	46 19 ,7	0 30 »	14 53 »	.3333
Mereg	Palazzo, 1909.9	3 42 ,8	47 20 .7	—	13 02 »	—
Obbia . . . . . ,	Palazzo, 1910.0	5 20 ,2	48 31 ,9	—	9 02 »	—
Id.	Po, 1911.8	id.	id.	0 20 est	8 52	.3418

Non occorre che io analogamente trascriva i valori esattamente ridotti al 1926.0 per le 17 stazioni che figurano nella prima tabella della Nota, poichè, come già ho detto, si tratta solo di minimi ritocchi ed arrotondamenti ai valori consegnati prima, e quindi risparmio lo spazio. Fra antiche stazioni e nuove, ho un complesso di 22 punti da mettere sulla carta geografica, ed in base ai medesimi ho disegnato le isogone, le isocline e le isodinamiche della forza orizzontale, valevoli pel 1926.0.

5. In sede più adatta saranno pubblicate le carte magnetiche, e qui mi limito a darne brevi cenni descrittivi, con qualche commento.

Isogone. – Queste, tracciate per intervalli di 10′, lungo la zona costiera, da Punta Sherwood a Uarsceik, sono rappresentate da tratti leggermente curvilinei che intersecano quasi normalmente la linea di costa e tagliano i meridiani sotto un angolo medio di 49 gradi; possiamo dunque dire per approssimazione che la direzione generale di quei tratti d'isogone è da NW a SE. Penetrando dippoi le isogone verso l'interno del continente, esse con qualche sinuosità tendono a raddrizzarsi, cioè ad accostarsi di più alla direzione dei meridiani (1).

Per ciò che riguarda il gradiente della declinazione, ossia la grandezza della variazione di D in rapporto alla distanza fra due isogone, ci basterà enunciare il risultato generale nella seguente forma: mantenendoci sulla linea

(1) L'attuale studio conferma l'andamento delle isogone nel percorso litoraneo quale l'avevamo trovato allorchè costruimmo la prima carta del Benadir; adesso poi si aggiunge la conoscenza nuova dello speciale andamento nell'interno, pel quale nulla ci diceva la carta precedente, mancando allora qualsiasi punto interno di riferimento.

Digitized by Google

di costa, da Punta Sherwood a Uarsceik, la declinazione (occidentale) diminuisce con continuità, in ragione di 10′ per ogni 86 chilometri, all'incirca, di percorso.

Nella rappresentazione delle isogone, tra il Giuba e l'Uebi Scebeli, non appaiono salienti irregolarità che diano accenno d'influenze magnetiche locali.

Isocline. - Avendo coperto la carta con le isocline per ciascun grado d'inclinazione australe, crescente da nord a sud, esse sono risultate linee quasi rette, sensibilmente parallele ed equidistanti fra loro, correnti nella direzione media da W 8° N a E 8° S, cioè con poca obliquità rispetto ai paralleli geografici. Lo spazio intercedente fra due successive isocline diverse per 1° di I è largo, in media, 47 chilometri; l'equidistanza fra le linee si mantiene bene per tutta l'estensione della carta, e pertanto appare indipendente dalla latitudine. Invece i valori dell'inclinazione in sè hanno stretto rapporto con la latitudine dei luoghi, e varia quella assai più fortemente di questa; basta infatti spostarsi di soli 26′, in media, nella direzione del meridiano per trovare l'inclinazione cambiata di 1 grado intero. Questo valore del rapporto fra variazione dell'inclinazione e variazione della latitudine è sostanzialmente il medesimo che già avevamo ottenuto pel Benadir nello studio pubblicato molti anni addietro (1).

Nel sistema delle linee isocline distese sulla regione esplorata, non si riconosce alcuna anomalia magnetica.

Isodinamiche. - Ho condotto le linee di eguale intensità orizzontale separate per differenze di 0.002 unità c. g. s. Il loro decorso è rassomigliante a quello delle isocline; esse attraversano la carta da ovest ad est, con una pendenza sui paralleli geografici quasi uguale, o di poco superiore alla pendenza delle isocline. La distanza che separa le successive linee isodinamiche della serie, non è uniforme; essa è più grande nella parte settentrionale della carta che in quella meridionale: rispettivamente sono 64 e 44 km., in rozze medie, per differenze di H eguali a 0.002.

L'intensità H diminuisce da nord a sud cioè col discendere verso le latitudini più basse, il che è conseguenza del progressivo allontanamento dall'equatore magnetico, intorno alla cui posizione attuale, nell'Africa Orientale, diremo qualche cosa più oltre.

Le isodinamiche, pur presentando analogia con l'andamento e la disposizione delle isocline, sono alquanto meno regolari di queste. L'irregolarità che più risalta, è quella dell'isodinamica 0.334 presso i punti Iscia Baidoa e Bur Acàba; in questo il valore di H appare troppo alto per circa 70 γ, in quello sembra invece troppo basso forse per 80 γ, a confronto dei valori normali che spetterebbero ai punti per la loro posizione geografica; perciò

(1) *Alcune misure magnetiche eseguite nell'Est-Africa inglese e nella Somalia italiana* («Ann. Uff. Centr. Meteor. Geod.», vol. XXXII, parte 1ª, 1910).

Digitized by Google

la suddetta isodinamica è stata condotta ad avvicinarsi all'uno e ad allontanarsi dall'altro con una doppia inflessione. Conveniamo però che anomalie del genere, cioè per $\pm$ 70-80 γ, sono sostanzialmente piccola cosa, se si considera che la discrepanza può anche in parte spiegarsi per incertezze ed imperfezioni da cui siano affette le osservazioni stesse, con le relative riduzioni.

Pertanto, come conclusione generale del rilievo magnetico da noi fatto in Somalia, possiamo affermare che, nel dominio delle nostre misure, non è venuta in luce alcuna importante anomalia di distribuzione dei tre elementi del campo magnetico terrestre; quindi neppure indizi, almeno per ora, dell'esistenza di quei giacimenti minerari utili nel sottosuolo, che siano atti a rivelarsi mediante la ricognizione magnetica.

6. D'altronde, nello scegliere i punti di stazione, non ho mancato di considerare anche la costituzione litologica dell'immediata superficie del terreno. A tale proposito dirò che le stazioni costiere, come Punta Sherwood, Chisimaio, Brava, Mogadiscio, Uarsceik, furono collocate sulle sabbie delle dune, probabilmente ricoprenti calcare marino; Afmadù, Villaggio Duca degli Abruzzi, Bulo Burti, Belet Uen, Bardera, Genale, Gelib si trovano su alluvioni (generalmente argillose) o del Giuba o dello Scebeli; Giumbo su calcare arenaceo; Lugh su arenaria gessosa; Oddur su tufo calcareo; Baidoa su calcare marnoso (giurassico); a Bur Acàba v'erano banchi di granito (granitite) affioranti dalla piana di sabbie eluviali, ed a soli 80 metri dal centro di stazione s'ergeva imponente e quasi a picco il *Bur*, collina interamente granitica. Pezzi di questa roccia presi a caso mostrarono una certa azione sull'ago magnetico; evidentemente un po' di magnetite entra come componente accessorio nella granitite di Bur Acàba. Tale circostanza basta a spiegare la lieve perturbazione ivi trovata per H, di cui ho parlato nel precedente paragrafo, e la quale pertanto sarebbe da riferirsi a causa superficiale. Una vera e propria roccia magnetica (polare) nella Colonia, io la rinvenni soltanto presso Ircudt; facendo il percorso attraverso la boscaglia da Lugh a Baidoa, notai sparsi sul suolo sassi nero-verdastri somiglianti a basalto, e ne raccolsi campione per ulteriore esame. L'ing. Secondo Franchi, geologo capo del R. Ufficio Geologico, l'ha determinato come basalto labrador-andesitico, con olivina ed abbondante massa vetrosa fondamentale opaca [1].

(1) Seppi più tardi che il compianto mio collega, dottor Maurizio Sacchi, partecipante alla seconda spedizione Bòttego nella quale lasciò con gloria la vita, aveva pur egli raccolto frammenti di simile roccia, e proprio nella stessa località di Ircudt, e F. Millosevich l'aveva definita diabase olivinico. I professori Stefanini e Paoli, nella missione idrogeologica ed agrologica da loro compiuta nel 1913 in Somalia, trassero da qualche punto della Colonia, ma fuori del mio itinerario, altri campioni basaltici (basalti afanitici, E. Manasse). Ricorderò anche che fra campioni di roccia riportati in una spedizione del Duca degli Abruzzi dalla località di Bugda Acable, l'ing. C. Crema riscontrò dei basalti.

Digitized by Google

7. Termino col riportare la formola che ho potuto ricavare, dal complesso delle mie recenti determinazioni d'inclinazione in Somalia, per esprimere la relazione esistente fra l'inclinazione e la latitudine, lungo il 44° meridiano, che è quello quasi centrale nella regione fra Giuba e Uebi Scebeli. La formola è semplicemente lineare:

$$I = 21°,91 - 2,32\,\varphi,$$

dove I e φ si esprimono in gradi e decimali di grado ed I si prende positiva benchè australe.

Per $\varphi = 0$, la formola dà $I = 21,91$ ossia 21°55′, che sarebbe il valore dell'inclinazione magnetica all'intersezione dell'equatore *geografico* col 44° meridiano.

Se poi fosse lecito applicare la formola anche per extrapolazione, cioè si ammettesse valida ancora la suddetta legge semplice fuori della cerchia della nostra esplorazione, poichè, fatto $I = 0$, l'equazione porta a $\varphi = + 9°27'$, sarebbe questa la latitudine del punto in cui l'equatore *magnetico* taglia il 44° meridiano. Tale punto, di coordinate $\varphi = 9°27'$ e $\lambda = 44°$, cade nella Somalia Britannica, vicino a Hargeisa, e se quindi si prolungasse il tratto di equatore magnetico verso est con la direzione delle isocline, esso verrebbe a passare sulla nostra Migiurtinia, pressochè all'altezza di Falfala.

Geochimica. — *Il « numero elettronico » ed i costituenti terrestri.* Nota [1] del Corrisp. P. VINASSA.

La spinta ad occuparmi del presente argomento mi venne dal desiderio di ricercare la ragione di due fatti geochimici molto importanti.

Il primo è questo: l'enorme maggioranza dei corpi terrestri è compresa entro il numero atomico 28, l'ultimo cioè della prima triade Fe, Co, Ni.

Il secondo è questo, pure molto interessante: oltre ai gas nobili, si hanno altri elementi che, geologicamente, sono perfettamente neutri, e che costituiscono appunto le altre due triadi: Ru, Rh, Pd e Os, Ir, Pt, dei quali, come è noto, non si conoscono minerali [2], ma che sempre si ritrovano allo stato nativo.

Mi è sembrato intuitivo che anche qui dovesse aver valore il numero, analogamente a quanto mi era risultato nella mia precedente Nota [3] relativa al numero molecolare [4]. In essa avevo già fatto accenno al numero

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

(2) La rarissima *Sperrylite* e l'ancor più rara *Laurite* non infirmano la regola.

(3) *I costituenti degli involucri terrestri e il « numero molecolare »*. « Rend. R. Accad. Lincei », V, 1° sem., fasc. 4, Debbo correggere un'omissione di questa Nota. Anche l'N rientra nella regola, poichè la sua molecola è N_2 con num. mol. = 14.

(4) Contemporaneamente, ed a mia piena insaputa, anche il prof. Panichi ricorreva al « numero molecolare ».

Digitized by Google

degli elettroni periferici contenuti nei vari corpi, ed appunto su questa via mi son messo.

Una tale considerazione mi ha portato a stabilire un numero, che non mi risulta sia stato ancora adottato, e cioè il « numero elettronico ». Questo numero indica la quantità di elettroni periferici che si possono trovare nei vari elementi che prendono parte alle combinazioni. Esso sembra anche avere un interesse non solamente geochimico, poichè può servire di base ad una nuova classificazione.

Una interessante Nota del prof G. Oddo [1] relativa ad un ordinamento periodico degli elementi da lui proposto, cercava di tener conto della distinzione, necessaria ma trascurata nella classificazione classica del Mendeléjew, tra metalli e metalloidi, cioè tra elementi elettropositivi ed elettronegativi.

Appare manifesto che si deve poter trovare una classificazione la quale riesca a tenere distinti i corpi elettropositivi, cioè con numero di elettroni inferiori alla carica elettrica del nucleo, da quelli elettronegativi, cioè con numero di elettroni superiore a detta carica. La classificazione fondamentale del Mendeléjew, basata sui pesi atomici, e quella del Moseley in base al numero atomico, si applicano solamente con riferimento al *nucleo positivo* degli atomi, e quindi non possono tener conto del tipo elettronico dell'elemento.

L'atomo che deve concepirsi come parte della molecola, non è un'entità per sè stante. L'entità statica è la molecola normale. L'entità dinamica è l'ione. La classificazione periodica degli elementi considera questi solo come atomi, e non tiene quindi conto della diversità che uno stesso elemento presenta nelle sue svariate combinazioni. Non tiene conto, in una parola, del numero degli elettroni che circondano il nucleo positivo, il solo considerato nella classificazione classica.

Ora mi sembra indubitabile che, ad esempio, tra Si^{++++} ed S^{--}, benchè entrambi abbiano lo stesso numero atomico 14, vi è una grande diversità. Il primo ha difatti 10 elettroni periferici e pertanto 4 valenze positive, nucleari; mentre il secondo ha 18 elettroni e quindi 4 valenze negative, elettroniche.

Solamente adottando il numero elettronico divien possibile una classificazione, la quale tenga conto della distinzione tra metalli e metalloidi; poichè in essa lo stesso corpo può comparire due volte, tra i metalloidi cioè ed i metalli, a seconda se abbia più elettroni che non le cariche positive del nucleo o se invece ne abbia meno.

Soltanto negli elementi statici, zerovalenti, il numero elettronico corrisponde al numero atomico; in ogni altro caso esso è diverso.

È noto che esistono corpi esclusivamente elettropositivi e altri esclusivamente elettronegativi, ed altri ancora che possono essere l'uno e l'altro insieme. Si hanno quindi possibilità sia di piccoli sia di grandi scarti nel

(1) Oddo, *Nuova classificazione periodica degli elementi.* « Gazz. chim. ital. ». L. 2, fasc. 5 (1920).

Digitized by Google

numero elettronico di ciascun corpo. Naturalmente tali scarti saranno tanto maggiori quanto più un determinato corpo si presenta con valenze diverse. Risulta che lo scarto non è mai superiore a 8.

Questa differenza massima di 8 non si riscontra se non nei metalloidi, confermandosi così quanto ebbe ad esprimere G. Oddo [1] circa la cosidetta regola degli *Ottetti*, erroneamente voluta generalizzare.

Aggruppando i diversi elementi secondo il loro numero elettronico si nota che solo alcuni dei numeri della serie (da 0 a 92) hanno ricca rappresentanza, mentre altri sono scarsamente rappresentati. Taluni numeri anzi, come ad esempio: 1, 7, 9, 15, 17, 33, 35, 51, 53, ecc., non si rinvengono mai. Si tratta di numeri dispari.

Tra i numeri riccamente rappresentati spiccano in modo speciale questi: 2, 10, 18, 28, 36, 46, 54, 68, 78 e 86. Ora è ben noto che tali numeri corrispondono a speciali disposizioni regolari delle orbite elettroniche, e cioè: 2, 2, 8 (10); 2, 8, 8 (18); 2, 8, 18 (28); 2, 8, 18, 8 (36); 2, 8, 18, 18 (46); 2, 8, 18, 18, 8 (54); 2, 8, 18, 32, 8 (68); 2, 8, 18, 32, 18 (78) e 2, 8, 18, 32, 18, 8 (86).

Di questi stadi elettronici i numeri 2, 10, 18, 36, 54 e 86 corrispondono ai gaz zerovalenti noti, mentre 28, 46, 68 e 78 si considerano ipotetici.

Poichè appunto a tutti questi speciali numeri corrisponde la maggior parte degli ioni, ed essi rappresentano uno stato, che potremmo dire di equilibrio elettronico, così ho preso come base tali numeri per compilare la classificazione della annessa tabella, cui ho aggiunto lo zero, per il protòne H'.

Uno sguardo a questa tabella mostra subito che tutti quanti i corpi noti e quelli possibili, secondo la classificazione del Mendelèjew, vi si ritrovano, ad eccezione dei due ultimi termini di ciascuna triade e cioè: Co e Ni; Rh e Pd; Ir e Pt. È questo forse il più importante dato di fatto risultante dalla classificazione secondo il numero elettronico.

I numeri elettronici nelle combinazioni chimiche di questi sei corpi sono rispettivamente: per il Co, 23 a 26; per il Ni, 24 a 26; per il Rh, 41 a 44; per il Pd, 42 a 44; per l'Ir, 73 a 76 e per il Pt, 74 a 76. Non trovano quindi posto nei numeri scelti come base. Ma si può fare un'importante constatazione. Infatti gli elementi mancanti si trovano intercalati tra la fine di una serie e l'inizio della successiva.

Così Co e Ni tendono al 28; Rh e Pd tendono al 46; Ir e Pt tendono al 78. Ma vi è anche di più. Tutti gli elementi delle tre triadi si possono considerare geologicamente inerti. Quelli della prima triade limitatamente al centro della Terra, e sempre nei corpi celesti a noi praticamente noti per la caduta delle meteoriti; quelli delle due triadi rimanenti invece sono inerti in qualsiasi condizione geologica naturale a noi nota. Ed appunto i tre metalli ultimi delle tre triadi hanno i numeri atomici (che sono altresì numeri elettronici) rispettivamente di 28 (Ni), 46 (Pd) e 78 (Pt). Questi

(1) Oddo, *Trattato di Chimica inorganica*. Palermo, Sandron.

Digitized by Google

METALLOIDI				Zero valenti	METALLI														
				O	H·														
				2 He	Li·	Be··	B···	C··	—	—	—	—	—	—	—	—	N··	O··	F··
C····	N···	O··	Fl·	10 Ne	Na·	Mg··	Al···	Si··	—	—	—	—	—	—	—	—	P··	S··	Ce··
Si····	P···	S··	Cl·	18 Ar	K·	Ca··	Sc···	Ti··	Va··	Cr··	Mn··	Fe··	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	28 (Ni)	—	—	—	—	—	—	—	—	Cu·	Zn··	Ga···	Ge··	As··	Se··	Br··
	As···	Se··	Br·	36 Kr	Rb·	Sr··	Y···	Zr··	Nb··	Mo··	43··	Ru··							
	—	—	—	46 (Pd)	—	—	—	—	—	—	—	—	Ag·	Cd··	In···	Sn··	Sb··	Te··	I··
	Sb···	Te··	I·	54 X	Cs·	Ba··	La···	Ce··											
				68 (?)			Cp···	Hf··	Ta··	W··	75··	Os··	—	—	—	—	—	—	—
				78 (Pt)	—	—	—	—	—	—	—	—	Au·	Hg·	Tl···	Pb··	Bi··	Po··	85··
				86 Em	87·	Ra··	89···	Th··	91··	U··									

Digitized by Google

tre corpi debbono dunque considerarsi geologicamente zerovalenti, analoghi cioè ai gas nobili sebbene il loro comportamento chimico, nei nostri laboratori, sia ben diverso. Pertanto li ho segnati tra parentesi nella tabella in corrispondenza agli stadi di equilibrio 28, 46 e 78.

I quali stadi così non sono più ipotetici ma, nella compagine terrestre, sono effettivamente rappresentati dai tre metalli. Ipotetico resta il solo 68, il quale appare dover essere compreso tra le terre rare.

Da queste considerazioni mi sembra risultare sempre più l'importanza delle triadi, che sino *ab antiquo* colpirono i chimici pei loro peculiari caratteri, e che anche nella classificazione periodica assumono una posizione del tutto speciale.

*
* *

Dal punto di vista geochimico ho già accennato sul principio quanto le risultanze di queste constatazioni, che si rilevano dalla classificazione elettronica, possano essere interessanti.

Sta dunque il fatto che dopo il 28, corrispondente alla prima triade, non si hanno più corpi che prendano parte notevole alla composizione terrestre.

Vediamo difatti, secondo le più recenti ricerche (1), come si possa considerare quantitativamente costituita, in media, la Terra.

Numero atomico	Elemento	Farrington 1911	Clarke 1924	Washington 1925
26	Fe (metal.)	68.43	67.20	31.82
	Fe (silicati)	3.63		7.94
28	Ni	6.50	6.04	3.16
27	Co	0.44	0.41	0.23
8	O	10.10	12.77	27.11
14	Si	5.20	6.98	14.53
12	Mg	3.80	2.13	8.69
20	Ca	0.46	1.12	2.52
13	Al	0.39	1.86	1.79
8	S	0.49	0.96	0.64
11	Na	0.17	0.58	0.39
24	Cr	0.09	0.07	0.20
19	K	0.04	0.39	0.14
15	Ph	0.14	0.16	0.11
25	Mn	0.03	0.08	0.07
6	C	0.04	—	0.04
22	Ti	—	0.15	0.02

(1) WASHINGTON, *The chemical composition of the Earth.* « Amer. Journ. Sc. », vol. IX, May, 1925, p. 361.

Digitized by Google

Risulta adunque che per lo meno il 99.9 % della Terra è formato da 17 corpi compresi entro il num. at. 28. Dei rimanenti 11, che si riducono ad 8 se se ne tolgono i tre gas nobili, noi ne troviamo 6 nel gruppo immediatamente seguente per importanza a questo primo e solamente due: B, Sc sono nelle serie di infima importanza.

Si può quindi asserire che l'enorme maggioranza, per non dire la quasi totalità, dei corpi terrestri è compresa tra i numeri 0 e 28. Non son quindi quasi rappresentati i corpi successivi alla prima triade (1).

Sembra dunque indiscutibile che questo stadio di equilibrio corrispondente alle orbite elettroniche 2, 8, 18, rappresenta il massimo normale sulla Terra della polimerizzazione del protòne o di altro ipotetico corpo unitario. Ed anzi precisamente la triade corrispondente al 28 sembra formare l'enorme maggioranza del nucleo terrestre sotto la litosfera, sia che là si trovi la Nife metallica, sia, come altri ritengono, che questa si abbia sotto altra forma. Certamente la Nife si trova nella maggioranza dei corpi cosmici a noi direttamente noti.

Il fatto poi che nella crosta terrestre i corpi delle altre due triadi si presentino sempre allo stato nativo, inerte, sembra trovare la sua logica spiegazione nel numero elettronico di tali triadi, di cui l'ultimo termine corrisponde al numero atomico; e pertanto nella loro zerovalenza nelle speciali condizioni della crosta terrestre.

*
* *

Dalla tabella può anche rilevarsi una certa regolarità nella disposizione degli elementi disposti secondo il numero elettronico.

Infatti ne troviamo 8 nel gruppo 2, e pure sempre 8 (ivi compreso eventualmente l'ipotetico) nei gruppi 28, 46, 54 e 73, e sempre 12 nei gruppi 10 e 36. Fanno eccezione il gruppo 18 che ne ha 13, il gruppo 68, che comprende le terre rare e l'86 che comprende i radioattivi.

Ed a proposito di questo ultimo gruppo dalla tabella sembra risultare che, dopo l'Uranio, debbano trovarsi altri corpi più pesanti e precisamente oltre, come già si sa, al polimero del Mn (e degli ignoti 43 e 75), anche una triade di metalli di cui l'ultimo dovrebbe essere un corpo col numero elettronico 96, corrispondente altresì al suo numero atomico, e pertanto, in certe condizioni, inerte.

(1) Lo stesso può dirsi anche pei componenti, a noi noti, del Sole. Questa « regola » quindi sembra applicabile almeno all'intero sistema solare.

Digitized by Google

Fisiologia. — *Il meccanismo neurochimico della inibizione vagale nel cuore di mammifero.* Nota I[1] del Corrisp. C. Foà.

Ricorderò brevemente in che consista l'esperimento eseguito da Otto Loewi per la prima volta nel 1921, e che dopo di lui venne da molti altri sperimentatori ripetuto e variato e quasi sempre confermato. Un cuore di rana invernale, mantenuto in connessione coi vaghi, viene isolato, sospeso ad una cannula di Straub e perfuso con liquido di Ringer. Il n. vago, collocato sovra due elettrodi viene faradicamente eccitato, così da provocare l'arresto del cuore per 15'-20'. Poi si raccoglie con una pipetta dalla canula di Straub, il Ringer che era stato a contatto col cuore durante il periodo d'arresto, « liquido di inibizione », e lo si sostituisce con Ringer nuovo: il cuore riprende a pulsare regolarmente. Se si rimette nello stesso cuore od in un altro cuore di rana posto in condizioni analoghe, il « liquido di inibizione », si osservano subito modificazioni inotrope e spesso anche cronotrope negative, simili a quelle che produce l'eccitamento del vago. Durante la inibizione vagale è dunque trapassata dal miocardio al Ringer una sostanza capace di riprodurre l'effetto inibitore dell'eccitamento del vago.

Ma quando si cercò di estendere l'esperimento al cuore di mammifero, i risultati non furono univoci.

Le prime esperienze sul cuore dei mammiferi sono dovute a L. Duschl e F. Windholz (1923) e da esse apparirebbe senz'altro confermato il risultato di Loewi. Quegli autori sperimentarono sovra due ratti « siamesi », saldati cioè in parabiosi ed aventi ampia comunicazione fra le cavità addominali. Le comunicazioni vascolari fra i due ratti sono, secondo Duschl e Windholz, sufficienti a far passare dall'uno all'altro le sostanze « disciolte ». Con quanta avvedutezza debba esser presa questa asserzione, e come si debba distinguere da sostanza a sostanza, e da caso a caso, risulta dalle numerose e scrupolose esperienze del Morpurgo sui ratti in parabiosi. Comunque, i risultati di Duschl e Windholz sarebbero decisivi: l'effetto inibitorio dell'eccitamento vagale in uno dei due ratti, si propagherebbe per via umorale al cuore del compagno.

Duschl eseguì poi altre ricerche prelevando con una siringa contenente irudina il sangue dalle cavità del cuore di coniglio o di gatto, durante la inibizione vagale, ed iniettandolo nella giugulare esterna sinistra d'un altro animale. L'effetto inibitore sul cuore di questo sarebbe pronta: rallentamento del ritmo cardiaco e caduta della pressione arteriosa. L'irudina avrebbe la facoltà di preservare per un certo tempo la sostanza vagale dall'azione distruggitrice del sangue.

(1) Presentata nella seduta del 1° giugno 1927.

Digitized by Google

Un'esperienza analoga fu ripetuta nel 1925 da Popper e Russo, con questa sola variante: che il sangue tratto dalla puntura del cuore veniva defibrinato e fatto poi agire sul cuore isolato di rana. Mentre questo non risentiva alcun effetto dal sangue di coniglio normale, veniva inibito dal sangue raccolto da un cuore di coniglio sottoposto alla inibizione vagale.

Brinkmann e v. D. Velde estrassero 20 cc. di sangue dalla carotide di un coniglio durante l'eccitamento dei vaghi e, dopo averli citratati, li iniettarono nella v. auricolare di un altro coniglio le cui pulsazioni cardiache venivano registrate. L'effetto dell'iniezione fu così intenso come quello di un eccitamento diretto del vago.

Con altri esperimenti gli stessi autori dimostrarono che il sangue « vagale » eccita la musculatura gastrica di un secondo animale.

Risultati che confermano quelli di Loewi ottenne Jendrassik valendosi di una tecnica differente da quella degli autori precedenti. Per evitare una eventuale azione distruggitrice del sangue sulla sostanza vagale, egli esperimentò sovra il cuore isolato di coniglio perfondendone le coronarie con liquido di Ringer secondo il metodo di Langendorff. Il vago connesso col cuore isolato si conserva per un certo tempo eccitabile. Il liquido di perfusione fuorescente subito dopo un periodo di inibizione vagale acquista il potere di eccitare le contrazioni della musculatura intestinale, per virtù della sostanza vagale formatasi.

Sembrò a taluni autori che il metodo della cardiopuntura e del trasporto del sangue dal cuore inibito ad un cuore nuovo mediante una siringa, potesse essere vantaggiosamente sostituito, stabilendo una circolazione crociata tra i due animali.

Furono così introdotte diverse varianti al prezioso metodo di indagine che L. Frederiq ha introdotto nella tecnica fisiologica or sono molti anni, e che ha servito a indagare numerosi problemi.

Dopo alcuni primi tentativi non fortunati eseguiti nel 1922, Zunz e Govaerts ristudiarono nel 1923 l'effetto della trasfusione di sangue in un cane, traendolo da un altro cane al quale fossero eccitati i vaghi. Al metodo consueto che consiste nel far passare direttamente il sangue dai vasi del cane A a quelli del cane B, i due autori belgi ne sostituirono un altro col quale ottenevano per mezzo di due siringhe a doppio effetto, poste simultaneamente in azione, di far passare dalla a. femorale di A alla v. giugulare di B una certa quantità di sangue, mentre altrettanto ne passava dall'a. femorale di B alla giugulare di A. Così erano evitati gli squilibri di pressione provocati dai consueti metodi di trasfusione o di circolazione crociata.

I due autori belgi constatarono che il sangue del cane A, al quale venivano eccitati i vaghi, provocava nel cane B un abbassamento della pressione arteriosa, *mentre aumentava la frequenza* delle pulsazioni cardiache. Se si pon mente a quest'ultimo risultato, e si tien conto che spesso il passaggio del sangue da un cane all'altro, specie se i cani sono morfinizzati,

Digitized by Google

ed ancor più se narcotizzati con cloralosio, provoca una caduta nella pressione arteriosa, mi sembra che le esperienze di Zunz e Govaerts non abbiano portato un contributo tale da far ritenere estensibili ai mammiferi i risultati ottenuti da Loewi sui batraci.

Esperienze analoghe alle precedenti furono pubblicate nel 1924 da Enderlen e Bohnenkamp ed i risultati furono negativi. Persuasi che la parabiosi non consentisse una sufficiente comunicazione vascolare fra i due animali, essi ricorsero alla diretta immissione del sangue sgorgante dal moncone cardiaco della carotide di ciascuno dei due cani, entro il moncone cardiaco della giugulare dell'altro. In altri casi congiungevano il moncone cardiaco della carotide del cane A col moncone cefalico della carotide del cane B, ed il moncone cefalico della giugulare di A col moncone cardiaco della giugulare di B. Il risultato fu costante: l'eccitamento del vago di A non provoca alcuna modificazione nei battiti del cuore di B.

L. M. Patrizi, indipendentemente da Enderlen e Bohnenkamp, e senza, evidentemente, aver conosciuto la pubblicazione di questi autori, precedente la sua, ha eseguito, pur egli, la circolazione crociata fra due cani, con un metodo sostanzialmente identico a quello dei sopracitati autori: allacciatura del moncone cardiaco della carotide di A col moncone cardiaco della giugulare di B; ritorno del sangue dalla a. femorale di B alla v. femorale di A. L'eccitamento del vago di A non ebbe effetto sul cuore di B.

J. E. e C. Heymans, non conoscendo l'esperimento del Patrizi, ebbero la stessa idea, e con tecnica molto simile, ottennero pur essi, risultati negativi.

Tutti questi esperimenti furon guidati dal presupposto che, se una sostanza vagale si forma, essa debba ritrovarsi nel sangue arterioso del ventricolo sinistro, e possa manifestare la sua azione, sopra un altro cuore, quando venga introdotta nelle sue cavità destre. Sembrò al Patrizi che con questo metodo, « il supposto ormone di Loewi avrebbe incontrato le condizioni più favorevoli per rivelarsi, sarebbe passato in brevi istanti da un cuore all'altro prima di espandersi e di attenuarsi nel *giro universale dei vasi* come avrebbe detto lo Spallanzani ». Così il Patrizi superò il dubbio che gli era nato e che aveva espresso domandandosi « se il fatto di diluirsi dell'immaginato prodotto umorale nel vasto letto della grande e piccola circolazione non fosse tale per sè da eludere l'azione sul secondo cuore della minimissima quantità di sostanza generantesi o liberantesi ipoteticamente nel primo cuore per la irritazione del vago ».

Il presupposto che, se la sostanza vagale si forma, essa debba esser presente nel sangue del ventricolo sinistro, è derivato forse dalla tecnica dei primi esperimenti di Loewi, ma parmi che non si sia dato sufficiente peso alle differenze anatomiche fra il cuore di rana che non possiede coronarie, ed il cui miocardio si nutre per imbibizione, scambiando facilmente le proprie sostanze con quelle del liquido che lo bagna, ed il cuore di mam-

Digitized by Google

mifero il cui miocardio non si alimenta se non per la profonda e minuta irrorazione coronaria.

Una sostanza eventualmente formatasi nella compagine del miocardio di mammifero a livello delle terminazioni vagali, può benissimo non migrare nel liquido contenuto nella cavità del cuore, mentre sembra più probabile che essa passi nelle vene coronarie. La si potrebbe pertanto ritrovare nel sangue del seno coronario prima che si getti nel piccolo circolo, mentre al ventricolo sinistro non giungerebbe che dopo aver compiuto un lungo tragitto ed avendo subito una forte diluizione. Questa considerazione vale anche pel secondo tratto fatto percorrere dalla eventuale sostanza vagale nell'esperimento della circolazione crociata. Si pretenderebbe di vederla trasmigrare dalla cavità del cuore destro, per entro la compagine del miocardio, in virtù di un processo di imbibizione che non fu mai, con sicurezza, constatato.

Che se questa migrazione, come sembra logico ammettere, non avvenisse, e se per agire, la sostanza dovesse penetrare nel cuore di B attraverso le sue coronarie, essa dovrebbe ancora percorrere un lungo tragitto nei vasi del cane ricevente e diluirsi nel suo sangue.

La circolazione crociata eseguita col metodo sovra citato, non permette di trarre alcuna sicura conclusione sulla *produzione* della sostanza vagale nel cuore dei mammiferi, perchè il risultato negativo al quale essa conduce può trovare spiegazione nelle sovraesposte considerazioni.

Queste furono in parte superate da coloro che cercarono di far giungere la sostanza vagale al cuore testimone, immettendola direttamente nel circolo coronario. Così fecero gli Heymans, valendosi del metodo di Heymans e Kochmann, che consiste nel perfondere, per l'aorta, il circolo coronario di un cuore isolato di cane, col sangue proveniente dalla carotide di un altro cane, al quale poi il sangue vien restituito riconducendolo alla giugulare. Questo esperimento diede pure esso risultato negativo, ma che la ricerca della sostanza vagale nel sangue carotideo fallisca, alla luce delle considerazioni sovraesposte, non stupisce. Il sangue tratto dal seno coronario potrebbe invece contenere la sostanza vagale, se il miocardio la cedesse al sangue, ma Plattner, ripetendo il sovracitato esperimento di Popper e Russo, non potè confermarne il risultato, e neppure potè dimostrare che il sangue tratto dal seno coronario di un cuore inibito di cane avesse azione inibitrice sul cuore di un altro cane, anche se iniettato nel ventricolo sinistro di questo.

E tuttavia era questo un modo abbastanza diretto per saggiare l'azione della supposta sostanza vagale perchè il sangue del datore veniva raccolto all'uscita dalle v. coronarie, e subito col sangue del v. sinistro del ricevitore penetrava, almeno in parte, nelle coronarie del cuore di questo.

Sempre nell'intento di ricercare la sostanza vagale nel sangue delle coronarie che è stato ad intimo contatto col miocardio, Tournade, Chabrol e Malmejac adottarono una nuova variante della circolazione crociata: il

Digitized by Google

moncone cardiaco della carotide d'un cane A è immesso nel moncone cardiaco della aorta di un altro cane B e l'arteria polmonare di A nella giugulare di B. Vengono poi legate le branche dell'arco aortico, i peduncoli polmonari, le cave superiori e inferiori e l'azigos di B. In tal modo il cuore di B è irrorato dal sangue di A.

Questo esperimento aveva per fine di studiare l'effetto della stimolazione dei vaghi del cuore di B, sul cuore del donatore A, escludendo che potessero entrar in giuoco sostanze formatesi, per l'eccitamento dei vaghi, in tessuti diversi dal cuore. Ma il risultato fu negativo, e gli autori stessi si domandano se ciò non possa dipendere oltre che dalla diluizione della sostanza vagale nella massa del sangue, anche dal fatto che il cuore del donatore riceve la supposta sostanza nelle sue cavità e soltanto in minima parte nelle coronarie. Essi mutarono perciò la loro tecnica ed istituirono un esperimento col quale il cuore del donatore irrorava ad un tempo altri due cuori, dei quali uno (A) lasciato in connessione coi vaghi dovesse elaborare la sostanza vagale, l'altro (B) dovesse riceverla immediatamente ed integralmente nel proprio circolo coronario. Ma neppure in tal modo essi ottennero risultati positivi, onde conclusero che se pure la sostanza vagale si forma, essa si consuma *in situ*, e non passa nel circolo coronario. Forse, pensano gli autori, il tessuto miocardico la distrugge non appena si produce od il sangue la modifica per modo che essa perda il suo potere inibitore.

Secondo esperienze di Loewi e Navratil, la sostanza vagale sarebbe infatti labilissima ed il tessuto miocardico la distruggerebbe rapidamente *in vitro*; e secondo Plattner il sangue pure ne abolirebbe prontamente l'azione.

Ripetendo l'esperimento originale di Loewi sul cuore di rana, ma mettendo nella canula di Straub sangue di rana o di bue, o siero, od una sospensione di globuli rossi, in luogo del Ringer, l'esperimento di Loewi fallisce completamente.

Mi sembra questo davvero l'*experimentum crucis*, che avrebbe dovuto essere anteposto ad ogni altro tentativo di rintracciare la sostanza di Loewi nel *sangue* dei mammiferi, durante o dopo l'eccitamento dei vaghi.

Con una critica serrata e convincente il Plattner toglie gran valore agli esperimenti di Duschl, e di Brinkmann e v. De Velde, nei risultati positivi dei quali vede più l'effetto di modificazioni emodinamiche o termiche o chimiche (citrato) dovute alla iniezione, che non quello della supposta sostanza vagale, la quale, date le condizioni dell'esperimento, non potrebbe trovarsi che scarsissima nel campione di sangue prelevato e diluitissima nella massa sanguigna dell'ospite.

Non per questo il Plattner nega che anche nel cuore di mammifero, la stimolazione del vago possa liberare la sostanza vagale, ed anzi egli ne ritrovò sempre una certa quantità negli estratti del miocardio di mammiferi, e ne constatò un forte aumento dopo la stimolazione del vago.

Digitized by Google

Devesi, a mio avviso, convenire col Patrizi, che se la sostanza vagale si forma e si distrugge nella compagine del miocardio e non passa nel sangue, non si può parlare di un *trasporto* (Uebertragbarkeit) umorale della inibizione vagale, come apparirebbe dal titolo delle pubblicazioni di Loewi e di altri autori e dal fatto che trasferendo il Ringer da un cuore di rana inibito entro un altro cuore, esso *trasporta* in questo gli effetti della stimolazione vagale del primo.

Veramente lo stesso Loewi ha dimostrato e sostenuto che la sostanza vagale ha un'azione strettamente localizzata, e, nella sua relazione riassuntiva avanti la Società Fisiologica Tedesca, egli ha espresso questo suo concetto chiedendosi argutamente: « avrebbe senso che, quando un uomo è soggetto ad un rallentamento del polso, abbia anche, in conseguenza di questo, da combattere una colica intestinale ? » (1).

Guidati da un analogo dubbio E. e P. Gley furono indotti a ricercare se la stimolazione al collo di un vago reciso all'altezza del diaframma, producesse un aumento della secrezione pancreatica, aumento che sarebbe dovuto alla sostanza vagale formatasi nel cuore e circolante nel sangue. Il non aver ottenuto questo risultato non dimostra che la sostanza non si formi nel miocardio, ma può significare soltanto che essa non se ne allontana per andare ad influenzare altri territori della innervazione parasimpatica.

La conclusione positiva che possiamo dunque trarre dai risultati negativi ottenuti sul cuore dei mammiferi, è questa: che la stimolazione del vago cardiaco non determina fenomeni a distanza, che possan far ritenere presente nel sangue una sostanza ad azione vagale. La questione se questa si produca nel cuore dei mammifori non è risolta dagli esperimenti sopra citati e formerà oggetto di una nota seguente.

BIBLIOGRAFIA

L. Duschl u. F. Windholz. - *Ueber die humorale Beeinflussung der Herzaktion im Warmblüterorganismus nach Versuchen an parabiosierten Ratten.* « Zeitsch. f. ges. exp. Med. », 38, p. 261, 1923.

L. Duschl. - *Ueber die hormonale Beeinflussung der Herzaktion im Warmblüterorganismus nach Versuchen an Einzeltieren.* « Zeitsch. f. ges. exp. Med. », 38, 1923, p. 268.

L. Jendrassik. - *Humorale Uebertragbarkeit von Nervenreizen beim Warmblüter.* « Zeitsch. f. Biol. », 144, p. 520, 1924.

E. Zunz et P. Gowaerts. - *Action hypertensive du sang carotidien recueilli pendant l'excitation du splanchnique.* « C. R. Soc. de Biol. », 88, p. 652, 1923.

— *Action hypotensive du sang carotidien recueilli pendant l'excitation du pneumogastrique.* « C. R. Soc. de Biol. », 91, p. 389, 1924.

(1) Ho tratto questa notizia da una lettera che il prof. O. Lewi ha diretto al professore L. M. Patrizi, e che questi ha pubblicato tradotta, nella sua Nota: *Intorno al supposto « ormone vagale » di Loewi.* « Bullettino delle Scienze Mediche », Bologna, X, 1927.

Digitized by Google

POPPER et RUSSO. – *Recherches èxpérimentales sur la trasmission humorale de l'excitation des nerfs cardiaques.* « Journ. de Physiol. et Path. Gén. », 23, p. 562, 1925.

DRINKMANN u. v. D. VELDE. - « Pflueger's Arch. », 207, p. 488, 1925.

— *Ibid.*, 209, p. 383, 1925.

ENDERLEN u. BOHNENKAMP. - *Ueber das Fehlen der Uebertragbarkeit der Herznervenwirkung bei Gefässparabiosee an Hunde.* « Zeitsch. f. ges. exp. Med. », 41, p. 723, 1914.

M. PATRIZI. - *Sulla ipotesi umorale dell'inibizione cardiaca; e se sia estensibile ad ogni altro fenomeno inibitorio.* « Atti della R. Accad. di Scienze L. A. di Modena », 5 luglio 1925.

— *Vedute novissime nella fisiologia del cuore.* Conferenza detta nella Scuola di Sanità Militare di Firenze il 12 febbraio 1926.

— *Intorno al supposto « ormone vagale » di Loewi.* « Bollettino delle Scienze Mediche ». Bologna, X, 1927. Con l'album dichiarativo dei documenti grafici riferibili alle esperienze del 1925 e 1926 e tavole. Bologna. A cura dell'Instituto di Fisiologia, 1927.

J. E. HEYMANS et C. HEYMANS. – *A propos du mécanisme humoral de l'action cardiaque du pneumogastrique.* « C. R. Soc. Biol. », 1926, n. 2.

F. PLATTNER. - *Der Nachweis des Vagusstoff beim Säugetier.* « Pflueger's Arch. », 214, p. 114, 1926.

O. LOEWY u. E. NAVRATIL. - *Ueber humorale Uebertragbarkeit der Herznervenwirkung.* X, Mitth. *Ueber das Schiksal des Vagustoffs.* « Pflueger's Arch. », 214, p. 678, 1926.

— *Ueber den Mechanismus des Vaguswirkung von Physostigmin und Ergotamin.* « Pflueger's Arch. », 214, p. 689, 1926.

A. TOURNADE, M. CHABROL e J. MALMEJAC. - *Au sujet de l'hormone vagale. Echec des tentatives faites pour la découvrir dans le sang de la circulation coronaire chez le chien.* « C. R. Soc. de Biol. », 18 déc., 1926, p. 1538.

E. et P. GLEY. - *Sur la présence dans le sang d'une substance à action dite « vagale ».* « C. R. Soc. Biol. ». 30 gennaio 1926, p. 269.

Biologia. — *Note di Plasmogenia. Sull'imitazione delle amebe con sapone di resina.* Nota [1] del Socio straniero L. A. HERRERA [2].

I notevoli risultati ottenuti col sapone di soda nella gasolina [3] mi hanno indotto a preparare le amebe col sapone di resina.

ESPERIENZA n. 5493. Ottobre 20, 1926. Gasolina . .	parti	100
Olio di olivo puro	»	50
Resina comune	»	25

Si fa sciogliere e si filtra per separare la parte insolubile. Si aggiunge alcune goccie d'una soluzione di soda caustica al 14 % preparata di fresco. Immediatamente si ha produzione di numerose forme di amebe (fig. 1)

(1) Presentata nella seduta del 19 giugno 1927.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio degli Alti studi biologici di Messico.

(3) A. L. HERRERA, *Sull'imitazione delle amebe in movimento.* « Memorie della R. Acc. dei Lincei. Classe di scienze fisiche matematiche e naturali », Serie sesta, vol. II, fasc. n. 8, p. 195.

Digitized by Google

che emettono pseudopodi da tutte le parti; indurendo si paralizzano e si disciolgono ben presto nella gasolina. Ciò che colpisce più di tutto è che gli pseudopodi escono e rientrano come nelle amebe naturali. La struttura è

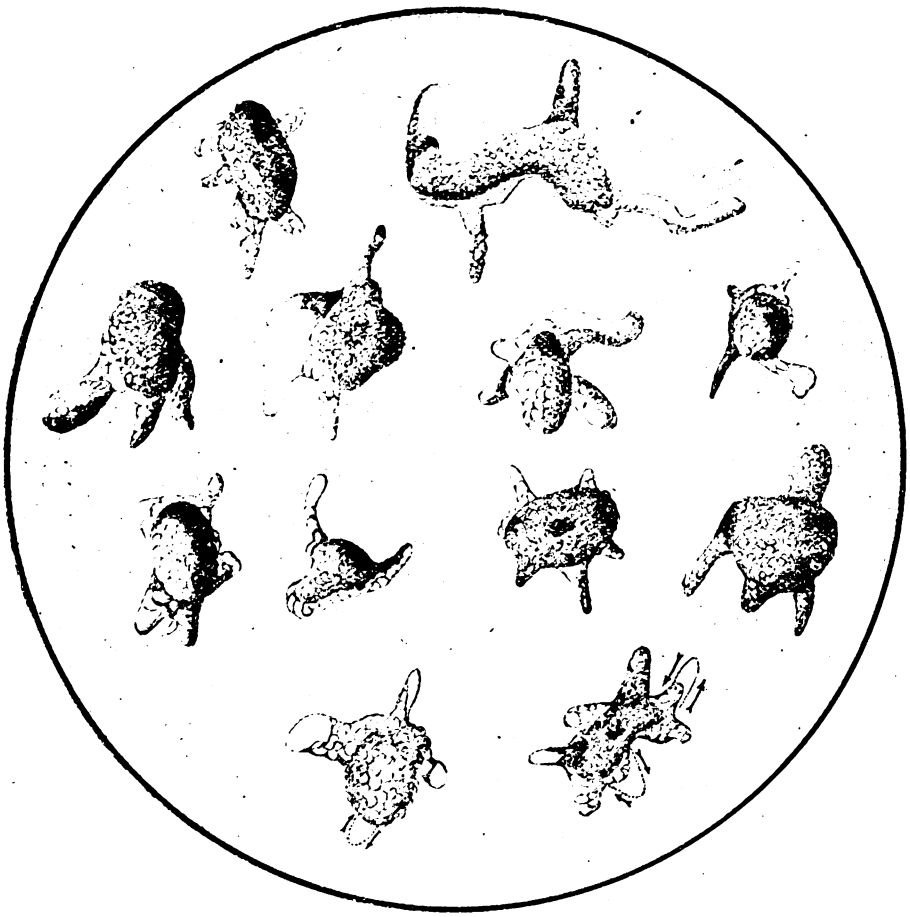


Fig. 1.

grossolanamente alveolare. Gli pseudopodi cambiano spesso di forma. Vi sono alcuni noduli e germinazioni che induriscono rapidamente.

Esperienza n. 5841. Ottobre 7, 1926.

Resina	6
Gasolina	120

Diluendo con una parte di gasolina ed aggiungendovi la soluzione di soda si ha formazione di Colpoidi che si succhiano avidamente [1]. Essi mo-

(1) A. L. Herrera, *Aspetti di lotta e di parassitismo nelle imitazioni di infusori.* Questi « Rendiconti », IV, p. 343.

Digitized by Google

strano delle fessure interiori e germinazioni simili a quelle degli oleati alcalini e dei cristalli liquidi (1). Tutti questi fatti sono dovuti alla pressione osmotica ed alle correnti osmotiche come avviene col sapone di soda nella gasolina.

Disgraziatamente queste amebe si sciolgono rapidamente nella gasolina; esse però sono assai interessanti per i loro pseudopodi retrattili.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Ancora sugli sviluppi tayloriani* $\sum a_n z^n$, *dove* $a_n = g(n)$ *con* $g(n)$ *trascendente intera.* Nota (2) di S. MINETTI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Introduzione. - In un recente lavoro (3) ho trattato il caso in cui la $g(n)$ fosse una trascendente intera di genere $k = 0$ ed ordine $\rho = 1$ ed ho stabilito una condizione sufficiente perchè lo sviluppo tayloriano $\sum a_n z^n$ ove $a_n = g(n)$, per n intero positivo, e che d'ora in poi chiamerò « sviluppo tayloriano associato alla $g(n)$ » abbia raggio di convergenza eguale all'unità e stabilii poi che il punto $z = 1$ era un punto singolare per la funzione analitica da esso definita.

Scopo invece della presente Nota è quello di dimostrare come se la $g(n)$ è trascendente intera di genere $k = 1$ ed ordine $\rho < 1$ il raggio di convergenza dello sviluppo tayloriano « associato » ad essa può assumere un valore qualunque. Più precisamente che se è

$$(1) \qquad g(n) = e^{(\beta_0 + \beta_1 n)} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{n}{b_i}\right)$$

$\rho < 1$ essendo l'esponente di convergenza della $\sum \frac{1}{|b_i|} = \sum \frac{1}{r_i}$, è

$$R = e^{-\beta_1}.$$

Notiamo subito che il risultato che noi qui troviamo potrebbe farsi discendere, è vero, in modo rapido ma indiretto da un teorema del Leau.

(1) A. L. HERRERA, *Una nuova scienza: la Plasmogenia*, p. 381; Lehmann Flüssige Krystalle, Leipzig 1904 (Engelmann), p. 255.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 agosto 1926.

(3) MINETTI, *Sul raggio di convergenza degli sviluppi tayloriani* $\Sigma a_n z^n$ *ecc.*, « Rend. R. Accademia dei Lincei », to. III, fasc. 11-12, anno 1926.

Digitized by Google

Questi invero con considerazioni di natura « *completamente e sostanzialmente* » diverse dalle nostre e ben più lunghe e complicate dimostrò che se la $g(n)$ era di ordine $\rho < 1$ il punto $z = 1$ era l'unico singolare per la corrispondente $f(z)$; ne risulta quindi indirettamente che il raggio di convergenza dello sviluppo $\sum a_n z^n = f(z)$ è l'unità. Dopo ciò, posto $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{n}{b_i}\right) = \Phi(n)$, la (1) diventa

$$g(n) = e^{\beta_0 + \beta_1 n}\, \Phi(n)$$

e per giungere al risultato che stabiliamo in questa Nota basterebbe scrivere

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\left[e^{\frac{\beta_0}{n}} e^{\beta_1} \Phi(n)^{\frac{1}{n}}\right]\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[e^{\frac{\beta_0}{n}} e^{\beta_1}\right] \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\Phi(n)^{\frac{1}{n}}\right| = e^{\beta_1}.$$

Notiamo subito però, a giustificare sia i precedenti passaggi sia l'apparente contraddizione fra l'enunciato del Leau e il nostro, che quell'autore dà alla parola « *ordine di una funzione intera* » un significato diverso da quello che noi qui gli attribuiamo. E precisamente egli chiama una funzione intera di ordine ρ quando essa cresce meno rapidamente di $e^{|n|^{\rho+\varepsilon}}$ ma più rapidamente di $e^{|n|^{\rho-\varepsilon}}$; con tale significato una funzione di ordine minore di uno è sempre di genere zero. Noi invece attribuiamo alla parola « ordine » il senso di « ordine reale » del Borel eguale dunque all'esponente di convergenza della $\sum \frac{1}{r_i}$ che è completamente indipendente dal « *genere* » (nel senso di Laguerre), almeno se il grado del polinomio che figura ad esponente del fattore esponenziale esterno al prodotto infinito della (1) è maggiore dell'ordine.

La nostra determinazione di R ha il vantaggio dunque, se non il pregio, di essere una determinazione diretta dal momento che noi lo determiniamo proprio come un valore inverso del $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sqrt[n]{a_n}\right|$ (teorema di Cauchy-Hadamard).

Atteso anche il nostro nuovo indirizzo di ricerca in armonia col metodo seguito nei miei precedenti lavori sullo stesso argomento e che non è stato sin qui seguito da alcuno, non credo possa ritenersi che questa mia nuova dimostrazione diretta possa fare comunque « double emploi » con quella indiretta che discenderebbe dal risultato del Leau, attese anche le difficoltà che si incontrano per stabilire tale stesso risultato.

§ 1. - Premetto che si useranno qui le stesse notazioni già adoperate nelle mie precedenti citate Note sullo stesso argomento.

Sia dunque

$$(3) \qquad g(n) = e^{\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{n}\right)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{n}{b_i}\right)$$

una funzione trascendente intera di n, di genere $k = 1$ ed ordine $\rho < 1$.

Digitized by Google

Sarà dunque ρ l'esponente di convergenza della serie

$$\sum \frac{1}{r_i}$$

e quindi, per definizione, ε essendo positivo qualunque, la serie

$$\sum \frac{1}{r_i^{\rho+1}}$$

è convergente, mentre la

$$\sum \frac{1}{r_i^{\rho-\varepsilon}}$$

è divergente.

Ma essendo $\rho < 1$, sarà, in particolare, convergente la

$$\sum \frac{1}{r_i}; \tag{4}$$

La formula fondamentale di Cauchy-Hadamard ci dice che

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sqrt[n]{a_n} \right|}.$$

Nel nostro caso essa diventa dunque

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \left[e^{(\beta_0+\beta_1 n)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{n}{b_i}\right)\right] \right|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^{\beta_1}} \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \prod_1^\infty \left(1 - \frac{n}{b_i}\right) \right|^{\frac{1}{n}}}$$

dove $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{n}{b_i}\right)$ è un prodotto canonico di fattori primarii di ordine $\rho < 1$, è quindi in particolare anche una funzione intera di ordine minore dell'unità.

Dimostrerò qui che è precisamente

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \prod_1^\infty \left(1 - \frac{n}{b_i}\right) \right|^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{5}$$

Ne risulterà quindi

$$R = \frac{1}{e^{\beta_1}}$$

cioè il nostro assunto.

Per giustificare la (5) si noti che basta dimostrare come, scelto σ positivo qualunque, si possa determinare sempre

Digitized by Google

1° un valore di n (in generale dipendente da σ) tale che a partire da esso l'espressione $\left|\sqrt[n]{a_n}\right|$ sia certamente inferiore ad $(1+\sigma)$;

2° una successione infinita di valori di n tendenti all'∞ e per cui la medesima espressione, $\left|\sqrt[n]{a_n}\right|$ sia costantemente maggiore di $(1-\sigma)$.

Per la prima parte osserviamo intanto che essendo $\prod_1^\infty \left(1-\frac{n}{b_i}\right)$ una funzione intera di ordine $\rho = 1-\eta < 1$ in virtù di un teorema fondamentale di Borel e più precisamente per quella parte di esso che può dirsi ai Schaper-Borel [1] si può asserire che per n molto grande si avrà sempre

$$\left|\prod_1^\infty \left(1-\frac{n}{b_i}\right)\right|^{\frac{1}{n}} < \left[e^{n^{\rho+\tau}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

τ essendo positivo qualunque ma fissato che sia.

Si avrà cioè

$$\left|\prod_1^\infty \left(1-\frac{n}{b_i}\right)\right|^{\frac{1}{n}} < e^{\frac{n^{\rho+\tau}}{n}} = e^{n^{-\lambda}} = e^{\frac{1}{n^\lambda}}$$

con $\lambda > 0$ se si ha avuto cura di scegliere τ positivo in modo che $\rho + \tau < 1$.

E poichè

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^\lambda}} = 1$$

la prima parte resta rigorosamente stabilita.

Per la seconda parte ricorriamo invece a quello che il Borel chiama « secondo teorema di Hadamard » [2] e che è relativo al minimo del modulo di una funzione intera.

Esso dice precisamente così:

« Essendo dato un prodotto canonico $g(n)$ di fattori primarii di ordine ρ, e un numero positivo arbitrario τ si può trovare una infinità di cerchi di raggi indefinitamente crescenti su ciascuno dei quali si ha la diseguaglianza

$$|g(n)| > e^{-n^{\rho+\tau}}. \tag{6}$$

I raggi n di tali cerchi sono tutti esterni alle corone C_n comprese rispettivamente fra i cerchi concentrici di raggi

$$(r_i - 1) \quad \text{ed} \quad (r_i + 1)$$

(1) V. Borel, *Leçons sur les Fonctions Entières*, IIe édition, 1921, p. 62 nota (1) a piè di pagina.

(2) V. Borel, *Leçons sur les Fonctions Entières*, IIe édition, 1921, p. 77.

Digitized by Google

dove $r_i = |b_i|$ con centro comune nell'origine e assoggettati alla condizione di verificare la diseguaglianza

$$2^{\mu}\left(\log n + \log 2 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) < n^{\tau}$$

μ essendo un numero inferiore all'unità e che rende la

$$\sum \frac{1}{r_i^{\mu}}$$

convergente.

Notiamo innanzi tutto che esisteranno valori interi di n esterni a tutti i segmenti intercetti dalle corone C_n sul semiasse positivo reale, se per una infinità di valori dell'indice i resterà soddisfatta la

$$(r_{i+1} - 1) - (r_i + 1) > 1$$

e cioè la

$$r_{i+1} > r_i + 3. \tag{7}$$

Ora la (7) è certamente soddisfatta per una infinità di valori dell'indice che in essa compare.

Se invero non lo fosse, la (7) stessa sarebbe verificata solo per un numero finito di valori di i e potrebbe in conseguenza determinarsi un valore finito e fisso i_1 di i tale che a partire da esso fosse costantemente

$$r_{i+1} < r_i + 3$$

e allora la

$$\sum_{i=i_1}^{i=\infty} \frac{1}{r_i}$$

sarebbe manifestamente divergente contro quanto è detto più sopra (vedi la (4)).

Esiste dunque una successione di valori interi di n tendenti all'∞ e tali che su ciascun cerchio di centro nell'origine e raggio eguale ad n vale la

$$|g(n)| > e^{-n^{\rho+\tau}}.$$

Su ciascuno di essi si avrà dunque

$$|g(n)|^{\frac{1}{n}} > \left[e^{-n^{\rho+\tau}}\right]^{\frac{1}{n}} = e^{-n^{\lambda_1}} = \frac{1}{e^{n^{\lambda_1}}}$$

dove $\lambda_1 = \rho + \tau - 1 < 0$.

Digitized by Google

Ma essendo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{e^{n^{\lambda_1}}} = 1$$

anche la seconda parte del nostro assunto resta rigorosamente dimostrata.

§ 2. - Si può dunque intanto asserire che:

Se $f(z)$ *è funzione analitica regolare in* $z = 0$ *e se* $\sum a_n z^n$ *è il suo sviluppo in serie di potenze di* z *in un intorno di questo punto il coefficiente generale* a_n *essendo il valore che per* n *intero positivo assume una funzione trascendente intera*

$$g(n) = e^{(\beta_0 + \beta_1 n)} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{n}{b_i}\right)$$

di genere $k = 1$ *ed ordine* $\rho < 1$ *allora il raggio di convergenza dello sviluppo* $\sum a_n z^n$ *è*

$$R = e^{-\beta_1}.$$

Matematica. — *Equazioni di luoghi geometrici comprendenti un parametro al variare del quale la linea, o la superficie rappresentata passa, in modo continuo dalla forma poligonale, o poliedrica, alla forma circolare o sferica.* Nota dell'ing. L. Laboccetta, presentata [1] dal Corrisp. G. A. Crocco.

Le ricerche, formanti oggetto delle mie precedenti Note, sulla rappresentazione analitica mediante equazioni ordinarie dei luoghi geometrici discontinui avendomi condotto a scrivere le equazioni di poligonali e di poliedri, la mia attenzione era stata richiamata dalla evidente analogia o simmetria di struttura fra l'equazione della sfera e dell'ottaedro [2] e, corrispondentemente, fra quelle del circolo e del quadrato.

Poichè tanto dal quadrato, come dall'ottaedro, si passa al circolo e, rispettivamente, alla sfera con un processo di deformazione continua era naturale sospettare che le due equazioni fossero in realtà le due forme estreme di una stessa equazione rappresentante genericamente le configurazioni intermedie di passaggio ottenute con una legge assegnata, e nella quale entrambe si trovassero comprese come casi particolari.

Ciò effettivamente si verifica e, come ora mostrerò, è assai facile costruire la detta equazione generale rappresentante anche le configurazioni

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(2) Messe a raffronto una accanto all'altra al § 5 (20), della precedente Nota del 7 marzo 1927.

Digitized by Google

intermedie. Anzi apparirà che il metodo è applicabile, con gli opportuni adattamenti, anche ad altri casi analoghi nei quali si tratti di scrivere delle equazioni che rappresentano un poligono, od un poliedro e la linea, o la superficie, curva nelle quali essi si trasformano con deformazione continua, secondo una legge assegnata, insieme con tutte le configurazioni intermedie.

Questo procedimento mi sembra non privo d'interesse perchè esso conduce ad esprimere in modo elementare, e con i metodi della geometria analitica, taluni fatti e proprietà che sono più specialmente di pertinenza dell'*Analysis Situs*.

* * *

1. Data una retta egualmente inclinata sugli assi coordinati

$$x + y = a \tag{1}$$

di essa viene simmetrificato rispetto ai due assi il segmento compreso nel primo quadrante scrivendo

$$x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} y = a \tag{2}$$

e si ha così l'equazione del quadrato con le diagonali di lunghezza $2a$ disposte sugli assi.

L'equazione del circolo che ha il centro nel punto $P(k, k)$ della bisettrice del primo quadrante e passa per i vertici del quadrato (2) posti sui semi-assi positivi OX, OY è

$$x^2 + y^2 - a^2 = 2k(x + y - a) \tag{3}$$

Di questo circolo si simmetrifica rispetto ai due assi la parte compresa nel primo quadrante scrivendo

$$x^2 + y^2 - a^2 = 2k(x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} y - a). \tag{4'}$$

Considerando k come parametro variabile questa equazione rappresenta una famiglia di curve, ed essa:

a) Per $k = \pm\infty$ coincide con l'equazione del quadrato (2), come si può vedere scrivendola:

$$\frac{x^2 + y^2 - a^2}{2k} = x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} y - a \tag{4''}$$

b) Per $k = 0$ la (4') diventa l'equazione del circolo circoscritto allo stesso quadrato.

c) Per k variabile da $-\infty$ a zero le stesse equazioni rappresentano il quadrilatero curvilineo costituito da quattro archi di circolo uguali aventi

Digitized by Google

per corde i quattro lati del quadrato e descritti con i centri sulle bisettrici dei quattro quadranti del piano.

d) Per k variabile da zero ad $\frac{a}{2}$ le equazioni rappresentano un rosone costituito da quattro archi convessi in fuori, maggiori, di un quadrante ed aventi per corde i lati del quadrato, i vertici di questo essendo punti cuspidali.

e) Oltrepassato il valore $\frac{a}{2}$ al rosone esterno si aggiunge una pseudo astroide interna formata da altri quattro archi che si intersecano sugli assi formando altre quattro cuspidi.

Queste cuspidi si avvicinano ai vertici al crescere di k, raggiungendoli per $k = a$, nel quale momento la figura totale è formata da quattro circoli completi tangenti fra loro ed agli assi nei vertici del quadrato.

f) Crescendo k ulteriormente la pseudo astroide resta con le sue cuspidi fisse sui vertici del quadrato e i suoi quattro archi si vanno schiacciando, nel mentre gli archi del rosone esterno si allontanano verso l'infinito.

2. Passando ora alla sfera si consideri l'equazione

$$x + y + z = a \tag{5}$$

del piano ugualmente inclinato ai tre assi che taglia tutti alla distanza $+ a$ dall'origine. Si simmetrifica rispetto ai tre assi la parte di questo piano compresa nel primo ottante scrivendo

$$x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} y + z \operatorname{sgn} z = a \tag{6}$$

che è perciò l'equazione dell'ottaedro regolare con i vertici nei punti degli assi coordinati alla distanza a dall'origine.

La sfera con il centro nel punto $P(k, k, k)$ della perpendicolare condotta dall'origine sul piano della faccia (5) e passante per i vertici di essa ha per equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 2k(x + y + z - a). \tag{7}$$

Di questa sfera si simmetrifica, rispetto ai tre piani coordinati, la parte compresa nel primo ottante scrivendo

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 2k(x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} y + z \operatorname{sgn} z - a) \tag{8}$$

E anche qui si scorge che per $k = 0$ l'equazione si riduce a quella della sfera col centro nell'origine che passa per i vertici dell'ottaedro, mentre per $k = \pm \infty$ l'equazione, posta sotto la forma

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{2k} = x \operatorname{sgn} x + y \operatorname{sgn} y + z \operatorname{sgn} z - a \tag{9}$$

diviene identica a quella (6) dell'ottaedro.

Digitized by Google

Per i valori intermedi di k si hanno delle deformazioni analoghe a quelle viste nel caso del circolo e del quadrato, le equazioni (8), (9) rappresentando sempre la porzione di sfera compresa nel primo ottante insieme con le sette sue immagini ottenute per riflessione dei piani coordinati considerati agenti a guisa di specchi.

3. Quanto è stato detto del quadrato e del circolo si applica anche ad altri poligoni e ad altre curve. Così è facile vedere che l'equazione

$$(10) \qquad x^2b^2 + y^2a^2 - a^2b^2 - 2kab(bx \operatorname{sgn} x + ay \operatorname{sgn} y - ab) = 0$$

si riduce per $k = 0$ all'equazione

$$(11) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dell'ellisse di semi-assi a e b col centro nell'origine, mentre per $k = \pm\infty$ si riduce all'equazione

$$(12) \qquad \frac{x \operatorname{sgn} x}{a} + \frac{y \operatorname{sgn} y}{b} = 1$$

della losanga che ha per diagonali gli assi della precedente ellisse e per ogni altro valore di k rappresenta la figura costituita dagli archi, compresi nel primo quadrante e simmetrificati rispetto agli assi coordinati, dell'ellisse che ha il centro nel punto $P(ka, kb)$ e passa per i vertici $(0, +a)$, $(0, +b)$ della losanga.

4. In modo analogo a quello seguito nel paragrafo precedente si otterrebbe l'equazione dell'ottaedro a tre assi trasformabile in ellissoide. Ma importa notare che il metodo applicato alle trasformazioni delle linee e delle superfici è applicabile pure alla trasformazione dei corpi solidi ed anche con leggi diverse da quella già considerata. Così l'equazione [1]

$$(13) \qquad \left(\frac{x \operatorname{sgn} x}{a}\right)^{1+\frac{1}{1+k^2}} + \left(\frac{y \operatorname{sgn} y}{b}\right)^{1+\frac{1}{1+k^2}} + \left(\frac{z \operatorname{sgn} z}{c}\right)^{1+\frac{1}{1+k^2}} = (I^{-1}0)^{1+\frac{1}{1+k^2}}$$

si riduce all'equazione dell'ellissoide solido per $k = 0$ e all'equazione dell'ottaedro solido a tre assi per $k = \pm\infty$, l'esponente al quale sono elevati i diversi termini percorrendo due volte l'intervallo costituito da tutti i numeri reali da 1 a 2 mentre k passa da $-\infty$ a $+\infty$.

(1) Si noti che solo per simmetria è stato aggiunto l'esponente al termine del secondo membro, perchè è il simbolo $I^{-1}0$ rappresentando tutti i numeri reali dell'intervallo $0\,|^{-}_{+}\,1$, è uguale a tutte le sue potenze positive.

Digitized by Google

5. Si noti infine che è possibile ottenere non solo il passaggio da una forma lineare ad una forma quadratica, come negli esempi precedenti, ma anche una differenza di grado qualunque fra le due funzioni estreme. Così l'equazione

$$(14) \qquad (ax \operatorname{sgn} x)^{n+\frac{m}{1+k^2}} + (by \operatorname{sgn} y)^{n+\frac{m}{1+k^2}} + (cz \operatorname{sgn} z)^{n+\frac{m}{1+k^2}} = C$$

rappresenta, al variare di k una famiglia di superfici tali che, per $k = \pm\infty$, la superficie corrispondente è di grado n, mentre che è di grado $n + m$ quella che corrisponde a $k = 0$.

6. Problemi che conducono alla considerazione del passaggio in modo continuo da una forma ad un'altra si presentano in diverse ricerche fisiche, come ad esempio in quelle relative alle deformazioni termiche ed elastiche.

Così l'equazione

$$\mathrm{I}\frac{x \operatorname{sgn} x}{a(1+ht)} + \mathrm{I}\frac{y \operatorname{sgn} y}{a(1+kt)} = 0$$

che per $t = 0$ rappresenta l'area quadrata di lato $2a$ col centro nell'origine e i lati paralleli agli assi e per ogni altro valore di t, per il quale siano positivi entrambi i denominatori, l'area rettangolare di lati $a(1+ht)$, $a(1+kt)$, potrà esprimere le variazioni di forma e dimensione di una lamina tagliata in una sostanza cristallina i cui coefficienti di dilatazione nelle due direzioni parallele ai lati sono h e k e che alla temperatura di 0° C. ha la forma quadrata, il parametro variabile essendo qui la temperatura t.

Matematica. — *Sull'area di una superficie, sugli integrali multipli di Stieltjes e sugli integrali multipli delle funzioni di più variabili complesse.* Nota di P. Nalli e G. Andreoli, presentata [1] dal Corrisp. L. Tonelli.

Riassumeremo qui i risultati di un nostro lavoro di prossima pubblicazione.

Siano $x(u, v)$, $y(u, v)$ due funzioni continue di (u, v) in un dominio Ω chiuso da linee rettificabili. Diremo che *la coppia* (x, y) *conserva la rettificabilità* se ad una linea rettificabile in Ω fa corrispondere una linea rettificabile nel piano (x, y).

(1) Nella seduta del 19 giugno 1927.

Digitized by Google

Se C è una linea rettificabile, continua, chiusa, semplice e con un verso fissato, contenuta in Ω, non contenente nessuna curva della frontiera, rappresentata dalle equazioni

$$u = u(t) \quad , \quad v = v(t) \qquad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

chiameremo *incremento della coppia* (x, y) nel dominio, dotato di segno, chiuso dalla curva C col verso su di essa fissato, l'espressione [1]

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x\,dy - y\,dx),$$

cioè la somma dei due integrali di Stieltjes

$$-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}y\,dx \quad , \quad -\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}x\,dy,$$

dove

$$x = x(u(t), v(t)) \quad , \quad y = y(u(t), v(t)).$$

Tale incremento denoteremo con

$$\Delta_c(x, y).$$

La coppia (x, y) la diremo *continua superficialmente* se l'incremento suddetto tende a zero al tendere a zero dell'area, nel senso di Jordan, del dominio chiuso da C.

S'intende facilmente come si definisca la *derivata superficiale di una coppia in un punto.*

La coppia (x, y) la diremo *a variazione limitata in* Ω se, diviso questo in dominî parziali in numero finito, la somma

$$\sum |\Delta_c(x, y)|,$$

estesa a tutti i dominî in cui Ω è diviso, si mantiene limitata.

L'estremo superiore di tale somma lo chiameremo *variazione totale della coppia* (x, y) in Ω.

Una superficie continua S a punti semplici *totalmente aperta*, cioè rappresentata sotto forma parametrica dalle equazioni

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v)$$

(u, v) variando in un dominio Ω e le tre funzioni continue x, y, z facendo corrispondere terne distinte (x, y, z) a coppie (u, v) distinte, senza ecce-

(1) Nel caso di due variabili, tale processo si riattacca a quello di Peano (quest'ultimo come caso particolare, ove valgano ipotesi limitatrici). Cfr. anche due recenti Note del SEVERI in questi « Rendiconti » a. c.

Digitized by Google

zione per i punti (u, v) della frontiera, se le coppie $(x, y), (y, z), (z, x)$ conservano la rettificabilità, chiameremo *porzione* di S quella che corrisponde alla variazione di (u, v) in un dominio chiuso da una curva C continua, semplice, chiusa e rettificabile, non contenente nessuna parte della frontiera di Ω.

Gli incrementi

$$\Delta_c(x, y) \quad , \quad \Delta_c(y, z) \quad , \quad \Delta_c(z, x)$$

li chiameremo *componenti* della porzione di superficie sui tre piani coordinati.

Le componenti della somma di due porzioni sono le somme delle componenti delle porzioni.

La somma

$$\Delta_c^2(x, y) + \Delta_c^2(y, z) + \Delta_c^2(z, x)$$

è invariante rispetto a qualunque cambiamento di assi.

Divisa la superficie S in porzioni aventi a due a due al più una parte del contorno in comune, se la somma

$$\sigma = \sum \sqrt{\Delta_c^2(x, y) + \Delta_c^2(y, z) + \Delta_c^2(z, x)}$$

estesa alle varie porzioni si mantiene limitata, l'estremo superiore di σ si chiamerà *area* della superficie e questa si dirà *quadrabile*.

Condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie sia quadrabile è che le coppie $(x, y), (y, z), (z, x)$ *siano a variazione limitata in* Ω.

Se le coppie sono a variazione limitata e continue superficialmente, σ *tende all'area della superficie quando le aree dei domini chiuse dalle curve* C *tendono a zero.*

Se la coppia (x, y) è a variazione limitata in Ω ed $f(u, v)$ una funzione continua in Ω, se questo si divide in dominî parziali per mezzo di curve C, la somma

$$\sum f \Delta_c(x, y),$$

(dove f è uno qualunque dei valori presi da $f(u, v)$ nel dominio chiuso da C) somma estesa a tutti i dominî in cui si è diviso Ω, quando le aree di questi dominî tendono a zero, tende ad un limite.

Esso si chiamerà un *integrale di* Stieltjes *doppio* e sarà rappresentato col simbolo

$$\int_{\Omega} f \, dx \, dy .$$

Digitized by Google

È

$$\int_\Omega f\,dx\,dy = -\int_\Omega f\,dy\,dx\,.$$

Tutto ciò si estende facilmente al caso delle funzioni di tre o più variabili, e permette di dare una definizione di integrale multiplo per le funzioni di due o più variabili complesse.

Per il caso di due: sia

$$f(\zeta_1\,,\zeta_2) = \mathrm{U} + i\mathrm{V}$$

una funzione delle due variabili complesse

$$\zeta_1 = x_1 + iy_1\,,$$
$$\zeta_2 = x_2 + iy_2$$

e nello spazio a quattro dimensioni i cui punti hanno le coordinate (x_1, x_2, y_1, y_1) sia una superficie S quadrabile (la nozione di quadrabilità si estende facilmente ad una superficie immensa in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni).

La S sia rappresentata dalle equazioni

$$x_1 = \varphi_1(u\,,v) \quad , \quad x_2 = \varphi_2(u\,,v)\,,$$
$$y_1 = \psi_1(u\,,v) \quad , \quad y_2 = \psi_2(u\,,v)\,,$$

$(u\,,v)$ variando in un dominio Ω.

Per integrale doppio della funzione $f(\zeta_1\,,\zeta_2)$ esteso ad S, che rappresenteremo con

$$\int_S f(\zeta_1\,,\zeta_2)\,d\zeta_1\,d\zeta_2$$

(che interpreteremo come un integrale di Stieltjes doppio, analogamente a ciò che accade nel caso di una sola variabile), intenderemo il numero complesso la cui parte reale è

$$\int_\Omega \mathrm{U}\,dx_1\,dx_2 - \int_\Omega \mathrm{V}\,dy_1\,dx_2 - \int_\Omega \mathrm{V}\,dx_1\,dy_2 - \int_\Omega \mathrm{U}\,dy_1\,dy_2$$

ed il coefficiente dell'unità immaginaria

$$\int_\Omega \mathrm{V}\,dx_1\,dx_2 + \int_\Omega \mathrm{U}\,dy_1\,dx_2 + \int_\Omega \mathrm{U}\,dx_1\,dy_2 - \int_\Omega \mathrm{V}\,dy_1\,dy_2$$

dove gli otto integrali sono integrali di Stieltjes doppî.

Digitized by Google

Matematica. — *Sulle funzioni di Green relative a campi pluriconnessi.* Nota di G. KRALL, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. - In questa Nota si assegna un algoritmo volto a caratterizzare le funzioni di Green del primo ordine relative a campi piani con m buchi, m essendo un intero, finito ed arbitrario.

Scopo precipuo cui si mira è di assegnare così un criterio generale onde conseguire l'estensione a campi aventi connessione d'ordine qualunque di quel metodo che, fecondamente intuito da Green (di cui porta il nome), successivamente proseguito da Lord Kelvin, Poincaré, Hilbert, Hadamard, Lauricella, Boggio ed altri, si può dire domini, per la portata vastissima, per l'applicabilità diretta, tutto un ambito cospicuo di problemi, cosidetti *problemi al contorno*, di cui è nota l'importanza così in analisi come in fisica matematica [2].

§ 2. - POSIZIONE DEL PROBLEMA. — È dato un campo piano S_0, finito e semplicemente connesso, limitato da un contorno σ_0. Indicati con $P = P_1$, $P = P_2$, due punti generici di tale campo, sia $G_0 = G_0(P_1, P_2)$ una funzione - *funzione di Green del 1° ordine* - che soddisfi, in detto campo, alle seguenti condizioni: *a*) è *armonica* rispetto a P_1 e P_2, vale a dire è soluzione dell'equazione $\Delta G_0(P_1, P_2) = 0$, il *laplaciano* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ essendo indifferentemente formato con le coordinate di P_1 o P_2; *b*) è scindibile nella forma $G_0(P_1, P_2) = \log \frac{1}{r(P_1, P_2)} + g_0(P_1, P_2)$; essendo $r = r(P_1, P_2)$ la distanza tra P_1 e P_2, $g_0 = g_0(P_1, P_2)$ una funzione continua con le prime due derivate; *c*) è *nulla* su σ_0.

Va rilevato che una funzione così definita verifica necessariamente la condizione di simmetria $G_0(P_1, P_2) = G_0(P_2, P_1)$. Si tratta di proprietà ben nota qui richiamata esplicitamente perchè importante per gli sviluppi che seguono.

Ciò posto, immaginiamo praticato nel campo S_0 un foro di cui l'area s_1 sia limitata da un contorno σ_1 a *curvatura finita* in ogni punto. Allora, indicato con S_1 il campo $S_0 - s_1$, ci proponiamo di costruire una funzione che, oltre a soddisfare (in S_1) alle condizioni *a*), *b*), *c*); abbia sul con-

(1) Nella seduta del 15 maggio 1927.

(2) Cfr. in particolare R. COURANT, D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, I, pp. 273-291 (Springer, Berlin, 1924).

Digitized by Google

torno σ_1 *derivata normale nulla*, cioè, detta n_1 la normale a σ_1 spiccata *internamente* al campo S_1 da un punto P di σ_1, soddisfi alla condizione,

$$d) \qquad \frac{dG_1(P_2, P_1)}{dn_1} = 0, \qquad (\text{per } P = P_1 \text{ o } P_2).$$

§ 3. - EQUAZIONE FUNZIONALE DEL PROBLEMA. — Definite con $U = U(P)$, $V = V(P)$ due funzioni (continue con le prime due derivate) dei punti P d'un campo S di contorno s; stabilito per ora, e per quanto segue, come *interno* (al campo) il senso della normale, scriviamo la relazione fondamentale

$$(1) \qquad \int_S \left\{ U\Delta V - V\Delta U \right\} dS + \int_s \left\{ U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right\} ds = 0.$$

Posto in essa $U(P) = G_0(P_1, P)$, $V(P) = G_1(P_2, P)$, P_1 e P_2 essendo risguardabili come punti parametrici, *fissi* agli effetti dell'integrazione, dopo averli circoscritti con due cerchietti k_1, k_2 di raggio ρ_1, ρ_2 e specificato lo spazio S ed il contorno s con le relazioni; $S = S_1 - k_1 - k_2$, rispettivamente $s = \sigma_0 + \sigma_1 + 2\pi\rho_1 + 2\pi\rho_2$, passiamo al limite per $\rho_1 \rightarrow 0$, $\rho_2 \rightarrow 0$. Come necessaria conseguenza delle $a) \cdots d)$, risulta l'equazione funzionale

$$(2) \quad G_1(P_2, P_1) = G_0(P_1, P_2) + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1} \frac{dG_0(P_1, P)}{dn_1} G_1(P_2, P)\, d\sigma_1,$$

nella quale, ripetiamo, n_1 è la normale a σ_1 spiccata da P nell'interno di S_1.

Questa relazione, di tipo *integrale misto*, compendia tutte le condizioni del problema, in quanto, come accerteremo tra poco, è da sola sufficente a caratterizzarne la soluzione.

§ 4. - METODO RISOLUTIVO. — Fissiamo la nostra attenzione sopra la G_1 quale funzione del punto P_1, trattando *provvisoriamente* P_2 come punto parametrico, interno al campo e *fisso*. Indi supponiamo che, il nominato punto P_1 tenda ad un punto P_1' di σ_1. Ricordando allora definizione e proprietà dei *potenziali di doppio strato* [1], di cui per la $b)$ è manifesta la presenza nella (2), otteniamo, come aspetto limite della (2), l'equazione *integrale non omogenea* di Fredholm

$$(3) \qquad G_1(P_2, P_1') = 2\, G_0(P_1', P_2) + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1} K(P_1', P)\, G_1(P_2, P)\, d\sigma_1$$

nella quale il *nucleo* $K = K(P_1', P)$ è dato dalla relazione

$$(4) \qquad K(P_1', P) = \frac{\cos(\widehat{rn})}{r(P_1', P)} + \frac{dg_0(P_1', P)}{dn_1},$$

(1) Cfr. p. e. G. VIVANTI, *Equazioni integrali lineari*, Cap. IV (Milano, Hoepli, 1916).

Digitized by Google

$\widehat{rn}$ essendo l'angolo formato dalla congiungente i punti P e P_1' di σ_1 con la normale n_1 spiccata dal punto P.

Tale *nucleo* essendo *finito* per $P_1' = P$, e ciò, in conformità con la specificazione qualitativa di σ_1, possiamo senz'altro affermare che, se $\frac{1}{\pi}$ non è *autovalore*, ovvero, *non esistono* soluzioni differenti da zero dell'equazione omogenea

$$(5) \qquad G_1(P_2, P_1') = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1} K(P_1', P)\, G_1(P_2, P)\, d\sigma_1,$$

esisterà una ed una sola soluzione della (3). La qual soluzione, ricavata coi metodi classici, introdotta nella (2) (e precisamente al posto della funzione incognita sotto il segno integrale) porta, come riconosceremo eseguendo le necessarie verifiche, ad esaurire il problema proposto.

§ 5. - NON ESISTENZA DI SOLUZIONI DELLA (5). — Per P_2 *fisso* e *interno* ad S_1, P *mobile* su σ_1, consideriamo la funzione

$$(6) \quad L(P_1) = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1} \frac{d \log \frac{1}{r(P_1, P)}}{dn_1} G_1(P_2, P)\, d\sigma_1 + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1} \frac{dg_0(P_1, P)}{dn_1} G_1(P_2, P)\, d\sigma_1$$

dove la $G_1(P_2, P)$ ha il comportamento qualitativo specificato al § 2.

Le proprietà essenziali di una funzione così definita si compendiano nelle proposizioni; α) è *armonica* in S_0, β) è regolare *internamente* ed *esternamente* al foro, γ) è *nulla* su σ_0.

Fissando l'attenzione su un punto P_1 *interno al foro*, dunque, *esterno* ad S_1, facciamolo tendere ad un punto $P = P_1'$ dell'orlo σ_1. Con notazioni evidenti risulta,

$$(7) \quad \lim_{P_1 \to P_1'} L(P_1) = L_i(P_1') = -G_1(P_2, P_1') + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1} K(P_1', P)\, G_1(P_2, P)\, d\sigma_1,$$

ovvero, *se vale* la (5), $L_i(P_1') = 0$. Avremo quindi necessariamente per la α) e β), $L_i(P_1) = 0$ in tutto il foro, e $\left(\frac{dL}{dn_1}\right)_i = 0$ su σ_1, se la i indica che la derivata normale è presa internamente a s_1.

A sua volta, per un noto teorema di continuità sulle derivate normali del potenziale di doppio strato, nulla essendo, per le premesse fatte, da rilevare relativamente alla derivata della g_0, sarà $\left(\frac{dL}{dn_1}\right)_e = 0$, se l'indice e sta a significare che la derivata è presa esternamente al foro. Applicando allora il lemma di Gauss, sfruttando le condizioni α) β) e γ), si trae

Digitized by Google

$L(P_1) = 0$ in S_1 e quindi, per quanto precede, $L(P_1) = 0$ in tutto S_0. Ora, dovendosi avere, ove con $L_e(P_1')$ si chiami il valore assunto dalla $L(P_1)$ quando P_1 tende dall'*esterno* del foro ad un punto P_1' di σ_1,

$$L_e(P_1') - L_i(P_1') = 2\,G_1(P_2, P_1'),$$

concludiamo $G_1(P_2, P_1') = 0$, e quindi, l'esistenza d'una soluzione della (3).

§ 6. - Proposizione di unicità. — Procedendo per assurdo, supponiamo che, in un modo qualunque, si possano ricavare due soluzioni distinte G_1' e G_1'' della (2). Posto allora $\delta G_1 = G_1' - G_1''$ avremo senz'altro,

$$(8)\quad \delta G_1(P_2, P_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1} \frac{dG_0(P_1, P)}{dn_1}\,\delta G_1(P_2, P)\,d\sigma_1, \qquad (P_1 \text{ interno ad } S_1),$$

e

$$(9)\quad \delta G_1(P_2, P_1') = \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_1} K(P_1', P)\,\delta G_1(P_2, P)\,d\sigma_1, \qquad (P_1' \text{ su } \sigma_1).$$

Poichè, per quanto precede, la (9) non ammette soluzioni, salvo una banale, identicamente nulla, dalla (8) ricaviamo $\delta G_1(P_2, P_1) = 0$ in S_1 e quindi, $G_1' = G_1''$.

§ 7. - Ultime verifiche. — Assodata la *univoca esistenza* della soluzione della (2), resta a provare ch'essa, nella sua dipendenza dal punto P_1, effettivamente verifica alle imposte condizioni *a*), *b*), *c*) e *d*).

Sorpassando le prime tre, manifestamente soddisfatte in tutto S_1; soffermiamoci un momento sulla *d*). Supponiamo che sia, per P_2 *interno* ad S_1, $\frac{dG_1(P_2, P)}{dn_1} = 0$. Applicando la (1) coi soliti accorgimenti, poichè la derivata della G_1 su σ_1 (per P_2 interno al campo) *se pur non* è nulla è certamente integrabile per esser verificate le *a*), *b*) e *c*), avremo, unitamente alla (2), la relazione

$$G_1(P_2, P_1) - G_0(P_1, P_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1}\left\{\frac{dG_0(P_1, P)}{dn_1}\,G_1(P_2, P) - \frac{dG_1(P_2, P)}{dn_1}\,G_0(P_1, P)\right\}d\sigma_1.$$

Ora, per P_2 tendente ad un punto P_2' di σ_1, ritenendo, con anticipo sulla giustificazione alla fine del §, che, anche rimpetto a P_2 sieno verificabili le tre prime condizioni, avremo

$$G_1(P_2', P_1) - G_0(P_1, P_2') = -\frac{1}{2}\,G_0(P_1, P_2') + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1}\frac{dG_0(P_1, P)}{dn_1}\,G_1(P_2', P)\,d\sigma_1 -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1} K_1(P_2', P)\,G_0(P_1, P)\,d\sigma_1,$$

Digitized by Google

$K_1 = K_1(P_2', P)$ essendo un *nucleo finito* del tipo di K. D'altra parte, dall'equazione (2), facendo tendere P_2 a P_2' su σ_1, si ha, senza alcuna discontinuità,

$$G_1(P_2', P_1) - G_0(P_1, P_2') = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1} \frac{dG_0(P_1, P)}{dn_1} G_1(P_2', P)\, d\sigma_1,$$

e quindi, sottraendo una dall'altra le relazioni così ottenute,

$$G_0(P_1, P_2') + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma_1} K_1(P_2', P)\, G_0(P_1, P)\, d\sigma_1 = 0.$$

Poichè il *nucleo* K_1 di quest'equazione e il *nucleo* K definito dalla (4) hanno lo stesso comportamento qualitativo, ripetendo passo passo le considerazioni fatte a § 5, troviamo $G_0(P_1, P_2')$ = cost. su σ_1 *per* P_1 *interno a* S_1). Ma questa è una condizione assurda [1] per ragioni ovvie; quindi, la derivata normale della G_1 ricavata dalla (2) deve identicamente annullarsi sull'orlo del foro.

Che infine, la $G_1 = G_1(P_2, P_1)$ abbia il voluto comportamento (condizioni *a*) *b*) *c*) *d*);) anche nei riguardi del punto P_2 è chiaro.

Infatti, basta riprendere per verifica la relazione fondamentale (1) e ripetere materialmente le deduzioni precedenti partendo dalle posizioni

$$U(P) = G_0(P_2, P) = G_0(P, P_2) \quad , \quad V(P) = G_1(P, P_1).$$

§ 8. - Estensione a campi pluriconnessi. — Sia S_m un campo piano con m fori di cui i bordi $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$, supponiamo abbiano tutti *curvatura finita* in ogni punto.

Detto ancora σ_0 il contorno esterno di S_m, si tratta di costruire una funzione $G_m = G_m(P_1, P_2)$ - la prima funzione di Geen relativa al campo con m buchi - che, oltre a soddisfare, in detto campo, alle condizioni *a*), *b*) e *c*); abbia derivata normale nulla su $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$.

Supponendo nota la funzione $G_{m-1} = G_{m-1}(P_1, P_2)$ relativa al campo S_{m-1}, con $(m-1)$ buchi, con gli accorgimenti consueti, applichiamo la (2) alle funzioni $U(P) = G_{m-1}(P_1, P)$, $V(P) = G_m(P_2, P)$. Otteniamo senz'altro

$$(10) \quad G_m(P_2, P_1) = G_{m-1}(P_1, P_2) + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_m} \frac{dG_{m-1}(P_1, P)}{dn_m} G_m(P_2, P)\, d\sigma_m.$$

Quest'equazione funzionale integrale mista è del tipo identico della (2), identici ne sono i metodi risolutivi e le necessarie verifiche di univoca esistenza, ecc.

(1) È facile dimostrare che, per le *a*) *b*) *c*), la linea $G_0(P_1 P_2') =$ costante deve necessariamente *circondare* il *polo*, nel caso nostro, il punto P_1.

Digitized by Google

È pertanto chiaro che, procedendo per tappe, in modo ricorrente, cioè ponendo nella (10), $m = 1, 2, \cdots$; in linea teorica almeno, la G_m sarà effettivamente determinabile.

§ 9. - Rilevando infine la proprietà di *simmetria* compendiata nella relazione

$$G_m(P_1, P_2) = G_m(P_2, P_1)$$

cui, come l'originaria G_0, le funzioni testè introdotte, *necessariamente* soddisfano, e ciò, come ovvia conseguenza delle proprietà compendiate nelle *a*), *b*), *c*) e *d*); a titolo conclusivo noteremo ancora come, nei lineamenti generali i procedimenti qui assegnati sieno estendibili alle funzioni di Green d'ordine superiore ed anche, con adeguate generalizzazioni, a certe *matrici* di funzioni, costituenti i cosidetti *tensori di Green*, che, nell'ambito delle equazioni differenziali vettoriali hanno gli stessi uffici delle nominate funzioni.

Che tale estensione abbia poi qualche interesse è manifesto. Basti pensare che, in tale modo si è condotti a risolvere non solo *problemi al contorno* concernenti funzioni *poliarmoniche*, ma anche (ricorrendo alla funzione del 2° ordine) il problema statico e dinamico della piastra elastica sottile con m buchi, così, come per il tramite della G_1 si assolvono gli analoghi problemi per la membrana elastica, fissa al bordo esterno, con m fori ad orlo libero da ogni vincolo.

Matematica. — *Sui teoremi di confronto del Rayleigh.* Nota di F. Robles, presentata[1] dal Socio T. Levi-Civita.

Studiando nel trattato di Meccanica Razionale di T. Levi-Civita e U. Amaldi la teoria delle piccole oscillazioni di un sistema olonomo, nell'intorno di una sua configurazione di equilibrio stabile[2], mi sono proposto[3] di dare una dimostrazione puramente algebrica al teorema del Rayleigh, relativo alle alterazioni delle singole frequenze principali per effetto dell'aggiunta di un certo numero di vincoli [nessuno dei quali escluda la supposta configurazione di equilibrio stabile].

La dimostrazione a cui son pervenuto (n. 1) è completamente diversa da quella data dal Courant[4] in base a proprietà di massimo-minimo delle

(1) Nella seduta del 19 giugno 1927.

(2) Zanichelli, Bologna 1923-1927. V. in particolare vol. II, parte 1ª, pp. 459-464.

(3) Questa Nota è un estratto della tesi di laurea che sto preparando sotto la guida del prof. A. Signorini.

(4) V. R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*. Bd. I. pp. 16-18. Springer, Berlin 1924.

Digitized by Google

frequenze principali: essa direttamente si fonda sull'invarianza dell'equazione caratteristica di fronte ad una qualunque trasformazione lineare omogenea.

La stessa proprietà d'invarianza permette di dare una dimostrazione completa degli altri due teoremi del Rayleigh, relativi all'effetto che un aumento d'inerzia o di capacità (energia potenziale) ha sulle singole frequenze principali del sistema: stabilendo delle formole (n. 2) che sostanzialmente equivalgono a quelle, ben note [1], relative ad una variazione infinitesima dell'inerzia e della capacità (n. 4).

1. Siano

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ik}\,\alpha_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k \qquad -U = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ik}\,\beta_{ik}\,q_i\,q_k$$

le espressioni [2] dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del sistema vibrante, riferite ad un qualunque sistema di coordinate lagrangiane che abbia l'origine nella configurazione di equilibrio stabile.

Senza diminuire la generalita potremo limitarci a dimostrare il 1° teorema del Rayleigh nel caso dell'aggiunta di un solo vincolo: vincolo che nell'ordine di approssimazione corrispondente alla teoria delle piccole oscillazioni, si potrà ritenere rappresentato da

$$v_1\,q_1 + v_2\,q_2 + \cdots + v_n\,q_n = 0 \qquad (v_n \neq 0).$$

Alle primitive coordinate lagrangiane sostituiamo

$$q'_i = q_i\ (i = 1, 2, \cdots, n-1) \quad , \quad q'_n = v_1\,q_1 + \cdots + v_n\,q_n .$$

Con questo si avranno per T ed U delle espressioni del tipo

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ik}\,\alpha'_{ik}\,\dot{q}'_i\,\dot{q}'_k \qquad -U = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ik}\,\beta'_{ik}\,q'_i\,q'_k$$

e simultaneamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema vincolato saranno rappresentate da

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n-1}{}_{ik}\,\alpha'_{ik}\,\dot{q}'_i\,\dot{q}'_k \qquad -U' = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n-1}{}_{ik}\,\beta'_{ik}\,q'_i\,q'_k .$$

Cambiamo ancora di coordinate lasciando inalterata la q'_n, ma sostituendo alle $q'_1, \cdots, q'_{n-1}$ le coordinate normali $x_i\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ del sistema vincolato.

(1) V. Rayleigh, *The Theory of Sound*, Combridge, Univ. Press, 1894, vol. I, § 90: ed anche T. Levi-Civita ed U. Amaldi, Op. cit., vol. II, parte 1ª, p. 496.

(2) Forme quadratiche definite positive a coefficienti costanti.

Digitized by Google

Rappresentando con

$$\frac{\omega_i'}{2\pi}\,(i = 1, 2, \cdots, n-1 \quad ; \quad \omega_1' \leq \omega_2' \leq \cdots \leq \omega_{n-1}')$$

le $n-1$ frequenze principali di questo sistema, saranno

$$T' = \frac{1}{2}\sum_1^{n-1}{}_i\, \dot{x}_i^2 \qquad -U' = \frac{1}{2}\sum_1^{n-1}{}_i\, \omega_i'^2\, x_i^2$$

e simultaneamente T ed U assumeranno espressioni del tipo

$$T = T' + \frac{1}{2}a_{nn}\,\dot{q}_n'^2 + \dot{q}_n'\sum_1^{n-1}{}_i\, a_i\,\dot{x}_i \qquad -U = -U' + \frac{1}{2}b_{nn}\,q_n'^2 + q_n'\sum_1^{n-1}{}_i\, b_i x_i$$

Con queste notazioni, posto

$$f(\rho) = \begin{vmatrix} (\omega_1'^2 - \rho), 0, \cdots, 0, (b_{1n} - \rho a_{1n}) \\ 0, (\omega_2'^2 - \rho), 0, \cdots, 0, (b_{2n} - \rho a_{2n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, \cdots, 0, 0, (\omega_{n-1}'^2 - \rho), (b_{n-1,n} - \rho a_{n-1,n}) \\ (b_{1n} - \rho a_{1n}), (b_{2n} - \rho a_{2n}), \cdots, (b_{n-1,n} - \rho a_{n-1,n}), (b_{nn} - \rho a_{nn}) \end{vmatrix}$$

i quadrati delle n frequenze principali $\frac{\omega_i}{2\pi}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ del sistema primitivo resteranno definite dall'equazione algebrica di grado n $f(\omega^2) = 0$ (equazione caratteristica).

Per dimostrare il 1° teorema del Rayleigh basterà vedere che le n radici ω^2 di questa equazione sono separate dagli $n-1$ valori di ω'^2 (salvo il caso che l'aggiunta del vincolo lasci inalterata qualcuna delle ω).

All'uopo rappresentiamo con π_s $(s = 1, 2, \cdots, n-1)$ il prodotto degli $n-2$ valori presi da $\omega_r'^2 - \omega_s'^2$ quando r varia da 1 ad $n-1$ saltando il valore s. In conseguenza dell'ordine supposto per le ω' avremo

$$\pi_1 > 0, \pi_2 < 0, \cdots, (-1)^{s-1}\pi_s > 0, \cdots$$

D'altra parte

$$f(\omega_1'^2) = -(b_{1n} - \omega_1'^2 a_{1n})\,\pi_1 \quad , \quad f(\omega_2'^2) = -(b_{2n} - \omega_2'^2 a_{2n})\,\pi_2, \cdots$$
$$\cdots f(\omega_s'^2) = -(b_{sn} - \omega_s'^2)\,\pi_s, \cdots :$$

mentre $f(0) > 0$ [perchè coincide col discriminante di $-U$] e $(-1)^n f(\infty) > 0$ [perchè ha il segno del discriminante di T]. Si può dunque concludere

$$f(0) > 0, f(\omega_1'^2) \leq 0, f(\omega_2'^2) \geq 0, \cdots, (-1)^{n-1} f(\omega_{n-1}'^2) \geq 0, (-1)^n f(\infty) > 0$$

ciò che basta a dimostrare l'asserto.

Digitized by Google

2. Per dimostrare il 2° e 3° teorema del Rayleigh cominciamo col confrontare il sistema primitivo S con un qualunque altro sistema S′ che corrisponda alle stesse coordinate lagrangiane ma ad espressioni diverse T′ e — U′ dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

Allo scopo di passare con continuità da S a S′, consideriamo un sistema ausiliario S_λ che abbia anch'esso le stesse coordinate lagrangiane di S, ma corrisponda alla forza viva e alla energia potenziale

$$T_\lambda = T + \lambda (T' - T) \qquad - U_\lambda = - U + \lambda (U - U').$$

Evidentemente sarà $S = S_0$, $S' = S_1$ e ponendo

$$T' - T = \frac{1}{2} \sum_{ik}^{n} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \qquad U - U' = \sum_{ik}^{n} b_{ik} q_i q_k$$

si avrà

$$T_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{ik}^{n} (\alpha_{ik} + \lambda a_{ik}) \dot{q}_i \dot{q}_k \qquad - U_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{ik}^{n} (\beta_{ik} + \lambda b_{ik}) q_i q_k .$$

Sia λ^* un valore di λ arbitrariamente fissato tra 0 e 1 e sostituiamo alle primitive coordinate lagrangiane le coordinate normali x_i del sistema S_{λ^*}. Avremo allora per T, — U, ecc. delle espressioni del tipo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ik}^{n} \mu^*_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \qquad - U = \frac{1}{2} \sum_{ik}^{n} v^*_{ik} x_i x_k$$

$$T' - T = \frac{1}{2} \sum_{ik}^{n} m^*_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \qquad U - U' = \frac{1}{2} \sum_{ik}^{n} n^*_{ik} x_i x_k$$

e quindi

$$T_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{ik}^{n} (\mu^*_{ik} + \lambda m^*_{ik}) \dot{x}_i \dot{x}_k \qquad - U_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{ik}^{n} (v^*_{ik} + \lambda n^*_{ik}) x_i x_k .$$

Simultaneamente l'equazione che definisce le frequenze principali $\frac{\omega}{2\pi}$ di S_λ [dato il suo carattere invariantivo rispetto a qualunque trasformazione lineare di coordinate] si potrà scrivere - per ogni valore di λ tra 0 e 1 -

$$\| v^*_{ik} + \lambda n^*_{ik} - \omega^2 (\mu^*_{ik} + \lambda m^*_{ik}) \| = 0 . \tag{1}$$

Riferendosi ad una qualunque $\frac{\omega_r}{2\pi}$ delle n frequenze principali di S_λ e derivando la (1) rispetto a λ si ottiene

$$\sum_{ik}^{n} \left[(n^*_{ik} - \omega_r^2 m^*_{ik}) - \frac{d\omega_r^2}{d\lambda} (\mu^*_{ik} + \lambda m^*_{ik}) \right] C_{ik} = 0 \tag{2}$$

Digitized by Google

pur d'indicare con $C_{ik}\,(i, k = 1, 2, \cdots, n)$ i complementi algebrici dei singoli elementi del determinante che figura a 1° membro della (1) per $\omega = \omega_r$. Tali C_{ik} evidentemente sono funzioni di λ e per $\lambda = \lambda^*$ [dato che le x_i sono le coordinate normali di S_{λ^*}] tutti i C_{ik} diversi da C_{rr} si annullano. Corrispondentemente dalla (2) [facendo $\lambda = \lambda^*$] segue

$$a^*_{rr} - (\omega_r^2)_{\lambda=\lambda^*}\, m^*_{rr} - \left(\frac{d\omega_r^2}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda^*} (\mu^*_{rr} + \lambda^* m^*_{rr}) = 0$$

cioè

$$\left(\frac{d\omega_r^2}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda^*} = a^*_{rr} - (\omega_r^2)_{\lambda=\lambda^*}\, m^*_{rr} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n). \tag{3}$$

3. Ingrandire l'inerzia di S senza alterarne la capacità corrisponde a sostituire ad S un sistema S' pel quale $U' \equiv U$ mentre la forma quadratica $T' - T$ è definita positiva o almeno semi-definita positiva. In queste condizioni le (3) danno

$$\left(\frac{d\omega_r^2}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda^*} = -(\omega_r^2)_{\lambda=\lambda^*}\, m^*_{rr} \leq 0$$

e poichè λ^* è un qualunque valore di λ tra 0 e 1 permettono di affermare che

$$(\omega_r^2)_{\lambda=1} \leq (\omega_r^2)_{\lambda=0} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

ciò che corrisponde al 2° teorema del Rayleigh.

Analogamente se $T' \equiv T$ e la forma quadratica $U - U'$ è definita positiva, dalle (3) si trae

$$\left(\frac{d\omega_r^2}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda^*} = a^*_{rr} \geq 0 \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

e successivamente

$$(\omega_r^2)_1 \geq (\omega_r^2)_0 \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

ciò che corrisponde al 3° teorema del Rayleigh.

4. Rappresentando con $\delta\omega_r^2$ gli incrementi delle singole frequenze principali ω_r^2 nel passaggio da S_{λ^*} a $S_{\lambda^*+\varepsilon}$, tutte le volte che ε possa trattarsi come un infinitesimo di 1° ordine dalle (3) risulta

$$\delta\omega_r^2 = \varepsilon a^*_{rr} - (\omega_r^2)_{\lambda^*}\, \varepsilon m^*_{rr} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n).$$

Basta allora pensare $\lambda^* = 0$ per riconoscere che, se

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i\, \dot{x}_i^2 \qquad -U = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i\, \omega_i^2 x_i^2$$

Digitized by Google

e si passa da S ad un sistema d'inerzia e capacità poco diverse, dando a T e — U gl'incrementi infinitesimi

$$\delta T = \frac{1}{2}\sum_{ik}^{n} \delta\alpha_{ik}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_k \qquad -\delta U = \frac{1}{2}\sum_{ik}^{n} \delta\beta_{ik}\,x_i\,x_k$$

le frequenze principali di S subiscono incrementi definiti dalle

$$\delta\omega_r^2 = \delta\beta_{rr} - \omega_r^2\,\delta\alpha_{rr} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

[senza l'intervento dei $\delta\alpha_{ik}$, $\delta\beta_{ik}$ con indici diversi].

Meccanica. — *Sulla rotazione della Terra nella meccanica relativistica.* Nota di G. THOMSEN, presentata dal socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla dinamica dei corpi rigidi nella relatività generale.* Nota del dott. G. THOMSEN, presentata [1] dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Questa Nota fa seguito a due altre apparse recentemente in questi « Rendiconti » [2]. Qui noi vogliamo determinare il moto d'un corpo rigido nella meccanica relativistica, applicando il principio I del § 3 della prima delle nostre Note precedenti al caso speciale dei vincoli II del § 7 della seconda Nota, che definiscono la rigidità di un sistema di punti $\overline{x}_\nu$ nella relatività generale [3]. Si devono all'uopo introdurre nell'espressione I al posto delle $\overline{x}_\nu^i$ i sette argomenti, quattro x^i e tre ϑ^α che figurano nelle ξ_γ^α [« parametri lagrangiani e tempo »] mediante le equazioni II. Qui si impone qualche riflessione: le u_α^i sono definite in funzione di τ mediante le equazioni differenziali (12) della seconda delle Note precedenti, nelle quali figurano le incognite x^i. Come vanno trattate queste u_α^i? Forse come coordinate, da associarsi alle x^i e ai tre parametri di orientazione ϑ^α [$\alpha = 1, 2, 3$] contenute nelle ξ_γ^α? In tal caso, siccome le (12) non sono equazioni in termini finiti fra le u_α^i e le x^i, si tratterebbe di vincoli *anolonomi*, anzi addirittura iperanolomi, perchè in (12) intervengono le derivate seconde delle x^i. Lasciamo per un momento sospesa la questione, e notiamo in primo luogo, che, comunque vi si risponda in via teoretica, sta di fatto che in una approssimazione, largamente sufficiente per le applicazioni meccaniche

(1) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(2) Cfr. p. 778 e p. 866 di questo volume di « Rendiconti ».

Digitized by Google

e fisiche, che si possono ora avere in mente, le u_α^i addirittura scompaiono dall'espressione del principio variazionale I in cui si introducano i vincoli II. Sicchè praticamente tutto va come se si avessero solo vincoli olonomi colle coordinate lagrangiane x^i e ϑ^α, e risguardando le u_α^i come funzioni di τ da non sottoporsi a variazione. Ma questo stesso criterio si può ammettere come valido rigorosamente, lasciandosi guidare dall'osservazione che soltanto a questo patto, il Fermi nel suo lavoro citato sopra (1) nella seconda Nota precedente ha potuto rimuovere la discrepanza ivi accennata, mentre, se avesse fatto altre supposizioni circa le u_α^i, avrebbe trovato un risultato diverso (2).

2. Applichiamo oramai il principio variazionale I ai vincoli II trattando le u_α^i come grandezze puramente ausiliarie, che non si devono variare!

Conviene ripetere, che noi riguardiamo le coordinate ζ^α dei punti del solido, come lunghezze così piccole rispetto alle dimensioni del campo gravitazionale, che già i termini di terz'ordine nelle ζ^α si possono trascurare.

Con un calcolo che non possiamo qui sviluppare distesamente (3), rica-

(1) È appena necessario osservare, che per l'applicazione di quella formula al caso presente bisogna immaginarvi sostituite le x^i, g_{ik} e ds con $\bar{x}^i$, $\bar{g}_{ik}$ e $\bar{ds}$, introducendovi poi i vincoli II.

(2) Non è inutile osservare che, anche nella formulazione classica del principio di Hamilton, si può ricondursi alla forma $\delta \int L\, d\tau = 0$, dove L dipende da qualche elemento (involgente al pari delle u_α^i derivate delle coordinate) il quale non deve essere sottoposto a variazione. Basta pensare all'ordinaria espressione del principio di Hamilton [cfr., p. es., KIRCHHOFF, *Mechanik*, «Dritte Vorlesung», § 3; ovvero LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, II$_2$, p. 435]

$$\int (\delta T + U')\, dt = 0,$$

dove T designa al solito la forza viva del sistema materiale di cui si tratta, e

$$U' = \Sigma_i \boldsymbol{F}_i \times \delta P_i$$

essendo δP_i un qualsivoglia spostamento virtuale del generico punto P_i del sistema, e $\boldsymbol{F}_i$ la forza attiva ad esso applicata. Tale espressione vale notoriamente per forze attive $\boldsymbol{F}_i$ di natura qualsiasi (dipendenti eventualmente anche da velocità, accelerazioni, ecc.).

Se, denotando con O un punto fisso arbitrario, si introduce il *viriale* della sollecitazione attiva

$$\mathfrak{V} = \Sigma_i \boldsymbol{F}_i \times (P_i - O),$$

è chiaro che si può attribuire alla precedente formula variazionale l'aspetto

$$\delta \int (T + \mathfrak{V})\, dt = 0,$$

perchè soltanto si convenga di assumere $= 0$ la variazione delle $\boldsymbol{F}_i$. Ecco l'analogo delle u_α^i.

(3) Per semplificare il calcolo giova profittare di una proposizione di E. Fermi, (cfr. in particolare LEVI-CIVITA, *Sur l'écart géodésique*, «Math. Ann.», B. 97, 1928, pa-

Digitized by Google

viamo in definitiva, attraverso le (3) (5) (10) (12) (13) della seconda Nota precedente la condizione variazionale

$$\delta \int L \, d\tau = 0 , \tag{1}$$

dove

$$L = \frac{d\sigma}{d\tau}(M - S) - \frac{1}{2}\frac{d\tau}{d\sigma}[\delta_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}_{\gamma}\,\xi^{\beta}_{\varepsilon}\,A^{\gamma\varepsilon} - R_{iiks}\,\dot{x}^{i}\,\dot{x}^{k}\,u^{l}_{\alpha}\,u^{s}_{\beta}\,\xi^{\alpha}_{\gamma}\,\xi^{\beta}_{\varepsilon}\,A^{\gamma\varepsilon}] \tag{2}$$

essendo

$$M = \sum_{\nu} m_{\nu} \tag{3}$$

la massa totale del solido, e

$$S = g_{rt}\,u^{r}_{\alpha}\,\xi^{\alpha}_{\gamma}\,C^{\gamma}\left[\frac{d^{2}x^{t}}{d\sigma^{2}} + \Gamma^{t}_{rl}\frac{dx^{r}}{d\sigma}\frac{dx^{l}}{d\sigma}\right] \tag{4}$$

un termine, che scompare a causa delle $C^{\alpha} = 0$, se abbiamo cura di prendere il punto P nel baricentro del solido, con che $x^{i}(\tau)$ rappresenta specificamente la linea oraria del baricentro. Riterremo d'ora innanzi fatta tale scelta. Tornando alla (2), va aggiunto che i punti sovrapposti significano derivazione rispetto a τ; R_{iiks} è il tensore del Riemann, preso per i punti di C, e quindi, al pari del tensore fondamentale g_{ik} funzione delle $x^{i}(\tau)$.

A prescindere dalle $u^{i}_{\alpha}(\tau)$ e dalle costanti M, C^{α}, $A^{\gamma\varepsilon}$ la L si presenta pertanto come una espressione, che involge le sole funzioni incognite $x^{i}(\tau)$, $\xi^{\alpha}_{\gamma}(\tau)$ e le loro derivate prime.

3. Essendo da trattarsi nel principio variazionale (1) le quattro x^{i} come indipendenti, si deducono intanto da (1) le corrispondenti equazioni di Euler e Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{i}} - \frac{\partial L}{\partial x^{i}} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{5}$$

A differenza delle x^{i} le nuove grandezze ξ^{α}_{γ} non sono, come noi sappiamo, indipendenti fra di loro, ma legate dalle sei equazioni

$$\delta_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}_{\gamma}\,\xi^{\beta} - \delta_{\gamma\varepsilon} = 0 \,(1). \tag{6}$$

Secondo le regole del calcolo delle variazioni si potrebbe procedere nella maniera seguente:

gine 291-320), a norma della quale è sempre possibile introdurre coordinate aventi carattere geodetico in tutti i punti di una linea oraria, ossia tali che si annullano le Γ^{i}_{kl} in tutti i punti di C. Usando tali coordinate, si trova subito una espressione di L, che scritta sotto forma invariantiva fornisce appunto la (2).

(1) Cfr. questi «Rendiconti», p. 867, formula (3).

Digitized by Google

Introdotto un sistema di « moltiplicatori lagrangiani » $\mu^{\gamma\varepsilon}$, soddisfacenti alle condizioni di simmetria

$$\mu^{\gamma\varepsilon} = \mu^{\varepsilon\gamma},$$

(e quindi complessivamente in numero di sei) si pone

$$F = L + \mu^{\gamma\varepsilon}\left(\delta_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}_{\gamma}\,\xi^{\beta}_{\varepsilon} - \delta_{\gamma\varepsilon}\right), \tag{7}$$

dopo di che devono valere per le ξ^{α}_{γ}, legate dalle equazioni in termini finiti (6), a norma di (1), le equazioni differenziali

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}^{\alpha}_{\gamma}} - \frac{\partial F}{\partial \xi^{\alpha}_{\gamma_2}} = 0, \tag{8}$$

contenenti nel secondo termine del loro primo membro le grandezze ausiliarie $\mu^{\gamma\varepsilon}$. Eliminando dalle nove equazioni (8) le sei grandezze $\mu^{\gamma\varepsilon}$ si ricava [come è facile verificare a causa della forma dell'equazione (7)] il sistema

$$\sum_{\varepsilon,\gamma=1}^{3}(\delta_{\alpha\varepsilon}\,\xi^{\gamma}_{\beta} - \delta_{\beta\varepsilon}\,\xi^{\gamma}_{\alpha})\left[\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^{\gamma}_{\varepsilon}} - \frac{\partial L}{\partial \xi^{\gamma}_{\varepsilon}}\right] = 0 \tag{9}$$

che va associato alle (6). Ma sarà in generale più conveniente immaginare fin da principio espresse le ξ^{α}_{γ} mediante le tre grandezze indipendenti già spesso menzionate $\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3$ [per esempio, mediante i tre angoli euleriani] ricavando poi da (1) altre tre equazioni lagrangiane che insieme alle (5) definiscono completamente il moto.

4. Anzi è anche più vantaggioso e più espressivo per l'interpretazione cinematica di far apparire (come nelle classiche equazioni di Eulero, che reggono la rotazione degli ordinari corpi rigidi) le componenti della velocità angolare del nostro solido (cioè del triedro solidale $P, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ rispetto al triedro ausiliario $P, \eta^1, \eta^2, \eta^3$). All'uopo si parte al solito dalle relazioni (di ortogonalità) (6), e si nota che, derivando rispetto a τ si trae

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^{\alpha}_{\gamma}}{d\tau}\,\xi^{\beta}_{\varepsilon} + \delta_{\alpha\beta}\,\xi^{\alpha}_{\gamma}\frac{d\xi^{\beta}_{\varepsilon}}{d\tau} = 0. \tag{10}$$

Se noi poniamo

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^{\alpha}_{\gamma}}{d\tau}\,\xi^{\beta}_{\varepsilon} = q_{\gamma\varepsilon} \tag{11}$$

valgono per le $q_{\gamma\varepsilon}$ le condizioni di emisimmetria

$$q_{\gamma\varepsilon} + q_{\varepsilon\gamma} = 0 \tag{12}$$

a causa delle (10).

Digitized by Google

Le (11) si possono risolvere rispetto alle $\frac{d\xi^\alpha_\gamma}{d\tau}$, e la effettiva risoluzione avuto riguardo alle (6), porge

$$\dot{\xi}^\alpha_\gamma = \sum_{\lambda,\varepsilon=1}^{3} \delta_{\lambda\varepsilon}\, \xi^\alpha_\lambda\, q_{\gamma\varepsilon} \tag{13}$$

in modo che le nove $\dot{\xi}^\alpha_\gamma$ si esprimono mediante le tre $q_{\gamma\varepsilon}$ e le ξ^α_λ (formule del Poisson).

Ponendo inoltre

$$\begin{cases} q_{23} = -q_{32} = \omega_1 \\ q_{31} = -q_{13} = \omega_2 \\ q_{12} = -q_{21} = \omega_3 \end{cases} \tag{14}$$

le tre ω_α corrispondono precisamente alle tre componenti del vettore velocità angolare, che si suole introdurre nella cinematica classica del corpo rigido [1]. Si deve solamente tener conto del fatto, che questa « velocità angolare » in generale è presa rapporto al parametro τ invece che al tempo assoluto t.

Naturalmente noi possiamo in particolare far coincidere il nostro parametro ausiliare τ, lungo la linea oraria C, anche col tempo newtoniano t: ciò faremo effettivamente nei calcoli approssimativi, cui è duopo ricorrere nelle applicazioni astronomiche (sulle quali mi riservo di tornare in altra occasione). Qui importa piuttosto fissare la circostanza che le grandezze $q_{\gamma\varepsilon}$ o ω_α dipendono a norma della (11) dalla scelta del parametro τ. Contrassegneremo con $\sim$ le q, ovvero ω, che si riferiscono a τ coincidente col tempo assoluto t, ponendo

$$\begin{cases} \tilde{q}_{\gamma\varepsilon} = \delta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha_\gamma}{dt}\, \xi^\beta_\varepsilon \\ \tilde{\omega}_1 = \tilde{q}_{23} \quad ; \quad \tilde{\omega}_2 = \cdots, \end{cases} \tag{15}$$

mentre se si assume per τ il tempo proprio σ di C, useremo il simbolo $\frown$, scrivendo

$$\begin{cases} \widehat{q}_{\gamma\varepsilon} = \delta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha_\gamma}{d\sigma}\, \xi^\beta_\varepsilon \\ \widehat{\omega}_1 = \widehat{q}_{23} \cdots \end{cases} \tag{16}$$

(1) Cfr. p. es. LEVI-CIVITA-AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, cap. III, p. 23.

Digitized by Google

Con ciò le ω_α per un parametro generale τ sono ovviamente legate alle $\tilde{\omega}_\alpha, \hat{\omega}_\alpha$ da

$$\omega_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha \frac{dt}{d\tau} = \hat{\omega}_\alpha \frac{d\sigma}{d\tau}. \tag{17}$$

Ritornando alla nostra equazione (1) noi vogliamo sostituire nella funzione L le $\dot{\xi}^\alpha_\gamma$ le loro espressioni fornite dalle (13) e (14) in termini delle ω_α e delle ξ^α_γ stesse. Indicando la nuova funzione, che noi così ricaviamo colla lettera $\mathfrak{L}$, avremo

$$L(\dot{\xi}^\alpha_\gamma, \xi^\alpha_\gamma) = \mathfrak{L}(\omega_\alpha, \xi^\alpha_\gamma).$$

Per semplificare le formule, quanto è possibile, giova ulteriormente far coincidere gli assi solidali cogli assi principali di inerzia del solido, in modo che valgano le equazioni (8) della seconda delle Note precedenti; si ricorderà che, in quanto P si è collocato nel baricentro, l'espressione S della (2) è zero. In questa ipotesi abbiamo anche:

$$\delta_{\alpha\beta}\, \dot{\xi}^\alpha_\gamma\, \dot{\xi}^\beta_\varepsilon\, A^{\gamma\varepsilon} = \sum_\alpha B_\alpha\, \omega^2_\alpha \tag{18}$$

e $\mathfrak{L}$ assume la forma:

$$\mathfrak{L} = M \frac{d\sigma}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{d\tau}{d\sigma} \left\{ \sum_\alpha B_\alpha\, \omega^2_\alpha - R_{liks}\, \dot{x}^i \dot{x}^k\, u^l_\alpha\, u^s_\beta\, \xi^\alpha_\gamma\, \xi^\beta_\varepsilon\, A^{\gamma\varepsilon} \right\}. \tag{19}$$

Esprimendo le ξ^α_γ per le ω_α e le ξ^α_γ nelle (9) [o forse, più elegantemente, introducendo nella (1) l'espressione (19) di $\mathfrak{L}$ e facendo variare — nel debito modo (1) — le componenti ω_α della velocità angolare] si ricavano le equazioni del moto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{d\tau} \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega_1} = \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega_2} \omega_3 - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \omega_3} \omega_2 + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi^\alpha_2} \xi^\alpha_3 - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi^\alpha_3} \xi^\alpha_2 \right) \\ \text{e due analoghe, provenienti da questa per sostituzione ciclica} \\ \qquad \text{degli indici } 1, 2, 3. \end{array} \right. \tag{20}$$

Le (5) e (20) costituiscono il sistema completo di equazioni differenziali del moto, che risulta dal principio variazionale

$$\delta \int \mathfrak{L}\, d\tau = 0 \tag{21}$$

colla $\mathfrak{L}$ definita da (19).

5. Rendiamo esplicite le (5) e (20) avendo riguardo alla espressione di $\mathfrak{L}$ e facendo anche coincidere alla fine il parametro τ col tempo proprio σ. Si ha:

(1) Cfr. KIRCHHOFF, *Mechanik Sechste Vorlesung*.

Digitized by Google

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
&D_x^{2k}\Big\{ g_{ik}\Big(2M + \sum B_\alpha \widehat{\omega}_\alpha^2\Big) + u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}\,(R_{liks} + R_{lkis} - \\
&\quad - R_{lkts}\,\overset{\circ}{x}^t \overset{\circ}{x}_i - R_{liks}\,\overset{\circ}{x}^t \overset{\circ}{x}_i - R_{lpqs}\,\overset{\circ}{x}^p \overset{\circ}{x}^q g_{ik} - 2R_{tips}\,\overset{\circ}{x}^p \overset{\circ}{x}^t g_{lk}\Big)\Big\} \\
&+ u_\alpha^l u_\beta^s \xi_\gamma^\alpha \xi_\varepsilon^\beta A^{\gamma\varepsilon}\Big\{ R_{lkis,t} + R_{liks,t} - R_{lkps,t}\,\overset{\circ}{x}^p \overset{\circ}{x}_i \Big\}\overset{\circ}{x}^k \overset{\circ}{x}^t \\
&+ 2\,u_\alpha^l u_\beta^s \big[(R_{lpks} + R_{spkl})\,\overset{\circ}{x}^p \overset{\circ}{x}^k \overset{\circ}{x}_i - (R_{liks} + R_{lkis})\,\overset{\circ}{x}^k\big]\big\}\widehat{\omega}_1 \xi_2^\alpha \xi_3^\beta\,(B_2 - B_3) + \\
&\quad + \widehat{\omega}_2 \xi_3^\alpha \xi_1^\beta (B_3 - B_1) + \widehat{\omega}_3 \xi_1^\alpha \xi_1^\beta (B_1 - B_2)\Big\} = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&B_1 \frac{d\widehat{\omega}_1}{d\sigma} = (B_2 - B_3)\,\widehat{\omega}_2 \widehat{\omega}_3 \\
&\qquad + \frac{1}{2}(R_{liks} + R_{sikl})\,\overset{\circ}{x}^i \overset{\circ}{x}^k u_\alpha^l u_\beta^s \xi_2^\alpha \xi_3^\beta (B_2 - B_3)
\end{aligned}
\right.
$$

e due equazioni analoghe che si deducono da questa per sostituzione ciclica degli indici 1, 2, 3 [1].

Nelle equazioni (22) e (23) si è posto per brevità

$$
(24)\qquad \overset{\circ}{x}^i = \frac{dx^i}{d\sigma}\quad ;\quad D_x^{2i} = \frac{d^2x^i}{d\sigma^2} + \Gamma_{ke}^i \frac{dx^i}{d\sigma}\frac{dx^k}{d\sigma}\,.
$$

Le $R_{lkis,t}$ sono le derivate covarianti del tensore di Riemann R_{lkis}.

6. Da (22) segue, che nel caso generale la linea oraria C non è rigorosamente geodetica [2], perchè non vale l'equazione $D^2 x^k = 0$; inoltre, siccome in (22) appariscono le $\widetilde{\omega}_\alpha$, ξ_γ^α e in (23) le $x^i\,\overset{\circ}{x}^i$, non si può determinare separatamente, mediante la (22), il moto del baricentro e mediante la (23) la rotazione intorno al baricentro.

Questo accade però nel caso di uno spazio vuoto, ovvero della relatività ristretta, come è senz'altro manifesto dalla (22), in quanto allora si annulla il tensore R, mentre

$$
2M + \sum B_\alpha \widehat{\omega}_\alpha^2 > 0\,;
$$

sicchè rimane effettivamente $D^2 x^k = 0$.

(1) Anche per il calcolo, che fornisce le equazioni del moto (22) (23) giova ripetere l'osservazione della nota (4) di p. .

(2) Naturalmente la linea oraria C è poco differente da una geodetica. Poichè le $A^{\alpha\gamma}$, B_α sono grandezze, che dipendono da termini di secondo ordine nelle piccole distanze ζ^α, delle quali abbiamo ammesso trascurabili i termini del terzo ordine rispetto alle dimensioni del campo gravitazionale. Dunque in (20) il primo termine $2M g_{ik} D^2 x^k$ prepondera su tutti gli altri come l'unico, che non contiene le $A^{\alpha\gamma}$, B_α.

Digitized by Google

Le (23) si presentano in questo caso formalmente identiche alle classiche equazioni di Euler pel moto spontaneo di un solido intorno ad un suo punto:

$$(29) \qquad B_1 \frac{d\widehat{\omega_1}}{d\sigma} = (B_2 - B_3)\,\widehat{\omega_2}\,\widehat{\omega_3} \text{ ecc.}$$

Ma si deve notare, che dappertutto invece del tempo assoluto t figura il tempo proprio σ.

7. Nel caso particolare d'un solido di struttura sferica, che si muove in un campo gravitazionale qualsiasi, a causa delle

$$\begin{cases} B_1 = B_2 = B_3 = B\,, \\ A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} B \cdot \delta_{\alpha\beta}\,, \end{cases}$$

segue dalle (23)

$$\frac{d\widehat{\omega_\alpha}}{d\sigma} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

ossia

$$\widehat{\omega_\alpha} = \text{cost.}$$

Ma dalle (17) si ha che $\widehat{\omega_\alpha}$ è proporzionale a $\widetilde{\omega}_\alpha$, dove $\widetilde{\omega}_\alpha$ è il vettore ordinario della velocità angolare. Quindi anche la direzione di questa è costante, sicchè si può dire che l'asse della rotazione istantanea del solido scorre lungo la linea oraria C del baricentro con movimento puramente traslatorio nel senso del § 5 della mia seconda Nota (p. 869). La velocità angolare ha anche grandezza costante, se riferita al tempo proprio di C, non così (in generale) se riferita ad altro parametro temporale. La linea oraria C, pur nel caso d'un corpo di struttura sferica, non è in generale una geodetica.

Digitized by Google

Idrodinamica. — *Sui moti di un liquido perfetto che avvengono per strati piani.* Nota di A. MASOTTI, presentata [1] dal Corrispondente U. CISOTTI.

1. Nei moti dei quali mi occupo esiste una famiglia di piani paralleli ciascuno dei quali è permanentemente superficie di flusso; particolari moti di questo tipo sono quelli detti *piani*, nei quali le caratteristiche del movimento sono le stesse, in ogni istante, in tutti i punti di una retta qualunque normale ai piani predetti [2], e quelli *piani superficialmente potenziali*, caratterizzati dall'esistenza di un potenziale cinetico superficiale su ogni piano, recentemente studiati dal prof. Finzi e da me [3]; la sola condizione imposta ai moti che ora studio è quella che si riferisce alla stratificazione ed è espressa analiticamente dalla relazione

$$v_z = 0 , \tag{1}$$

se il sistema cartesiano di riferimento $O(x, y, z)$ che si assume ha l'asse z normale ai piani di moto, e v_z indica la componente della velocità $\boldsymbol{v}$ secondo la direzione z.

2. All'equazione di continuità, che diviene

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 , \tag{2}$$

si soddisfa nel modo più generale ponendo

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} , \tag{3}$$

dove ψ indica una funzione, *a priori* arbitraria, di x, y, z e del tempo t; chiamerò ancora la ψ, così introdotta con un procedimento identico a quello di Lagrange [4], *funzione di corrente*, perchè, su ogni strato e ad ogni istante, l'equazione $\psi =$ costante rappresenta le linee di flusso.

(1) Nella seduta del 19 giugno 1927.

(2) V. ad es. CISOTTI, *Idromeccanica piana* (Milano, Tamburini, 1921-22), pp. 57 sgg.

(3) MASOTTI, *Moti rotazionali a strati piani di un liquido perfetto* [« Rend. del R. Ist. Lombardo », vol. LIX (1926), fasc. I-V]; FINZI, *Moti liquidi spaziali vorticosi dipendenti da moti potenziali piani* [« Rend. del Circ. Matem. di Palermo », t. LI (1927), pp. 1-24 (il caso particolare dei moti a strati piani è esaminato a p. 12)].

(4) LAGRANGE, *Mémoire sur la Théorie du Mouvement des Fluides* [« Nouv. Mém. de l'Ac. Roy. de Berlin », 1781, oppure « Oeuvres », t. IV (Paris, Gauthier-Villars, 1869), p. 720].

Digitized by Google

Le equazioni (3) si possono riunire in una sola, più generale; se (s, n) è una coppia di direzioni tra loro normali, situata in un generico piano ζ, e congruente alla coppia (x, y), si ha

$$v_s = \frac{\partial \psi}{\partial n} . \tag{4}$$

Il valore V della velocità si può dedurre, in funzione di ψ, dalle (3), oppure dalla (4), prendendo in questa per direzione s quella della velocità:

$$V = \Delta_1^* \psi = \frac{\partial \psi}{\partial n}, \tag{5}$$

l'asterisco designando, qui come più avanti, l'operatore superficiale sul generico piano ζ = costante, ed essendo n la normale alla linea di flusso, orientata positivamente a sinistra di chi percorre la linea stessa nel senso del flusso.

La portata, relativa allo strato di spessore $d\zeta$, scorrente all'istante t tra le due linee di flusso $\psi = \psi_s$ (a sinistra) e $\psi = \psi_d$ (a destra) vale [1]

$$dQ = (\psi_s - \psi_d)\, d\zeta , \tag{6}$$

e se la si riferisce all'unità di spessore si ottiene

$$q = \frac{dQ}{d\zeta} = \psi_s - \psi_d , \tag{7}$$

che estende una proprietà ben nota, dovuta a Rankine [2], della funzione di corrente dei moti piani.

3. Le componenti del vortice sono in questo caso

$$R_x = -\frac{\partial v_y}{\partial \zeta} \quad , \quad R_y = \frac{\partial v_x}{\partial \zeta} \quad , \quad R_\zeta = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{8}$$

ossia, per le (3),

$$R_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \quad , \quad R_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \quad , \quad R_\zeta = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\Delta_2^* \psi ; \tag{9}$$

(1) Sia l una linea del piano ζ che termina, in S e D, sulle linee ψ_s e ψ_d, e v_n la componente di $\boldsymbol{v}$ ad essa normale (la normale positiva essendo alla destra di chi percorre l andando da D a S); sarà

$$dQ = \int_l v_n\, dl\, d\zeta = d\zeta \int_l v_n\, dl ;$$

basta ora ricordare la (4) per dedurre la (6).

(2) RANKINE, *On plane water-lines in two dimensions* [« Phil. Trans. of the Royal Soc. of London », vol. 154 (1864), pp. 369-391].

Digitized by Google

le prime due esprimono che *il componente del vortice tangente al piano* z *ha un potenziale superficiale*, e sono riassunte dall'equazione vettoriale

$$\mathbf{R}_t = \text{grad}^* \frac{\partial \Psi}{\partial z} . \tag{10}$$

4. Il moto si mantenga sotto l'azione di forze unitarie di massa derivanti dal potenziale U; sia p la pressione; le equazioni dinamiche di Eulero, ammessa unitaria la densità del liquido, sono:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial (U - p)}{\partial x} \quad , \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial (U - p)}{\partial y} \quad , \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial (U - p)}{\partial z} . \tag{11}$$

Nel caso presente, eseguendo nelle prime due la indicata derivazione sostanziale rispetto al tempo [1] e tenendo conto della (1), le precedenti divengono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (U - p)}{\partial x} = \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial V^2}{\partial x} - v_y R_z , \\ \dfrac{\partial (U - p)}{\partial y} = \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial V^2}{\partial y} + v_x R_z , \\ \dfrac{\partial (U - p)}{\partial z} = 0 . \end{cases} \tag{12}$$

La terza dice che $U - p$ è indipendente da z; segue l'eguaglianza dell'accelerazione di tutte le particelle che in un dato istante si trovano su una normale agli strati. Le condizioni di integrabilità sono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y} \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial V^2}{\partial x} - v_y R_z \right) = \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial V^2}{\partial y} + v_x R_z \right) , \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial V^2}{\partial x} - v_y R_z \right) = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial t} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial V^2}{\partial y} + v_x R_z \right) = 0 ; \end{cases} \tag{13}$$

la prima di esse si può facilmente trasformare nella seguente

$$\frac{\partial R_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial R_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial R_z}{\partial y} = \frac{dR_z}{dt} = 0 , \tag{14}$$

(1) Si ricordi che

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} .$$

Digitized by Google

e allora esprime *l'invariabilità della componente normale del vortice di ogni particella*; introducendo la ψ le condizioni (13) divengono

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta_2^* \psi}{\partial t} = \dfrac{\partial(\psi, \Delta_2^* \psi)}{\partial(x, y)}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial (\Delta_1^* \psi)^2}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\Delta_2^* \psi\right) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial (\Delta_1^* \psi)^2}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\Delta_2^* \psi\right) = 0. \end{cases}$$

Ad ogni funzione $\psi(x, y, z, t)$ soluzione delle (15) corrisponde un moto a strati piani, definito dalle (3), che si può mantenere sotto l'azione di forze di massa conservative; la distribuzione delle pressioni è data dall'equazione

$$(16)\qquad U - p = \int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial (\Delta_1^* \psi)^2}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\Delta_2^* \psi\right] dx - \int_{y_0}^{y}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial (\Delta_1^* \psi)^2}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\Delta_2^* \psi\right]_{x = x_0} dy + \text{cost.},$$

dedotta per integrazione dalle (12) (nella quale x_0 e y_0 designano costanti arbitrarie).

5. Se la ψ è indipendente dal tempo t il moto è permanente. La prima delle equazioni (15) esprime allora che la dipendenza di $\Delta_2^* \psi$ da x e y si effettua pel tramite di ψ ed è quindi lecito scrivere

$$(17)\qquad \Delta_2^* \psi = F(\psi, z),$$

con F funzione arbitraria; la (17) è l'estensione di una nota relazione di Lagrange relativa ai moti piani [1]. Posto

$$(18)\qquad G(\psi, z) = \int F(\psi, z)\, d\psi$$

la seconda e la terza delle (15) divengono

$$(19)\qquad \frac{\partial^2\left(\frac{V^2}{2} - G\right)}{\partial z\, \partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2\left(\frac{V^2}{2} - G\right)}{\partial z\, \partial y} = 0,$$

(1) LAGRANGE, loc. cit.

Digitized by Google

e da essa si deduce

$$\frac{V^2}{2} - G = \alpha(z) + \beta(x, y), \tag{20}$$

con α e β funzioni arbitrarie; risulta

$$U - p = \beta(x, y) \tag{21}$$

l'equazione della pressione [1].

L'estensione di qualcuno dei risultati acquisiti ai moti di un liquido perfetto che si effettuano per strati qualunque farà oggetto di una Nota che vedrà quanto prima la luce nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ».

(1) Se esiste un potenziale superficiale $\varphi(x, y, z, t)$ valgono, insieme alle (3), le seguenti

$$(a) \qquad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

essendo $R_z = \Delta_2^* \psi = 0$ la prima delle (15) è identicamente soddisfatta, e le altre due divengono

$$(b) \qquad \frac{\partial^2 \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{\partial z \, \partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)}{\partial z \, \partial y} = 0,$$

da cui

$$(c) \qquad \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha(z, t) + \beta(x, y, t),$$

con α e β funzioni arbitrarie. L'equazione della pressione è

$$(d) \qquad U - p = \beta(x, y, t).$$

Questo completa quanto dissi al n. 5 della mia Nota più sopra citata.

Se il moto è permanente e superficialmente potenziale sia dalla (20) che dalla (c) si deduce

$$\frac{V^2}{2} = \alpha(z) + \beta(x, y);$$

cfr. FINZI, loc. cit., p. 12, form. (13).

Digitized by Google

Fisica. — *Sull'interpretazione idrodinamica della teoria quantistica.* Nota di A. CARRELLI, presentata [1] dal Socio M. CANTONE.

Recentemente il Madelung [2] ha mostrato che il problema ondulatorio di un unico elettrone (Einelektronproblem) può essere interpretato come problema idrodinamico; ed infatti l'equazione caratteristica di esso, data da Schrödinger, può trasformarsi in un'equazione idrodinamica e precisamente in quella di una corrente non vorticosa sotto l'azione di forze conservative. Il procedimento di Madelung è in breve il seguente: l'equazione caratteristica dell'ampiezza ψ_0 dell'onda ψ di Schrödinger è

$$\Delta_2 \psi_0 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - U)\psi_0 = 0 \tag{1}$$

dove m e h sono le solite costanti (m massa elettronica, h costante di Planck), W è l'energia totale del sistema e U l'energia potenziale funzione del punto dove trovasi l'elettrone. Qualora s'introduca anche il fattore dipendente dal tempo, e cioè si tenga presente che

$$\psi = \psi_0 e^{i 2\pi \frac{W}{h} t}$$

la (1) può scriversi, eliminando il termine in W

$$\Delta_2 \psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U\psi - i \frac{4\pi m}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

Ponendo ora

$$\psi = \alpha e^{i\beta}$$

in cui β è una funzione lineare del tempo, dalla (2), separando la parte reale dalla parte immaginaria, può ricavarsi la seguente coppia di relazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha^2}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha^2 \operatorname{grad} \varphi) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2 + \dfrac{U}{m} - \dfrac{\Delta_2 \alpha}{\alpha} \dfrac{h}{8\pi^2 m^2} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

In queste

$$\varphi = -\frac{\beta h}{2\pi m};$$

(1) Nella seduta del 19 giugno 1927.

(2) MADELUNG, « Zeit. für Phys. », Bd. 40, p. 309, 1926.

Digitized by Google

e si vede subito che la prima delle (3) è l'equazione di continuità di un fluido di velocità data da

$$u = \text{grad}\,\varphi$$

e di densità

$$\rho = \alpha^2$$

e la seconda è l'equazione di moto dello stesso fluido nel caso che questo moto sia irrotazionale e si compia sotto l'azione di forze conservative.

Noi noteremo che partendo dall'equazione fondamentale della teoria ondulatoria si giunge ad un moto non vorticoso quando il problema trattato è il più semplice possibile.

Vediamo allora che cosa può ricavarsi dall'equazione delle onde di Schrödinger quando il problema rimane a tre gradi di libertà e l'unica limitazione che s'impone è che sia a variabili separabili. Faremo vedere che si giunge alle equazioni caratteristiche di un fluido dotato anche di moto vorticoso.

1. Trattiamo cioè il problema seguente: si abbia un sistema meccanico a tre gradi di libertà, ma a variabili separabili. L'espressione generica della energia cinetica è, com'è noto, la seguente:

$$2\,T = \sum_{kl} m_{kl}\,\dot{q}_k\,\dot{q}_l$$

e il moto del sistema può rappresentarsi come moto di un punto nello spazio delle q, e l'elemento lineare di questo spazio può considerarsi dato da

$$ds^2 = \sum_{kl} m_{kl}\,dq^k\,dq^l \tag{4}$$

in cui le m_{kl} individuano la metrica di tale spazio. Volendo esprimere la energia cinetica in funzione dei momenti p coniugati alle q si ha allora al posto del tensore covariante m_{kl} il tensore controvariante m^{kl}, in cui le m^{kl} sono funzioni delle coordinate e cioè si ha per l'energia cinetica l'espressione

$$2\,T = \sum_{kl} m^{kl}\,p_k\,p_l\,.$$

L'equazione delle onde connessa con tal sistema meccanico è in tal caso la seguente

$$\text{div grad}\,\psi_0 + \frac{8\,\pi^2}{h^2}(W - U)\,\psi_0 = 0$$

e se si esprimano le operazioni di div e grad relative allo spazio curvo individuato dalla (4) si ha l'equazione

$$m^{\frac{1}{2}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial q^l}\left\{ m^{-\frac{1}{2}}\,m^{kl}\,\frac{\partial \psi_0}{\partial q^k}\right\} + \frac{8\,\pi^2}{h^2}(W - U)\,\psi_0 = 0 \tag{5}$$ [1]

(1) BRILLONIN, « Jour. de Phys. », dicemb., 1926, p. 353.

Digitized by Google

dove m è il determinante delle m^{kl}. Ma noi abbiamo supposto che il problema sia a variabili separabili quindi l'espressione dell'energia potenziale è del tipo

$$U = \sum_k U_k (q^k)$$

e l'energia cinetica

$$2\,T = \sum_k m^k (q^k)\, p_k^2$$

essendo

$$m^{kl} = 0 \qquad \text{se} \qquad k \neq l$$

e $m^{kk} = m^k$ solo funzione di q^k.

In tali condizioni la (5) diventa

$$(6) \qquad m^{\frac{1}{2}} \sum_k \frac{\partial}{\partial q^k} \left\{ m^{-\frac{1}{2}}\, m^k \frac{\partial \psi}{\partial q^k} \right\} - \frac{8\pi^2}{h^2} U\psi - i\,\frac{4\pi}{h}\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

avendo fatto comparire come nella (2) la ψ in luogo della ψ_0.

Partiamo ora dalla (6) e procediamo alla stessa maniera di Madelung, poniamo cioè

$$\psi = \alpha e^{i\beta};$$

e sostituendo nella (6), effettuando le operazioni indicate, ed eguagliando quindi a zero sia la parte reale che la parte immaginaria si ottengono le due relazioni

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[m^{-\frac{1}{2}}\alpha^2\right] + \displaystyle\sum_k \left\{ m^{-\frac{1}{2}}\alpha^2 \frac{\partial}{\partial q^k}\left[-\frac{h m^k}{2\pi}\frac{\partial \beta}{\partial q^k}\right] - \frac{h m^k}{2\pi}\frac{\partial \beta}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial q^k}\left[m^{-\frac{1}{2}}\alpha^2\right]\right\} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{h\beta}{2\pi}\right] - U + \displaystyle\sum_k \left\{ \frac{h^2}{8\pi^2 m^{-\frac{1}{2}}\alpha}\frac{\partial}{\partial q^k}\left[m^{-\frac{1}{2}} m^k \frac{\partial \alpha}{\partial q^k}\right] - \frac{h^2}{8\pi^2} m^k \left(\frac{\partial \beta}{\partial q^k}\right)^2\right\} = 0. \end{cases}$$

Deriviamo ora la seconda delle (7) rispetto a q^l. Si ottiene allora

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{h}{2\pi}\frac{\partial \beta}{\partial q^l}\right] - \frac{\partial U}{\partial q^l} + \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial q^l}\left[\frac{h^2}{8\pi^2 m^{-\frac{1}{2}}\alpha}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(m^{-\frac{1}{2}} m^k \frac{\partial \alpha}{\partial q^k}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{h^2}{8\pi^2}\frac{\partial m^k}{\partial q^l}\left(\frac{\partial \beta}{\partial q^k}\right)^2 - \frac{h^2}{4\pi^2} m^k \left(\frac{\partial \beta}{\partial q^k}\right)\frac{\partial \beta}{\partial q^k \partial q^l}\right\} = 0$$

ma poichè $m^k = m^k (q^k)$

$$(9) \qquad \sum_k \frac{h^2}{8\pi^2}\frac{\partial m^k}{\partial q^l}\left(\frac{\partial \beta}{\partial q^k}\right)^2 = \frac{h^2}{8\pi^2}\frac{\partial m^l}{\partial q^l}\left(\frac{\partial \beta}{\partial q^l}\right)^2.$$

Digitized by Google

Ora l'espressione

$$\sum_k \left(-\frac{hm^k}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^k}\right)\frac{\partial}{\partial q^k}\left(-\frac{hm^l}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right)=\frac{h^2}{4\pi^2}\sum_k m^k\frac{\partial\beta}{\partial q^k}\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\frac{\partial m^l}{\partial q^k}+\sum_k\frac{h^2m^km^l}{4\pi^2}\frac{\partial\beta}{\partial q^k}\frac{\partial^2\beta}{\partial q^k\partial q^l}$$

si riduce per la stessa ragione alla seguente espressione

$$\frac{h^2m^l}{4\pi^2}\frac{\partial m^l}{\partial q^l}\left(\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right)^2+\sum_k\frac{h^2m^km^l}{4\pi^2}\frac{\partial\beta}{\partial q^k}\frac{\partial^2\beta}{\partial q^k\partial q^l}. \tag{10}$$

Ora moltiplichiamo la (8) per m^l tenendo conto della (9), si ottiene

$$m^l\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{h}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right]-\frac{\partial U}{\partial q^l}m^l+\sum_k m^l\frac{\partial}{\partial q^l}\left[\frac{h^2}{8\pi^2m^{-\frac{1}{2}}\alpha}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(m^{-\frac{1}{2}}m^k\frac{\partial\alpha}{\partial q^k}\right)\right]-$$

$$-\frac{h^2m^l}{8\pi^2}\frac{\partial m^l}{\partial q^l}\left(\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right)^2-\sum_k\frac{h^2m^km^l}{4\pi^2}\frac{\partial\beta}{\partial q^k}\frac{\partial^2\beta}{\partial q^k\partial q^l}=0$$

e tenendo conto della (10) e che m^l non dipende dal tempo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{hm^l}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right]-\frac{\partial U}{\partial q^l}m^l+\sum_k m^l\frac{\partial}{\partial q^l}\left[\frac{h^2}{8\pi^2m^{-\frac{1}{2}}\alpha}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(m^{-\frac{1}{2}}m^k\frac{\partial\alpha}{\partial q^k}\right)\right]+$$

$$+\frac{h^2m^l}{8\pi^2}\frac{\partial m^l}{\partial q^l}\left(\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right)^2+-\sum_k\left(\frac{hm^k}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^k}\right)\frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{hm^l}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right)=0,$$

e tenendo conto che

$$V=\sum_k U_k(q^k)$$

si ha la relazione

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{hm^l}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right]+\frac{\partial U_l}{\partial q^l}m^l+\sum_k\left[-\frac{hm^k}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^k}\right]\frac{\partial}{\partial q^k}\left[-\frac{hm^l}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right]+ \tag{11}$$

$$-\sum_k m^l\frac{\partial}{\partial q^l}\left[\frac{h^2}{8\pi^2m^{-\frac{1}{2}}\alpha}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(m^{-\frac{1}{2}}m^k\frac{\partial\alpha}{\partial q^k}\right)\right]-\frac{h^2m^l}{8\pi^2}\frac{\partial m^l}{\partial q^l}\left(\frac{\partial\beta}{\partial q^l}\right)^2=0.$$

Consideriamo allora un fluido di densità

$$\rho=m^{-\frac{1}{2}}\alpha^2$$

e dotato di velocità u le cui componenti siano

$$u_k=-\frac{hm^k}{2\pi}\frac{\partial\beta}{\partial q^k}.$$

Digitized by Google

In tali ipotesi l prima delle (7) diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial q^k}[\rho u_k] = 0 \tag{12'}$$

e la seconda considerata sotto la forma (11) diventa

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_l}{\partial q^k} = \sum_k m^l \frac{\partial}{\partial q^l}\left[\frac{h^2}{8\pi^2 m^{-\frac{1}{2}}\alpha}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(m^{-\frac{1}{2}} m^k \frac{\partial \alpha}{\partial q^k}\right)\right] +$$

$$+ \frac{h^2 m^l}{8\pi^2}\frac{\partial m^l}{\partial q^l}\left(\frac{\partial \beta}{\partial q^l}\right)^2 - m^l \frac{\partial U_l}{\partial q^l}.$$

Ma

$$m^l \frac{\partial U_l}{\partial q^l} = \frac{\partial}{\partial q^l}[m^l U_l] - U_l \frac{\partial m^l}{\partial q^l} = \frac{\partial}{\partial q^l}\left(\sum_k m^k U_k\right) - U_l \frac{\partial m^l}{\partial q^l} = \frac{\partial \pi}{\partial q^l} - U_l \frac{\partial m^l}{\partial q^l}$$

avendo posto $\Pi = \sum_k m^k U_k$ quindi può porsi

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial u_l}{\partial q^k} = F_l - \frac{\partial \Pi}{\partial q^l} \tag{12''}$$

con

$$F_l = \sum_k m^l \frac{\partial}{\partial q^l}\left[\frac{h^2}{8\pi^2 m^{-\frac{1}{2}}\alpha}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(m^{-\frac{1}{2}} m^k \frac{\partial \alpha}{\partial q^k}\right)\right] + \frac{h^2 m^l}{8\pi^2}\frac{\partial m^l}{\partial q^l}\left(\frac{\partial \beta}{\partial q^l}\right)^2 + U_l \frac{\partial m^l}{\partial q^l};$$

e cioè il sistema (12') e (12'') che si deduce dalla (6) rappresenta l'equazione di continuità (12') e l'equazione di moto (12'') generica di un fluido soggetto al sistema di forze F_l. L'esistenza di vortici in tale fluido è connessa con la presenza delle quantità m^k nelle espressioni di u_k, e quindi è necessario e basta che le varie m^k siano almeno delle costanti non uguali fra di loro. Nel caso adunque del sistema a tre variabili separabili il problema fondamentale quantistico può avere un'interpretazione idrodinamica e la propagazione delle onde ψ equivale al moto generico di un fluido.

2. È interessante ora ricercare nel caso trattato da Madelung (Eine elektronproblem) equivalente al moto non vorticoso del fluido, che cosa rappresenti la velocità $u = \text{grad}\,\varphi$ del fluido. Per fare ciò consideriamo l'equazione di Schrödinger; questa può considerarsi come derivante dalla equazione

$$\Delta_2 \psi + \frac{4\pi^2 \nu^2}{V^2}\psi = 0 \tag{13}$$

nella quale ν è la frequenza dell'onda che si considera e V è la velocità di propagazione delle perturbazioni ψ. L'onda ψ, secondo le idee introdotte

Digitized by Google

da De Broglie e Schrödinger è associata al moto di un mobile la cui energia cinetica e il cui impulso sono dati dalle relazioni

$$W = h\nu \qquad g = \frac{h\nu}{V}$$

e sostituendo nella (13) a $\frac{\nu^2}{V^2}\,\frac{g^2}{h^2}$ si ritorna alla (1). Ora la soluzione della (1) è stata posta, seguendo il Madelung sotto la forma

$$\psi = \alpha e^{i\beta};$$

considerando invece la sola parte reale che poi è quella che c'interessa e scrivendola sotto la forma data da De Broglie [1] si ha

$$\psi = A(x, y, z)\cos 2\pi\nu\{t - \Psi(x, y, z)\}.$$

Le superfici

$$\Psi = \text{cost.}$$

sono le superfici equifasi e la velocità con la quale si propaga la fase delle perturbazioni è data da

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2}}$$

e nell'ipotesi che le derivate seconde di Ψ siano molto piccole rispetto alla somma dei quadrati delle derivate prime si ottiene facilmente che

$$V = \mathfrak{V}.$$

Ora posto ciò poichè

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{2\pi\nu[t - \Psi(x, y, z)]\right\} = -2\pi\nu\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

si ottiene

$$u^2 = (\text{grad}\,\varphi)^2 = \frac{h^2}{4\pi^2 m^2}\left\{\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2\right\} = \frac{h^2\nu^2}{m^2}\left\{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right\}$$

oppure

$$u^2 = \frac{h^2\nu^2}{V^2 m^2} = \frac{g^2}{m^2}$$

e cioè u è uguale in valore assoluto alla velocitè con la quale si muove la particella materiale. Si conclude quindi dicendo che nell'interpretazione idrodinamica la velocità del fluido è uguale in valore assoluto alla velocità della particella materiale, il cui moto è connesso alla propagazione dell'onda ψ, e la densità $\rho = \alpha^2$ è data dal quadrato della funzione $A(x, y, z)$ e cioè uguale a $\Psi\overline{\Psi}$ di Schrödinger che è, com'è noto, proporzionale alla densità elettrica.

(1) De Broglie, « Jour. de Phys. », nov. 1926, p. 321.

Digitized by Google

Chimica. — *Porpore d'oro* [1]. Nota di G. R. Levi e C. Fontana presentata [2] dal Socio G. Bruni.

In precedenti lavori [3] uno di noi ha avuto occasione di applicare il metodo di Scherrer [4] allo studio di sostanze solide finamente divise, metodo che è stato recentemente ripreso in esame da v. Laue [5].

Per le porpore d'oro, esaminando i preparati peptizzati con idrato potassico, Zsigmondy [6] aveva stabilito da tempo che, nelle migliori condizioni di dispersione, i granuli d'oro di una porpora hanno un lato di circa 30 Å e ciò mediante misure ultramicroscopiche. Nello stesso lavoro Zsigmondy, avendo preparato per sintesi la porpora d'oro, ne aveva dimostrata la sua reale struttura.

Si deve però ricordare che quasi cinquanta anni prima (1850) Francesco Selmi nei suoi *Principî di chimica minerale* aveva nettamente espresso l'opinione che l'oro nella porpora fosse contenuto appunto come metallo e all'obbiezione che il prodotto è solubile in ammoniaca, così rispondeva: « Potrebbesi a ciò rispondere che non ripugna vedere una materia attenuatissima diffondersi in un liquido con le apparenze di una soluzione, perchè si hanno molti esempi di fatti somiglianti nelle pseudo-soluzioni. Probabilmente l'oro e l'acido stannico compongono una vera lacca dell'indole delle alluminose ». Selmi riuscì infatti a preparare una lacca di allumina e oro.

Riguardo alle misure di Zsigmondy, va notato che il valore di 30 Å rappresenta un minimo e che egli aveva peptizzato granuli ben più grossi fino cioè a 2700 Å. È noto che all'ultramicroscopio il granulo viene studiato in tutto il suo complesso e quindi le misure stesse, oltre presentare un largo intervallo, non rispecchiano i valori dei singoli componenti.

È per questa ragione che abbiamo ritenuto interessante applicare il metodo di Scherrer alle porpore d'oro; data che la struttura quasi completamente amorfa degli acidi stannici, i risultati si possono senz'altro attribuire all'oro come tale.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) « Rendiconti Lincei », III (6), pp. 90, 215 (1926) e V (6), p. 174 (1927); « Gazz. Chim. », *56*, 424 (1926).

(4) Appendice al *Kolloidchemie* di Zsigmondy, IV ed., (1922).

(5) « Z. f. Kristall. », *64* (1926), 115.

(6) « Lieb. Ann. », *301* (1898), 375.

Digitized by Google

Recentemente Huber [1], esaminando una porpora d'oro ha potuto dimostrare röngtenograficamente l'esistenza dell'oro allo stato elementare nella porpora stessa, riscontrando tutte le principali righe dell'oro e due delle più forti del SnO_2. Questo Autore non ha fatto nessuna misura della grossezza dei granuli, nè ci dà la composizione del prodotto esaminato.

Noi abbiamo preparato secondo Zsigmondy una porpora nel seguente modo: si mescolano 300 cmc. di una soluzione di cloruro d'oro contenente 3 gr. di oro per litro con 250 cmc. di una soluzione di $SnCl_2$, contenente 3 gr. di stagno per litro e un debole eccesso di acido cloridrico; si aggiungono 4 litri di acqua, agitando energicamente. Si lascia il liquido in riposo per tre giorni; si separa così un precipitato rosso-violetto, mentre il liquido soprastante è limpido e incoloro, esente da oro e da stagno; si lava il precipitato per decantazione e si filtra.

Di questo preparato un campione è stato asciugato all'aria, l'altro in stufa a 80°. All'analisi i due campioni diedero i seguenti risultati:

Prodotto seccato all'aria	Prodotto seccato a 80°
Au 28.03 %	Au 29.70 %
SnO_2 62.04 %	SnO_2 63.89 %
H_2O 10.10 %	H_2O 6.82 %

Entrambi furono esaminati col metodo di Scherrer e nelle seguenti tabelle sono dati senz'altro i valori sperimentali ed i risultati relativi, rimandando per il metodo e per il calcolo ai nostri lavori precedentemente ricordati.

TABELLA I.

Porpora secondo Zsigmondy seccata all'aria - Cu *ant.*

$h_1\ h_2\ h_3$	022	113	222	133	024	224
$\frac{\theta}{2}$	33° 18′	38° 45′	41° 48′	56° 15′	58° 36′	68° 30′
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.1962	1.2820	1.3423	1.8018	1.9134	2.7885
B in m/m	2.37	2.76	2.17	3.36	3.55	3.95

Dalla tabella I si calcola per A (lato del granulo supposto cubico) il valore di 38.3 Å.

(1) « Phys. Zeitschr. », 25 (1924), 45.

Digitized by Google

TABELLA II.

Porpora secondo Zsigmondy seccata a 80° - Cu *ant.*

$h_1\ h_2\ h_3$	022	113	222	133	024	224
$\frac{\theta}{2}$	33° 6′	39° 51′	42° 0′	57° 30′	58° 39′	68° 42′
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.1948	1.3030	1.3455	1.8600	1.9220	2.7548
B in m/m	2.70	3.12	3.36	4.15	4.55	4.84

Dalla tabella II si calcola $\Lambda = 34.2$ Å.

Questi valori di Λ, data l'approssimazione di queste misure, si possono ritenere praticamente eguali. Il grado di dispersione dell'oro in queste porpore è perciò notevolmente superiore ai preparati di oro colloidale comunemente messi in commercio dalle fabbriche (vedi, per esempio, le misure di Scherrer, loc. cit., sull'oro colloidale di Heyden), che dànno valori intorno ai 100 Å di lato, ma inferiore al preparato d'oro a grande dispersione ottenuto da Zsigmondy (cioè 18 Å di lato).

Ci siamo domandati a questo punto se l'aumento di colloide protettore (acido stannico) potesse aumentare il grado di dispersione dell'oro. Perciò abbiamo esaminato una porpora Kahlbaum di recente acquistata dalla casa, che all'analisi ci diede i seguenti risultati:

Porpora Kahlbaum:

Au 14.80 %
SnO_2 78.07 %
H_2O 7.15 %

Inoltre abbiamo preparato una porpora seguendo il metodo di Zsigmondy, ma aggiungendo al momento della precipitazione, prima del $SnCl_2$, una quantità di stagno doppia di quella contenuta nel sale stannoso, sotto forma di $SnCl_4$. Il prodotto di idrolisi venne trascinato nella formazione della porpora che, all'analisi, ci diede i seguenti risultati:

Porpora preparata in presenza dell'acido stannico:

Au 6.99 %
SnO_2 83.50 %
H_2O 10.09 %

I risultati röngtenografici di questi due prodotti sono riportati nelle tabelle III e IV.

Digitized by Google

TABELLA III.

Porpora Kahlbaum - Cu *ant.*

h_1 h_2 h_3	022	113	222	133	024
$\frac{\theta}{2}$	33° 12′	38° 45′	41° 36′	56° 12′	58° 30′
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.1947	1.2820	1.3369	1.7986	1.9120
B in m/m	2.63	3.11	3.37	3.70	3.80

Da questa tabella si calcola per Λ un valore di 34.6 Å.

TABELLA IV.

Porpora preparata secondo Zsigmondy in presenza di Sn^{++++} - Cu *ant.*

h_1 h_2 h_3	022	113	133	024	224
$\frac{\theta}{2}$	33° 18′	39° 36′	56° 15′	58° 39′	68° 42′
$\frac{1}{\cos \theta/2}$	1.1962	1.2987	1.8018	1.9231	2.7548
B in m/m	2.77	2.87	3.47	3.76	4.55

Dalla tabella IV si calcola per Λ il valore di 38.0 Å.

Da questi risultati si deduce che nessun aumento di dispersione è dato dall'aumento del supporto. Questi valori si accordano bene con i valori limiti inferiori che Zsigmondy ha osservato peptizzando la porpora di Cassio con KOH; dunque si deve ritenere che nel processo di peptizzazione l'oro non subisce un incremento di suddivisione rispetto al preparato solido; ciò è in ottimo accordo con i risultati ottenuti da uno di noi (loc. cit.) nella peptizzazione dell'ossido di torio meta.

Abbiamo inoltre esaminato alcune porpore della casa de Haën al 5, 10, 15 % di oro che ci hanno dato dei fotogrammi quasi completamente privi di linee. Il tenore in oro dei preparati è stato da noi controllato e trovato per tutti in buon accordo con le affermazioni della casa. Questo risultato è abbastanza curioso.

Recentemente Forster [1] ha dimostrato che i geli di acido stannico, invecchiando di alcuni anni, assumono una struttura marcatamente cristallina, rivelando le linee dell'ossido stannico, con reticolo allargato.

(1) « Phis. Zeitschr. », *28*, 151 (1927).

Digitized by Google

I risultati negativi ottenuti con le porpore di de Haën potrebbero forse attribuirsi alla occlusione di granuli d'oro nell'acido stannico, che, in quantità maggiore con marcata struttura cristallina, può dare un effetto Röngten suo proprio che fortemente indebolisca quello dell'oro. D'altronde questi preparati non mostrano marcatamente le interferenze dell'SnO_2 e ciò sarebbe in contraddizione con l'ipotesi sopra fatta.

La spiegazione più plausibile è che le porpore di de Haën siano mal preparate e non contengano l'oro allo stato metallico, tanto più che i risultati negativi vennero anche da preparati contenenti oro in quantità doppia di quella che è in preparati da noi fatti in laboratorio, preparati che pure rivelarono tutte le linee importanti dell'oro.

A maggior conferma di questa ipotesi sta il fatto che noi abbiamo preparato una porpora d'oro con grande eccesso di acido stannico e precisamente contenente circa il 2 % di oro, di colore rosso mattone intenso e che ha rivelato tre tra le più importanti interferenze dell'oro e, precisamente, corrispondenti alle facce: (022), (113), (222). Anche il fatto che i preparati di de Haën ad alto tenore d'oro non hanno la intensa colorazione dei nostri e del prodotto Kahlbaum fa pensare ad una irrazionale loro preparazione.

I massimi di interferenza delle porpore di nostra preparazione e della casa Kahlbaum sopraesaminate si sono rivelati tutti d'accordo con i valori di Huber.

Riassumendo, viene dimostrato che i granuli d'oro nella porpora di Cassio supposti cubici, hanno 36 Å (valore medio) di lato, e che l'aumento di acido stannico non porta influenza sul grado di suddivisione dell'oro.

Chimica. — *Il sistema* $Fe(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$ a 25°. Nota di G. Malquori [1], presentata [2] dal Socio N. Parravano.

Facendo seguito ad una Nota precedente [3] riguardante il sistema $Fe(NO_3)_3 - Al(NO_3)_3 - H_2O$ a 25°, espongo i risultati ottenuti studiando il sistema $Fe(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$, sempre alla temperatura di 25°.

Ciò è di particolare interesse per stabilire la purezza del sale di potassio che si ottiene con il processo Blanc al nitrato.

Anche per questo sistema le misure di solubilità sono state eseguite con i metodi usuali.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) Questi «Rendiconti», 1927, serie VI, fasc. 10, p. 801

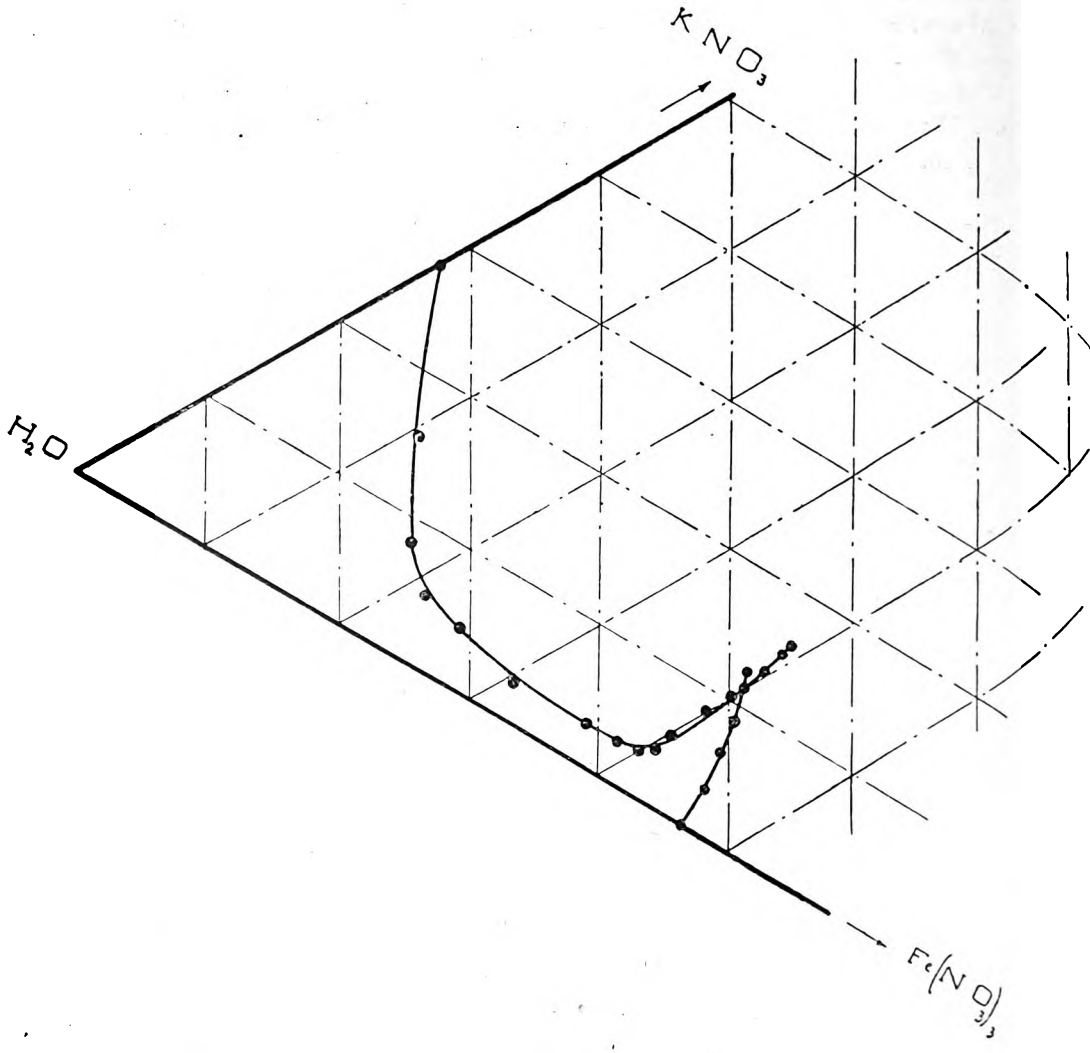
Digitized by Google

Le composizioni delle soluzioni sature, e le fasi solide in equilibrio con esse, sono indicate nella tabella e riportate nell'accluso diagramma triangolare.

I corpi di fondo sono stati analizzati dopo essere stati rapidamente spremuti alla pompa in crogiuolo di alundum, e fortemente pressati fra carta da filtro.

N. d'ordine	Composizione della soluzione			Fasi solide
	KNO_3 %	$Fe(NO_3)_3$ %	H_2O %	
1	27.31	—	72.69	KNO_3
2	15.91	11.29	72.80	»
3	8.97	18.17	72.86	»
4	5.19	21.27	73.51	»
5	4.71	25.03	70.26	»
6	3.65	30.85	65.50	»
7	3.22	37.43	59.35	»
8	3.29	39.57	57.14	»
9	3.89	40.17	55.94	»
10	5.15	40.09	54.76	»
11	6.13	40 07	53.80	»
12	8.91	40.04	51.05	»
13	10.25	39.85	49.90	»
14	13.28	39.11	47.61	»
15	14.97	38.91	46.12	»
16	15 95	38.13	44.92	»
17	11.02	39.95	49.03	$KNO_3 + Fe(NO_3)_3\,9\,H_2O$
18	12.92	38.11	48.97	$Fe(NO_3)_3\,9\,H_2O$
19	10.98	39.99	49.03	»
20	8.75	41.90	49.35	»
21	6.03	43.01	50.96	»
22	3.78	45.11	51.11	»
23	—	46.57	53.43	»

Digitized by Google



Come si rileva dal diagramma, nitrato ferrico noveidrato e nitrato potassico, a 25°, non formano nè composti di addizione nè cristalli misti.

Le curve di solubilità dei due sali si prolungano però oltre il loro punto d'incontro. Esse possiedono cioè un tratto metastabile i cui estremi sono rappresentati rispettivamente dalle soluzioni n. 16 e n. 18. Se alla soluzione n. 16 si aggiunge nitrato ferrico solido, la sua composizione si cambia in quella della soluzione n. 17, e lo stesso accade se alla soluzione n. 18 si aggiunge nitrato potassico.

Ho pure avuto luogo di osservare che per soluzioni molto concentrate in nitrato ferrico, nelle vicinanze del punto triplo e lungo il tratto metastabile, il nitrato potassico presente come corpo di fondo, quando venga

Digitized by Google

separato dalla soluzione e asciugato nella maniera descritta precedentemente, trattiene sempre una piccola quantità di ferro. Ad esempio, il nitrato potassico separato dalla soluzione n. 14 conteneva il 0.25 % di Fe. Negli altri tratti della curva di solubilità invece, il nitrato separato nella maniera indicata non contiene affatto ferro.

Chimica. — *Struttura cristallina del tricloromercurato di cesio* [1]. Nota di G. NATTA, presentata [2] dal Socio G. BRUNI.

Tra i numerosi alogenuri doppî del mercurio coi metalli alcalini solo quelli del cesio, corrispondenti alla formula $CsHgA_3$ (dove A è il simbolo dell'alogeno) possono in determinate condizioni cristallizzare nel sistema monometrico. Per raffreddamento di una soluzione concentrata calda di alogenuro mercurico, contenente un eccesso di alogenuro di cesio, cristallizzano dei cubetti imperfettamente sviluppati, con tremie molto pronunciate, di aspetto analogo al cloruro di sodio. Talvolta gli spigoli del cubo sono tagliati dalle faccie meno sviluppate del rombododecaedro.

La leggera birifrangenza di questi cristalli, osservata già da Wells [3], fu da Penfield [4] considerata come anomala. Scompare infatti rompendo i cristalli ed esaminandone i frammenti e può forse essere dovuta a delle tensioni interne che si creano durante il rapido ed imperfetto accrescimento.

Ho creduto interessante, anche dal punto di vista chimico, studiare con i metodi roentgenografici questi composti per poter riconoscere come si dispongano gli atomi nella intima tessitura reticolare, e poter precisare se le molecole dei due sali semplici mantengano nel sale doppio la loro unità, oppure se gli atomi di alogeno si coordinino intorno all'atomo di mercurio analogamente ai gruppi NH_3 intorno al cobalto nei complessi aminocobaltici e similmente al cloro intorno al platino nei cloroplatinati.

Esaminai, sia col metodo delle polveri che con quello classico di Laue, il cloromercuriato di cesio, preparato con il metodo precedentemente descritto, curando che le soluzioni da cristallizzare contenessero un eccesso di cloruro di cesio per evitare la formazione della modificazione rombica del composto $CsHgCl_3$ [5].

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1927.

(3) WELLS, « Amer. Journ. Sc. », 1892, (3) *44*, 221; « Zeitschr. anorg. Chem. », 1892, *2*, 407.

(4) PENFIELD, « Amer. Journ. Sc. », 1892, (3), *44*, 311; « Ausz. Zeitschr. f. Krystall. », *23*, 608.

(5) H. W. FOOTE e F. L. HAIGH, « Journ. Am. Chem. Soc. », *33*, 459 (1911).

Digitized by Google

Le linee di diffrazione del fotogramma delle polveri, ottenute con la radiazione monocromatica di un anticatodo di rame, si ordinano facilmente per una struttura cubica o strettamente pseudocubica, tipo corpo centrato.

Nella tabella seguente sono indicati i seni degli angoli di riflessione, le distanze reticolari, gli indici delle faccie ed il lato *a* della cella elementare. Si osserva che mancano le linee dovute a faccie aventi gli indici tutti dispari, o uno dispari ed uno pari e ciò in accordo alla supposizione di una struttura del tipo corpo centrato.

$\text{sen}\frac{\theta}{2}$	d	(h k l)	a	Imt.	n S^2
0.202	3.800	(110)	5.38	md	156
0.284	2.710	(002)	5.38	m	208
0.347	2.113	(112)	5.42	m	312
0.401	1.920	(220)	5.43	mf	415
0.447	1.723	(103)	5.44	m	312
0.529	1.456	(132)	5.44	f	624
0.599	1.284	(114) (303)	5.44	m	468
0.632	1.218	(204)	5.44	m	830
0.662	1.163	(332)	5.45	d	312
0.721	1.068	(105) (143)	5.45	f	936
0.777	0.991	(125)	5.43	m	624
0.825	0.934	(350) (334)	5.45	md	624
0.875	0.880	(161) (235)	5.43	mf	936

Il lato della cella elementare risulta 5.44 Å, il volume 161×10^{-24} ccm. Supponendo che questa contenga una molecola $CsHgCl_3$ si calcola per la densità 4.53. Per controllo ho determinato sperimentalmente la densità, usando un picnometro ripieno di toluolo. La densità, che non mi risulta precedentemente nota, è 4.266 e come al solito appare leggermente inferiore a quella calcolata.

La disposizione atomica più semplice, che soddisfa ai requisiti di simmetria del sistema cubico, è quella che presenta i vertici ed il centro del cubo occupati dagli atomi metallici ed i centri delle faccie occupati dagli

Digitized by Google

atomi di cloro. I fattori di struttura calcolati in base a questa supposizione non si oppongono ai dati di intensità sperimentale dei fotogrammi delle polveri. Resta da stabilire se il centro del cubo è occupato dal mercurio o dal cesio. A questo scopo si presta meglio l'esame dei fotogrammi di Laue.

Uno di questi, che è riprodotto schematicamente in figura insieme alla proiezione gnomonica disegnata in scala ridotta, è stato ottenuto dirigendo

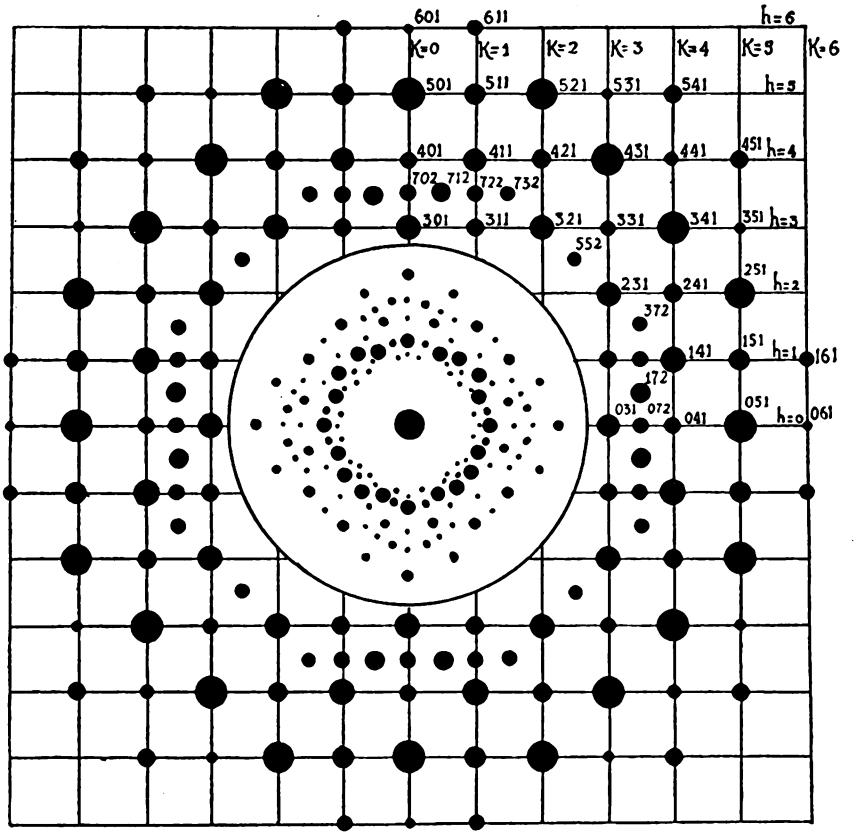


Fig. 1.

un fascio di raggi X, emessi da un anticatodo di tungsteno sotto una tensione di 60 KV., normalmente alla faccia di cubo.

Tali fotogrammi di Laue confermano la simmetria cubica dei cristalli esaminati e permettono, osservando l'intensità relativa delle diverse macchie di diffrazione, di determinare la struttura atomica con maggiore sicurezza di quanto possa farsi in base ai soli fotogrammi delle polveri. Il loro aspetto è caratteristico e già un loro esame qualitativo può dare degli indizi importanti.

Prendiamo, ad esempio, in considerazione le sole zone di punti comprendenti le faccie aventi come primo indice 4 o 5 o 6, trascurando quelle

Digitized by Google

aventi come primo indice 3, perchè la piccola distanza reticolare di queste ultime ed il maggiore angolo di riflessione permette la sovrapposizione delle riflessioni di primo e di secondo ordine. Si osserva che le macchie dovute alle faccie (401), (421), (441) sono deboli o medie, mentre le (411), (431) sono fortissime. Nella zona a primo indice 5 si ha invece la (501), (521) forti mentre sono deboli la (511) e la (531). Per la zona a primo indice 6 si osserva debole la (611) mentre sono estremamente deboli e quasi impercettibili la (601) e la (621). La mancanza delle (541), (641) ecc., è dovuta all'assenza di lunghezze d'onda inferiori ai 0.20 Å e conferma la supposizione che la cella elementare contenga una sola molecola ed abbia un lato eguale a 5.44 Å e non ad un multiplo di questo valore. L'intensità quasi eguali della (301), (311), ecc., sono dovute alla sovrapposizione delle riflessioni di secondo ordine (602) e (622) ad eguale fattore di struttura.

Prendendo in considerazione le due ipotesi di struttura atomica definite dalle seguenti coordinate degli atomi:

A) Hg (0 0 0) ; Cs ($^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$) ; Cl ($^1/_2$ $^1/_2$ 0),
(0 $^1/_2$ $^1/_2$) , ($^1/_2$ 0 $^1/_2$);

B) Hg ($^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$) ; Cs (0 0 0) ; Cl ($^1/_2$ $^1/_2$ 0),
(0 $^1/_2$ $^1/_2$) , ($^1/_2$ 0 $^1/_2$)

si osserva che il fattore di struttura per le faccie ($2l$, $2m$, n), dove l , m ed n sono numeri qualsiasi dispari, è secondo l'ipotesi B): Hg — Cs + Cl, mentre secondo l'ipotesi A) è: Cs — Hg + Cl. Con Hg , Cs e Cl s'intende il numero di elettroni dell'ione (numero atomico più la valenza per il cloro, numero atomico meno la valenza per il cesio e per il mercurio). Per le faccie ($2l$, m , n) il fattore di struttura è Hg + Cs — Cl tanto per l'una che per l'altra ipotesi.

Risulterebbe perciò che secondo A) le faccie (401), (421), (601), ecc. hanno un fattore di struttura 6, mentre secondo l'ipotesi B) hanno 42. Il fattore per le faccie (411), (431), ecc., è 115 tanto per l'uno che per l'altra ipotesi.

Siccome l'intensità della radiazione riflessa è proporzionale al quadrato del fattore di struttura, l'intensità delle faccie ($2l$, $2m$, n) dovrebbe essere secondo A) 37 volte inferiore a quella delle faccie ($2l$, m , n) e perciò tali macchie in pratica dovrebbero risultare invisibili. Secondo la struttura B) invece i rapporti tra le intensità è di poco superiore a 7, in accordo con i valori sperimentali.

Per le faccie (l , m , n) il fattore di struttura sarà Cs + 3 Cl — Hg ossia 30 secondo B), sarà invece Hg + 3 Cl — Cs ossia 78 secondo A).

Digitized by Google

Per quest'ultima struttura l'intensità delle (511), (531) dovrebbero essere circa la metà della intensità della (501) in contrasto con i valori sperimentali che si accordano invece per la struttura B).

Nella figura 2 è indicata la cella elementare secondo tale disposizione atomica.

La struttura B) non è nuova. Essa è simile a quella proposta per la perowskite [1] ed a quella data da van Arkel [2] per il fluoruro doppio di

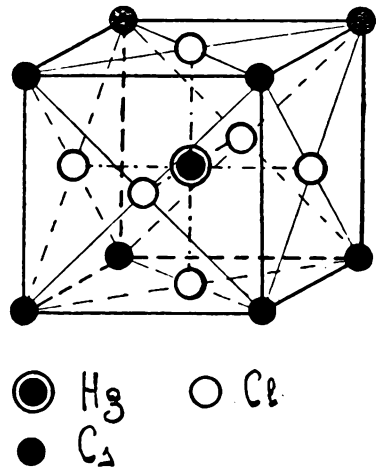


Fig. 2.

magnesio e potassio, $KMgCl_3$, che ha quindi una struttura dello stesso tipo di quella del composto qui studiato.

Nel nostro caso tale struttura è anche confermata dalla migliore utilizzazione dello spazio reticolare, essendo il diametro apparente dell'ione Cs^+ maggiore di quello dell'ione Hg^{++}.

La distanza Cs — Cl misurata tra i centri risulterebbe 3.92 Å, mentre la distanza Hg — Cl sarebbe 2.74 Å. Supponendo eguale a 1.81 il raggio del Cl si calcolerebbe per il mercurio ione bivalente un raggio 0.91 Å e per il cesio 1.85 Å, valori leggermente diversi da quelli (rispettivamente 1.12 e 1.65) dati da Goldschmidt [3].

Secondo la struttura A) risulterebbe invece eguale a 0.91 Å il raggio del Cs^+ in grande disaccordo col valore (1.65) calcolato dagli altri composti alogenati del cesio.

(1) La struttura della perowskite, che è rombica ma pseudocubica, deve differire di poco da quella definita dalle coordinate: Ca (000); Ti ($1/2\ 1/2\ 1/2$); O: ($1/2\ 1/2$ 0), (0 $1/2\ 1/2$), ($1/2$ 0 $1/2$). Vedi G. R. Levi e G. Natta, «Rend. Acc. Lincei», vol. 2°, seric 6ª, 2° sem., 1° fasc. (1925). T. Barth, «Norsk Geologish Tidsskrift» *8*, 201, (1925).

(2) A. E. van Arkel, *Phisica*, 5°, 162 (1925).

(3) V. M. Goldschmidt, *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente*. 7° «Norske Videnskaps-Akad.» Oslo, 1, Matem. Klasse 2° (1926).

Digitized by Google

Nessun dubbio può perciò rimanere sulla struttura del composto da noi studiato. Gli atomi di cloro si dispongono intorno all'atomo di mercurio a egual distanza da questo lungo tre rette normali tra di loro. Tale disposizione degli atomi coordinati intorno all'atomo coordinante è ripetuta in altri complessi, ed è analoga alla disposizione dei gruppi NH_3 intorno al cobalto nell'ioduro di esamminocobalto [1], colla sola differenza che nel nostro caso ogni atomo di cloro essendo a eguale distanza da due atomi di mercurio fa parte contemporaneamente di due gruppi $(Hg \cdot 6Cl)$ contigui.

L'impacchettamento degli atomi nel reticolo del $CsHgCl_3$ non è dei migliori, se si ammette che si mantengano i diametri atomici calcolati da Goldschmidt. Ciò forse spiegherebbe la facilità con cui la modificazione monometrica si trasforma in altra rombica, forse più compatta.

Conclusioni. Il cloromercuriato di cesio $CsHgCl_3$, ottenuto per cristallizzazione della soluzione contenente un eccesso di cloruro di cesio, appartiene al sistema monometrico. Ha una cella elementare cubica di lato 5.44 Å. La posizione degli ioni nella cella è definita dalle coordinate seguenti:

Hg ($^1/_2$ $^1/_2$ $^1/_2$) ; Cs (0 0 0) ; Cl ($^1/_2$ $^1/_2$ 0) , (0 $^1/_2$ $^1/_2$) , ($^1/_2$ 0 $^1/_2$).

La densità calcolata risulta 4.53.

Chimica-fisica. — *Struttura cristallina dell'idrato di calcio.* Nota di A. Rejna [2], presentata [3] dal Socio G. Bruni.

La struttura dell'idrato di calcio è stata resa nota mediante l'esame röntgenografico circa tre anni or sono da G. R. Levi [4], che ha trovato una struttura analoga alla brucite ma con rapporto assiale abbastanza diverso.

I valori dati da Levi sono: a = 3.52 Å, c = 4.93 Å, c/a = 1.40. Successivamente sono stati studiati nel nostro laboratorio da G. Natta [5] numerosi idrati bivalenti per i quali è stato trovato un rapporto assiale in alcuni casi ($Co(OH)_2$ c/a = 1.46 $Cd(OH)_2$ c/a = 1.355) assai vicino a quello dell'idrato di calcio.

Nel presente lavoro ho ripreso la fotografia del prof. G. R. Levi per calcolare i valori delle intensità e confrontarli coi dati sperimentali allo scopo di stabilire con una certa approssimazione il parametro *u* dell'ossi-

(1) R. W. Wickoff e L. M. Dennis, « Amer. Journ. Sc. », 12°, 503 (1926).

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(3) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(4) « Giornale di Chimica industriale », *6*, 333, 1924.

(5) G. Natta, « Rendiconti dei Lincei », vol. II, serie 6ª, 2° sem. fasc. 11 (1925); G. Natta e A. Reina, vol. IV, serie 6ª, 2° sem., fasc. 1-2 (1926).

Digitized by Google

TABELLA.

Numero	θ oss	$h_1 h_2 h_4$	I oss	I calcolata per	
				u = 1/3	u = 1/4
1	20.0	001	m	40	204
2	30.4	100	md	52	52
4	35.8	101	ff	861	728
6	47.6	102	f	437	443
7	52.5	110	f	331	331
8	55.8	111	m	25	128
9	64.2	201 103	mf	237	353
10	65.6	112	m	17	17
11	73.4	202	mf	170	173
13	86.0	121 104 203	f	406	332
14	94.6	122	mf	243	246
15	100.0	114	m	10	228
16	108.2	105 204 213	mf	264	310
17	119.2	220	md	135	135
18	127.0	221 130 115 303	mf	366	479
19	131.0	124 205 131	mf	899	475
20	142.2	132	f	530	486
21	153.2	223 106	f	677	512

Digitized by Google

geno, parametro che non fu allora calcolato. La film per il suo forte sviluppo non si è prestata alla fotometria, ne ho però verificate accuratamente ad occhio le intensità e nella tabella sottostante i valori vengono confrontati con quelli calcolati per i valori $u = \frac{1}{3}$ e $u = \frac{1}{4}$ del parametro.

I numeri progressivi riportati nella prima colonna della tabella corrispondono a quelli dati nella prima colonna da G. R. Levi; sono omessi i valori corrispondenti alla radiazione K_β.

Nella seconda colonna riporto i θ osservati, nella terza gli indici cristallografici delle facce espressi nel sistema esagonale, nella quarta le intensità osservate, ella quinta i valori calcolati per $u = \frac{1}{3}$, nell'ultima i valori calcolati per $u = \frac{1}{4}$.

Dal confronto dei valori osservati e calcolali, specie delle linee comprese fra 4 e 15 cioè per angoli fra 35° e 110°, l'accordo è evidentemente migliore per il parametro $u = \frac{1}{4}$; per valori maggiori di θ la minor concordanza è giustificata dalla difficoltà di apprezzare ad occhio l'intensità della film e dalla esaltazione che nell'intensità calcolata porta, per angoli forti, il fattore di polarizzazione nella formula di Debye.

Recentemente M. Farnsworth [1] studiando la plasticità delle calci a mezzo dei raggi X ha confermato il rapporto assiale dato da G. R. Levi ma non ha dato i valori del parametro.

In questo lavoro è usata l'apparecchiatura di Hull, facendo osservare che la purezza dei fotogrammi aumenta usando delle calci spente ottenute da ossidi di calcio più fortemente arroventati; in modo assi spiccato tale purezza si riscontra nella calce viva stessa che riscaldata a 2200° dà fotogrammi assai più belli di quella riscaldata a 1800°; in un intervallo di temperatura analogo ma con temperature inferiori 800°-1400° G. R. Levi [2] ha osservato un comportamento simile per l'ossido manganoso.

Riassumendo. Vengono confermati i valori $a = 3.52$ $c = 4.93$ $c/a = 1.40$ dati da G. R. Levi e viene assunto per u il valore $u \sim 1/4$: essendo le coordinate di Ca e O rispettivamente

$$\mathrm{Ca}\,(0\,0\,0) \quad ; \quad \mathrm{O}\left(\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,u\right) : \left(\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}\,\bar{u}\right).$$

(1) « Industrial a. Eng. Chemistry », *19*, 583 (1927).
(2) « Atti Istituto Lombardo », *57*, 619 (1924).

Digitized by Google

Farmacologia. — *Variazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica.* - I. *Potassio e farmaci convulsivanti* [1]. Nota di L. SCREMIN, presentata [2] dal Socio L. SABBATANI.

Vanno facendosi sempre più numerose nella letteratura farmacologica le ricerche sistematiche sull'*azione combinata* dei farmaci e sul così detto *potenziamento* o aumento di azione di un farmaco per opera di un altro che, preso isolatamente potrebbe essere anche del tutto sprovvisto di azione analoga.

Volendo studiare sistematicamente come un aumento di concentrazione degli ioni normalmente presenti nel sangue e nei liquidi dell'organismo modifichi l'azione farmacologica, ho cominciato col cercare come un aumento di K^+ modifichi la risposta del sistema nervoso a farmaci convulsivanti e innanzitutto a quelli che producono convulsioni di tipo stricnico per aumento della eccitabilità reflessa.

*
* *

Iniettando il piramidone per via endovenosa nel coniglio, alla dose molecolare di 0.00040 — 0.00041 per kg., si ha un accesso convulsivo con opistotono. Iniettando insieme, contemporaneamente, una soluzione di KCl [3], bastano piccole quantità di questo (gr. n. mol. 0.00025 — 0.00035 p. kg.) per dare l'opistotono con dosi di piramidone che da sole sarebbero inattive. Aumentando la quantità di KCl aggiunto, diminuisce la quantità di piramidone necessaria per avere l'accesso, come risulta dai dati della seguente

(1) Lavoro fatto nell'Istituto di Farmacologia di Padova.
(2) Nella seduta del 1° giugno 1927.
(3) Piramidone soluzione al 4 %; KCl al 5 %. Iniezione fatta in 10"-15".

Digitized by Google.

TABELLA I.

Piramidone gr. norm. mol/kg.	KCl gr. norm. mol/kg.	Risultato
0.000400	—	opistotono immediato
—	0.000200	—
—	0.000400	depressione transitoria
0.000311	0.000133	—
0.000311	0.000268	opistotono immediato
0.000246	0.000242	» »
0.000233	0.000174	—
0.000228	0.000254	opistotono immediato
0.000194	0.000375	» »
0.000190	0.000308	—
0.000173	0.000201	—
0.000173	0.000241	—
0.000173	0.000268	opistotono immediato
0.000173	0.000295	» »
0.000160	0.000400	» »
0.000134	0.000402	—

Con questi dati si è costruita una curva che indica come varî la dose di piramidone necessaria ad ottenere l'accesso in funzione della quantità crescente di KCl contemporaneamente iniettato. Nella figura sono indicate con ○ le esperienze nelle quali non si è avuto l'accesso, con ● quelle nelle quali si è avuto. Sull'asse delle ordinate sono segnate le quantità di piramidone in gr. mol/kg. $\times 10^6$, su quello delle ascisse le quantità di KCl in gr. n. mol/kg. $\times 10^5$. (Curva I, piramidone).

Se, conservando gli stessi rapporti fra dosi di piramidone e di KCl, si inietta prima il KCl e dopo il piramidone, se il tempo intercorrente fra l'una e l'altra iniezione è superiore ai 10″-15″, non si hanno convulsioni.

*
* *

Il piramidone fu qui preso come esempio di farmaco che dà luogo a convulsioni immediate. Dirò ora delle modificazioni dell'azione farmacologica che un aumento di concentrazione pel K^+ produce sulla codeina, presa come esempio di farmaco che può produrre la convulsione con opistotono anche a distanza dall'iniezione.

La codeina svolge, come è noto, due azioni: una narcotica e una convulsivante tipo stricnico. Se la dose introdotta di codeina cloridrato è inferiore a gr. mol. 0.000080 p. kg. si ha generalmente solo l'azione narcotica, durante la quale tuttavia l'animale reagisce vivacemente agli stimoli esterni,

Digitized by Google

mostrando uno spiccato aumento dell'eccitabilità reflessa. Se la dose oscilla fra 0.000080 e 0.000150, alla prima fase dell'azione simile a quella descritta, segue la fase convulsiva preceduta da sintomi abbastanza caratteristici, con trisma ed opistotono: questi si ripetono ad intervalli e accompagnano generalmente a morte l'animale nello spazio di 20′–30′.

Se la dose supera i gr. mol/kg. 0.000150 si ha per lo più immediatamente lo scoppio di un accesso stricnico, con opistotoni che si susseguono fino alla morte che, per dosi di poco superiori alla detta, avviene in pochi minuti.

L'iniezione di KCl contemporaneamente alla codeina [1] determina invece, a dati rapporti, un accesso convulsivo, immediato, come hanno dimostrato le esperienze i cui risultati sono raccolti nella

TABELLA II.

Codeina cloridrato gr. mol. p. kg.	KCl gr. n. mol/kg.	Risultato
0.000080	—	dorme, immobile
0.000080	0.000135	» »
0.000074	0.000210	» »
0.000072	0.000211	» »
0.000072	0.000321	opistotono immediato
0.000070	0.000217	dorme, immobile
0.000068	0.000213	» »
0.000066	0.000236	opistotono immediato
0.000064	0.000219	dorme, immobile
0.000061	0.000254	opistotono immediato
0.000060	0.000135	dorme, immobile
0.000059	0.000200	» »
0.000053	0.000238	opistotono immediato
0.000050	0.000268	dorme, immobile
0.000049	0.000308	» »
0.000048	0.000217	» »
0.000048	0.000295	opistotono immediato
0.000048	0.000394	» »
0.000046	0.000285	dorme, immobile
0.000045	0.000280	» »
0.000043	0.000268	opistotono immediato
0.000040	0.000214	dorme, immobile
0.000040	0.000295	» »
0.000037	0.000254	opistotono immediato
0.000037	0.000295	» »
0.000025	0.000469	» »

(1) Codeina cloridrato, sol. 2%; KCl 5%. Iniezione in 10″–15″.

Digitized by Google

Con questi dati fu tracciata nella figura la curva II (codeina), col solito sistema delle coordinate, segnando sull'asse delle ascisce le doti crescenti di KCl e sull'asse delle ordinate le doti di codeina cloridrato, in gr. n. mol/kg. × rispettivamente 10^5 e 10^6.

La curva indica dunque come varî la quantità di alcaloide immediatamente convulsivante in funzione dell'aumento del KCl iniettato contemporaneamente.

È evidente che il K^+ aumenta molto l'azione della codeina, essendo sufficienti dosi inferiori alla stessa dose minima convulsivante a distanza

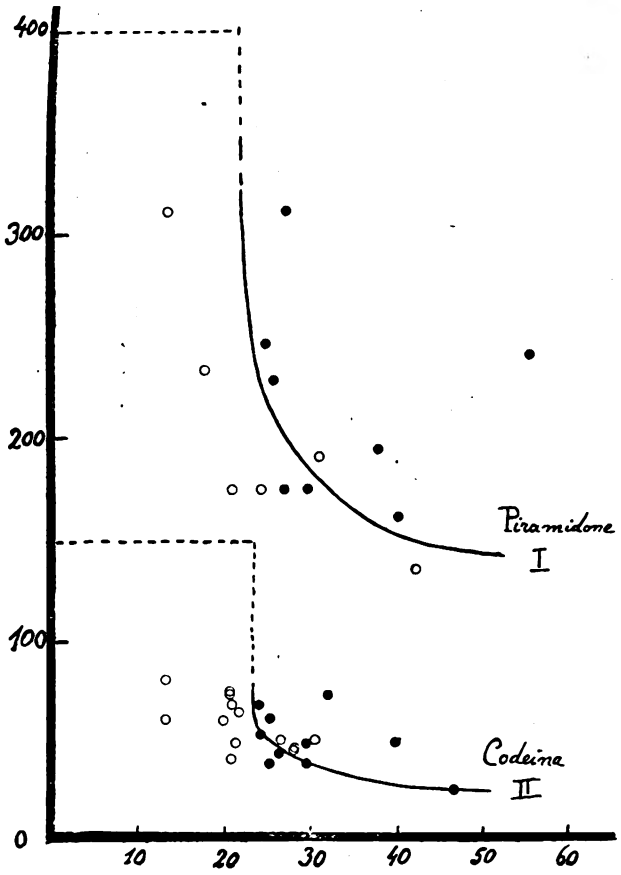


Fig. 1.

per dare immediatamente l'accesso stricnico, quando si aggiungano piccole quantità di KCl.

In un'altra serie di esperienze, l'iniezione di codeina cloridrato seguiva quella di KCl fatta preventivamente, sempre conservandosi fra le dosi gli stessi rapporti quantitativi. I risultati di queste esperienze sono consegnati alla seguente tabella III, dove i minuti secondi indicano il tempo trascorso fra la fine dell'iniezione di KCl e il principio di quella di codeina cloridrato.

Digitized by Google

TABELLA III.

KCl gr. n. mol/kg.		Codeina cloridr. gr. mol/kg.	Risultato
0.000396	60″	0.000048	dorme, immobile
0.000402	30″	0.000048	» »
0.000228	20″	0.000064	» »
0.000260	8″	0.000083	» »

Queste esperienze danno esito completamente negativo anche quando, come nell'ultima, la dose di codeina cloridrato è alta e piccolo è l'intervallo fra le due iniezioni. Questo per dimostrare la rapidità con la quale l'organismo riconduce alla norma l'equilibrio ionico turbato.

*
* *

In una successiva serie di esperienze fu iniettato il KCl *dopo* la codeina cloridrato.

Iniettando una dose di codeina cloridrato inferiore a quella minima convulsivante a distanza, cioè inferiore a gr. mol/kg. 0.000080 e dopo, mentre l'animale dorme, iniettando una soluzione di KCl, possiamo, in certi limiti di tempo, ottenere ancora un accesso convulsivo, come dimostrano gli esperimenti consegnati alla

TABELLA IV.

Codeina cloridr. gr. mol/kg.		KCl gr. norm. mol/kg.	Risultato
0.000051	1′	0.000323	opistotono immediato
0.000047	5′	0.000241	opistotono dubbio
0.000048	20′	0.000308	cessa di dormire

È difficile pensare che in pochi minuti la codeina vada incontro ad una trasformazione o si elimini così che il K^+ introdotto a distanza di 5′–20′ trovi una quantità assai minore di farmaco sul quale o col quale poter agire. È più verosimile pensare che il K^+ modifichi la distribuzione del farmaco quando anche questa è da poco avvenuta e non la modifichi più dopo più lungo tempo.

Digitized by Google

Se la dose di codeina iniettata è più alta, tale che a distanza dia certamente l'accesso convulsivo, il KCl iniettato più tardi fa scoppiare immediatamente l'accesso, anche a notevole distanza dalla precedente iniezione, e l'accesso si presenta con caratteri diversi dal solito dovuto alla codeina sola, poichè l'opistotono non è preceduto da altri sintomi, è unico generalmente e conduce quasi sempre a morte immediata. Ecco due esperienze in queste condizioni:

Codeina cloridr. gr. mol/kg.		KCl gr. norm. mol/kg.	Risultato
0.000117	1′	0.000456	opistotono immediato
0.000110	19′	0.000319	» »

*
* *

Risulta da queste esperienze che quando l'equilibrio $\frac{Na^+ K^+}{Ca^{++} Mg^{++}}$ si modifica, nel senso di un aumento di K^+, le cellule delle corna posteriori reagiscono molto di più all'azione di quei farmaci la cui azione specifica è di aumentare la eccitabilità reflessa. Ciò si può interpretare considerando che l'azione dei farmaci si esplica in condizioni determinate di equilibrio ionico e che quando queste si modificano, variando il substrato anche l'azione varia, forse nel senso della ripartizione del farmaco. La mancata azione con iniezione preventiva di KCl e l'ottenersi di essa solo in certi limiti se iniettato dopo è indice della rapidità con cui l'organismo tende a ripristinare l'equilibrio una volta alterato. Solo iniettando contemporaneamente e per via endovenosa farmaco e sale potassico noi raggiungiamo lo scopo di far agire il farmaco sopra un substrato alterato e otteniamo l'effetto *optimum*.

La ragioni intime di questa azione del K^+ sulle cellule delle corna posteriori non sono note, si può però pensare, d'accordo con i dati di molti autori, che il K^+, rendendo più *permeabili* le pareti cellulari, permetta con più facilità l'entrata del farmaco [1].

In una prossima Nota presenterò esperienze analoghe fatte col calcio che dànno, anzichè un aumento, una diminuzione costante dell'azione di questi farmaci convulsivanti e dirò le ragioni per le quali questa ipotesi sia ancora da preferire [2].

(1) Tschermak, « Allgemeine Physiologie », Berlin, Springer, 1924, pp. 122-123, 128.
(2) Cfr. in contrario Belâk u. Szép, « Biochemische Zeitschr. », 171 Bd., 1926, p. 22 sg.

Digitized by Google

Mineralogia. — *Contributo allo studio dei pirosseni manganesiferi* [1]. Nota di P. ALOISI, presentata [2] dal Corrispondente G. D'ACHIARDI.

In un mio recente lavoro [3] ho fatto notare le forti divergenze che esistono nelle proprietà ottiche dei vari pirosseni manganesiferi, e le difficoltà che si incontrano quando tali differenze si vogliano porre in rapporto con le variazioni di composizione chimica.

Nell'intento di portare un ulteriore contributo alla ricerca delle cagioni di tale contegno, pubblico i resultati delle determinazioni fatte su due rodoniti italiane.

I. - *Rodonite di Monte Nero (Rocchetta di Vara).* — Il campione di questo minerale (al quale accenna fugacemente A. Mognol [4] in una descrizione del giacimento manganesifero di M. Nero) mi è stato donato dal prof. A. Pelloux che vivamente ringrazio.

Secondo informazioni gentilmente fornitemi da Pelloux, la rodonite si trova in noduli nel minerale metallifero e nella roccia diasprina, al tetto del giacimento, che contiene anche rame nativo, cuprite e calcosina; nei lavori inferiori, in questa stessa roccia, si trovano granato giallo manganesifero (spessartina), cuprite (calcotrichite), rame nativo, ecc.

Nel campione da me studiato la rodonite è in laminette allungate, quasi fibrose, associate a pennelli, con colore roseo intenso, in alcuni punti rosso addirittura. Per l'analisi chimica ho scelto molto accuratamente il materiale, per scartare il poco minerale nero di manganese (braunite?) che lo accompagna; non mi è stato possibile però sceverare la rodonite più chiara da quella più scura. I resultati analitici sono:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 19 giugno 1927.

(3) *Osservazioni sui pirosseni di Campiglia Marittima (Toscana).* « Mem. R. Acc. Lincei », ser. 6ª, II. fasc. I, Roma, 1926.

(4) *Il giacimento manganesifero di Monte Nero (Rocchetta di Vara).* « Mem. Acc. lun. G. Capellini », V, fasc. 2-3, 119, La Spezia, 1914.

Digitized by Google

H_2O sotto 110°	0.22
H_2O sopra 110°	7.88
SiO_2	45.05
Al_2O_3	0.35
Fe_2O_3 } (1)	0.55
FeO }	
MnO	38.83
CaO	7.92
MgO	tr.
	100.80

Si tratta evidentemente di un minerale alterato; l'alterazione, peraltro, non sembra averne modificato profondamente la costituzione, tant'è vero che il rapporto fra l'anidride silicica e gli ossidi dei metalli, anche prescindendo dalle piccole quantità di ferro ed alluminio, è vicinissimo a quello richiesto dalla formula $R''SiO_3$. L'alterazione, limitata credo ad una idratazione, è poi circoscritta in singole zone dalle lamine, come è mostrato dall'aspetto delle sezioni.

Lo studio delle proprietà ottiche l'ho fatto in sezioni sottili ed in laminette di sfaldatura.

Nelle sezioni il minerale si trova in lamelle allungate con tracce di sfaldatura (110) e ($1\bar{1}0$) molto evidenti. Colorazione mancante, meno in alcune zone, assai frequenti e talora situate nella parte centrale delle lamine, nelle quali si ha una spolveratura di una sostanza di aspetto ocraceo che a luce riflessa è di color rosso vivo.

Potenza birifrattiva energica di segno *negativo*; in base ai colori di interferenza stimo: $\gamma - \alpha = 0.03$, $\beta - \alpha = 0.02$, $\gamma - \beta = 0.01$; questi valori, ben'inteso, valgono solo come indicazione d'ordine di grandezza. Le sezioni normali alla bisettrice ottusa estinguono a 10° (β) dalle tracce di sfaldatura (un solo sistema visibile); quelle normali alla bisettrice acuta a 60° (γ) dalle tracce di sfaldatura (anche qui un solo sistema visibile). Con il metodo da me recentemente proposto (2) ho determinato per 2V un valore di 70° circa.

Riguardo alle osservazioni fatte su lamine di sfaldatura è da premettere che si ha, come era logico attendersi, contegno diverso a seconda che

(1) Pesato come Fe_2O_3 ma da considerarsi, in parte almeno, come FeO; la separazione, del resto di scarso interesse data la bassa percentuale del ferro totale, non potei farla per la scarsità della sostanza disponibile.

(2) *Determinazione approssimativa di* 2V *nelle sezioni sottili dei minerali.* « Rendiconti R. Acc. Lincei », ser. 6ª, V, 1° sem., fasc. 7, Roma, 1927.

Digitized by Google

le lamine stesse sieno parallele all'uno od all'altro piano. Dato il modo di presentarsi del minerale, non è possibile ottenere a volontà lamine parallele a (110) od a ($1\bar{1}0$), non solo, ma non è neppure possibile sapere a quale di tali piani è parallela una data lamina. Si osserva però che sono assai più frequenti le lamelle di un tipo rispetto a quelle dell'altro, ciò che fa supporre che una delle due sfaldature sia più facile.

Le lamine più numerose mostrano emergenza poco inclinata della bisettrice acuta negativa; la direzione α', che perciò è assai vicina a β, fa con le tracce di sfaldatura un angolo di 28° circa, valore molto vicino a quello trovato nelle sezioni normali ad α. Le lamine più rare danno emergenza molto inclinata di un asse ottico ed estinzione (γ') di circa 10° con le tracce di sfaldatura.

II. - *Rodonite di S. Marcel (Val d'Aosta).* — Il materiale studiato proviene in parte dalle collezioni di questo Istituto, in parte mi è stato donato dal prof. Pelloux.

Questa rodonite è nota chimicamente per le analisi di Ebelmen e Colomba [1]; quest'ultimo ne ha anche studiato dei cristalli trovando che per essi possono valere le costanti calcolate da Flink [2] per la rodonite di Pajsberg. Le condizioni di giacitura e di paragenesi sono pure descritte dal Colomba, al lavoro del quale rimando per le notizie relative.

Non ho creduto di fare l'analisi chimica del mio materiale, visto che le analisi dei due autori predetti, eseguite su rodonite compatta (I Ebelmen) e su cristalli (II Colomba) concordano perfettamente:

	I	II
SiO_2	46.37	46.71
MnO	47.38	47.73
CaO	5.48	5.41
	99.23	99.85

Nei miei campioni la rodonite, di color roseo piuttosto chiaro, è più o meno minutamente granulare, oppure lamellare. Anche qui ho studiato sezioni sottili e lamine di sfaldatura; questo minerale però, nell'un caso e nell'altro, si presta molto meno di quello di Monte Nero allo studio delle proprietà ottiche.

In sezione il minerale è incoloro e con nette tracce di sfaldatura (110) e ($1\bar{1}0$); la birifrazione, che sembra più bassa di quella del minerale pre-

(1) *Rodonite cristallizzata di S. Marcel (Val d'Aosta).* « Atti R. Acc. Sc. di Torino », XXXIX, Torino, 1904.

(2) *Studien über schwedische Pyroxenmineralien.* « Zeitschr. f. Krystall. u. Min. », XI, 514, Leipzig, 1886.

Digitized by Google

cedente, è *positiva*. Sezioni normali alla bisettrice acuta mostrano i due sistemi di tracce di sfaldatura ma non normali al piano della lamina.

Le lamelle di sfaldatura sono sempre molto oblique sulle sezioni principali dell'indicatrice e non danno emergenza di assi ottici nè di bisettrici; anche qui si nota che sono più frequenti le lamine con un certo contegno ottico rispetto alle altre e precisamente si ha, per lo più, estinzione, rispetto alle tracce di sfaldatura, di 21° circa (γ') e di 13° circa (γ') nei casi meno frequenti.

Le proprietà ottiche di queste due rodoniti sono molto diverse fra di loro. Quella di Monte Nero per il segno negativo della birifrazione corrisponde alla rodonite svedese studiata da Flink ed anche il valore di 2V non differisce molto da quello da lui determinato; l'orientazione invece è completamente diversa, come è dimostrato dai valori delle estinzioni sulle lamine di sfaldatura e dal fatto che, nel minerale di Monte Nero, emerge, da una di queste, poco inclinata, la bisettrice acuta [1]. La rodonite di S. Marcel invece ha segno ottico positivo, ed in ciò corrisponde alle rodoniti di Franklin e di Campiglia.

La tabellina del mio precedente lavoro, comprendendovi le due rodoniti ora studiate ed alcune bustamiti, può essere completata nel modo seguente:

	I	II	III	IV [2]	V	VI	VII	VIII [3]
MnO	47.38	41.91	41.88	40.83	37.33	31.65	27.60	25.20
(Ca , Ba , Mg , Fe , Zn) O	5.48	9.08	12.35	15.13	13.13	20.01	22.29	26.65
Segno ottico	+	—	—	+	+	—	+	—

Da essa resulterebbe una variazione ricorrente del segno della birifrazione col cambiare del rapporto fra l'ossido di manganese e quelli degli

(1) A questo proposito è da notarsi che secondo il DES CLOIZEAUX (*Manuel de Mineralogie*, I, 70, Paris, 1862) il piano degli assi ottici è, nella rodonite, quasi normale a (001), cioè a (1$\bar{1}$0) secondo l'orientazione attuale, e che da detta faccia emerge la bisettrice negativa.

(2) Questa rodonite è assai zincifera (3.26 % ZnO); in essa si ha un eccesso piuttosto forte di R''O, rispetto alla quantità richiesta dalla formula $R''SiO_3$.

(3) I. Rodonite di S. Marcel; II. Id. di Monte Nero; III. Id. di Pajsberg (FLINK, loc. cit.); IV. Id. di Franklin F. (E. S. LARSON and E. W. SHANNON, *Note on some new Rhodonite specimens from Franklin Furnace, New Jersey*, « N. Jahrb. f. Min., ecc. », 1924, II, 333, Stuttgart, 1924); V. Id. di Campiglia (ALOISI, loc. cit.); VI. Bustamite di Långban (DES CLOIZEAUX, *Examen optique et cristallographique de plusieurs silicates de manganèse* « Bull. Soc. franç. de Min. », VII, 72, Paris, 1884); VII. Id. di Campiglia (ALOISI, loc. cit.); VIII. Id. di Franklin F. (E. S. LARSON and E. W. SHANNON, *Bustamite from Franklin Furnace, New Jersey*, « N. Jarhb. f. Min., ecc. », 1924, II, 334, Stuttgart, 1924). Per la rodonite di M. Nero i valori surriportati sono stati calcolati senza tener conto dell'acqua

Digitized by Google

altri metalli bivalenti, fatto che già era accennato dalle mie precedenti ricerche. È da osservare che, per quanto può giudicarsi dai dati fino ad ora acquisiti, poco abbondanti peraltro e generalmente mal confrontabili fra di loro, la variazione del segno sembra accompagnata da profonde modificazioni in tutto l'orientamento dell'indicatrice.

Questo non permette ancora di giungere a delle conclusioni generali, che spero potranno invece dedursi da nuove ricerche che mi propongo di fare, qualora altri non mi preceda su tale via.

Geologia. — *Gli echinodermi miocenici di Porto Bardia e dell'oasi di Giarabùb (Marmarica).* Nota di A. DESIO, presentata [1] dal Socio G. DAINELLI.

Gli echinodermi di cui verrà trattato in via preliminare nella presente Nota, furono da me raccolti durante il viaggio all'oasi di Giarabùb nell'autunno del 1926, viaggio promosso dalla Reale Società Geografica Italiana [2].

Il materiale, che si trova in buonissimo stato di conservazione, proviene in massima parte dai dintorni di Porto Bardia, sulla costa della Marmarica, e dall'Uadi Giarabùb, ossia dalla grande depressione che limita a nord il Deserto Libico fra l'oasi egiziana di Ghegab e il nostro pozzo di Bir et-Tarfaui.

In ambedue le regioni, che distano all'incirca 250 km., è messa a nudo lungo le alte ripe dei uidian la serie di strati che costituisce l'altipiano marmarico. Sono strati di un calcare arenaceo bianco, giallo o verdastro, ricchi di fossili (molluschi, echinodermi, coralli, briozoi, foraminiferi), disposti in strati orizzontali.

Le forme raccolte nei dintorni di Porto Bardia sono le seguenti:

Scutella Ammonis var. *rostrata* Fuchs
» cfr. *Zitteli* Beyrich
» *Isidis* Fourtau var. n.
» sp. n.

Clypeaster latirostris Agass.
» » var. *laganoides* Agass.
» » var. *sublaganoides* Airaghi
» » sp. n.
» » sp. n.

(1) Nella seduta del 19 giugno 1927.

(2) DESIO A., *Appunti geografici e geologici sulla Marmarica Orientale Italiana*, « Boll R. Soc. Geogr. It. » (VI), vol. IV, 1927, nn. 1-2, pp. 6-18.

Digitized by Google

Echinolampas hemisphaericus Lamk. var. n.
» *Heinzi* Per. Gauth.
» cfr. *Orlebari* Gauth.
» *amplus* Fuchs

Schizaster Parkinsoni Defr.
» *Legraini* Gauth.

Euspatangus melitensis Gregory
» sp. n.

Echinocardium cfr. *marmaricum* Fourtau

Tutte queste specie appartengono in parte al Burdigaliano, in parte al Vindoboniano, per cui è molto probabile che a Porto Bardia sieno rappresentati ambedue i piani. Una conferma si potrà avere più tardi, ossia dopo completato lo studio dei molluschi.

Lungo la strada che da Bardia porta a Giarabùb, ho raccolto una forma nuova, molto grossa di *Brissiopsis* completamente silicizzata, a circa 10 km. (a sud) di Gasr el-Abd e un esemplare di *Scutella* sp. n. nei pressi della Hatiet el-Charit, specie, quest'ultima, che ritrovai anche nei dintorni di Giarabùb.

Le forme raccolte nell'Uadi Giarabùb sono le seguenti:

Cyathocidaris avenionensis Desm.

Psammechinus sp. n.

Scutella Ammonis var. *rostrata* Fuchs
» sp. aff. *Ammonis* Fuchs
» sp. n.
» sp. n.

Amphiope arcuata Fuchs
» » var. n.
» » mut. *Fuchsi* Fourtau

Clypeaster Martini mut. *Rohlfsi* Fuchs
» *istmicus* Fuchs

Echinolampas hemisphaericus Lamk.
» » var. n.
» » var. n.
» *plagiosomus* Agass.
» *amplus* var. *meridionalis* Fourtau

Agassizia Clevei Cotteau var. n.

Brissiopsis crescentica var. *Fraasi* Fuchs

Radiobrissus geneffensis Fourtau

Digitized by Google

La maggior parte di questi fossili proviene dagli immediati dintorni della zauia di Giarabùb, dalla scarpata dell'altipiano a nord di Giarabùb presso Q. 85, dal Gebel Fredga, dalla Garet Cuscia el-Gazàl, dalla Garet Melfa, dalla conca di el-Gsebaia e dalla Haseiat el-Megiabra (1). Non pochi esemplari erano completamente isolati nella sabbia.

In complesso, la fauna echinologica dei dintorni di Giarabùb appartiene al Vindoboniano. Solo l'*Amphiope arcuata* pare sia del Burdigaliano, ma in realtà non è noto il livello in cui fu raccolto il tipo della specie, che proveniva dall'oasi di Siua.

Le affinità fra le faune delle due zone non sono realmente molto grandi, ma non mancano tuttavia delle specie comuni (*Echinolampas emisphaericus* var. n., *Scutella Ammonis* var. *rostrata*, quest'ultima non senza incertezza). Maggiori somiglianze presenta invece la fauna di Giarabùb con quella dell'oast di Siua, con cui vi sono 5 specie in comune. Del resto ciò non può fare meraviglia se si pensa che Giarabùb dista assai meno da Siua che non da Porto Bardia.

Presa nel suo complesso, la nostra fauna presenta maggiori analogie con quella d'Egitto, con cui ha 17 forme in comune. Notevoli rapporti si notano però anche con le faune echinologiche di Malta, della Sardegna, della Corsica, del Piemonte. Col resto della Cirenaica vi sono in comune invece solo 4 specie, ma ciò potrebbe derivare dal fatto che non si conosce ancora abbastanza bene la fauna miocenica di quella regione.

Ciò che ritengo interessante di segnalare fra gli echini di Porto Bardia e di Giarabùb, è la presenza di forme molto vicine a specie dell'America Centrale. Una è il *Clypeaster* sp. n. di Porto Bardia, affine al *Clypeaster crustulum* Michelin, l'altra l'*Agassizia Clevei* Cotteau var. n. La prima è una specie dell'Yucatan, la seconda una specie delle Antille. Non sarà inutile aggiungere che lo *Schizaster Parkinsoni* Defr., presente a Porto Bardia, fu segnalato, a quanto pare, anche nelle Antille. In tutti i modi, questi fatti sembrano indicare che nel Miocene medio esistevano ancora delle relazioni fra le faune echinologiche del Mediterraneo e dell'America Centrale (2).

Riguardo alla batometria, dalla fauna sopraelencata si può facilmente desumere che l'ambiente in cui si deposero i sedimenti miocenici della Marmarica Orientale Italiana, era un ambiente eminentemente littorale, come del resto viene confermato dalla natura arenacea della roccia in cui i fossili erano contenuti.

(1) Cfr. Desio A., *Notizie geologiche e geografiche di Giarabùb e sul Deserto Libico*, « Boll. R. Soc. Geogr. It. », (VI), vol. IV, 1927, nn. 3-6, pp. 115-255.

(2) Stefanini G., *Relation between american and european tertiary echinoid faunas*, « Bull. Geol. Soc. of America », vol. 35, 1924, p. 827.

Digitized by Google

Biologia-matematica. — *Conservazione e diffusione dei caratteri mendeliani.* Nota II. *Caso generale.* Nota di B. DE FINETTI, presentata [1] dal Corrisp. C. FOÀ.

Se la riproduzione non è panmittica, non è possibile dare una soluzione così completa dal punto di vista matematico, almeno per il caso generale.

Vi sono dei casi semplici: se ad esempio gli accoppiamenti fecondi sono tutti dello stesso tipo. Allora il punto P si avvicina in linea retta al punto rappresentativo della prole che corrisponde a tale caso. Ciò ha peraltro ben poca importanza.

L'impostazione si può fare procedendo nello stesso modo seguito per la riproduzione panmittica, salvo sostituire all'unico coefficente di natalità λ *sei* coefficenti λ_{11}, λ_{22}, λ_{33}, λ_{12}, λ_{13}, λ_{23}, tali che il numero dei nati da coppie di eterozigoti e recessivi ($S_2 \times S_3$) nell'unità di tempo sia

$$2\lambda_{23}\tilde{\lambda}_2\tilde{\lambda}_3 \times \text{numero totale degli individui,}$$

e analogamente per gli altri. Essi misurano la tendenza all'accoppiamento del tipo indicato dai loro due indici, e la relativa fecondità: potremo chiamare λ_{ij} « procreatività » del tipo d'associazione $S_i \times S_j$. Questi coefficenti caratterizzano le condizioni in cui avviene la riproduzione, e consentono di scrivere la forma generale delle equazioni differenziali, che però non si sanno integrare.

Uno studio che invece si può compiere in generale consiste nella ricerca dei punti di regime, per date condizioni in cui si supponga svolgersi la riproduzione, che, anzi, si presenta più facile girandolo in questo modo: determinare per quali condizioni (per quali valori dei coefficienti λ_{ij}) un certo punto è in condizioni di regime; ossia: una certa ripartizione si mantiene indefinitamente.

Il calcolo è elementare, ma laborioso.

Le condizioni per cui un punto è in regime si ottengono risolvendo un sistema d'equazioni lineari; per poterne usufruire alla risoluzione del problema inverso della determinazione del regime per condizioni assegnate è necessario ripetere tali calcoli per tanti punti da poter procedere poi per interpolazione per le condizioni intermedie.

(1) Nella seduta del 15 maggio 1927.

Digitized by Google

Un caso particolarmente interessante è quello della riproduzione *per fenotipi*, in cui la tendenza ai vari tipi d'accoppiamento dipende solo dalle qualità esteriori, direttamente riconoscibili, degli individui, che vanno quindi distinti nei due fenotipi: – dominanti, recessivi – anzichè nei tre genotipi che si hanno separando, fra i dominanti, i puri e gli impuri. Che tale ipotesi sia molto plausibile in pratica è evidente: sarebbe tutt'al più infirmata se nella formazione dei matrimoni si tenesse conto anche della presenza del carattere recessivo tra gli ascendenti o collaterali. Invece di sei coefficienti ne avremo *tre* soli: uno per gli accoppiamenti di dominanti: $\lambda_{dd} = \lambda_{11} = \lambda_{33} = \lambda_{13}$, uno per gli accoppiamenti fra dominanti e recessivi: $\lambda_{dr} = \lambda_{12} = \lambda_{23}$, e uno per gli accoppiamenti di recessivi: $\lambda_{rr} = \lambda_{22}$. È risultato opportuno considerare, in luogo di questi, tre nuovi numeri - D, M, R – ad essi proporzionali e legati dalla relazione $9D + 6M + R = 16$ [1]. Si ha intanto: *fatta eccezione per i punti* O_1 e O_2 (totalità di omozigoti di una stessa specie) *che sono sempre punti di regime, per ogni punto* (per ogni ripartizione di popolazione) *esiste una e una sola terna di valori* D, M, R *sodisfacente le condizioni di regime.*

Ossia: conosciuta la ripartizione di regime, e sapendo che la riproduzione avviene per fenotipi, si può determinare univocamente il rapporto fra i coefficenti λ: fra le « procreatività » dei tre tipi d'accoppiamento.

In una certa zona del diagramma si hanno però soluzioni negative, inammissibili. In tali punti non può aversi regime, qualunque sia la riproduzione, purchè « per fenotipi ». Per i punti della parabola di regime panmittico conosciamo già la soluzione $D = M = R = 1$ (panmixia). Per la univocità possiamo concludere che non ve n'è nessun'altra. Se in una collettività che si riproduce « per fenotipi » è sodisfatta, in fase di regime, la condizione $z_3^2 = 4 z_1 z_2$, *si deduce* quindi che *si ha panmixia.*

La M è uguale ad 1 solo su tale parabola. Sotto è sempre minore, e decresce fino ad annullarsi sulla base del triangolo. Ciò che corrisponde ad un fatto intuitivo: sulla base mancano gli eterozigoti: se avvenissero incroci del tipo misto ($M \neq 0$) nascerebbero degli eterozigoti, e la ripartizione si sposterebbe: non si potrebbe avere regime. Al disopra della parabola, fino al limite della zona in cui il problema ammette soluzione, è $M > 1$, e crescente coll'allontanarsi dalla parabola.

Meno semplice è il comportamento di D e R. Oltre che sulla solita parabola è $D = 1$ su un'altra linea che la interseca: il diagramma viene così diviso in quattro parti, in due di tali parti, tra loro opposte, è $D > 1$, nelle altre due, pure opposte, è $D < 1$. Lo stesso comportamento qualitativo è quello di R, per cui dobbiamo però aggiungere la particolarità importante: che sian nulla sul contorno della zona in cui il problema è risolubile.

(1) D, M, R si riferiscono a coppie di Dominanti, coppie Miste, coppie di Recessivi, di qui l'adozione di tali lettere.

Digitized by Google

I risultati si possono schematicamente riassumere nel diagramma della figura qui riprodotta, ove si vede tratteggiata la zona in cui non si può avere regime di riproduzione per fenotipi, limitata dalla linea $R = 0$; la rimanente è divisa in sei parti dalle linee $M = 1$, $R = 1$, $D = 1$. Per ciascuna di esse è indicato quali dei coefficienti D, M, R siano maggiori di 1, fatto che si può leggere con locuzione intuitiva per quanto discutibile, *quali tendenze prevalgano* nella formazione degli accoppiamenti dei tre diversi

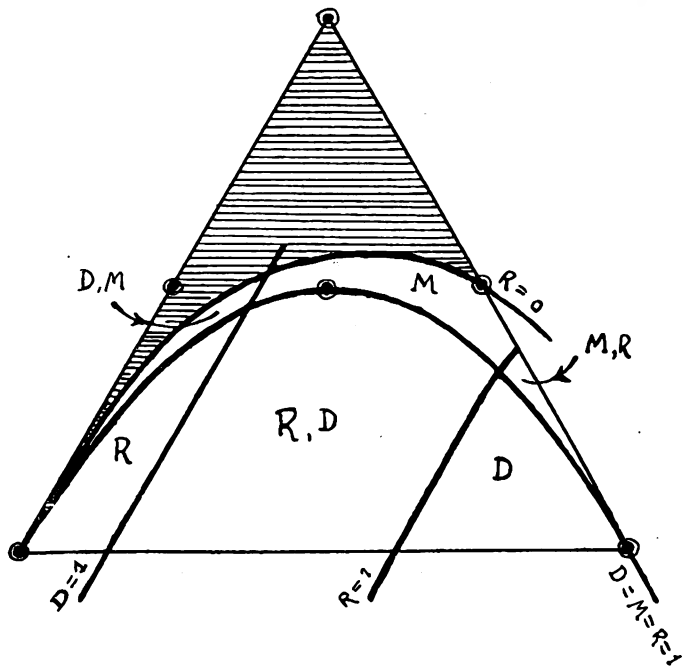


Fig. 1.

tipi. A tale frase non va dato comunque un significato più profondo di quello che vuole avere: servire d'orientamento a una comprensione sommaria dei risultati qualitativi.

Osservando poi i diagrammi completi di D, M, R, si rileverebbe che, assegnatili ad arbitrio, cioè caratterizzate le condizioni in cui avviene una certa riproduzione per fenotipi, essa ammette un unico punto di regime, oltre quelli corrispondenti alla totalità di omozigoti di una sola specie (vertici alla base); soltanto la riproduzione panmittica fa eccezione, ammettendo infinite ripartizioni di regime: quelle corrispondenti ai punti della parabola.

Quali conclusioni pratiche possiamo trarre?

Abbiamo determinato le ripartizioni che sono in regime per date condizioni in cui la riproduzione avviene, ossia le posizioni d'equilibrio del punto rappresentativo. Per dedurre qualche conclusione dobbiamo però ve-

Digitized by Google

dere se l'equilibrio è stabile o instabile, cioè se, avendo inizialmente una ripartizione non di regime, avviene, come nella riproduzione panmittica, che a tale condizione ci si avvicini asintoticamente, oppure si abbia una ripartizione tale che, suppostala verificata fin dall'inizio, si mantiene indefinitamente invariata, ma se appena una causa accidentale ce ne fa scostare un po', rotto l'equilibrio, la ripartizione si sposta sempre più, anzichè ricadere nella primitiva condizione di regime. Che possa darsi anche questo caso ci si può persuadere con un esempio semplice. Manchino gli eterozigoti; si abbiano solo due gruppi puri e non si mescolino affatto. Abbiamo regime (ossia rimangono invariate le percentuali): o se tutti gli individui appartengono allo stesso gruppo (vertici O_1 e O_2), o se i due gruppi si accrescono colla stessa rapidità. Ciò avviene se $R : D = z_1 : z_2$, chè allora i coefficenti di natalità dei due gruppi sono uguali. Ma supponiamo che tale condizione non sia inizialmente verificata: si sposteranno le percentuali fino a raggiungerla? Si trova che no. Anzi se ne allontanano sempre più, e quella delle due specie che era inizialmente in eccesso rispetto alla proporzione di regime tende progressivamente a prevalere. I punti di regime stabile per tale condizione sono soltanto quelli corrispondenti alla totalità di dominanti puri o di recessivi; l'altro è instabile. Sarebbe un grave errore concludere per ciò che una delle due specie tende ad estinguersi e scomparire. Possono accrescersi entrambe. Basta che una delle due si accresca più rapidamente che l'altra perchè il limite della sua percentuale sia 1 e dell'altra 0.

Il regime panmittico ha il carattere di equilibrio indifferente. Abbiamo infatti una successione continua di punti d'equilibrio: uno spostamento lungo la parabola non altera l'equilibrio, affatto.

Nel punto C_2 (metà dominanti impuri e metà recessivi) si ha regime se $R = D = 0$, se avvengono cioè solo matrimoni del tipo misto. Tale regime è stabile.

È un'illazione troppo arbitraria ritenere, per ciò solo, che nei punti sotto la parabola si abbia regime instabile, come abbiamo verificato per quelli della base, che per quelli sopra il regime sia stabile, come abbiamo riconosciuto per C_2, e che l'indifferenza dell'equilibrio in condizione panmittica, sulla parabola, rappresenti lo stato di transizione fra le due specie opposte di regime, stabile e instabile, che si hanno dalle due opposte parti di quella? Una considerazione che induce ad ammetterlo è il fatto, che altrimenti appare paradossale, che per $M < 1$, (sotto la parabola) la ripartizione di regime è tanto più favorevole ai dominanti quanto più forte è la procreatività dei recessivi. Se il punto di regime si ammette sia instabile, tale fatto è ben logico: significa che, se la procreatività dei recessivi è molto forte, il loro aumento può controbilanciare quello dei dominanti, anche se in forte prevalenza, e poi, se tale prevalenza s'attenua, soverchiarlo, e guadagnare progressivamente terreno.

Digitized by Google

Riconoscere matematicamente il carattere stabile o instabile del regime è possibile, ma importa un lavoro non indifferente. Per ora, e fino a prova contraria, ritengo l'ipotesi formulata sia fortemente plausibile.

Ammettendola si avrebbero le seguenti conclusioni (guardare la figura).

Se si ha una tendenza notevole (più che in panmixia) agli incroci misti ($M > 1$) si ha un'unica ripartizione in regime stabile, che differisce di poco (un lieve eccesso di eterozigoti) da una ripartizione di regime panmittico. Essa è tanto più favorevole ai dominanti puri o ai recessivi quanto più forte è la loro procreatività.

Se invece la tendenza agli incroci misti è più debole ($M < 1$) si ha uno spostamento progressivo in favore di quella delle due specie pure che si accresce più rapidamente.

In particolare, se $R = 0$, (si escludono matrimoni fra due recessivi), i possibili punti di regime stanno al limite della zona tratteggiata, e un risultato qualitativo che possiamo subito rilevare è che si hanno necessamente non più recessivi di quanti siano gli eterozigoti. La percentuale dei recessivi è poi tanto minore quanto più debole è la procreatività mista in confronto di quella dei dominanti.

*
* *

Ancora un'osservazione, relativa al caso in cui si abbia una *serie* di caratteri allelomorfi.

Tutto quanto abbiamo detto si può estendere a tale caso più generale.

Basti accennare qui al caso della panmixia, per dare la formula generale delle percentuali di regime. Si abbiano n specie omozigote

$$a_1 a_1 , a_2 a_2 , \cdots , a_n a_n$$

$\left(\text{e quindi le } \binom{n}{2} \text{ specie eterozigote } a_1 a_2 , a_1 a_3 , \cdots , a_{n-1} a_n\right)$, e indichiamo m_{ij} la percentuale iniziale della specie $a_i a_j$. La percentuale virtuale iniziale del carattere a_r sarà

$$m_r' = m_{rr} + \frac{1}{2}(m_{1r} + m_{2r} + \cdots + m_{r-1,r} + m_{r+1,r} + \cdots + m_{nr})$$

che possiamo scrivere

$$m_r' = \frac{1}{2}\left[m_{rr} + \sum_i^n m_{ir}\right].$$

Le percentuali di regime n_{ij} sono:

$$n_{ii} = m_i'^2 \qquad n_{ij} = 2 m_i' m_j' \qquad (i \neq j).$$

Digitized by Google

*
* *

Cosa possiamo attendere da simili ricerche in fatto di morale eugenica e criteri eugenici? Certo, qualche dato attendibile, e suffragato da ragionamenti meno vaghi dei soliti. Però anche più delicati: si esprimano e analizzino sempre le ipotesi con precisione, non si generalizzino precipitosamente i risultati, si valutino le conclusioni con cautela.

Quello che mi preme sia rilevato, è la vantaggiosità e la maggiore semplicità che presentano i metodi statistici sui criteri particolari che tentano dedurre le regole generali analizzando cosa debba accadere in qualche singolo caso, o seguendo il comportamento probabile della prole in una o due successive generazioni.

Biologia. — *Ricerche sui cromatofori dei cefalopodi.* Nota di E. Sereni, presentata dal Socio G. Fano.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Su alcune modificazioni del decorso della fermentazione alcoolica per effetto del campo elettromagnetico oscillante sul lievito* [1]. Nota del dott. E. Benedetti, presentata [2] dal Socio E. Giacomini.

Per rendermi più esattamente conto se l'azione del campo elettromagnetico oscillante influisse in qualche modo sulla maggiore o minore attività dei fermenti, ipotesi da me affacciata, dopo i risultati avuti coi germi vegetali trattati nel campo ad alta frequenza, iniziai una serie di ricerche sottoponendo del lievito all'azione del campo elettromagnetico oscillante, e provocando con esso la fermentazione alcoolica di una soluzione di glucosio. A confronto di questa fermentazione ponevo l'andamento di un'altra svolgentesi nel medesimo tempo, ma provocata da un lievito normale.

Quale generatore delle oscillazioni adoperai il medesimo apparecchio ampiamente descritto in una mia precedente Nota [3]; vi apportai soltanto una modificazione al circuito di utilizzazione che per le esperienze presenti

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 1° giugno 1927.

(3) E. Benedetti, *Intorno all'azione del campo elettromagnetico oscillante ad alta frequenza su alcuni germi vegetali.* « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. IV, serie 6ª, fasc. 7-8 1926.

Digitized by Google

era formato da un circuito oscillante chiuso sintonizzato col primario. Ciò feci per ottenere una maggior purezza delle oscillazioni e un minor smorzamento delle medesime, data l'abolizione della resistenza offerta dallo spazio spinterometrico.

Per ogni singola prova feci uso del lievito compresso messo in commercio dalle Distillerie Italiane, stemperato nella soluzione fosfato-magnesiaca indicata da Willstätter e Steibelt. (KH_2PO_4 gr. 1.25, $MgSO_4$ gr. 0.125, H_2O gr. 100).

Adoperai ogni volta 1.2 gr. di lievito e 20 cm.^{3} di detta soluzione.

Il palloncino di vetro contenente il lievito veniva messo pel trattamento nell'interno di un solenoide, del diametro di 12 cm. e costituito da 10 spire. La potenza impiegata al primario dell'oscillatore si aggirava intorno ai 300 Watt. Con un rapporto di mutua induzione del 20 % ottenevo nel solenoide generatore del campo oscillante una potenza di 60 Watt. L'intensità della corrente nel circuito di utilizzazione era di 3.7 Ampère. A trattamento ultimato si aggiungeva alla soluzione contenente il lievito 1 gr. di glucosio puro Kahlbaum.

L'attività del fermento si rilevava dall'andamento più o meno rapido della fermentazione, che veniva misurato col metodo volumetrico indicato dal Willstätter. A tale scopo mi servii dell'apparecchio descritto dal Rona (1). Il palloncino contenente la soluzione zuccherina fermentante è congiunto mediante tubi di vetro e giunti di gomma impregnata di paraffina con un recipiente pieno di Hg. Le tubature sono disposte in modo che il CO_2 sviluppantesi dalla fermentazione sposta dal gasometro il mercurio facendolo defluire mediante un tubo in una provetta graduata. Questo tubo di deflusso è mobile e può essere abbassato o innalzato, e ciò per mantenere il menisco del Hg nel tubo sempre alla medesima altezza col livello interno del mercurio esistente nel gasometro; condizione questa essenziale affinchè la pressione del CO_2 nell'interno dell'apparecchio sia uguale alla pressione atmosferica esterna. Per bene accertarmi di queste condizioni e per evitare possibili errori, modificai un po' l'apparecchio descritto dal Rona, applicandovi un manometro a mercurio, derivato dal tubo tra palloncino e gasometro.

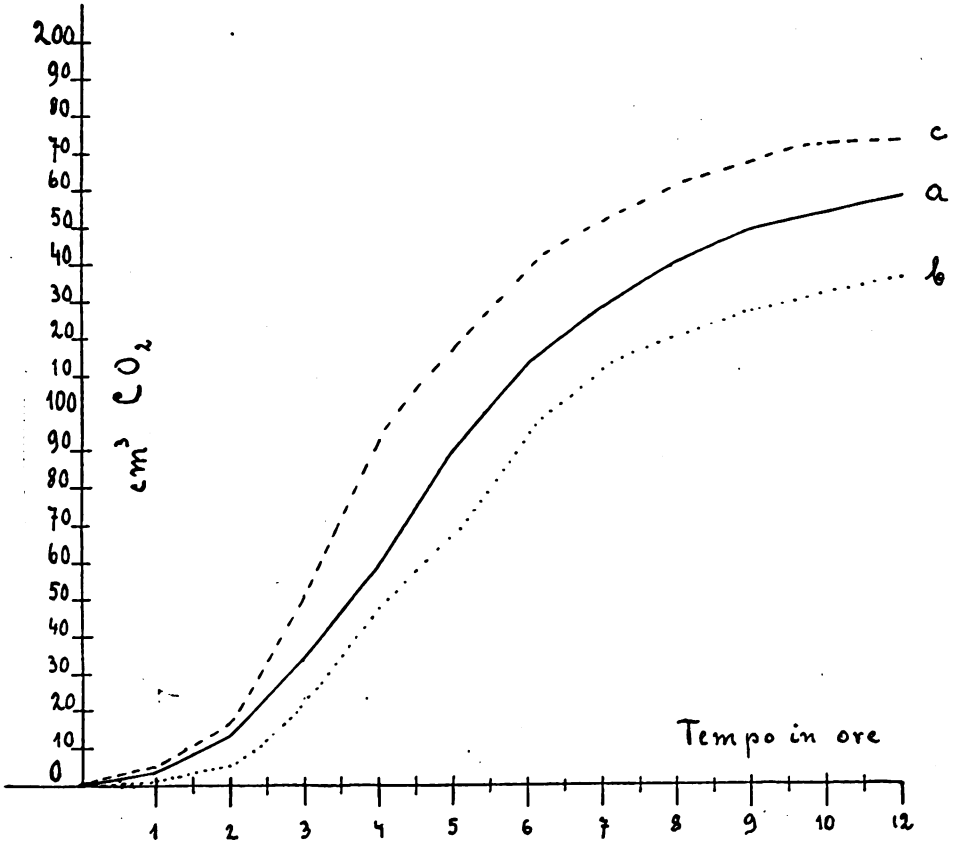
Per tutto il tempo delle esperienze erano in azione due di tali apparecchi disposti l'uno accanto all'altro. Uno era congiunto col palloncino contenente la soluzione di glucosio e il fermento trattato, l'altro con un palloncino contenente una soluzione identica, ma fatta fermentare con del lievito normale, non trattato. La lettura dei dati delle due fermentazioni si faceva contemporaneamente di ora in ora nelle prime 10 ore e a intervalli più lunghi nelle rimanenti 14. Si poneva somma cura nel mantenere sempre la pressione uguale e si registrava anche la temperatura ambiente, pur

(1) P. Rona, *Praktikum der physiologischen Chemie*, p. 186, Springer, Berlin, 1926.

Digitized by Google

essendo questo fattore trascurabile nel caso particolare, data la contemporaneità delle esperienze di controllo e delle identiche condizioni termiche in cui venivano a trovarsi tanto il saggio quanto il campione.

Accanto alla fermentazione di un essoso semplice come il glucosio potei eseguire anche delle prove sulla fermentazione del mosto da birra sterile e ciò per il cortese interessamento del dott. Isotti, direttore del laboratorio chimico della fabbrica Dreher di Trieste. In questo caso si aveva



a che fare con una fermentazione più complessa di una soluzione prevalentemente di maltosio e di destrine che richiedeva l'intervento anche di altri fermenti specifici prodotti e contenuti nel Saccharomyces oltre alla zimasi. Mi sembrava interessante indagare se anche nella fermentazione del mosto da birra col lievito trattato si manifestassero quelle modificazioni notate per la fermentazione del glucosio.

Le serie di esperienze eseguite finora sono 3, il numero di esperienze singole 74. Nella prima serie fatta col glucosio si impiegò una frequenza

Digitized by Google

della corrente oscillante di 500.000 periodi al secondo. Nella seconda serie si adoperò il mosto da birra come substrato fermentante e si usò del pari la frequenza di oscillazioni di 500.000 periodi al secondo. La terza serie venne fatta impiegando una soluzione di glucosio, ma adottando per il trattamento elettrico del lievito una frequenza di 1.200.000 periodi.

In ciascuna esperienza di ogni serie si aumentava il tempo del trattamento di 5 in 5 minuti, incominciando da un minimo di 5 minuti e giungendo fino a un massimo di 90 minuti. Infine ogni singola esperienza si ripeteva parecchie volte per bene accertarsi della costanza dei risultati.

Coi dati ricavati dalla lettura degli apparecchi misuratori si costruivano dei grafici rispecchianti sia l'andamento totale delle fermentazioni sia l'andamento parziale di ora in ora, sia infine le differenze in più o in meno totali e parziali, che si andavano delineando tra il saggio e il campione.

Riporto qui, raccolti nella tabella I, i dati che servirono a costruire le curve differenziali per le esperienze della 1ª serie. I numeri stanno ad indicare la differenza volumetrica in cm.³ di CO_2 che, in più o in meno, nell'ora corrispondente era stata prodotta dal saggio trattato rispetto al controllo.

Tabella I.

Soluzione di glucosio 5 % — f. 500.000.

Tempo di trattamento in minuti	Differenza in cm³ di CO_2 sviluppato dal saggio rispetto al campione	Tempo di fermentazione in ore														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	18	21	24
5		—	— 4	— 7	— 9	— 7	— 5	— 2	— 3	— 1	— 1	— 2	— 4	— 5	— 6	— 4
10		—	0	0	— 17	— 22	— 18	— 17	— 15	— 16	— 15	— 13	— 12	— 13	— 15	— 15
15		—	0	+ 1	+ 8	+ 4	+ 3	+ 15	+ 21	+ 21	+ 17	+ 7	+ 6	+ 3	+ 3	+ 3
20		—	— 3	+ 2	+ 2	+ 1	— 3	+ 7	+ 7	+ 6	+ 4	+ 2	0	— 1	— 3	— 3
25		—	— 5	— 8	— 10	— 4	— 5	— 4	— 5	— 4	— 6	— 3	— 3	— 3	— 3	— 3
30		—	— 8	— 10	— 12	— 12	— 18	— 17	— 21	— 22	— 22	— 21	— 22	— 21	— 18	— 18
35		—	+ 2	0	0	+ 3	+ 3	+ 7	+ 7	+ 7	+ 8	+ 8	+ 9	+ 8	+ 4	+ 3
40		—	0	+ 5	+ 6	+ 11	+ 13	+ 18	+ 23	+ 23	+ 22	+ 22	+ 22	+ 24	+ 23	+ 23
45		—	+ 1	+ 3	+ 19	+ 33	+ 28	+ 25	+ 23	+ 20	+ 18	+ 18	+ 16	+ 15	+ 14	+ 14
50		—	0	+ 4	+ 3	+ 18	+ 13	+ 11	+ 13	+ 16	+ 17	+ 22	+ 33	+ 34	+ 34	+ 35
60		—	+ 10	+ 18	+ 8	+ 8	+ 15	+ 17	+ 15	+ 12	+ 13	+ 8	+ 9	+ 11	+ 11	+ 11

Digitized by Google

Come si vede, l'attività del fermento subisce, dopo il trattamento, sempre una notevole modificazione in senso positivo o in senso negativo. Trattamenti di durata relativamente breve di 5′ e 10′ producono un abbassamento dell'attività del lievito, abbassamento che si accentua proporzionalmente al tempo del trattamento, fino a un *minimum*, oltrepassato il quale l'azione da negativa diventa positiva. Questa positività persiste ma in modo minore con un trattamento di 20′ e si trasforma in una leggera negatività con un trattamento di 25′. A 30 minuti si raggiunge la fase di massima negatività.

L'andamento della fermentazione per questo tempo di trattamento si può seguire anche meglio nel diagramma riprodotto ove essa è rappresentata dalla curva *b*. Agendo per oltre 30 minuti sul fermento l'attività di esso aumenta sempre più fino a raggiungere un *optimum* intorno ai 45′. Le massime differenze si rivelano qui tra la 4ª e 5ª ora dall'inizio della fermentazione, come risulta chiaramente sia dalla tabella I sia dalla curva *c* del diagramma.

Quello che più colpisce in queste variazioni è l'alternanza di fasi positive e negative a seconda della durata dell'influenza del campo oscillante. Di più si possono notare in queste fasi due punti critici, situati l'uno intorno al 15° minuto e l'altro intorno al 30°, in vicinanza dei quali due punti un prolungamento o un accorciamento del trattamento di pochi minuti provoca una esaltazione o una depressione notevolissima nell'attività fermentativa, mentre negli altri intervalli di tempo si rivela l'esistenza di una certa proporzionalità tra causa ed effetto, tra durata del trattamento e accelerazione o ritardo del processo fermentativo. Circa ad altre modificazioni rilevate analizzando minutamente l'andamento di tutte le curve, dirò soltanto che a determinati trattamenti fa seguito un'iniziale depressione, cui subentra poi un'attività maggiore, mentre in altri casi si nota invece un effetto opposto. Di regola le maggiori variazioni, tanto in più quanto in meno, si notano o nelle prime due ore, dall'inizio della fermentazione, o nell'intervallo tra la 4ª e 5ª ora. Con trattamenti molto prolungati il lievito cessa la sua attività molto prima del normale e in questo caso le differenze numeriche aumentano con la durata della fermentazione.

Risultati analoghi, specialmente per quanto riguarda la caratteristica di fasi di maggiore o minore attività in funzione del tempo di trattamento, si notarono pure, ma in modo meno accentuato, nella III serie di esperienze. Le fasi però appaiono spostate; mi limito qui solo ad accennare a tale fatto, perchè è mia intenzione di ritornare prossimamente su questo argomento che mi sembra presentare parecchi aspetti molto interessanti. Dirò soltanto qui che con la frequenza usata in questa serie, un trattamento inferiore per durata ai 15′ non dimostrò effetto alcuno. Alcuni dati riguardanti la III serie di esperienze sono riportati qui appresso nella tabella II.

Digitized by Google

TABELLA II.

f. 1.200.000 — Soluzione di glucosio 5 %.

Tempo di trattamento in minuti	Differenza in cm³ di CO_2 sviluppato dal saggio rispetto al campione	Tempo di fermentazione in ore									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15		—	+ 7	+ 10	+ 15	+ 16	+ 15	+ 15	+ 17	+ 17	+ 18
20		—	+ 1	+ 4	+ 6	+ 6	+ 1	— 4	— 9	— 12	— 13
25		—	— 6	— 8	— 8	— 6	— 2	— 6	— 8	— 9	— 9
30		—	+ 4	+ 5	+ 10	+ 13	+ 15	+ 16	+ 16	+ 15	+ 15
35		—	— 1	— 2	0	+ 2	+ 2	0	— 2	— 4	— 6
45		—	— 3	— 5	— 6	— 11	— 11	— 13	— 16	— 20	— 23
60		—	— 1	— 3	— 3	— 9	— 14	— 11	— 8	— 9	— 10

TABELLA III.

f. 500.000 — Mosto di birra — Dens. 12.45° Balling.

Tempo di trattamento in minuti	Differenza in cm³ di CO_2 sviluppato dal saggio rispetto al campione	Tempo di fermentazione in ore														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	18	21	24
30		— 5	— 10	— 13	— 17	— 18	— 25	— 31	— 38	— 44	— 49	— 50	— 49	— 50	— 51	— 51
20		0	+ 1	+ 1	+ 2	+ 4	+ 5	+ 9	+ 7	+ 7	+ 10	+ 12	+ 14	+ 20	+ 20	+ 22

Nelle prove eseguite col mosto da birra si notarono pure delle differenze nella velocità di fermentazione e anche, come risulta dai dati differenziali riportati nella Tab. III, l'esistenza di un punto critico intorno a un periodo di trattamento di 30′ nel quale punto si nota un rapido passaggio dall'effetto favorevole a uno sfavorevole.

Certamente i fatti finora osservati appaiono molto interessanti e degni di uno studio approfondito. A tale scopo ho già iniziato e proseguirò una serie di ricerche che forse mi permetteranno di tentare una spiegazione parziale dei fenomeni molto complessi rivelatisi in queste prime esperienze.

N. P.

Digitized by Google

INDICE DEL VOLUME V, SERIE VI. — RENDICONTI

1927

INDICE PER AUTORI

A

ABETTI G. — « Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1926 ». 618.

ID. — « Sulle relazioni fra le eruzioni solari e le tempeste magnetiche terrestri ». 721.

ALBANESE G. — « Sul teorema fondamentale della base per la totalità delle curve d'una superficie algebrica ». 332, 481.

ALOISI P. — « Determinazione approssimativa di 2V nelle sezioni sottili dei minerali ». 452, 512.

ID. — « Contributo allo studio dei pirosseni manganesiferi ». 1017.

ANDREOLI G. — « Sulla curvatura e sul parallelismo in una superficie ». 143, 274, 400, 491.

ID. — Vedi NALLI P.

ANGELI A. — « Sopra le azidi ». 732.

ID. e BIGIAVI D. — « Sopra i due p-nitroazossibenzoli ». 819.

ANTONIANI C. — « La reazione del terreno e il perfosfato ». 906.

ID. — « Il comportamento dell'arsenico di fronte al potere assorbente del terreno ». 906.

ARMELLINI G. — « Il diametro orizzontale del sole nel 1925 e nel 1926 ». 68, 133.

ID. — « Sopra l'estinzione selettiva dell'atmosfera terrestre e sulla temperatura stellare effettiva e apparente ». 323.

ARMELLINI-CONTI G. — « Sul confronto de cataloghi colorimetrici di Hagen, Sestini, Osthoff e Kruger ». 505, 670.

ASCOLI G. — « Sul problema di Dirichlet nei campi sferici e ipersferici ». 647.

B

BAGLIONI S. — « Ricerche di fisiologia umana presso la Scuola centrale di Educazione fisica ». 642.

ID. e GALAMINI A. — « Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Azione nell'accrescimento, nell' alimentazione insufficiente, nel digiuno e nella rialimentazione del ratto albino ». 136, 239.

BAGLIONI S., BRACALONI L. e GALAMINI A. — Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Variazioni della glicemia e dell'alcoolemia in seguito ad ingestione di bevande alcooliche o di saccarosio » 34.

BARBIERI U. — « Determinazione di latitudine astronomica eseguita ad Andrate nell'agosto 1926 ». 111.

ID. — « Determinazione di azimut assoluto, eseguita ad Andrate nell'agosto 1926 ». 165, 283.

ID. — « Collegamento geodetico del vertice di Andrate alla rete di 1° ordine dello stato ». 674, 790.

Digitized by Google

BARTORELLI A. — « Sopra una dimostrazione di interdipendenza fra le leggi di Curie e di Haüy ». 120.

BENEDETTI E. — « Il Telencefalo dei Tritoni. (Contributo allo studio comparativo del sistema nervoso centrale degli Anfibi) ». 52.

ID. — « Su alcune modificazioni del decorso della fermentazione alcoolica per effetto del campo elettromagnetico oscillante sul lievito ». 922, 1029.

BERGAMI G. — « Azione delle basse temperature sulla lente cristallina ». 922.

BERNSTEIN S. — « Démonstration d'une inegalité relative aux polinomes trigonométriques ». 431.

BERWALD L. — « Sui differenziali secondi covarianti. (Estratto di una lettera al prof. T. Levi-Civita) ». 655, 763.

BIGIAVI D. — « Relazioni fra nitroderivati aromatici e azossicomposti ». 348, 444.

ID. — « Azione dell'acido peracetico sopra gli acetilderivati delle ammine aromatiche ». 512.

ID. — Vedi ANGELI A.

BLASCHKE W. — « Sull'elemento lineare di Liouville ». 333, 396.

BOMPIANI E. — « Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace ». 40, 84.

ID. — « Sulla geometria dell'equazione di Laplace ». 143.

ID. — Alcune idee generali per lo studio differenziale delle varietà ». 333, 383.

BORTOLOTTI E. — « Sistemi assiali e connessioni nelle V_m ». 333, 390.

ID. — « Reti di Cebiceff e sistemi coniugati nelle V_n riemanniane ». 741.

BOSSOLASCO M. — « Sui sistemi di funzioni di Tchebycheff che sono ortogonali ». 656, 748.

BOZZA G. e DEVOTO G. — « Sul calcolo dell'affinità chimica in base alle eutropie ». 41, 180, 287.

BRACALONI L. — Vedi BAGLIONI S. e GALAMINI A.

BRUNI G. e GEIGER E. — « Nuovi derivati del caucciù ». 642, 823.

BURGATTI P. — « Sulle cause della luminosità delle stelle cadenti ». 614.

BURGERS J. M. — « Sur quelques recherches de Helmoltz et de Wien relatives à la forme des ondes se propageant à la surface de séparation de deux liquides ». 279, 333.

C

CACCIOPPOLI R. — « Sui funzionali multilineari ». 149, 254.

CAGLIOTI V. e STOLFI A. — « I solfati doppi del bismuto coi metalli alcalini. - I. Solfati di bismuto e potassio ». 896.

ID. — Vedi ZAMBONINI F.

CALAPSO R. — « Intorno a una trasformazione delle congruenze rettilinee W ». 499.

CALDONAZZO B. — « Una osservazione a proposito di moti viscosi simmetrici rispetto ad un'asse ». 152.

CAMBI L. — « Su i diazoidrati ». 641, 837.

ID. e CLERICI A. — « Sui cianuri ferroso-ferrici ». 21, 79.

ID. e SZEGÖ L. — « Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro ». 636.

ID. e ID. — « Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro. La reazione fra nitroprussiato e alcali ». 641, 737.

CAMPANILE S. — « Ricerche sulle variazioni stagionali dei composti inorganici di azoto esistenti nelle acque del lago di Castelgandolfo ». 705.

CARRARA N. — « Sopra un nuovo tipo di riflessione dei Raggi X ». 680.

CARRELLI A. — « Sul teorema delle somme di Thomas e Reiche ». 165.

ID. — « Sulla doppia rifrazione paramagnetica ». 684.

ID. — « Sull'interpretazione idrodinamica della teoria quantistica ». 990.

CARTAN E. — « Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes ». 609.

CASAZZA E. — Vedi NATTA G.

CASTELNUOVO G. (Segretario). — Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando i tre volumi delle « Ricerche di morfologia » di R. VERSARI; i « Prin-

Digitized by Google

cipi scientifici di Elettrotecnica » di G. Grassi; il « Manual of Meteorology » di Sir Napier Shaw; il quinto volume delle opere e della corrispondenza scientifica di Fiorentino Ameghino (« Paranà y Monte Hermoso », La Plata, 1916). 55.

Castelnuovo G. (Segretario). — Ricorda le singolari doti e i meriti del Socio Cerulli V. 925.

Id. — Presenta le pubblicazionti giunte in dono, segnalando gli opuscoli del Socio Castellani A., di Rondoni P.; i due « Atlas » composti sotto la direzione di Lazarev P. e il lavoro di Hermann F. 926.

Cattaneo D. — « Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina ». 524.

Id. — « Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. - II. Modificazioni della struttura ultramicroscopica del cristallino per azione di sali, alcali ed acidi ». 711.

Cavinato A. — « Sulla disidratazione dell'apofillite ». 907.

Cecconi A. — « Un teorema sul lavoro di deformazione elastica ». 150.

Charrier G. — « Composti organici del bismuto ». 889.

Cherubino S. — « Sulla integrazione delle forme differenziali lineari ». 332, 405.

Id. — « Sulle integrali superficiali delle forme differenziali quadratiche ». 499.

Cisotti U. — « Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski ». 16.

Clerici A. — Vedi Cambi L.

Colombo B. — « Sulle trasformazioni (m, n) che mutano $m + n + 2$ integrali di una equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti in integrali di un'equazione analoga ». 759.

Comel M. — « Sull'azione della concentrazione degli idrogenioni sul ricambio respiratorio dei tessuti ». 307.

Id. — « Azione del pH sugli scambi gassosi di poltiglie muscolari a costante presenza del fosfatione ». 808.

Corbino O. M. — « L'effetto Volta e il funzionamento della pila ». 21, 68.

Corbino O. M. — « Teoria elettronica della pila ». 21, 74.

Id. — « Sulla realizzazione di grandi self positive o negative per mezzo di una lampada a tre elettrodi e di circuiti induttivi ». 323.

Id. — « L'elettrolisi senza elettrodi ». 135, 377.

Cotronei G. — « Sulla sistematica biologica dei Petromizzonti ». 209.

Id. — « Nuove osservazioni sull'influenza del sistema nervoso in relazione a nutrizione con tiroide nella morfogenesi degli Anfibi Anuri ». 349.

Crudeli U. — « Su lo scostamento geodetico elementare: procedimento di estensione nella equazione di Jacobi ad una qualsiasi varietà riemanniana ». 248.

Id. — « Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto a un asse ». 431, 500.

Id. — « Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali ». 505, 783.

D

D' Ancona U. — « L'accrescimento dell'alosa nel Tevere ». 134, 214.

Id. — « Ricerche sull'ingrandimento dell'occhio dell'anguilla in rapporto alla maturità sessuale e considerazioni sul suo significato biologico ». 360.

Id. — « L'influenza della concentrazione sulla perdita in peso di giovani anguille allevate a digiuno in soluzioni di cloruro di sodio ». 633.

De Carli F. — « Borati anidri di argento, bario e zinco ». 41.

de Fazi R. — « Sulla fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio esposte all'azione dei raggi ultravioletti ». 344.

Id. — « Fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio con acqua esposta alle radiazioni di una lampada a vapori di mercurio ». 901.

de Finetti B. — « Conservazione e diffusione dei caratteri mendelliani. - Caso panmittico ». 789, 913.

Digitized by Google

De Finetti. — « Conservazione e diffusione dei caratteri mendeliani. - II. Caso generale ». 789, 1024.

Dello Jojo G. — Vedi Mazza F. P.

De Marchi L. — « L' origine delle acque termali di Montegrotto (Euganei) ». 841.

Desio A. — « Gli echinodermi miocenici di Porta Bardia e dell'oasi di Giarabùb (Marmarica). 1021.

Devoto G. — Vedi Bozza G.

Dubourdieu J. — « Sur les congruences des courbes ». 265.

Id. — « Sur les groupes d' holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions (cas d'un ds^2 einsteinien) ». 332, 409.

Id. — « Sur les groupes d' holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions (cas d'un ds^2 défini et positif) ». 332, 488.

Id. — « Sopra le coordinate cartesiane lungo una curva ». 654.

E

Eredia F. — « La variazione della velocità del vento dal suolo fino a 4000 m. secondo i sondaggi eseguiti a Vigna di Valle (Roma) ». 675.

F

Fantappiè C. — « I funzionali analitici delle funzioni di due variabili complesse ». 495.

Fermi E. — « Sul meccanismo dell'emissione nella meccanica ondulatoria ». 665, 795.

Id. e Rasetti F. — « Una misura del rapporto h/k per mezzo della dispersione anormale del Tallio ». 510.

Fernandes L. — « Ricerche sui solfosali ». 302.

Id. e Palazzo F. — « Ricerche sui solfosali. - II. Solfossipolimolibdati di ammonio e guanidina ». 307, 339.

Ferrari A. — « La struttura cristallina dell'iodio ». 452.

Finzi B. — « Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski ». 666.

Foà C. — « Il meccanismo neurochimico della inibizione vagale nel cuore di mammifero ». 850, 946.

Fontana C. — « Sulla identità di struttura cristallina dei composti Fe_3S_4 e FeS ». 511.

Id. — Vedi Levi G. R.

Franchi S. — « Sulle conclusioni di una mia Memoria ». 480.

Id. — « La " falda di ricoprimento del Monte Rosa " di Emile Argand e l'anticlinale permo-triasica Acceglio-Col Longet, nelle Alpi Cozie meridionali ». 628.

Fubini G. — « Sulla geometria di una superficie nel gruppo proiettivo e nel gruppo conforme ». 373.

G

Galamini A. — Vedi Baglioni S., Bracaloni L.

Garbasso A. (Vice-presidente). — Annuncia che è presente alla seduta il professore O. E. Hennelly, al quale porge il saluto dell'Accademia. 55.

Id. — Rivolge ai Soci il suo augurio per il nuovo anno. 55.

Id. — Annuncia la morte del Socio nazionale Cerulli V. 925.

Geiger E. — Vedi Bruni G.

Guidi C. — Presenta un suo opuscolo: « Studi sperimentali su costruzioni in cemento armato ». 55.

H

Herrera A. L. — « Nuova imitazione delle amebe in movimento ». 136, 245.

Id. — « Accrescimento e moltiplicazione delle amebe artificiali ». 248, 379.

Id. — « Note di plasmogenia. - Sull'imitazione delle amebe con sapone di resina ». 952.

Hlavatý V. — « Contact de deux courbes dans une V_n ». 332, 415.

Digitized by Google

J

Jucci C. — « Su l'eredità del tipo metabolico nei bachi da seta: le capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di Bombyx Mori ». 47.

Id. — « L'eredità materna e la paterna nelle capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di bachi da seta ». 128.

K

Krall G. — « Sulle funzioni di Green relative ai campi pluriconnessi ». 778, 967.

Id. — « Variazione infinitesima delle funzioni di Green relative a campi piani pluriconnessi ». 865.

L

Laboccetta L. — « Sulla rappresentazione analitica in forma delle grandezze espresse da funzioni diverse in dominii del piano e dello spazio assegnati ad arbitrio ». 322, 421.

Id. — « Un metodo generale per sostituire una equazione ad una disuguaglianza o ad una limitazione, e suo impiego nella geometria analitica ». 855.

Id. — « Equazioni di luoghi geometrici comprendenti un parametro al variare del quale la linea, o la superficie rappresentata passa, in modo continuo dalla forma poligonale, o poliedrica, alla forma circolare o sferica ». 865, 959.

Lacchini G. B. — « Una nuova stella variabile ». 880.

Lane E. P. — « Quadriche aventi per generatrici le tangenti asintotiche in un punto di una superficie ». 40, 100.

Levi G. R. e Reina A. — « Sulla peptizzazione dell'ossido di torio " meta " ». 116, 174.

Id. e Fontana C. — « Porpore d'oro ». 906, 996.

Levi M. G. — Presenta il suo « Trattato di istologia » e ne parla. 925.

Lo Surdo A. — « La corrente di saturazione delle valvole termoioniche ». 327.

Id. — « Sulla corrente elettrica filtrata attraverso ad una valvola termoionica saturata ». 332.

Id. — « Sulle caratteristiche dei triodi a tensioni di griglia saturanti ». 480.

Id. — « Bilancia termoionica ». 332, 813.

M

Majorana Q. — « Su di un nuovo metodo di telefonia ottica con luce ordinaria o con luce ultravioletta ». 622, 726.

Malquori G. — « I sistemi $AlCl_3$ — HCl — H_2O; KCl — HCl — H_2O e KNO_3 — H_2O a 25° ». 348.

Id. — « Il sistema $Al(NO_3)_3$ — KNO_3 — H_2O a 25° ». 348, 451.

Id. — « Il sistema $AlCl_3$ — KCl — H_2O a 25° ». 348, 510.

Id. — « Il sistema $Fe(NO_3)_3$ — $Al(NO_3)_3$ — H_2O a 25° ». 693, 801.

Id. — « Il sistema $Fe(NO_3)_3$ — KNO_3 — H_2O a 25° ». 906, 1000.

Id. — « Sugli idrati del nitrato d'alluminio. Il sistema $Al(NO_3)_3$ — H_2O ». 892.

Marchiafava E. — Presenta il volume degli « Atti del Primo Congresso internazionale della malaria », redatti dal professor Bastianelli. 55.

Masotti A. — « Azione dinamica che un liquido perfetto esercita su un solido cilindrico, di sezione qualunque, mobile in esso ». 872.

Id. — « Sui moti di un liquido perfetto che avvengono per strati piani ». 985.

Mazza F. P. e Dello Jojo G. — « Sulla dispersione rotatoria di alcuni eteri aspartici ». 186, 294.

Mazza L. — « Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo ». 117, 688.

Millosevich F. — « Le rocce a Corindone della Val Sessera (Prealpi Biellesi) ». 22.

Minetti S. — « Ancora sugli sviluppi tayloriani $\sum a_n z^n$, dove $a_n = g(n)$ con $g(n)$ trascendente intera ». 954.

Digitized by Google

MORPURGO B. — « Influenza dell'inanizione sul trapianto omoplastico ». 846.

MOUSKHELICHVILI N. — « Sur les orbites périodiques et les lignes géodésiques fermées ». 769.

ID. — « Sur les orbites périodiques et les lignes géodésiques fermées ». 499.

MUCCIOLI M. — « Sul succo astringente del frutto del " Diospyros kaki " acerbo e le sue applicazioni in Cina ed in Giappone come sostanza impregnante per la carta ed il legno ». 922.

N

NALLI P. e ANDREOLI G. — « Sull'area di una superficie, sugli integrali multipli di Stieltjes e sugli integrali multipli delle funzioni di più variabili complesse ». 963.

NASINI R. — « La questione del peso atomico dell'idrogeno 1 e di quello dell'ossigeno 16 dal punto di vista della costituzione elettronica dell'atomo e della spettrografia di massa ». 840.

ID. — Per incarico del collega LEVI M. G., presenta il primo volume dei suoi « Studi e ricerche sui combustibili » e ne parla. 925.

ID. e PORLEZZA C. — « Determinazione della concentrazione in idrogenioni attivi in acque minerali italiane ». 480, 622.

ID. — « Azioni catalitiche nelle acque minerali. Reazione della benzidina in acque minerali italiane ». 480.

NATTA G. — « Sulla struttura cristallina dei cloruri di metalli trivalenti ». 512.

ID. — « Struttura cristallina del triclomercurato di cesio ». 1003.

ID. e CASAZZA E. — « Struttura cristallina ed atomica dell'idrato ferroso ». 803.

NERI F. — « Alcune proprietà ed applicazioni delle lampade a neo ». 883.

O

ONICESCU O. — « Il comportamento asintotico e gli zeri di una classe di funzioni intere ». 149, 271.

ONICESCU O. — « Scostamento geodetico, stabilità e problema di Whittaker ». 499.

P

PACELLA G. B. — « Sulla ricerca della forma delle onde luminose dall'esame delle frangie d'ombra ». 656, 752.

PAGLIARULO M. L. — « Sulla dispersione rifrattiva e rotatoria naturale delle soluzioni acquose di aspartato monoetilico ». 439, 505.

PALAZZO L. — « Risultati di una esplorazione magnetica nei territori del Giuba e dell'Uebi Scebeli ». 845, 933.

ID. — Vedi FERNANDES L.

PANICHI U. — « Studi sui reticolati cristallini. Spazio molecolare e numero atomico ». 47, 123.

PARRAVANO N. — Commemora il Socio A. PERATONER. 55.

PASCAL M. — « Sulle curve che compaiono nello studio della corrente circuito-traslatoria ». 149, 279.

ID. — « Curve per la spinta massima (o minima ». 282, 431.

PASQUINI P. — « Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi. - I. Segmentazione atipica e successivo sviluppo delle ova di Arbacia punctulata Grey centrifugate, dopo la fecondazione ». 310, 353.

ID. — « Trapianti omeoplastici degli abbozzi oculari negli embrioni di Pleurodeles Waltli ». 367, 453.

PATERNÒ E. — A nome dell'Accademia ringrazia il Presidente per gli auguri rivolti ai Soci. 55.

PEGLION V. e SACCHETTI M. — « Intorno alla peronospera del Lillà. (Phytophthora Syringae, Klebahn) ». 696.

PERRIER C. — « Sopra due recenti Note della sig.ra Philibert ». 452.

PETRI L. — « Sul metodo di applicazione della luce di Wood in alcune ricerche di patologia vegetale ». 32.

ID. — « Sulla presenza nelle piante di una sostanza che diventa luminescente alla luce ultravioletta ». 136.

Digitized by Google

PICCARDI G. — « Numero d' ordine, peso eccedente e struttura atomica ». 116, 169.
ID. — « Isotopia, peso eccedente e struttura atomica ». 439.
ID. — Vedi ROLLA L.
PICONE M. — « Sulle funzioni metaarmoniche ». 40, 90.
ID. — « Maggiorazione delle integrali delle equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine ». 95, 138.
PIERONI A. — « Sopra alcuni derivati della Piridina ». 186, 303.
PINCHERLE S. — Illustra l'importanza del prossimo Congresso internazionale dei Matematici in Bologna. 926.
PINI E. — « Ancora sulla ricerca della funzione primitiva per le funzioni di più variabili ». 650, 656, 860.
PIROTTA P. R. — « Ecologia agraria e genetica ». 845.
POLI C. — « Sui principî della meccanica analitica ». 656.
PONTE G. — « Sulla temperatura delle colate laviche dell'Etna ». 128, 187.
PORLEZZA C. — Vedi NASINI R.
PRINCIPI P. — « I terreni miocenici tra la Valle del Lamone e quella del Bidente ». 128, 191.

Q

QUAGLIARELLO G. — « Sulla trasformazione stereo-isomera del glucosio per azione dell'insulina ». 907.

R

RAFFAELE F. — Vedi SILVESTRI F.
RASETTI F. — Vedi FERMI E.
REINA A. — « Struttura cristallina dell'idrato di calcio ». 906, 1008.
ID. — Vedi LEVI G. R.
REMOTTI E. — « Sul processo di assunzione del vitello durante lo sviluppo embrionale del pollo ». 910.
RESTAINO S. — Vedi ZAMBONINI F.
ROBERT F. — « Sui teoremi di confronto del Rayleigh ». 972.
ROLLA L. e PICCARDI G. — « Sul potenziale di elettroaffinità dell'anidride molibdica ». 480.
ID. e ID. — « Sul potenziale di ionizzazione del terbio ». 818.
ROSA D. — « Una possibile variante dell'ologenesi ». 198.
ROSATI C. — « Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica, e sulle varietà di Jacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano ». 850.
ROSSI G. — « Osservazioni sulla scintillazione delle stelle eseguite nel R. Osservatorio del Campidoglio ». 110, 161.
RUSSO A. — « Il potere germinativo delle cellule somatiche dei Metazoi e dei Metafiti e la ripresa del potere sessuale nei Gametogeni impuri in "Cryptochilum echini" Maupas, in relazione al comportamento dei nuclei, durante il ciclo di sviluppo ». 136, 235.

S

SACCHETTI M. — Vedi PEGLION V.
SAVELLI R. — « Mancata conferma delle "leggi razionali" del Giglio-Tos sull'ibridismo ». 457.
ID. — « Sul valore genetico dei prodotti di Nicotiana rustica ». 462, 518.
ID. — « Come si scinde una semimutante ». 698.
SBORGI U. — « Sul comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose ». 511.
SBRANA F. — « Sul moto sferico vorticoso di un fluido incomprimibile ». 661.
ID. — « Moti piani di un fluido incomprimibile nei quali le linee di corrente sono isotachie ». 876.
SCREMIN L. — « Variazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica. – I. Potassio e farmaci convulsivanti ». 906, 1011.
SERENI E. — « Ricerche sui cromatofori dei cefalopodi ». 1029.
SEVERI F. — « Riflessioni sull'area di una superficie curva ». 471.

Digitized by Google

SEVEPI F. — « Ancora sull'area di una superficie curva ». 475.

ID. — Presenta il secondo volume dei suoi « Elementi di geometria » e ne discorre. 926.

SILVESTRI F. (Relatore). — A nome anche del Socio RAFFAELE F., riferisce sulla Memoria di D'ANCONA U.: « Il problema dell'accrescimento dei pesci studiato sull' " Alosa finta " del Tevere », e ne propone la pubblicazione. 926.

SIRACUSANO N. — « Una notevole deduzione dalla teoria di Bohr ». 40, 114.

SOLER E. — A nome della Commissione geodetica italiana esprime il cordoglio per la morte del Socio CERULLI V. 925.

ID. — Presenta alcuni suoi opuscoli relativi a questioni di gravimetria. 926.

SOMIGLIANA C. — « Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità ». 11.

ID. — « Sulla determinazione delle costanti geoidiche mediante sole misure di gravità ». 319,

SPAMPINATO N. — « Il problema della moltiplicazione complessa per un qualsiasi corpo puro di funzioni abeliane ». 40, 105.

ID. — « Nuovi contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann ». 149, 251.

ID. — « Ulteriori contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann ». 332, 427.

STOLFI A. — Vedi CAGLIOTI V.

ID. — Vedi ZAMBONINI F.

SZEGÖ L. — Vedi CAMBI L.

T

THOMSEN G. — « Sopra la meccanica relativistica dei sistemi olonomi ». 665. 778.

ID. — « Sulla cinematica dei corpi rigidi nella relatività generale ». 783, 866.

ID. — « Sulla dinamica dei corpi rigidi nella relatività generale ». 879, 977.

ID. — « Sulla rotazione della Terra nella meccanica relativistica ». 977.

TODESCO G. — « Ricerche sulla termoelettricità accidentale del bismuto ». 339, 434.

TONELLI L. — « Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie ». 229, 313.

ID. — « Una proprietà delle funzioni integrali ». 480.

TRICOMI F. — « Limitazione delle soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali ». 40, 95.

V

VINASSA P. — « I costituenti degli involucri terrestri ed il " numero molecolare " ». 135, 229.

ID. — « Il " numero elettronico " ed i costituenti terrestri ». 845, 940.

VOLTERRA V. — « Sulle fluttuazioni biologiche ». 3.

ID. — « Leggi sulle fluttuazioni biologiche ». 10, 61.

ID. — « Sulle periodicità delle fluttuazioni biologiche ». 373, 465.

VOLTERRA D'ANCONA L. — « Ancora sulla variabilità delle Dafnie pelagiche del Lago di Nemi ». 363.

VRANCEANU G. — « Sopra la stabilità geodetica ». 107.

ID. — « Stabilità geodetica. Applicazione ai sistemi conservativi del'a meccanica ». 152, 275.

W

WEIL A. — « Sul calcolo funzionale lineare ». 773.

WEINSTEINN A. — « Sur un problème mixte pour les functions harmoniques ». 152, 259.

ID. — « Sur le théorème d'existence des jets liquides ». 157.

WEN DARWIN. — « Nuove esperienze sul comportamento ereditario delle capacità di sviluppo dell'uovo. La partogenesi in incroci tra razze uni e bivoltine di Bombyx mori ». 203.

Digitized by Google

Z

ZAMBONINI F. e CAGLIOTI V. — I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. - IX. Solfato di neodimio e di rubidio ». 630.

ID. e RESTAINO S. — I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. – VIII. Solfati doppi di cerio (ceroso) e di sodio ». 828.

ZAMBONINI F. e STOLFI A. — « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. – X. Solfati di neodimio e ammonio ». 832.

Digitized by Google

Digitized by Google

INDICE PER MATERIE

A

Aerologia. — « La variazione della velocità del vento dal suolo fino a 4000 metri secondo i sondaggi eseguiti a Vigna di Valle (Roma) ». F. Eredia. 675.

Anatomia. — « Il Telencefalo dei Tritoni. (Contributo allo studio comparativo del sistema nervoso centrale degli Anfibi) ». E. Benedetti. 52.

Areomeccanica. — « Sulle curve che compaiono nello studio della corrente circuitot-raslatoria ». M. Pascal. 149, 279.

— « Curve per la spinta massima (o minima) ». Id. 282, 431.

Astrofisica. — « Sopra l'estinzione selettiva dell'atmosfera terrestre e sulla temperatura stellare effettiva e apparente ». G. Armellini 323, 536.

— « Sulle relazioni fra le eruzioni solari e le tempeste magnetiche terrestri ». G. Abetti. 721.

Astronomia. — « Il diametro orizzontale del sole nel 1925 e nel 1926 ». G. Armellini. 68, 133.

— « Osservazioni sulla scintillazione delle stelle eseguite nel R. Osservatorio del Campidoglio ». G. Rossi. 110, 161.

— « Sulle cause della luminosità delle stelle cadenti ». P. Bubgatti. 614.

— « Attività ed altezza della cromosfera solare nel 1926 ». G. Abetti. 618.

Astronomia. — « Sul confronto dei cataloghi colorimetrici di Hagen, Sestini, Osthoff e Kruger ». G. Armellini-Conti. 505, 670,

— « Una nuova stella variabile ». G. B. Lacchini. 880.

B

Biologia. — « Su l'eredità del tipo metabolico nei bachi da seta: le capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di Bombyx Mori ».C. Jucci. 47.

— « L'eredità materna e la paterna nelle capacità di sviluppo larvale degli incroci reciproci tra due razze di bachi da seta ». Id. 128.

— « Nuove esperienze sul comportamento ereditario delle capacità di sviluppo dell'uovo. La partenogenesi in incroci tra razze uni e bivoltine di Bombyx mori ». Wen Darwin. 203.

— « L'accrescimento dell'alosa del Tevere ». U. D'Ancona. 134, 214.

— « Ricerche sull'ingrandimento dell'occhio dell'anguilla in rapporto alla maturità sessuale e considerazioni sul suo significato biologico ». Id. 360.

— « Il potere germinativo delle cellule somatiche dei Metazoi e dei Metafiti e la ripresa del potere sessuale nei Gametogeni impuri in " Cryptochilum echini " Maupas, in relazione al comportamento dei nuclei, durante il ciclo di sviluppo ». A. Russo. 136, 235.

Digitized by Google

Biologia. — « Nuova imitazione delle amebe in movimento ». A. L. Herrera. 136, 245.
— « Accrescimento e moltiplicazione delle amebe artificiali ». Id. 248, 379.
— « Note di plasmogenia. – Sull' imitazione delle amebe con sapone di resina » Id. 952.
— « Sull'azione della concentrazione degli idrogenioni sul ricambio respiratorio dei tessuti ». M. Comel. 307.
— « Azione del *p*H sugli scambi gassosi di poltiglie muscolari a costante presenza del fosfatione ». Id. 808.
— « Nuove osservazioni sull'influenza del sistema nervoso in relazione a nutrizione con tiroide nella morfogenesi degli Anfibi Anuri ». G. Cotronei. 349.
— « Ancora sulla variabilità delle Dafnie pelagiche del Lago di Nemi ». L. Volterra D'Ancona 363.
— « Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina ». D. Cattaneo. 524, 601.
— « Ricerche di ultramicroscopia sulla lente cristallina. – II. Modificazioni della stuttura ultramicroscopica del cristallino per azione di sali, alcali ed acidi ». Id. 711.
— « Ricerche sulle variazioni stagionali dei composti inorganici di azoto esistenti nelle acque del lago di Castelgandolfo » S. Campanile. 705.
— « Influenza dell' inanizione sul trapianto omoplastico ». B. Morpurgo 846.
— « Sul processo di assunzione del vitello durante lo sviluppo embrionale del pollo ». E. Remotti. 910.
— « Su alcune modificazioni del decorso della fermentazione alcoolica per effetto del campo elettromagnetico oscillante sul lievito ». E. Benedetti. 922, 1029.

Biologia matematica. — « Sulle fluttuazioni biologiche ». V. Volterra. 3.
— « Leggi sulle fluttuazioni biologiche ». Id. 10, 61.
— « Sulle periodicità delle fluttuazioni biologiche ». 373, 465.
— « Conservazione e diffusione dei caratteri mendelliani. - Caso panmittico ». B. de Finetti. 789, 913.

Biologia matematica. — « Conservazione e diffusione dei caratteri mendeliani ». - II. Caso generale ». Id. 789, 1024.

Botanica. — « Sul succo astringente del frutto del " Diospyros kaki " acerbo e le sue applicazioni in Cina ed in Giappone come sostanza impregnante per la carta ed il legno ». M. Muccioli. 922.

C

Calcolo funzionale. — « I funzionali analitici delle funzioni di due variabili complesse ». C. Fantappiè. 495.

Chimica. — « Borati anidri di argento, bario e zinco ». De F. Carli. 41.
— « Su i diazoidrati ». Cambi L. 641, 837.
— « Sui cianuri ferroso-ferrici ». Id. e A. Clerici. 21, 79.
— « Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro ». Id. e L. Szegö. 636.
— « Studi spettrografici sui cianuri complessi del ferro. La reazione fra nitroprussiato e alcali ». Id. e Id. 641, 737.
— « Sulla peptizzazione dell'ossido di torio " meta " ». G. R. Levi e A. Reina. 116, 174.
— « Porpore d'oro ». Id. e C. Fontana. 906, 996.
— « Sulla dispersione rotatoria di alcuni eteri aspartici ». F. P. Mazza e G. Dello Jojo. 186, 294.
— « Ricerche sui solfosali ». L. Fernandes. 302.
— « Ricerche sui solfosali (II). Solfossipoli molibdati di ammonio e guanidina ». Id. e F. Palazzo. 307, 339.
— « Sopra alcuni derivati della Piridina ». A. Pieroni. 186, 303.
— « Sulla fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio esposte all'azione dei raggi ultravioletti ». R. de Fazi. 344.
— « Fermentazione alcoolica di soluzioni di glucosio con acqua esposta alle radiazioni di una lampada a vapori di mercurio ». Id. 901.
— « Relazioni fra nitroderivati aromatici e azossicomposti ». D. Bigiavi. 348, 444,

Digitized by Google

Chimica. — « Azione dell'acido peracetico sopra gli acetilderivati delle ammine aromatiche ». Id. 512, 587.
— « I sistemi $AlCl_3$ — HCl — H_2O; KCl — — HCl — H_2O e KNO_3 — H_2O a 25° ». G. Malquori. 348, 526.
— « Il sistema $Al(NO_3)_3$ — KNO_3 — H_2O a 25° ». Id. 348, 451.
— « Il sistema $AlCl_3$ — KCl — H_2O a 25° ». Id. 348, 510.
— « Il sistema $Fe(NO_3)_3$ — $Al(NO_3)_3$ — — H_2O a 25° ». Id. 693, 801.
— « Sugli idrati del nitrato di alluminio ». Id. 892.
— « Il sistema $Fe(NO_3)_3$ — KNO_3 — H_2O a 25° ». Id. 906, 1000.
— « Sopra le azidi ». A. Angeli. 732.
— « Sopra i due p-nitroazossibenzoli ». Id. 819.
— « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. IX. Solfati di neodimio e di rubidio ». F. Zambonini e V. Caglioti. 630.
— « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. - VIII. Solfati doppi di cerio (ceroso) e di sodio ». Id. e S. Restaino. 828.
— « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. - X. Solfati di neodimio e ammonio ». Id. e A. Stolfi. 832.
— « Sulla struttura cristallina dei cloruri di metalli trivalenti ». G. Natta. 512, 592.
— « Struttura cristallina del triclomercurato di cesio » Id. 1003.
— « Struttura cristallina ed atomica dell'idrato ferroso ». Id. e E. Casazza. 803.
— « Sul comportamento anodico dei metalli in soluzioni non acquose ». U. Sborgi. 511, 571.
— « Sulla identità di struttura cristallina dei composti Fe_3S_4 e FeS ». C. Fontana. 511, 579.
— « La struttura cristallina dell'iodio ». A. Ferrari. 452, 582.
— « Nuovi derivati del caucciù ». G. Bruni. e E. Geiger. 642, 823.
Chimica. — « La questione del peso atomico dell'idrogeno 1 e di quello dell'ossigeno 16 dal punto di vista della costituzione elettronica dell'atomo e della spettrografia di massa ». R. Nasini. 840.
— « Composti organici del bismuto ». G. Charrier 889.
— « I solfati doppi del bismuto coi metalli alcalini. - I. solfati di bismuto e potassio » V. Caglioti e A. Stolfi. ». 896.
— « La reazione del terreno e il perfosfato ». C. Antoniani. 906.
— « Il comportamento dell'arsenico di fronte al potere assorbente del terreno ». Id. 906.
— « Sulla trasformazione stereo-isomera del glucosio per azione dell'insulina ». G. Quagliarello. 907.
— « Struttura cristallina dell'idrato di calcio ». A. Reina. 906, 1008.
Chimica-Fisica. — « Numero d'ordine, peso eccedente e struttura atomica ». G. Piccardi. 116, 169.
— « Sul calcolo dell'affinità chimica in base alle entropie ». G. Bozza e G. Devoto. 41, 180, 287.
— « Isotopia, peso eccedente e struttura atomica ». Id. 439.
— « Sul potenziale di elettroaffinità dell'anidride molibdica ». L. Rolla e G. Piccardi. 480, 546.
— « Sul potenziale di ionizzazione del terbio ». Id. Id. 818.
— « Determinazione della concentrazione in idrogenioni attivi in acque minerali italiane ». R. Nasini e C. Porlezza. 480, 622.
— « Azioni catalitiche nelle acque minerali. Reazione della benzidina in acque minerali italiane ». Id. 480.
Commissioni. — 718.
Comunicazioni varie. — 55, 223, 368, 926.
Concorsi a premi. — 223, 367, 526.
Cristallografia. — « Studi sui reticolati cristallini. Spazio molecolare e numero atomico ». U. Panichi. 47, 123.

Digitized by Google

E

Ecologia. — « Ecologia agraria e genetica ». P. R. Pirotta. 845.

Elettrochimica. — « Sui prodotti che si formano durante il funzionamento dell'accumulatore a piombo ». L. Mazza. 117, 688.

Embriologia sperimentale. — « Ricerche di embriologia sperimentale sugli Echinodermi. - I. Segmentazione atipica e successivo sviluppo delle ova di Arbacia punctulata Grey centrifugate, dopo la fecondazione ». P. Pasquini. 310, 353.

— « Trapianti omeoplastici degli abbozzi oculari negli embrioni di Pleurodeles Waltli ». Id. 367, 453.

Errata-corrige. — 931.

F

Farmacologia. — « Variazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica. - I. Potassio e farmaci convulsivanti ». L. Scremin. 906, 1011.

Fisica. — « L'effetto Volta e il funzionamento della pila ». O. M. Corbino. 21, 68.

— « Teoria elettronica della pila ». Id. 21,74.

— « Sulla realizzazione di grandi self positive o negative per mezzo di una lampada a tre elettrodi e di circuiti induttivi ». Id. 323.

— « L'elettrolisi senza elettrodi ». Id. 135, 377.

— « Sul teorema delle somme di Thomas e Reiche ». A. Carrelli. 165.

— « Sulla doppia rifrazione paramagnetica ». Id. 684.

— « La corrente di saturazione delle valvole termoioniche ». A. Lo Surdo. 327.

— « Sulla corrente elettrica filtrata attraverso ad una valvola termoionica saturata ». Id. 332, 541.

— « Bilancia termoionica ». 332, 813.

— « Sulle caratteristiche dei triodi a tensioni di griglia saturanti ». Id. 480.

Fisica. — « Ricerche sulla termoelettricità del bismuto ». G. Todesco. 339, 434.

— « Sulla dispersione ritrattiva e rotatoria naturale delle soluzioni acquose di aspartato monoetilico ». M. L. Pagliarulo. 439, 505.

— « Sopra un nuovo tipo di riflessione dei Raggi X ». N. Carrara. 680.

— « Su di un nuovo metodo di telefonia ottica con luce ordinaria o con luce ultravioletta ». Q. Majorana. 622, 726.

— « Sul meccanismo dell'emissione nella meccanica ondulatoria ». Fermi E. 665, 795.

— « Una misura del rapporto h/k per mezzo della dispersione anormale del Tallio ». Id. e F. Rasetti. 510.

— « Alcune proprietà ed applicazioni nelle lampade a neo ». F. Neri. 883,

— « Una notevole deduzione della teoria di Bohr ». N. Siracusano. 40, 114.

Fisiologia. — « Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Variazioni della glicemia e dell'alcoolemia in seguito ad ingestione di bevande alcooliche o di saccarosio ». S. Baglioni, L. Bracaloni e A. Galamini. 34.

— « Ricerche sull'azione fisiologica dell'alcool. Azione nell'accrescimento, nell'alimentazione insufficiente, nel digiuno e nella rialimentazione del ratto albino ». S. Baglioni e A. Galamini. 136, 239.

— « Ricerche di fisiologia umana presso la Scuola centrale di Educazione fisica ». S. Baglioni. 642.

— « L'influenza della concentrazione sulla perdita in peso di giovani anguille allevate a digiuno in soluzioni di cloruro di sodio ». U. D'Ancona. 693.

— « Il meccanismo neurochimico della inibizione vagale nel cuore di mammifero ». C. Foà. 850, 946.

— « Azione delle basse temperature sulla lente cristallina ». G. Bergami. 922.

Fisiologia vegetale. — « Sulla presenza nelle piante di una soluzione che diventa luminescente alla luce ultravioletta ». L. Petri. 136.

Digitized by Google

G

Genetica. — « Mancata conferma delle " leggi razionali " del Giglio-Tos sull' ibridismo ». R. Savelli. 457.
— « Sul valore genetico dei prodotti di Nicotiana rustica ». Id. 462, 518.
— « Come si scinde una semimutante ». Id. 698.
Geochimica. — « I costituenti degli involucri terrestri ed il " numero molecolare " ». P. Vinassa. 135, 229.
Geodesia. — « Determinazione di latitudine astronomica eseguita ad Andrate nell'agosto 1926 ». U. Barbieri. 111.
— « Determinazione di azimut assoluto, eseguita ad Andrate nell' agosto 1926 ». Id. 165, 283.
— « Collegamento geodetico del vertice di Andrate alla rete di 1° ordine dello Stato ». Id. 674, 790.
— « Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes ». E. Cartan. 609.
Geofisica. — « Sulle relazioni che esistono fra le costanti geodetiche ed i valori della gravità ». C. Somigliana. 11.
— « Sulla determinazione delle costanti geoidiche mediante sole misure di gravità ». Id. 319.
— « Risultati di una esplorazione magnetica nei territori del Giuba e dell'Uebi Scebeli ». L. Palazzo. 845, 933.
Geometria. — « Quadriche aventi per generatrici le tangenti asintotiche in una superficie ». E. P. Lane. 40, 100.
— « Sulla geometria di una superficie nel gruppo proiettivo e nel gruppo conforme ». G. Fubini. 373.
— « Alcune idee generali per lo studio differenziale della varietà ». E. Bompiani. 333, 383.
— « Sistema assiali e connessioni nelle V_m ». E. Bartolotti. 333, 390.
— « Sull' elemento lineare di Liouville ». W. Blaschke. 333, 396.
— « Intorno a una trasformazione delle congruenze rettilinee W ». R. Calapso. 499, 549.
Geologia. — « I terreni miocenici tra la Valle del Lemone e quella del Bidente ». P. Principi 128,. 191.
— « Sulle conclusioni di una mia Memoria ». S. Franchi. 480, 548.
— « La " falda di ricoprimento del Monte Rosa " di Emile Argand e l'anticlinale permo-triasica Acceglio-Col Longet, nelle Alpi Cozie meridionali ». Id. 628.
— « Il " numero elettronico " ed i costituenti terrestri ». P. Vinassa. 845, 940.
— « Gli echinodermi miocenici di Porta Bardia e dell'oasi di Giarabùb (Marmarica) ». A. Desio. 1021.
— « Contributo allo studio dei pirosseni manganesiferi ». Aloisi P. 1017.

I

Idrologia. — « L' origine delle acque termali di Montegrotto (Euganei) ». L. De Marchi. 841.
Idromeccanica. — « Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski ». U. Cisotti. 16.
— « Una osservazione a proposito di moti viscosi simmetrici rispetto ad un'asse ». B. Caldonazzo. 152.
— « Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto a un asse ». U. Crudeli. 431, 500.
— « Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali ». Id. 505, 783.
— « Sur le théorème de Kutta-Joukowski ». A. Rosenblatt. 566.
— « Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski ». B. Finzi. 666.
— « Azione dinamica che un liquido perfetto esercita su un solido cilindrico, di sezione qualunque, mobile in esso ». A. Masotti. 872.
— « Sui moti di un liquido perfetto che avvengono per strati piani ». Id. 985.
— « Moti piani di un fluido incomprimibile nei quali le linee di corrente sono isotachie ». F. Sbrana. 876.

Digitized by Google

M

Matematica. — « Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace ». E. Bompiani. 40, 84.
— « Sulla geometria dell'equazione di Laplace ». Id. 143.
— « Sulle funzioni metaarmoniche ». M. Picone 40, 90.
— « Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellitico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine ». Id. 95, 138.
— Limitazione delle soluzioni di certe equazioni alle derivate parziali ». F. Tricomi 40, 95.
— « Il problema della moltiplicazione complessa per un qualsiasi corpo puro di funzioni abeliane ». Spampinato. N. 40, 105.
— « Nuovi contributi alla teoria generale delle matrici di Riemann ». Id. 149, 251.
— « Ulteriori contributi alla teoria generale delle metrici di Riemann ». Id. 332, 427.
— « Sopra la stabilità geodetica ». G. Vranceanu 107.
— « Su lo scostamento geodetico elementare: procedimento di estensione nella equazione di Jacobi ad una qualsiasi varietà riemanniana ». U. Crudeli. 248.
— « Sui funzionali multilineari ». R. Cacciopoli. 149, 254,
— « Sur un problème mixte pour les functions harmoniques ». A. Weinsteinn. 152, 259.
— « Sur les congruences des courbes ». J. Dubourdieu. 265.
— « Sur les groupes d'holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions (cas d'un ds^2 einsteinien) ». Id. 332, 409.
— « Sur les groupes d'holonomie des espaces de Riemann à 4 dimensions (cas d'un ds^2 défini et positif). Id. 332, 488.
— « Sopra le coordinate cartesiane lungo un curva ». Id. 654.

Matematica. — « Il comportamento asintotico e gli zeri di una classe di funzioni intere ». O. Onicescu 149, 271.
— « Scostamento geodetico, stabilità e problema di Whittaker ». Id. 499, 561.
— « Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie ». L. Tonelli 229, 313.
— « Una proprietà delle funzioni integrabili ». Id. 480, 533.
— « Sulla curvatura e sul parallelismo in una superficie ». G. Andreoli. 149, 274, 400, 491.
— « Sulla integrazione delle forme differenziali lineari ». S. Cherubino. 332, 405.
— « Sulle integrali superficiali delle forme differenziali quadratiche ». Id 499, 554.
— « Contact de deux courbes dans une V_n ». V. Hlavatý. 332, 415.
— « Sulla rappresentazione analitica in forma finita delle grandezze espresse da funzioni diverse in dominii del piano e dello spazio assegnati ad arbitrio ». L. Laboccetta. 332, 421.
— « Equazione di luoghi geometrici comprendenti un parametro al variare del quale la linea, o la superficie rappresentata passa, in modo continuo dalla forma poligonale, o poliedrica, alla forma circolare o sferica ». Id. 865, 959.
— « Un metodo generale per sostituire una equazione ad una diseguaglianza o ad una limitazione, e suo impiego nella geometria analitica ». Id. 855.
— « Riflessioni sull'area di una superficie curva ». F. Severi. 471.
— « Ancora sull'area di una superficie curva ». Id. 475.
— « Sul teorema fondamentale della base per la totalità delle curve d' una superficie algebrica ». G. Albanese. 332, 481.
— « Démostration nouvelle d'une inegalité relative aux polinomes trigonométriques ». S. Bernstein. 431, 558.
— « Sul problema di Dirichlet nei campi sferici e ipersferici ». G. Ascoli. 647.
— « Sulla ricerca della funzione primitiva per le funzioni di più variabili. ». E. Pini. 650, 656, 860.

Digitized by Google

Matematica. — « Reti di Cebiceff e sistemi coniugati nelle V_n riemanniane ». E. Bartolotti. 741.
— « Sui sistemi di funzioni di Tchebycheff che sono ortogonali ». M. Bossolasco. 656, 748.
— Sulla ricerca della forma delle onde luminose dall'esame delle frangie d'ombra ». G. B. Pacella. 656, 752.
— « Sulle trasformazioni (m, n) che mutano $m + n + 2$ integrali di una equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti in integrali di un'equazione analoga ».B. Colombo 759.
— « Sui differenziali secondi covarianti ». L. Berwald. 763.
— « Sur les orbites périodiques et les lignes géodésiques fermées ». N. Mouskhelichvili. 499, 769.
— « Sul calcolo funzionale lineare ». A. Weil. 773.
— « Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica, e sulle varietà di Jacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliano ». C. Rosati. 850.
— « Sui teoremi di confronto del Rayleigh ». Robles F. 972.
— « Sull' area di una superficie, sugli integrali multipli di Stieltjes e sugli integrali multipli delle funzioni di più variabili complesse P. Nalli e G. Andreoli 963.
— « Ancora sugli sviluppi tayloriani $\sum a_n z^n$ dove $a^n = g(n)$ con $g(n)$ trascendente intera ». S. Minetti. 954.
— « Sulle funzioni di Green relative a campi pluriconnessi ». G. Krall. 778, 967.
— « Variazione infinitesima delle funzioni di Green relative a campi piani pluriconnessi ». Id. 865.
— « Sull'interpretazione idrodinamica della teoria quantistica ». Id. 990.
Meccanica. — « Un teorema sul lavoro di deformazione elastica ». A. Cecconi. 150.
— « Sur le théorème d'existence des jets liquides ». A. Weinsteinn. 157.
Matematica. — « Stabilità geodetica. Applicazione ai sistemi conservativi della meccanica ». G. Vranceanu. 152, 275.
— « Sur quelques recherches de Helmoltz et de Wien relatives à la forme des ondes se propageant à la surface de séparation de deux liquides ». J. M. Burgers 279, 333.
— « Sui principi della meccanica analitica ». C. Poli. 656.
— « Sul moto sferico vorticoso di un fluido incomprimibile ». F. Sbrana. 661.
— « Sopra la meccanica relativistica dei sistemi olonomi ». G. Thomsen. 665, 778.
— « Sulla cinematica dei corpi rigidi nella relatività generale ». Id. 783, 866.
— « Sulla dinamica dei corpi rigidi nella relatività generale ». Id. 879, 977.
— « Sulla rotazione della terra nella meccanica relativistica ». Id. 977.
Mineralogia. — « Sopra una dimostrazione di interdipendenza fra le leggi di Curie e di Haüy ». A. Bartorelli. 120.
— « Determinazione approssimativa di 2 V nelle sezioni sottili dei minerali ». P. Aloisi. 452, 512.
— Sulla disidratazione dell'apofillite ». A. Cavinato 907,

N

Necrologie. — Annuncio della morte del Socio Nazionale V. Cerulli. 925; Suo necrologio. 925.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia. — 57, 203, 369, 527, 718, 927.

Ottica cristallografica. — « Sopra due recenti Note della sig. Philibert ». C. Perrier. 452, 598.

P

Patologia vegetale. — « Sul metodo di applicazione della luce di Wood in alcune ricerche di patologia vegetale ». L. Petri. 32.

Digitized by Google

Patologia vegetale. — « Intorno alla peronospera del Lillà - (Phytophthora Syringae, Klebahn) ». V. Peglion e M. Sacchetti. 696.

Personale Accademico. — 55, 221, 525, 717, 925.

Petrografia. — Le rocce a Corindone della Val Sessera (Prealpi Biellesi) ». F. Millosevich. 22.

Presentazione di libri. — 55, 221, 367, 525, 717, 925.

Presentazione di memorie, relazioni. — 222.

Presentazione di plichi suggellati. — 222, 526, 718.

R

Relazioni di Commissioni. — 367, 526, 926.

V

Vulcanologia. — Sulla temperatura delle colate laviche dell'Etna ». G. Ponte. 128, 187.

Z

Zoologia. — « Una possibile variante dell'ologenesi ». D. Rosa. 198.

— « Sulla sistematica biologica dei Petromizonti ». G. Cotronei. 209.

— « Ricerche sui cromatofori dei cefalopodi ». E. Sereni. 1029.

Digitized by Google

PRINCIPALI PUBBLICAZIONI
DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomi XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74). — Vol. II. (1874-75). — Vol. III. (1875-76). — Parte 1ª Transunti. — Parte 2ª Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. — Parte 3ª Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. — Vol. IV, V, VI, VII, VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-VII.
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-XIV (1892-1924).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XXXIII. (1892-1924).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-XII, Vol. XIII (parte 1ª). Vol. XIV-XVII. (1892-1924).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-XXI. (1904-1924).

Serie 6ª — Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I.-VI. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I-II. (1925-1927).
Rendiconti della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I-III. (1925-1927).
Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Vol. I. (1925-1927).
Notizie degli Scavi di antichità. Vol. I-III. (1925-1927).

PUBBLICAZIONI VARIE

Rendiconti Adunanze Solenni. Vol. I-III. (1892-1927.
Atti delle Assemblee Costituzion. Ital. 13 Volumi.
» » » » » 3 Bollettini.
L'Italia Agricola e il suo avvenire. Fasc. 1°-2°.
Tabularum phytosophycarum. Prima Pars.
Cinquanta anni di Storia Italiana. Vol. 1°-3°.
Opere matematiche di E. Betti. Tomi 1°-2°.
Comitato scientifico per l'alimentazione. Bollettino 1°-12°.
Annuario 1882-1927.
Monumenti Antichi. Vol. I-XXXI.
Papiri Greco-Egizi. Vol. I-IV.

Breve storia dell'Accademia.
Forma Urbis Romae.
Codice Atlantico di Leonardo da Vinci.
Elenco degli Istituti corrispondenti con l'Accademia. (1908).
Indice degli Atti Accademici (alfabetico per nomi autori) dall'inizio al 1910.
Indice degli Atti Accademici (alfabetico per nomi autori) dal 1911 al 1927: in preparazione.
Indice delle Notizie degli Scavi, dall'inizio al 1927: in preparazione.

PUBBLICAZIONI DELL'ANNO 1927 (V)
SERIE 6ª

Rendiconti Scienze fisiche, ecc. Vol. V (1° semestre 1927) in fascicoli bimensili	L. 54 —
» » » » Vol. VI (2° » 1927) » »	» 54 —
Memorie » » » Vol. II (continuazione) in fascicoli progressivi	prezzi vari
Rendiconti Scienze morali, ecc. Vol. II, in fascicoli trimestrali	L. 54 —
Memorie » » » Vol. I (continuazione) in fascicoli progressivi	prezzi vari
Notizie degli Scavi, Vol. III (52° dall'inizio) in fascicoli trimestrali	L. 120 —
Rendiconto adunanza solenne, Vol. III, fascicolo 13	L. 8 —
Annuario	» 4 —
Monumenti antichi, Vol. XXX, ecc.	prezzi vari

N. B. - Le pubblicazioni dell'Accademia sono in vendita presso la **LIBRERIA DI SCIENZE E LETTERE del Dott. Giovanni Bardi, Piazza Madama, 19-20, Roma (111).** I prezzi sono franco Roma. È concesso uno sconto ai Rivenditori.

Nelle richieste indicare sempre: la pubblicazione, la serie, il volume e il fascicolo. Le richieste precise e scritte in italiano o in francese potranno essere esaurite più sollecitamente delle altre.

Digitized by Google

... l'Accademia. Direttore responsabile.

RENDICONTI - Giugno 1927.

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

Fascicolo del 19 giugno 1927 (Anno V)

INDICE

MEMORIE E NOTE DI SOCI

PALAZZO L. – Risultati di una esplorazione magnetica nei territori del Giuba e e dell'Uebi Scebeli . . . . . Pag. 933
VINASSA P. – Il «numero elettronico» ed i costituenti terrestri 940
FOÀ C. – Il meccanismo neurochimico della inibizione vagale nel cuore di mammifero 946
HERRERA L. A. – Note di plasmogenia. - Sull'imitazione delle amebe con sapone di resina 952

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

MINETTI S. – Ancora sugli sviluppi tayloriani $\sum a_n z^n$, dove $a_n = g(n)$ con $g(n)$ trascendente intera (pres. dal Socio *S. Pincherle*) 954
LABOCCETTA L. – Equazioni di luoghi geometrici comprendenti un parametro al variare del quale la linea, o la superficie rappresentata passa, in modo continuo dalla forma poligonale, o poliedrica, alla forma circolare o sferica (pres. dal Corrisp. *G. A. Crocco*) 959
NALLI P. e ANDREOLI G. – Sull'area di una superficie, sugli integrali multipli di Stieltjes e sugli integrali multipli delle funzioni di più variabili complesse (presentata dal Corrisp. *L. Tonelli*) 963
KRALL G. – Sulle funzioni di Green relative a campi pluriconnessi (pres. dal Socio *T. Levi-Civita*) 967
ROBLES F. – Sui teoremi di confronto del Rayleigh (pres. *Id.*) 972
THOMSEN G. – Sulla rotazione della Terra nella meccanica relativistica (pres. *Id.*) . 977
ID. – Sulla dinamica dei corpi rigidi nella relatività generale (pres. *Id.*) . . . . »
MASOTTI A. – Sui moti di un liquido perfetto che avvengono per strati piani (pres. dal Corrisp. *U. Cisotti*) 985
CARRELLI A. – Sull'interpretazione idrodinamica della teoria quantistica (pres. dal Socio *M. Cantone*) 990
LEVI G. R. e FONTANA C. – Porpore d'oro (pres. dal Socio *G. Bruni*) 996
MALQUORI G. – Il sistema $Fe(NO_3)_3 - KNO_3 - H_2O$ a 25° (pres. dal Socio *N. Parravano*) 1000
NATTA G. – Struttura cristallina del triclomercurato di cesio (pres. dal Socio *G. Bruni*) 1003
REJNA A. – Struttura cristallina dell'idrato di calcio (pres. *Id.*) 1008
SCREMIN L. – Variazioni nell'equilibrio ionico come fattori dell'azione farmacologica. – I. Potassio e farmaci convulsivanti (pres. dal Socio *L. Sabbatani*) . . 1011
ALOISI P. – Contributo allo studio dei pirosseni manganesiferi (pres. dal Corrispondente *G. D'Achiardi*) 1017
DESIO A. – Gli echinodermi miocenici di Porta Bardia e dell'oasi di Giarabùb (Marmarica) (pres. dal Socio *G. Dainelli*) 1021
DE FINETTI B. – Conservazione e diffusione dei caratteri mendeliani. - II. Caso generale (pres. dal Corrisp. *C. Foà*) 1024
SERENI E. – Ricerche sui cromatofori dei cefalopodi (pres. dal Socio *G. Fano*) . . 1029
BENEDETTI E. – Su alcune modificazioni del decorso della fermentazione alcoolica per effetto del campo elettromagnetico oscillante sul lievito (pres. dal Socio *E. Giacomini*) . . . . . »

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MIAMI
3 5051 10736 7619

JUL 23 1965

Digitized by Google

FLARE
35051107367619